

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Nico Schaffrath

nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt

mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Der ideale Schwingkreis	3
2.2 Der reale Schwingkreis	3
2.2.1 Der Schwingfall	5
2.2.2 Der Kriechfall	6
2.2.3 Der aperiodische Grenzfall	6
2.3 Erzwungene Schwingungen	7
3 Durchführung	9
4 Auswertung	9
4.1 Dämpfung des elektrischen Schwingkreises	9
4.2 Aperiodischer Grenzfall	12
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	13
4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung	16
5 Diskussion	18
6 Anhang	19
Literatur	21

1 Ziel

In diesem Versuc

2 Theorie

2.1 Der ideale Schwingkreis

Ein idealer Schwingkreis setzt sich aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L zusammen. Unter der Voraussetzung, dass diesem einmalig Energie hinzugeführt wurde, bleibt diese im System erhalten. Hierbei kommt es zwischen dem Kondensator und der Spule zu einem periodischen Austausch der Energie. Ist der Kondensator geladen, bildet sich ein elektrisches Feld aus, in dem die Energie steckt. Nimmt nun das elektrische Feld ab, indem sich die Ladungen durch den Draht und damit auch durch die Spule bewegen, baut sich in dieser ein magnetisches Feld auf. Wenn sich nun wiederum das magnetische Feld abbaut, baut sich das elektrische Feld auf. Ab diesem Punkt wiederholt sich der Vorgang.

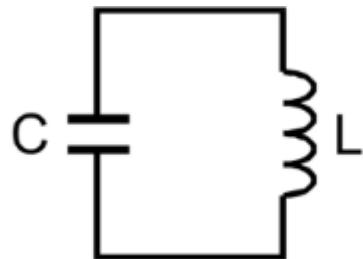


Abbildung 1: Schaltskizze eines ungedämpften Schwingkreises

2.2 Der reale Schwingkreis

Der Unterschied zwischen idealem und realem Schwingkreis liegt darin, dass bei einem realen Schwingkreis ein ohmscher Widerstand eingebaut ist. Somit verliert der Schwingkreis über jede Periode hinweg Energie in Form von Joulscher Wärme. Diese Schaltung wird als gedämpfter Schwingkreis bezeichnet.

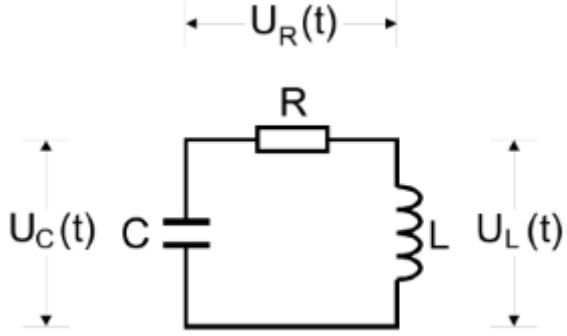


Abbildung 2: Schaltkizze eines gedämpften Schwingkreises

Wie der Abbildung entnommen werden kann, bildet der RCL-Schwingkreis eine Masche. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche gleich null. Somit ergibt sich für den RCL-Kreis die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Dabei gelten für die Spannungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ U_L(t) &= L \frac{dI}{dt}, \end{aligned}$$

wobei für die Stromstärke

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2)$$

gelten soll. Mithilfe dieser Zusammenhänge ergibt sich aus 1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{RC}I(t) = 0, \quad (3)$$

welche sich mit Hilfe des Ansatzes

$$I(t) = U e^{i\omega t} \quad (4)$$

lösen lässt. Durch Einsetzen des Ansatzes ergibt sich schließlich die charakteristische Gleichung

$$-w^2 + i\frac{R}{L}w + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5)$$

Mit den beiden Kreisfrequenzen w_1 und w_2

$$w_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6)$$

kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = U_1 e^{i w_1 t} + U_2 e^{i w_2 t}, \quad (7)$$

wobei U_1 und U_2 komplexe Koeffizienten darstellen, bestimmt werden. Wird nun die Darstellung

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{R}{4\pi L} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

verwendet, lässt sich 7 zu

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i 2\pi\nu t} + U_2 e^{-i 2\pi\nu t}) \quad (9)$$

umschreiben. Dabei kann zwischen drei Fällen unterschieden werden, die nun vorgestellt werden sollen.

