

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Nico Schaffrath

nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt

mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Der ideale Schwingkreis	3
2.2 Der reale Schwingkreis	3
2.2.1 Der Schwingfall	5
2.2.2 Der Kriechfall	6
2.2.3 Der aperiodische Grenzfall	6
2.3 Erzwungene Schwingungen	7
2.4 Ermittlung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen	9
3 Durchführung	9
3.1 Untersuchung der Amplitude und Berechnung des Dämpfungswiderstandes	9
3.1.1 Bestimmung des Widerstands R_{ap}	10
3.2 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	11
3.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	11
4 Auswertung	12
4.1 Dämpfung des elektrischen Schwingkreises	12
4.2 Aperiodischer Grenzfall	15
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	16
4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung	19
5 Diskussion	21
6 Anhang	22
Literatur	24

1 Ziel

In diesem Versuch soll die Zeitabhängigkeit der Amplitude eines gedämpften Schwingkreises untersucht werden und daraus der Dämpfungswiderstand bestimmt werden. Weiterhin soll der Dämpfungswiderstand R_{ap} bestimmt werden, bei dem der aperiodische Grenzfall vorliegt. Zuletzt soll die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung, ebenso wie die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen der erzeugenden Spannung und der Kondensatorspannung U_C bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Der ideale Schwingkreis

Ein idealer Schwingkreis setzt sich aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L zusammen. Unter der Voraussetzung, dass diesem einmalig Energie hinzugeführt wurde, bleibt diese im System erhalten. Hierbei kommt es zwischen dem Kondensator und der Spule zu einem periodischen Austausch der Energie. Ist der Kondensator geladen, bildet sich ein elektrisches Feld aus, in dem die Energie steckt. Nimmt nun das elektrische Feld ab, indem sich die Ladungen durch den Draht und damit auch durch die Spule bewegen, baut sich in dieser ein magnetisches Feld auf. Wenn sich nun wiederum das magnetische Feld abbaut, baut sich das elektrische Feld auf. Ab diesem Punkt wiederholt sich der Vorgang.

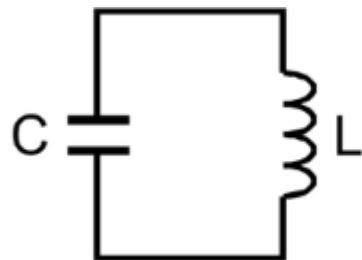


Abbildung 1: Schaltskizze eines ungedämpften Schwingkreises [2]

2.2 Der reale Schwingkreis

Der Unterschied zwischen idealem und realem Schwingkreis liegt darin, dass bei einem realen Schwingkreis ein ohmscher Widerstand eingebaut ist. Somit verliert der Schwingkreis über jede Periode hinweg Energie in Form von Joulscher Wärme. Diese Schaltung wird als gedämpfter Schwingkreis bezeichnet.

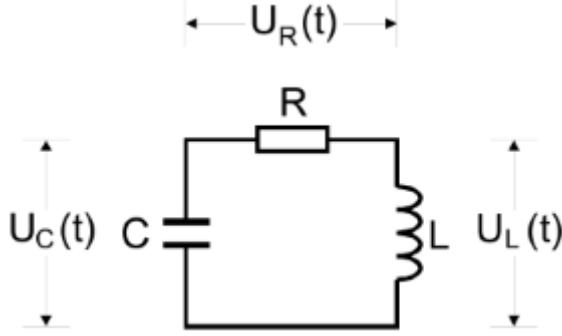


Abbildung 2: Schaltkizze eines gedämpften Schwingkreises [2]

Wie der Abbildung entnommen werden kann, bildet der RCL-Schwingkreis eine Masche. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche gleich null. Somit ergibt sich für den RCL-Kreis die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Dabei gelten für die Spannungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ U_L(t) &= L \frac{dI}{dt}, \end{aligned}$$

wobei für die Stromstärke

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2)$$

gelten soll. Mithilfe dieser Zusammenhänge ergibt sich aus 1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{RC}I(t) = 0, \quad (3)$$

welche sich mit Hilfe des Ansatzes

$$I(t) = U e^{i\omega t} \quad (4)$$

lösen lässt. Durch Einsetzen des Ansatzes ergibt sich schließlich die charakteristische Gleichung

$$-w^2 + i\frac{R}{L}w + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5)$$

Mit den beiden Kreisfrequenzen w_1 und w_2

$$w_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6)$$

kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = U_1 e^{iw_1 t} + U_2 e^{iw_2 t}, \quad (7)$$

wobei U_1 und U_2 komplexe Koeffizienten darstellen, bestimmt werden. Wird nun die Darstellung

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{R}{4\pi L} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

verwendet, lässt sich 7 zu

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i2\pi\nu t} + U_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (9)$$

umschreiben. Dabei kann zwischen drei Fällen unterschieden werden, die nun vorgestellt werden sollen.

2.2.1 Der Schwingfall

Der erste Fall tritt dann ein, wenn $1/LC > R^2/4L^2$ gilt, was bedeutet, dass $\nu_{1,2}$ zu imaginären Größen werden. Damit eine reelle Lösung zustande kommt, muss zwischen U_1 und U_2 notwendigerweise die Beziehung $U_1 = \bar{U}_2$ gelten. Folglich lassen sie sich mithilfe der Euler-Formel in die Form

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} A_0 e^{i\eta} \\ U_2 &= \frac{1}{2} A_0 e^{-i\eta} \end{aligned}$$

bringen. Somit kann die Gleichung 9 in

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos 2\pi\nu t + \eta \quad (10)$$

umgeformt werden. In diesem Fall liegt also eine gedämpfte harmonische Schwingung vor, dessen Amplitude mit fortlaufender Zeit exponentiell abnimmt. Die Schwingungsdauer kann mit Hilfe des Zusammenhangs $T = 1/\nu$ ermittelt werden. Für die allgemeine gedämpfte Schwingung ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (11)$$

wobei zusätzlich die Abnahmgeschwindigkeit der Amplitude durch den Wert

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (12)$$

beschrieben werden kann, welcher angibt, wann die Amplitude sich um den Faktor e verkleinert hat.

