

Versuch 354

## **Gedämpfte und erzwungene Schwingungen**

Nico Schaffrath  
nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt  
mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Der ideale Schwingkreis . . . . .	3
2.2	Der reale Schwingkreis . . . . .	3
2.2.1	Der Schwingfall . . . . .	5
2.2.2	Der Kriechfall . . . . .	6
2.2.3	Der aperiodische Grenzfall . . . . .	6
2.3	Erzwungene Schwingungen . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>
	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

# 1 Ziel

In diesem Versuch

## 2 Theorie

### 2.1 Der ideale Schwingkreis

Ein idealer Schwingkreis setzt sich aus einem Kondensator mit der Kapazität  $C$  und einer Spule mit der Induktivität  $L$  zusammen. Unter der Voraussetzung, dass diesem einmalig Energie hinzugeführt wurde, bleibt diese im System erhalten. Hierbei kommt es zwischen dem Kondensator und der Spule zu einem periodischen Austausch der Energie. Ist der Kondensator geladen, bildet sich ein elektrisches Feld aus, in dem die Energie steckt. Nimmt nun das elektrische Feld ab, indem sich die Ladungen durch den Draht und damit auch durch die Spule bewegen, baut sich in dieser ein magnetisches Feld auf. Wenn sich nun wiederum das magnetische Feld abbaut, baut sich das elektrische Feld auf. Ab diesem Punkt wiederholt sich der Vorgang.

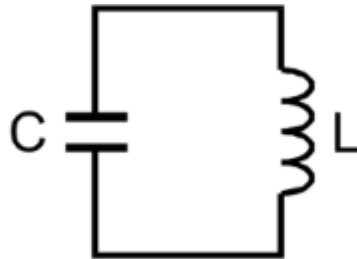
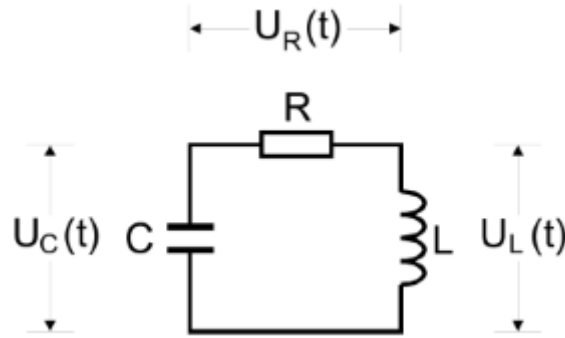


Abbildung 1: Schaltskizze eines ungedämpften Schwingkreises

### 2.2 Der reale Schwingkreis

Der Unterschied zwischen idealem und realem Schwingkreis liegt darin, dass bei einem realen Schwingkreis ein ohmscher Widerstand eingebaut ist. Somit verliert der Schwingkreis über jede Periode hinweg Energie in Form von Joulscher Wärme. Diese Schaltung wird als gedämpfter Schwingkreis bezeichnet.



**Abbildung 2:** Schaltskizze eines gedämpften Schwingkreises

Wie der Abbildung entnommen werden kann, bildet der RCL-Schwingkreis eine Masche. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche gleich null. Somit ergibt sich für den RCL-Kreis die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Dabei gelten für die Spannungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ U_L(t) &= L \frac{dI}{dt}, \end{aligned}$$

wobei für die Stromstärke

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2)$$

gelten soll. Mithilfe dieser Zusammenhänge ergibt sich aus 1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L} \dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0, \quad (3)$$

welche sich mit Hilfe des Ansatzes

$$I(t) = Ue^{i\omega t} \quad (4)$$

lösen lässt. Durch Einsetzen des Ansatzes ergibt sich schließlich die charakteristische Gleichung

$$-w^2 + i\frac{R}{L}w + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5)$$

Mit den beiden Kreisfrequenzen  $w_1$  und  $w_2$

$$w_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6)$$

kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = U_1 e^{i w_1 t} + U_2 e^{i w_2 t}, \quad (7)$$

wobei  $U_1$  und  $U_2$  komplexe Koeffizienten darstellen, bestimmt werden. Wird nun die Darstellung

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{R}{4\pi L} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

verwendet, lässt sich 7 zu

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i2\pi\nu t} + U_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (9)$$

umschreiben. Dabei kann zwischen drei Fällen unterschieden werden, die nun vorgestellt werden sollen.