2.2.1 Der Schwingfall

Der erste Fall tritt dann ein, wenn $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ gilt, was bedeutet, dass $\nu_{1,2}$ zu imaginären Größen werden. Damit eine reelle Lösung Zustände kommt, muss zwischen U_1 und U_2 notwendigerweise die Beziehung $U_1 = \bar{U}_2$ gelten. Folglich lassen sie sich mithilfe der Euler-Formel in die Form

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} A_0 e^{i\eta} \\ U_2 &= \frac{1}{2} A_0 e^{-i\eta} \end{aligned}$$

bringen. Somit kann die Gleichung 9 in

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos 2\pi\nu t + \eta \quad (10)$$

umgeformt werden. In diesem Fall liegt also eine gedämpfte harmonische Schwingung vor, dessen Amplitude mit fortlaufender Zeit exponentiell abnimmt. Die Schwingungsdauer kann mit Hilfe des Zusammenhangs $T = \frac{1}{\nu}$ ermittelt werden. Für die allgemeine gedämpfte Schwingung ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (11)$$

wobei zusätzlich die Abnahmgeschwindigkeit der Amplitude durch den Wert

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (12)$$

beschrieben werden kann, welcher angibt, wann die Amplitude sich um den Faktor e verkleinert hat.

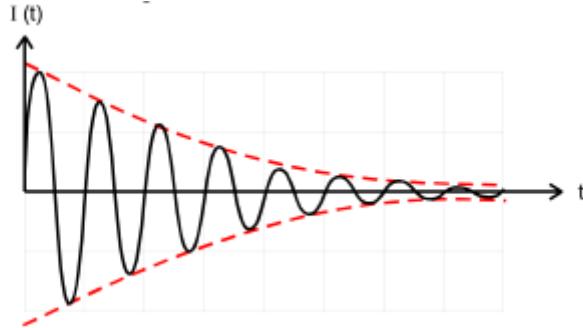


Abbildung 3: Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung

2.2.2 Der Kriechfall

Der zweite Fall tritt ein, falls $\frac{1}{LC} \frac{R^2}{4L^2}$ gilt, was dazu führt, dass selbst eine imaginäre Zahl darstellt. Damit enthält Gleichung 9 lediglich reelle Exponentialfunktionen, was bedeutet, dass keine Schwingung ausgeführt wird, sondern die Amplitude - abhängig von den Werten A_1 und A_2 - entweder direkt und monoton gegen null geht oder zuerst ein Maximum erreicht (die sogenannte Überschwingung) und dann gegen null strebt. Diese Verläufe sind in Abbildung 4 dargestellt.

2.2.3 Der aperiodische Grenzfall

Der dritte und letzte Fall tritt ein, wenn $\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}}{4L^2}$ gilt, was dazu führt, dass ν selbst null ergibt. Aus der Bedingung und Gleichung 9 ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}$$

wobei angemerkt werden soll, dass hierbei keine Überschwingung auftreten kann und das die Stromstärke hierbei noch schneller als beim Kriechfall gegen null strebt (siehe Abbildung 4).

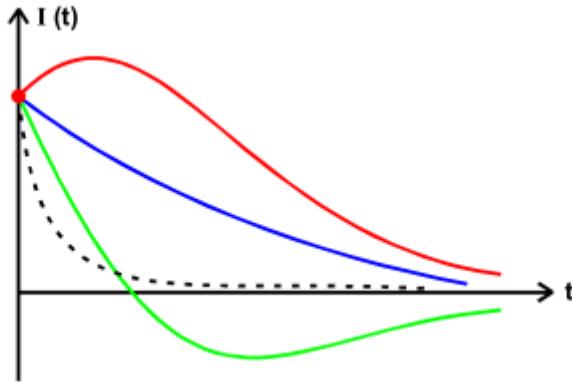


Abbildung 4: Darstellung des Kriechfalls und des aperiodischen Grenzfalls (gestrichelte Kurve)