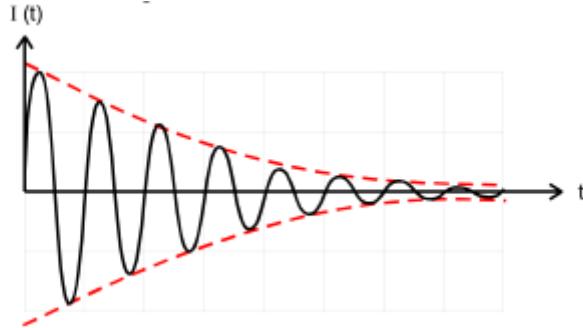


Abbildung 3: Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung [2]

2.2.2 Der Kriechfall

Der zweite Fall tritt ein, falls $1/LC < R^2/4L^2$ gilt, was dazu führt, dass selbst eine imaginäre Zahl darstellt. Damit enthält Gleichung 9 lediglich reelle Exponentialfunktionen, was bedeutet, dass keine Schwingung ausgeführt wird, sondern die Amplitude - abhängig von den Werten A_1 und A_2 - entweder direkt und monoton gegen null geht oder zuerst ein Maximum erreicht (die sogenannte Überschwingung) und dann gegen null strebt. Diese Verläufe sind in Abbildung 4 dargestellt.

2.2.3 Der aperiodische Grenzfall

Der dritte und letzte Fall tritt ein, wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2} \quad (13)$$

gilt, was dazu führt, dass ν selbst null ergibt. Aus der Bedingung und Gleichung 9 ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}$$

wobei angemerkt werden soll, dass hierbei keine Überschwingung auftreten kann und das die Stromstärke hierbei noch schneller als beim Kriechfall gegen null strebt (siehe Abbildung 4).

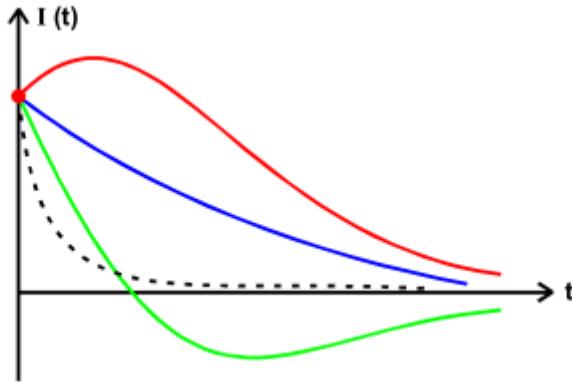


Abbildung 4: Darstellung des Kriechfalls und des aperiodischen Grenzfalls (gestrichelte Kurve) [2]

2.3 Erzwungene Schwingungen

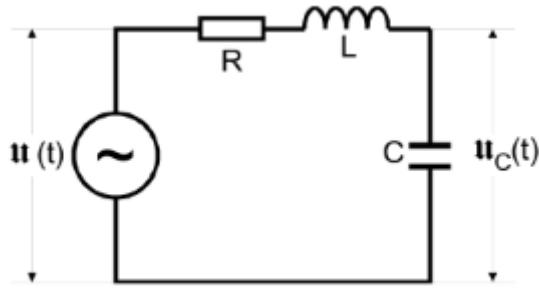


Abbildung 5: Schaltskizze eines erzwungenen RLC-Schwingkreises [2]

Durch den Einbau einer Wechselstromquelle können am RCL-Kreis auch erzwungene Schwingungen betrachtet werden. Der schematische Aufbau für die Schaltung lässt sich der Abbildung 5 entnehmen. Für den von außen mit der Wechselspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ angetriebenen RCL-Kreis, geht Gleichung 1 in

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

über. Weiterhin lässt sich diese auf die Form

$$LC \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (15)$$

bringen. Durch den Ansatz $U_C(\omega, t) = \tilde{U}(\omega) e^{i\omega t}$ ($\tilde{U}(\omega)$ ist eine komplexe Zahl) ergibt sich für die frequenzabhängigen Amplitude

$$\tilde{U}_C(\omega) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (16)$$

beziehungsweise für dessen Betrag

$$|\tilde{U}_C(\omega)| = U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (17)$$

Diese wird auch als Resonanzkurve bezeichnet. Zusätzlich ergibt sich als Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung und Frequenz ω

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}. \quad (18)$$

Für $\omega \rightarrow \infty$ gilt $U_C \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow 0$ gilt $U_C \rightarrow U_0$. Falls die sogenannte Resonanzfrequenz

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (19)$$

sich der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (20)$$

nähert, kann die Kondensatorspannung U_C aber auch größer als die anliegende Generatorenspannung U_0 sein. Im Fall der schwachen Dämpfung

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

überschreitet die Kondensatorspannung die Generatorenspannung, wobei

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \quad (21)$$

den Zusammenhang darstellt. Falls $R \rightarrow 0$ strebt, geht $U_C \rightarrow \infty$. Dies wird als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Die Güte des Schwingkreises ergibt sich durch

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (22)$$

Weiterhin wird die Breite der Resonanzkurve durch die Differenz der beiden Frequenzen

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (23)$$

angegeben, an denen die Kondensatorspannung, unter der Bedingung $R^2/L^2 \ll \omega_0^2$, auf das $1/\sqrt{2}$ -fache ihres Maximalwerts abgefallen ist.