### 2.2.1 Der Schwingfall

Der erste Fall tritt dann ein, wenn  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$  gilt, was bedeutet, dass  $\nu_{1,2}$  zu imaginären Größen werden. Damit eine reelle Lösung zustande kommt, muss zwischen  $U_1$  und  $U_2$  notwendigerweise die Beziehung  $U_1 = \bar{U}_2$  gelten. Folglich lassen sie sich mithilfe der Euler-Formel in die Form

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} A_0 e^{i\eta} \\ U_2 &= \frac{1}{2} A_0 e^{-i\eta} \end{aligned}$$

bringen. Somit kann die Gleichung 9 in

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos 2\pi\nu t + \eta$$

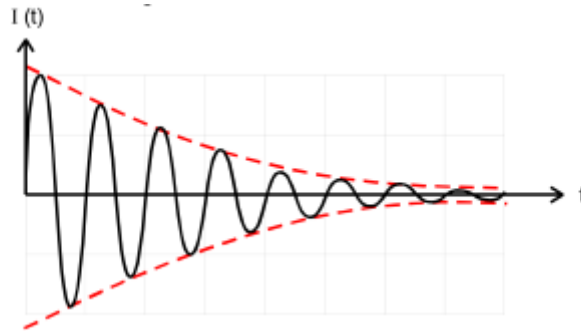
umgeformt werden. In diesem Fall liegt also eine gedämpfte harmonische Schwingung vor, dessen Amplitude mit fortlaufender Zeit exponentiell abnimmt. Die Schwingungsdauer kann mit Hilfe des Zusammenhangs  $T = \frac{1}{\nu}$  ermittelt werden. Für die allgemeine gedämpfte Schwingung ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (10)$$

wobei zusätzlich die Abnahmegeschwindigkeit der Amplitude durch den Wert

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (11)$$

beschrieben werden kann, welcher angibt, wann die Amplitude sich um den Faktor  $e$  verkleinert hat.



**Abbildung 3:** Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung

### 2.2.2 Der Kriechfall

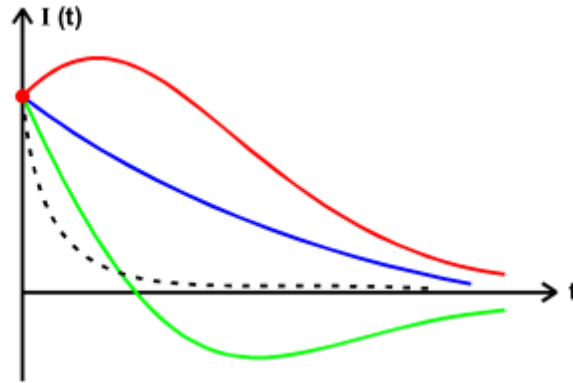
Der zweite Fall tritt ein, falls  $\frac{1}{LC} \frac{R^2}{4L^2}$  gilt, was dazu führt, dass selbst eine imaginäre Zahl darstellt. Damit enthält Gleichung 9 lediglich reelle Exponentialfunktionen, was bedeutet, dass keine Schwingung ausgeführt wird, sondern die Amplitude - abhängig von den Werten  $A_1$  und  $A_2$  - entweder direkt und monoton gegen null geht oder zuerst ein Maximum erreicht (die sogenannte Überschwingung) und dann gegen null strebt. Diese Verläufe sind in Abbildung 4 dargestellt.

### 2.2.3 Der aperiodische Grenzfall

Der dritte und letzte Fall tritt ein, wenn  $\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2}$  gilt, was dazu führt, dass  $\nu$  selbst null ergibt. Aus der Bedingung und Gleichung 9 ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke

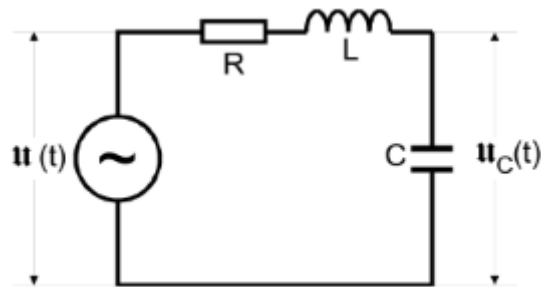
$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}$$

wobei angemerkt werden soll, dass hierbei keine Überschwingung auftreten kann und dass die Stromstärke hierbei noch schneller als beim Kriechfall gegen null strebt (siehe Abbildung 4).