2.3 Erzwungene Schwingungen

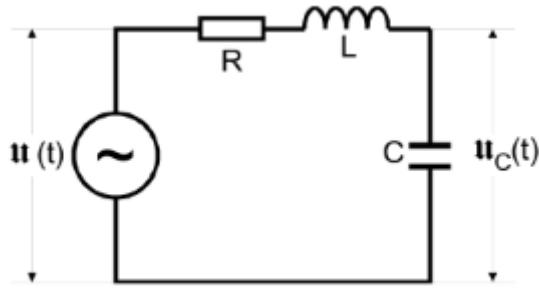


Abbildung 5: Schaltskizze eines erzwungenen RLC-Schwingkreises

Durch den Einbau einer Wechselstromquelle können am RCL-Kreis auch erzwungene Schwingungen betrachtet werden. Der schematische Aufbau für die Schaltung lässt sich der Abbildung 5 entnehmen. Für den von außen mit der Wechselspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ angetriebenen RCL-Kreis, geht Gleichung 1 in

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

über. Weiterhin lässt sich diese auf die Form

$$LC \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

bringen. Durch den Ansatz $U_C(\omega, t) = \tilde{U}(\omega) e^{i\omega t}$ ($\tilde{U}(\omega)$ ist eine komplexe Zahl) ergibt sich für die frequenzabhängigen Amplitude

$$\tilde{U}_C(\omega) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (15)$$

beziehungsweise für dessen Betrag

$$|\tilde{U}_C(\omega)| = U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (16)$$

Diese wird auch als Resonanzkurve bezeichnet. Für $\omega \rightarrow \infty$ gilt $U_C \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow 0$ gilt $U_C \rightarrow U_0$. Falls die sogenannte Resonanzfrequenz

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (17)$$

sich der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (18)$$

nähert, kann die Kondensatorspannung U_C aber auch größer als die anliegende Generatorenspannung U_0 sein. Im Fall der schwachen Dämpfung

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

überschreitet die Kondensatorspannung die Generatorenspannung, wobei

$$U_{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 \quad (19)$$

den Zusammenhang darstellt. Falls $R \rightarrow 0$ strebt, geht $U_C \rightarrow \infty$. Dies wird als Resonanzkatastrophe bezeichnet. Die Güte des Schwingkreises ergibt sich durch

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (20)$$

Weiterhin wird die Breite der Resonanzkurve durch die Differenz der beiden Frequenzen

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (21)$$

angegeben, an denen die Kondensatorspannung, unter der Bedingung $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$, auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache ihres Maximalwerts abgefallen ist.

[sample]

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Dämpfung des elektrischen Schwingkreises

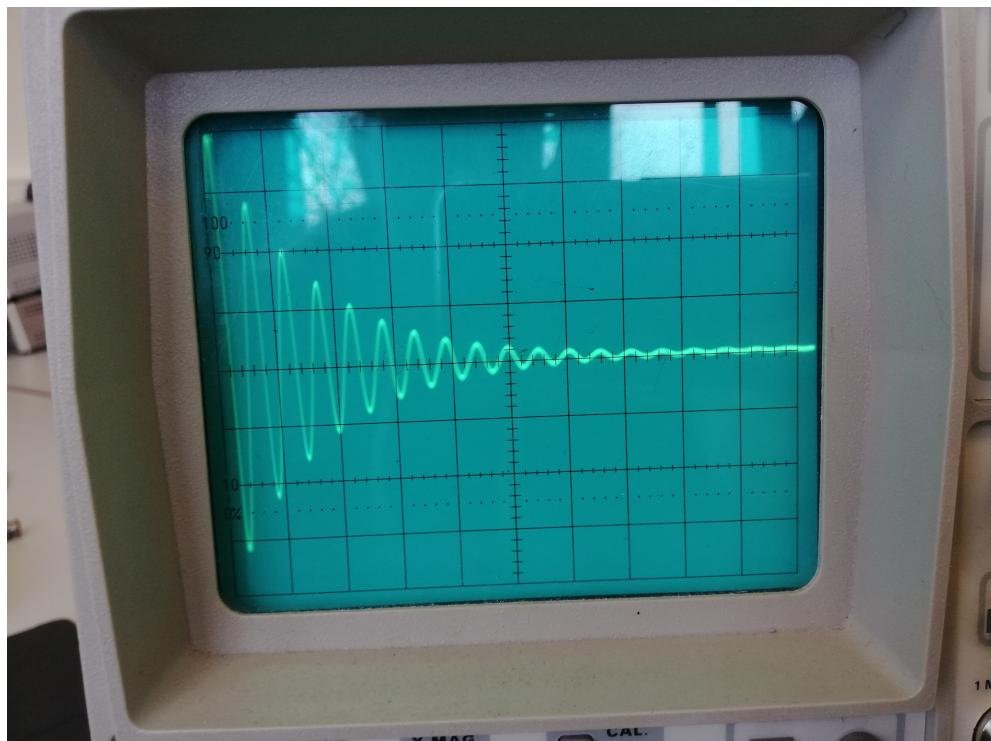


Abbildung 6: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit beim gedämpften Schwingkreis