Für $R^2/2L^2 \gg 1/LC$ liegt eine starke Dämpfung vor. Bei ω_0 liegt eine Phasenverschiebung von $\phi = -\frac{\pi}{2}$ vor. Die Frequenzen ω_1 (bei $\phi = \frac{\pi}{4}$) und ω_2 (bei $\phi = \frac{3}{4}\pi$) lassen sich mit

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (24)$$

berechnen.

2.4 Ermittlung der Phasenverschiebung zwischen zwei Spannungen

Zur Ermittlung der frequenzabhängigen Phasenverschiebung zwischen der Kondensatorspannung U_C und der Generatorenspannung U , muss der zeitliche Abstand der beiden Nulldurchgänge der Spannungen (in Abbildung 6 a genannt) durch die Periodendauer (in Abbildung 6 b genannt) dividiert werden und abhängig davon, ob das Ergebnis in Grad oder Radiant angegeben werden soll, mit dem Faktor $c = 360$ oder $d = 2\pi$ multipliziert werden.

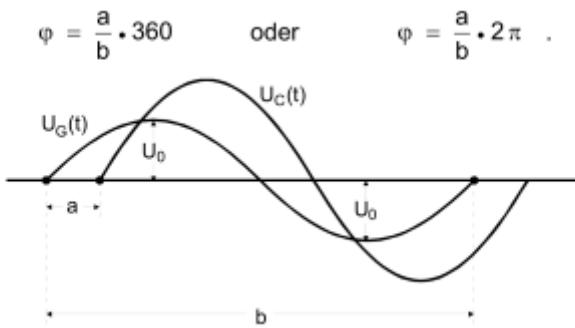


Abbildung 6: Messung der Phasenverschiebung zwischen Generatorenspannung und Kondensatorspannung [2]

3 Durchführung

3.1 Untersuchung der Amplitude und Berechnung des Dämpfungswiderstandes

Zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude und zur Berechnung des Dämpfungswiderstandes wird ein gedämpfter Schwingkreis gemäß Abbildung 7 aufgebaut. Dieser wird mit einem Generator passender Frequenz so angeregt, dass zwischen zwei Impulsen die Amplitude um den Faktor drei bis acht abgenommen hat. Die angelegte Frequenz beträgt $\nu = 500$ hertz. Weiterhin soll der kleinere der beiden Festwiderstände verwendet werden, welcher einen Widerstandswert von $R = (30,3 \pm 0,1)$ ohm besitzt, und um Abweichungen der Messungen durch andere Bauteile zu vermeiden, wird ein hochohmiger Tastkopf mit $R_i = 10 \text{ M}\Omega$ verwendet.

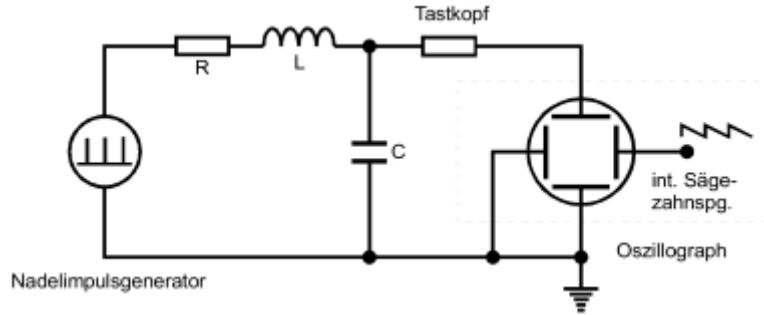


Abbildung 7: Schaltskizze eines gedämpften Schwingkreises zur Berechnung des Dämpfungswiderstandes und zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude [2]

Das Bild des Spannungsverlaufs auf dem Oszilloskop soll aufgenommen werden und anschließend soll zur Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{eff} , sowie der Abklingdauer T_{ex} die Kondensatorspannung U_C gegen die Zeit aufgetragen werden. Der errechnete Wert von R_{eff} soll anschließend mit dem tatsächlichen Wert R aus der Schaltung verglichen werden.

3.1.1 Bestimmung des Widerstands R_{ap}

Die Schaltung wird gemäß Abbildung 8 aufgebaut, wobei der regelbare Widerstand zunächst auf seinen Maximalwert eingestellt werden soll. Auch hier wird eine Wechselspannung mit einer Frequenz $\nu = 500 \text{ Hz}$ angelegt. Mit diesen Einstellungen ist auf dem Oszilloskop lediglich das Relaxationsverhalten des Schwingkreises zu erkennen. Um den Dämpfungswiderstand zu finden, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, wird der regelbare Widerstand nun vorsichtig verkleinert, bis eine Überschwingung, das bedeutet $\frac{dU_C}{dt} > 0$, eintritt. Wird dies erreicht, so muss der regelbare Widerstand gerade so erhöht werden, dass die Überschwingung verschwindet. Der experimentell gemessene Wert soll anschließend mit dem Theoriewert verglichen werden.

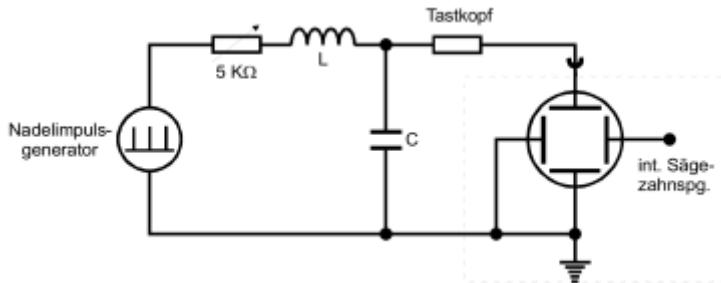


Abbildung 8: Schaltskizze eines gedämpften Schwingkreises zur Berechnung des Dämpfungswiderstandes R_{ap} [2]