**Abbildung 4:** Darstellung des Kriechfalls und des aperiodischen Grenzfalls (gestrichelte Kurve)

## 2.3 Erzwungene Schwingungen



**Abbildung 5:** Schaltskizze eines erzwungenen RLC-Schwingkreises

Durch den Einbau einer Wechselstromquelle können am RCL-Kreis auch erzwungene Schwingungen betrachtet werden. Der schematische Aufbau für die Schaltung lässt sich der Abbildung 5 entnehmen. Für den von außen mit der Wechselspannung  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  angetriebenen RCL-Kreis, geht Gleichung 1 in

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t} \quad (12)$$

über. Weiterhin lässt sich diese auf die Form

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

bringen. Durch den Ansatz  $U_C(\omega, t) = \tilde{U}(\omega) e^{i\omega t}$  ( $\tilde{U}(\omega)$  ist eine komplexe Zahl) ergibt sich für die frequenzabhängigen Amplitude

$$\tilde{U}_C(\omega) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (14)$$

beziehungsweise für dessen Betrag

$$|\tilde{U}_C(\omega)| = U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (15)$$

Diese wird auch als Resonanzkurve bezeichnet. Für  $\omega \rightarrow \infty$  gilt  $U_C \rightarrow 0$  und für  $\omega \rightarrow 0$  gilt  $U_C \rightarrow U_0$ . Falls die sogenannte Resonanzfrequenz

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (16)$$

sich der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (17)$$

nähert, kann die Kondensatorspannung  $U_C$  aber auch größer als die anliegende Generatorspannung  $U_0$  sein. Im Fall der schwachen Dämpfung

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

überschreitet die Kondensatorspannung die Generatorspannung, wobei

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \quad (18)$$

den Zusammenhang darstellt. Falls  $R \rightarrow 0$  strebt, geht  $U_C \rightarrow \infty$ . Dies wird als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Die Güte des Schwingkreises ergibt sich durch

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (19)$$

Weiterhin wird die Breite der Resonanzkurve durch die Differenz der beiden Frequenzen

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (20)$$

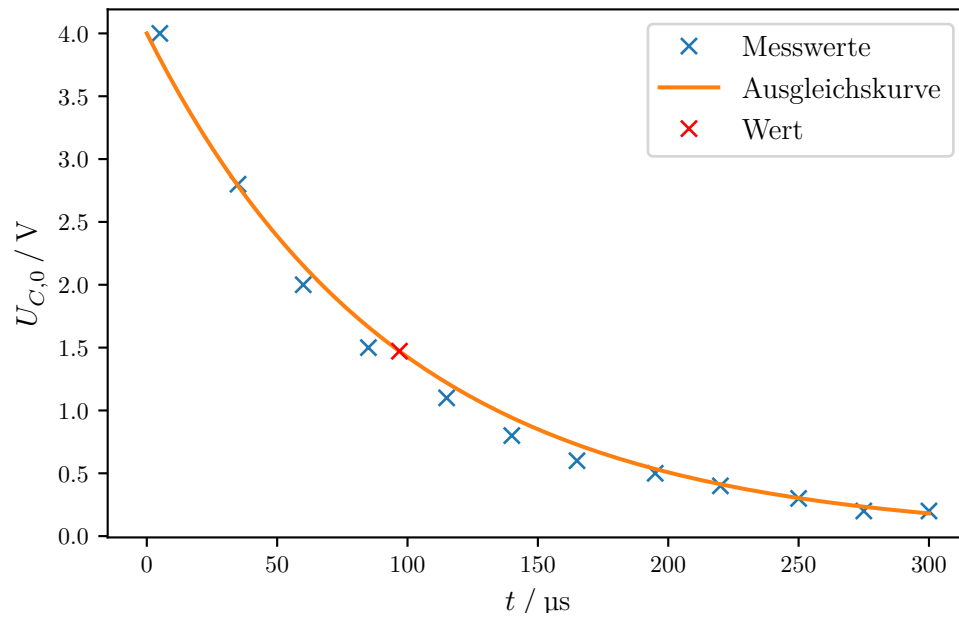
angegeben, an denen die Kondensatorspannung, unter der Bedingung  $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ , auf das  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache ihres Maximalwerts abgefallen ist.