$t / \mu\text{s}$	U_C / V
5	4
35	2,8
60	2
85	1,5
115	1,1
140	0,8
165	0,6
195	0,5
220	0,4
250	0,3
275	0,2
300	0,2

Tabelle 1: Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit beim gedämpften Schwingkreis

Aus Abbildung 6 wurden 12 Wertepaare abgelesen und in Tabelle 1 aufgelistet. Um die Abklingdauer T_{ex} zu bestimmen wurde nun zunächst eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei wurde eine Lineare Ausgleichsgerade mit Matplotlib erstellt, welche in Abbildung 8 zu sehen ist. Die Steigung

$$m = -0,01032 \cdot 10^{-3}$$

dieser Geraden entspricht dem Faktor im Exponenten in Gleichung 10, da $U_C(t)$ proportional zu $I(t)$ ist. Die Abklingdauer kann nach Gleichung 12 durch das Inverse des Betrags der Steigung als

$$T_{ex} = 96,9 \cdot 10^3 \text{ s}$$

berechnet werden. Mit der Abklingdauer kann nun eine nichtlineare Ausgleichskurve erstellt werden, die der Einhüllenden in Abbildung 6 entspricht. Die Ausgleichsgerade ist mit den abgelesenen Messwerten in Abbilung 7 zu sehen.

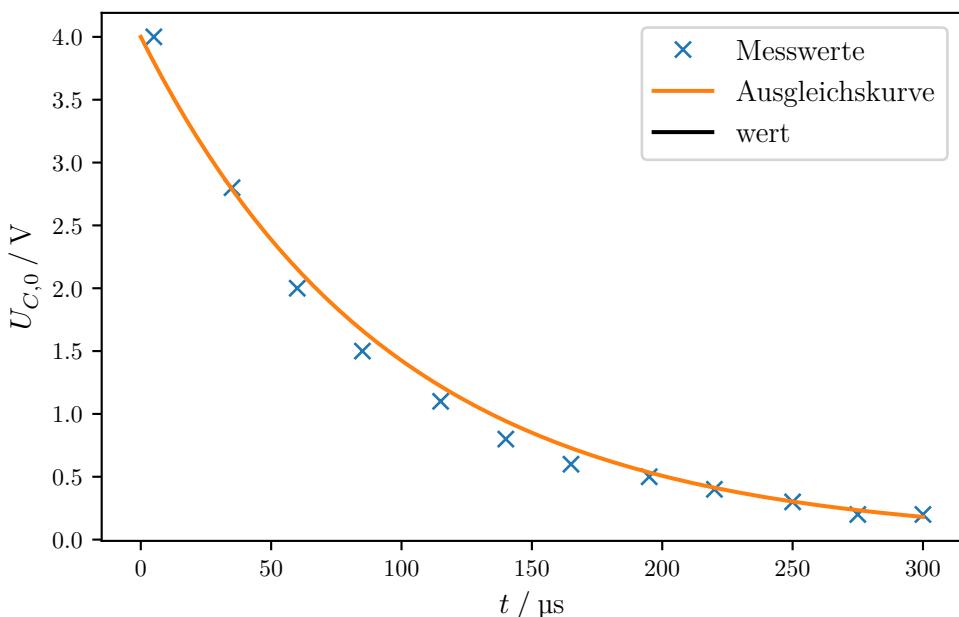


Abbildung 7: Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhangigkeit der Zeit