3.2 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Zunächst wird eine die Schaltung gemäß der Skizze 9 aufgebaut. Um die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung nun zu messen, wird wieder ein Tastkopf verwendet, da so Störungen, die vom Widerstand des Millivoltmeters ausgehen zu minimieren. Weiterhin soll der größere der beiden Widerstände verwendet werden. Dieser besitzt einen Widerstandswert von $R_2 = (271,6 \pm 0,2) \Omega$. Nun soll die Erregerspannung U , sowie die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit von der Frequenz ν gemessen werden. Anschließend soll das Verhältnis der Spannungen halblogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen werden. Zusätzlich soll der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt werden. Es sollen die Güte q des Schwingkreises, ebenso wie die Breite vermessen werden. Die Ergebnisse sollen mit den Theoriewerten verglichen werden. Der Theoriewert für die Kapazität des Kondensators beträgt $C = (5,00 \pm 0,1) \text{ nF}$ und als Wert für die Induktivität wurde der Wert $L = (3,5 \pm 0,01) \text{ mH}$ vorgegeben. Der Innenwiderstand des Sinus-Generators darf hierbei nicht vernachlässigt werden.

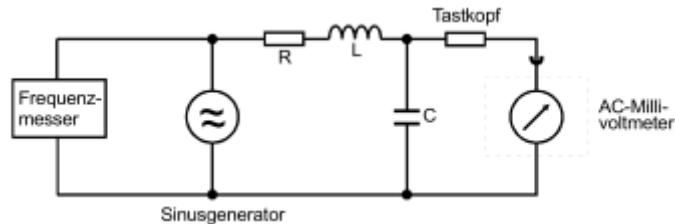


Abbildung 9: Schaltung zur Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung [2]

3.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

In diesem Teil des Versuchs soll die Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Frequenz untersucht werden. Es werden die gleichen Bauteile L , C und R_2 wie zuvor verwendet. Dazu soll eine Schaltung, wie in der Schaltskizze 10 dargestellt ist, aufgebaut werden. Die gemessenen Werte von der Phasenverschiebung ϕ sollen halblogarithmisch gegen die Frequenz ν aufgetragen werden, wobei der Bereich um $\phi = \frac{\pi}{2}$ linear dargestellt werden soll. Die Resonanzfrequenz ν_{res} sollen ebenso wie ν_1 und ν_2 bestimmt werden und anschließend mit den Theoriewerten verglichen werden.

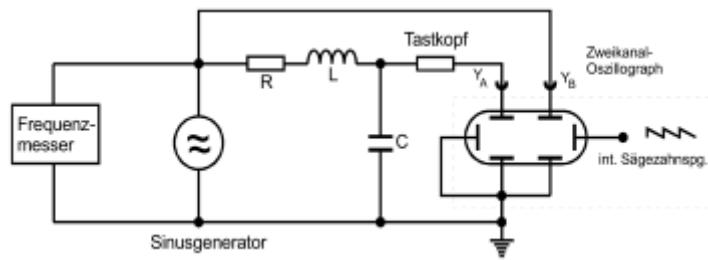


Abbildung 10: Schaltung zur Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen U und U_C [2]

4 Auswertung

4.1 Dämpfung des elektrischen Schwingkreises

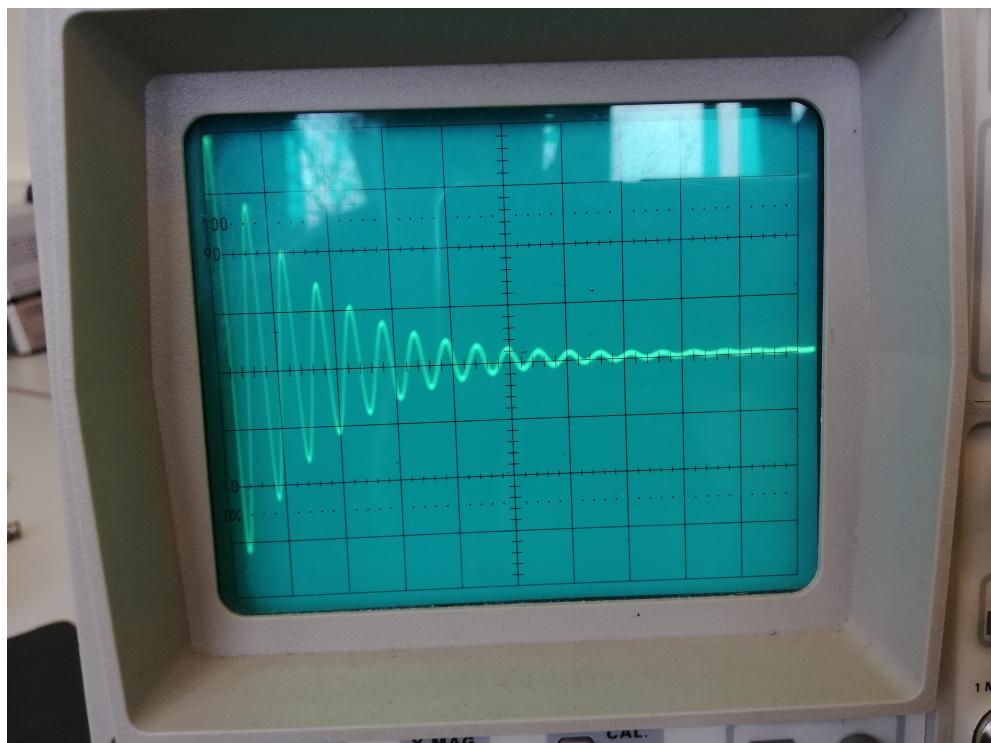


Abbildung 11: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit beim gedämpften Schwingkreis

$t / \mu\text{s}$	U_C / V
5	4
35	2,8
60	2
85	1,5
115	1,1
140	0,8
165	0,6
195	0,5
220	0,4
250	0,3
275	0,2
300	0,2