[sample]

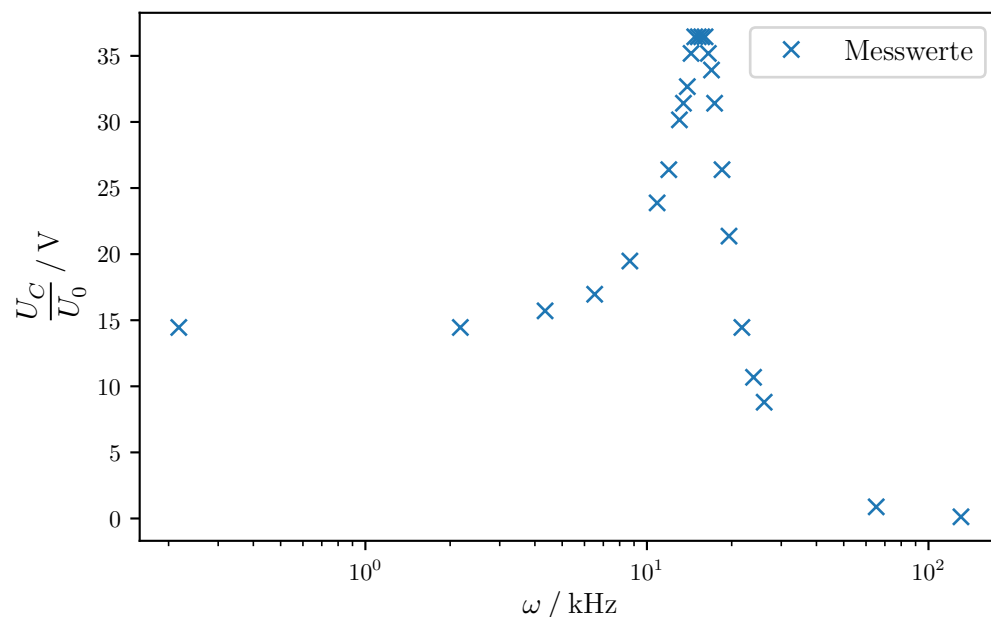
### 3 Durchführung

### 4 Auswertung

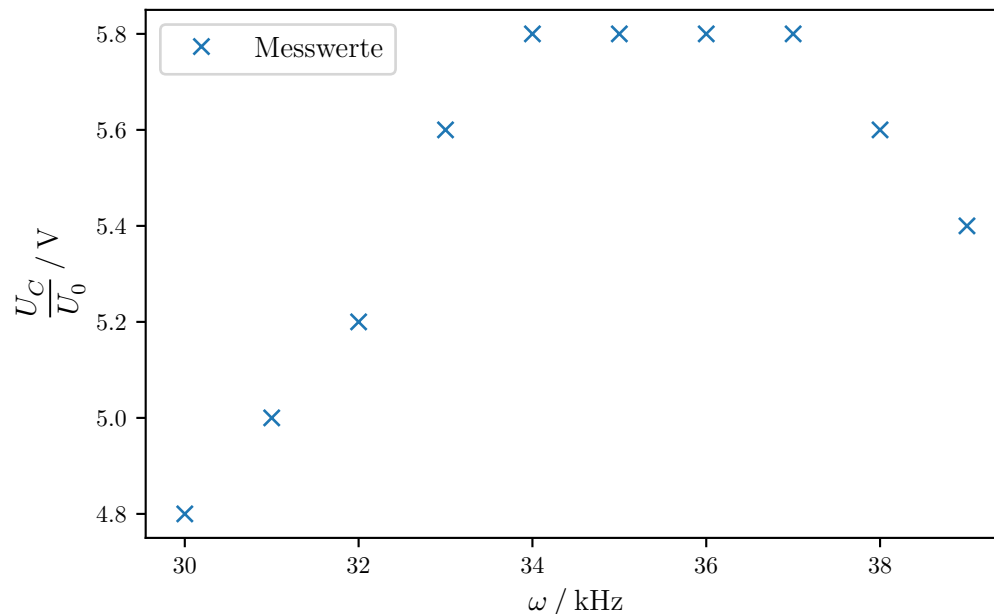




**Abbildung 6:** Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit.



**Abbildung 7:** Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit.



**Abbildung 8:** Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit.

## 5 Diskussion

## 6 Anhang

### Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.