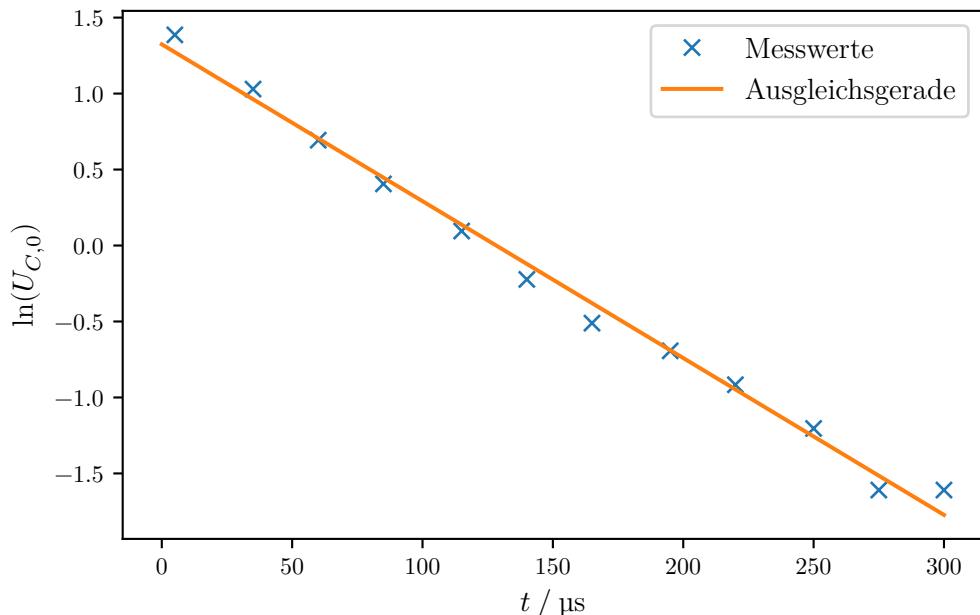


Abbildung 8: Linearisierte Darstellung der Amplitudenmaxima der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit

Der Dämpfungswiderstand R_{eff} ergibt sich durch Zusammenhang 12 als

$$R_{eff} = (0,07224 \pm 0,0021) \Omega$$

Die Abweichung zum eigentlichen Widerstandswert $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega$ lässt sich durch den Innenwiderstand des Generators erklären, welcher $R_G = 600 \Omega$ beträgt. (INVERSES KLÄREN)

4.2 Aperiodischer Grenzfall

Bei der Messung nach (REFERENZ AUF DURCHFÜHRUNG) ergab sich für R_{ap} ein Wert von

$$R_{ap} = 1,4 \text{ k}\Omega$$

Mit Gleichung (REFERENZ) lässt sich R_{ap} als

$$R_{ap} = 1,67 \text{ k}\Omega$$

berechnen. Beim Vergleich mit dem Messwert fällt wieder auf, dass sich die Abweichung durch den nicht beachteten Innenwiderstand $R_G = 600 \Omega$ des Generators erklären lässt.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

ω / kHz	U_C / V
3	2,3
31	2,3
63	2,5
94	2,7
126	3,1
157	3,8
173	4,2
188	4,8
195	5,0
201	5,2
207	5,6
214	5,8
220	5,8
226	5,8
232	5,8
239	5,6
245	5,4
251	5,0
267	4,2
283	3,4
314	2,3
346	1,7
377	1,4
942	0,14
1885	0,02