Tabelle 1: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit beim gedämpften Schwingkreis

Aus Abbildung 11 wurden 12 Wertepaare abgelesen und in Tabelle 1 aufgelistet. Um die Abklingdauer T_{ex} zu bestimmen wurde nun zunächst eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei wurde eine Lineare Ausgleichsgerade mit Matplotlib erstellt, welche in Abbildung 13 zu sehen ist. Die Steigung

$$m = (-0,01032 \pm 0,00029) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

dieser Geraden entspricht dem Faktor im Exponenten in Gleichung 10, da $U_C(t)$ proportional zu $I(t)$ ist. Die Abklingdauer kann nach Gleichung 12 durch das Inverse des Betrags der Steigung als

$$T_{ex} = (96,9 \pm 2,7) \cdot 10^3 \text{ s}$$

berechnet werden. Mit der Abklingdauer kann nun eine nichtlineare Ausgleichskurve erstellt werden, die der Einhüllenden in Abbildung 11 entspricht. Die Ausgleichsgerade ist mit den abgelesenen Messwerten in Abbilung 12 zu sehen.

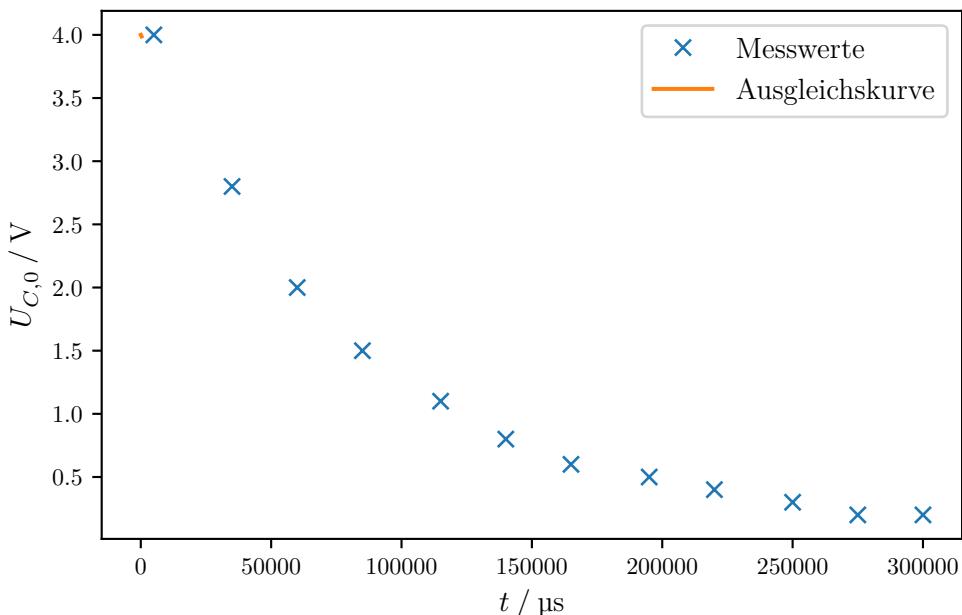


Abbildung 12: Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit

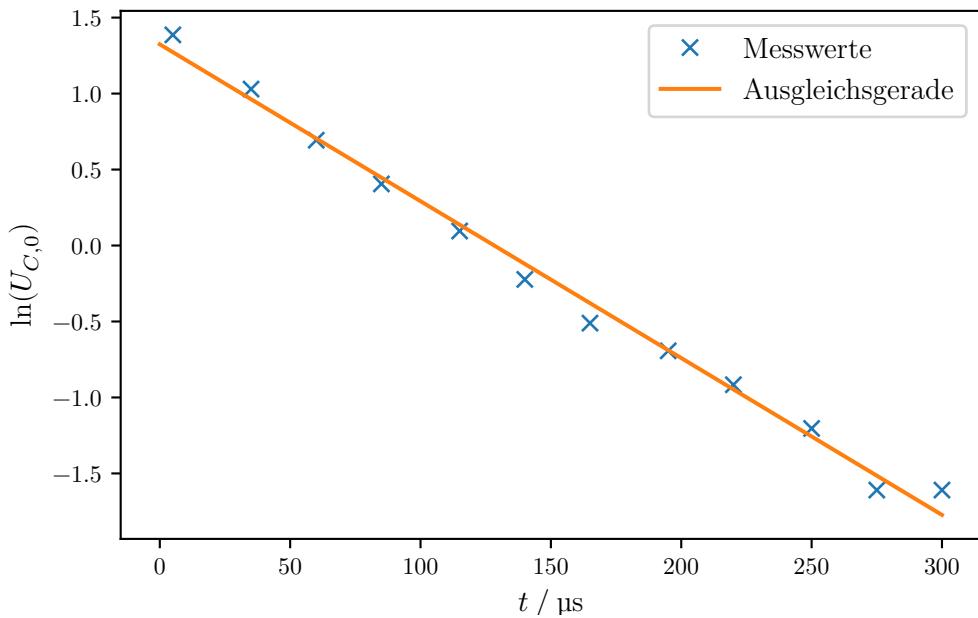


Abbildung 13: Linearisierte Darstellung der Amplitudenmaxima der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit

Der Dämpfungswiderstand R_{eff} ergibt sich durch Zusammenhang 12 als

$$R_{eff} = (0,07224 \pm 0,0021) \cdot 10^{-3} \Omega$$

Die Abweichung zum eigentlichen Widerstandswert $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega$ lässt sich nicht allein durch den Innenwiderstand des Generators erklären, welcher $R_G = 600 \Omega$ beträgt, denn damit würde $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$

4.2 Aperiodischer Grenzfall

Bei der Messung nach 3.1.1 ergab sich für R_{ap} ein Wert von

$$R_{ap} = 1,4 \text{ k}\Omega$$

Mit Gleichung 13 lässt sich R_{ap} als

$$R_{ap} = (1,673 \pm 0,004) \text{ k}\Omega$$

berechnen. Beim Vergleich mit dem Messwert fällt auf, dass sich die Abweichung durch den nicht beachteten Innenwiderstand $R_G = 600 \Omega$ des Generators erklären lässt.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

ω / kHz	U_C / V
3	2,3
31	2,3
63	2,5
94	2,7
126	3,1
157	3,8
173	4,2
188	4,8
195	5,0
201	5,2
207	5,6
214	5,8
220	5,8
226	5,8
232	5,8
239	5,6
245	5,4
251	5,0
267	4,2
283	3,4
314	2,3
346	1,7
377	1,4
942	0,14
1885	0,02

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

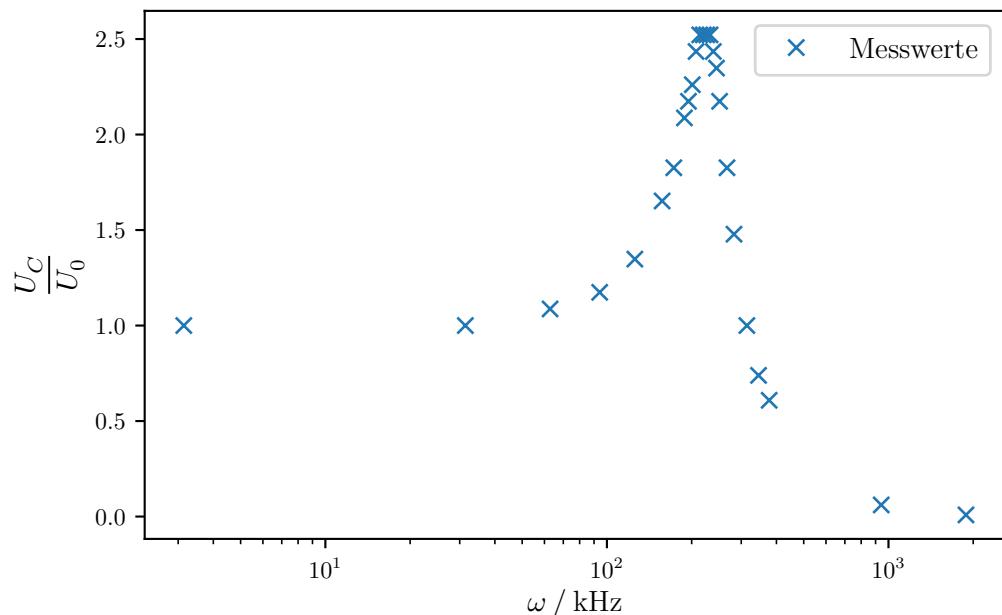


Abbildung 14: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

Die Messwerte aus Tabelle 2 werden in Abbildung 14 dargestellt. Dabei ist U_0 der gemessene Wert $U_0 = 2,3 \text{ V}$ der Generatorspannung. Die Resonanzüberhöhung lässt sich als

$$q = 2,52$$

ablesen. Dieser lässt sich mit dem nach Gleichung 22 als

$$q = 0,9599 \pm 0,0024$$

errechneten Wert vergleichen. Für diesen wurde nun $R = (271,6 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$ angenommen. In Abbildung 15 ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt.

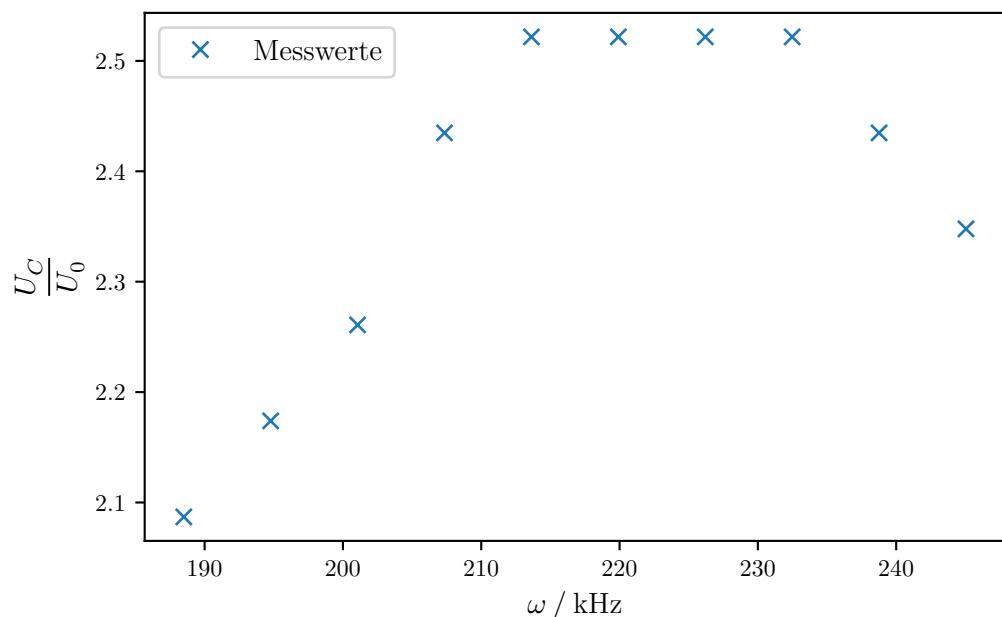


Abbildung 15: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung in Nähe der Resonanz

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

ω / kHz	$a / \mu\text{s}$	$b / \mu\text{s}$	ϕ
3	0,0	2000,0	0,00
31	0,0	100,0	0,00
63	2,0	50,0	0,25
94	7,5	68,0	0,69
126	2,0	50,0	0,25
157	2,5	40,0	0,39
173	3,0	37,0	0,51
188	3,5	34,0	0,65
195	4,0	33,0	0,76
201	4,5	32,0	0,88
207	5,0	30,5	1,03
214	5,5	30,0	1,15
220	6,0	29,0	1,30
226	6,0	28,5	1,32
232	6,5	27,5	1,49
239	7,0	27,0	1,63
245	7,5	26,0	1,81
251	7,5	25,5	1,85
267	8,0	24,0	2,09
283	8,5	22,5	2,37
314	8,5	18,5	2,89
346	5,8	18,5	1,97
377	7,5	17,0	2,77

Tabelle 3: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

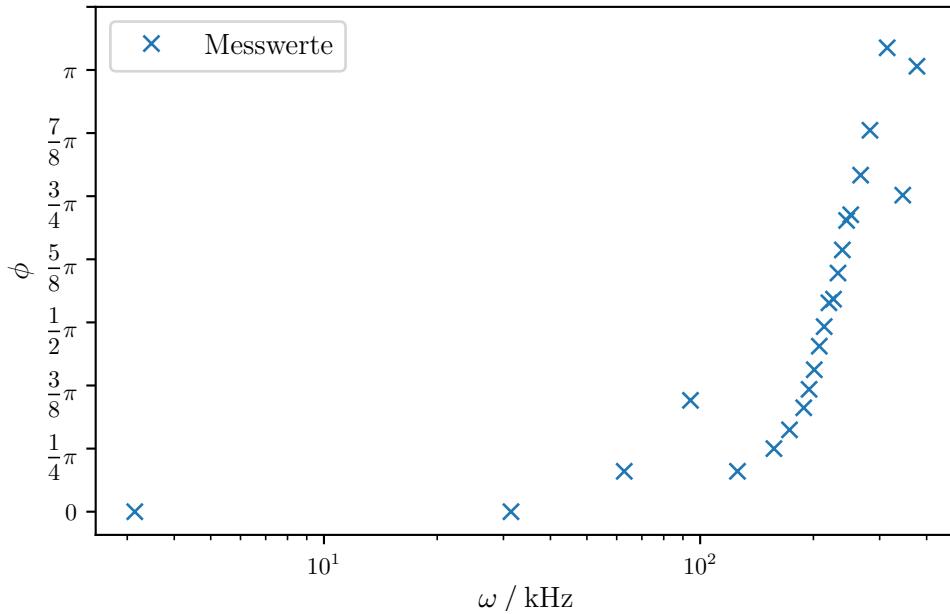


Abbildung 16: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

Die Messwerte aus Tabelle 3 werden in Abbildung 16 dargestellt. Da bei der Durchführung nicht zwischen positiver und negativer Phasenverschiebung unterschieden wurde, werden alle Werte positiv dargestellt, obwohl Gleichung 18 zeigt, dass die Funktion bei kleinen Frequenzen negative Werte annimmt. In Abbildung 17 ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt. Diese lässt sich an der Stelle $\pi/2$ als

$$\omega_{res} = 239 \text{ kHz}$$

ablesen. Im Vergleich zum, durch Gleichung 19, gerechneten Wert

$$\omega_{res} = (161,7 \pm 0,7) \text{ kHz}$$

fällt auf, dass der Theoriewert weit unter dem gemessenen Wert liegt. Auch hier wurde $R = (271,6 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$ angenommen.

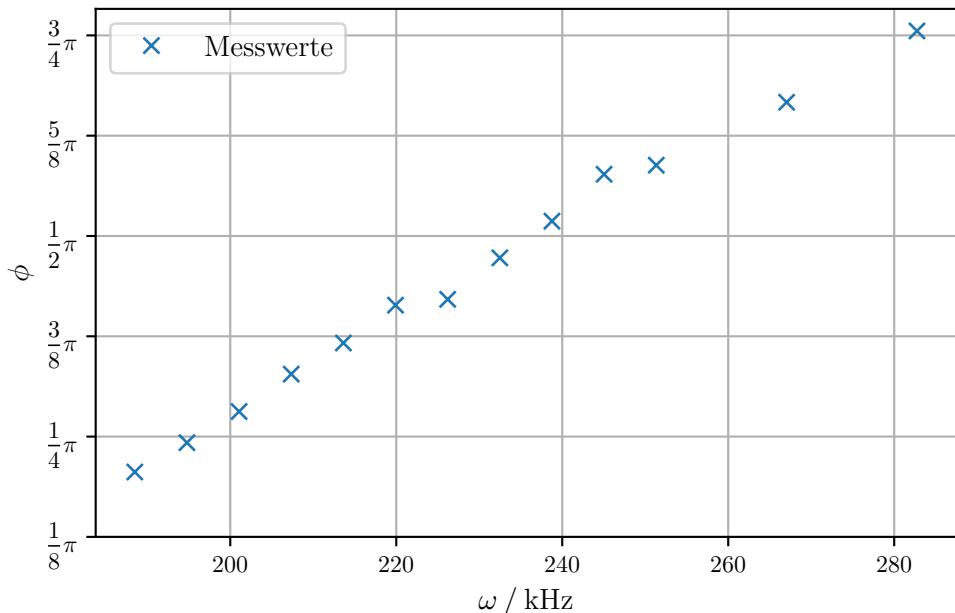


Abbildung 17: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung in Nähe der Resonanz

ω_1 liegt bei $\pi/4$ und entspricht somit dem Messwert

$$\omega_1 = 195 \text{ kHz}.$$

ω_1 liegt bei $\pi \cdot 3/4$ und entspricht somit dem Messwert

$$\omega_2 = 283 \text{ kHz}.$$

Diese Werte können mit den beiden aus Gleichung 24 errechneten Werten

$$\omega_1 = (145 \pm 0,4) \text{ kHz}$$

$$\omega_2 = (394 \pm 0,9) \text{ kHz}$$

verglichen werden.

5 Diskussion

Das vom Oszilloskop aufgenommene Bild 11 entspricht der erwarteten Form einer gedämpften Schwingung (siehe 3). Allerdings fällt auf, dass die Abklingdauer viel zu groß ist. Würde direkt der Betrag der Steigung als Abklingdauer angenommen werden, so würde sich für R_{eff} ein wahrscheinlicherer Wert von

$$R_{eff} = (678 \pm 19) \Omega$$

ergeben. Dieser Wert würde dem tatsächlichen Widerstandwert von $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$ eher entsprechen als der in 4.1 errechnete Wert.

Außerdem kann der, bei den Rechnungen angenommene Innenwiderstand, vielleicht nicht dem tatsächlichen, am verwendeten Gerät existierendem, Innenwiderstand entsprechen. Der angenommene Innenwiderstand von $R_I = 600 \Omega$ wurde [1] entnommen.

Der Unterschied vom gemessenen Wert R_{ap} zum gerechneten Wert lässt sich zum einen durch den nicht in die Rechnung mit einbezogenen Innenwiderstand erklären, doch weitere Abweichungen können auch durch einen statistischen oder systematischen Fehler entstanden sein.

Der Wert für die Resonanzüberhöhung q weicht stark vom Theoriewert ab. Es fällt jedoch auf, dass die beiden durch den Faktor $U_0 = 2,3 \text{ V}$ besser ineinander überführt werden können. Es ist also wahrscheinlich, dass ein Fehler bei der Auswertung oder der entsprechenden Formel 22 vorliegt.

Bei der Messung der Phasenverschiebung wurden nicht genug Werte aufgenommen um den nach Gleichung 18 erwarteten Verlauf eines Arcustangens zu erkennen. Außerdem stechen einige Werte, wie der dritte Messwert in Abbildung 14 ungewöhnlich hervor, was wohl auf ein falsches Ablesen der Größen a oder b zurückzuführen ist. Bei der Bestimmung von ω_1, ω_2 und ω_{res} sind Ungenauigkeiten dadurch entstanden, dass jeweils der Wert abgelesen wurde, welcher am nähsten am gesuchten Vielfachen von π liegt. Doch diese Ungenauigkeiten können nicht erklären, warum vor allem $\omega_2 = 283 \text{ kHz}$ und $\omega_{res} = 239 \text{ kHz}$ so stark von den errechneten Werten $\omega_2 = (394 \pm 0,9) \text{ kHz}$ und $\omega_{res} = (161,7 \pm 0,7) \text{ kHz}$ abweichen. Auch statistische Fehler können diese Abweichungen nicht erklären. Am wahrscheinlichsten ist, dass entweder ein systematischer Fehler vorliegt, oder dass die Auswertung bzw. Durchführung fehlerhaft ist. Es wurde nicht zwischen positiver und negativer Phasenverschiebung unterschieden, wodurch sich die Werte für die Frequenzen wahrscheinlich nicht korrekt bestimmen ließen.

6 Anhang

a) $f = 500 \text{ Hz}$	Zeit [μs]	$U [\text{V}]$
	0,150	0
	0,7 - 5,0	28
	1,2 - 5,0	2
	1,7 - 5,0	4,5
	2,3 - 5,0	4,1
	2,8 - 5,0	0,8
	3,3 - 5,0	0,6
	3,9 - 5,0	0,5
	4,4 - 5,0	0,4
	5 - 5,0	0,3
	5,5 - 5,0	0,2
	6 - 5,0	0,2

b) $f = 500 \text{ Hz}$	$R_{AP} = 0,28 \cdot 5 \Omega$

c) Frequenzabhangigkeit der Kondensatortspannung an einem Serienresonanzkreis

d) Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatortspannung				
$f \text{ in Hz}$	$U_c [\text{V}]$	$U_o [\text{V}]$	α°	b
500	2,3	2,3	0,5	2ms
5000	2,3	0,5	5,2 - 10 ms	
10 000	2,5	0,2 - 10 ms	7,5 - 20 ms	
15 000	2,7	1,5 - 5 ms	6,8 - 10 ms	
20 000	3,1	0,2 - 10 ms	5 - 10 ms	
25 000	3,8	0,9 - 5 ms	4 - 10 ms	
- 27 500	4,2	0,6 - 5 ms	3,7 - 10 ms	
30 000	4,8	0,7 - 5 ms	3,4 - 10 ms	
31 000	5	0,8 - 5 ms	3,3 - 10 ms	
32 000	5,2	0,9 - 5 ms	3,2 - 10 ms	
33 000	7,8 - 2	5 ms	6,1 - 5 ms	
34 000	7,9 - 2	7,1 - 5 ms	6 - 5 ms	
35 000	2,9 - 2	1,2 - 5 ms	5,8 - 5 ms	
36 000	2,9 - 2	1,2 - 5 ms	5,7 - 5 ms	
37 000	2,9 - 2	1,3 - 5 ms	5,5 - 5 ms	
38 000	2,8 - 2	1,4 - 5 ms	5,4 - 5 ms	
39 000	2,7 - 2	1,5 - 5 ms	5,2 - 5 ms	
- 40 000	2,5 - 2	1,5 - 5 ms	5,1 - 5 ms	
42 500	2,1 - 2	1,6 - 5 ms	4,8 - 5 ms	
45 000	3,4	1,7 - 5 ms	4,5 - 5 ms	
50 000	2,3	1,7 - 5 ms	3,7 - 5 ms	
55 000	1,7	2,0 - 1,6 - 5 ms	3,7 - 5 ms	
60 000	1,4	1,5 - 5 ms	3,4 - 5 ms	
150 000	0,7 - 0,2			
300 000	0,2 - 0,1			

S. Venhaus

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.