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

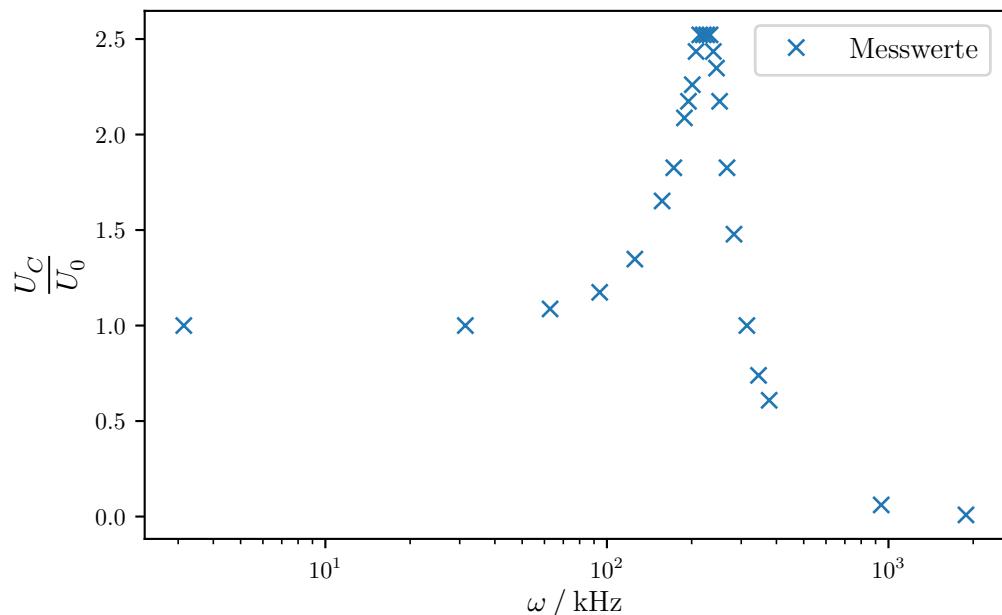


Abbildung 9: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

Die Messwerte aus Tabelle 2 werden in Abbildung 9 dargestellt. Dabei ist U_0 der gemessene Wert $U_0 = 2,3 \text{ V}$ der Generatorspannung. Die Resonanzüberhöhung lässt sich als

$$q = 2,52$$

ablesen. Dieser lässt sich mit dem nach Gleichung 20 als

$$q = 0,9599 \pm 0,0024$$

errechneten Wert vergleichen. Für diesen wurde nun $R = (271,6 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$ angenommen. (VERGLEICH) In Abbildung 10 ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt.

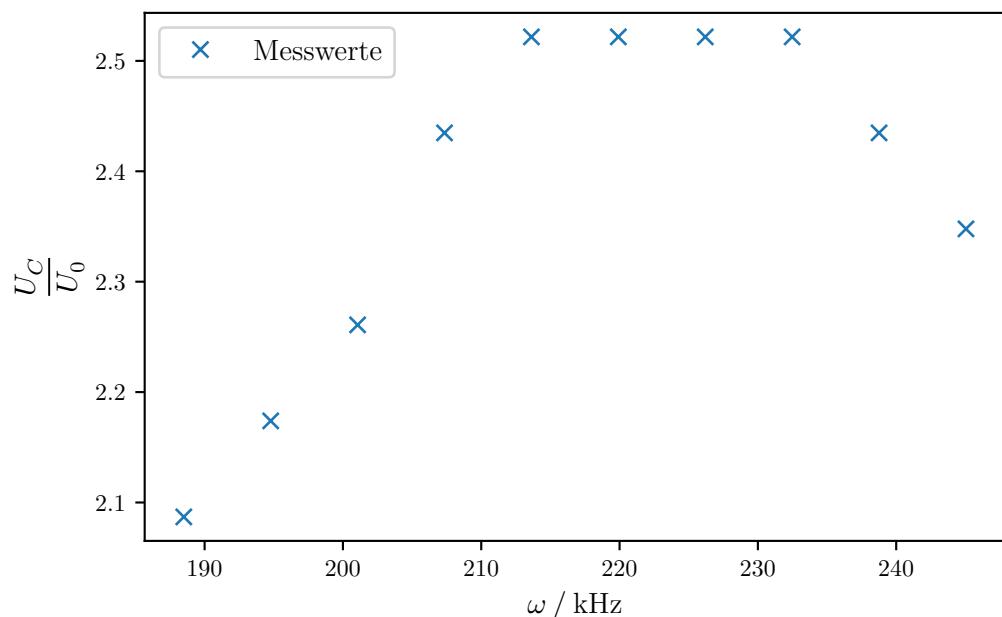


Abbildung 10: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung in Nähe der Resonanz

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

ω / kHz	$a / \mu\text{s}$	$b / \mu\text{s}$	ϕ
3	0,0	2000,0	0,00
31	0,0	100,0	0,00
63	2,0	50,0	0,25
94	7,5	68,0	0,69
126	2,0	50,0	0,25
157	2,5	40,0	0,39
173	3,0	37,0	0,51
188	3,5	34,0	0,65
195	4,0	33,0	0,76
201	4,5	32,0	0,88
207	5,0	30,5	1,03
214	5,5	30,0	1,15
220	6,0	29,0	1,30
226	6,0	28,5	1,32
232	6,5	27,5	1,49
239	7,0	27,0	1,63
245	7,5	26,0	1,81
251	7,5	25,5	1,85
267	8,0	24,0	2,09
283	8,5	22,5	2,37
314	8,5	18,5	2,89
346	5,8	18,5	1,97
377	7,5	17,0	2,77

Tabelle 3: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

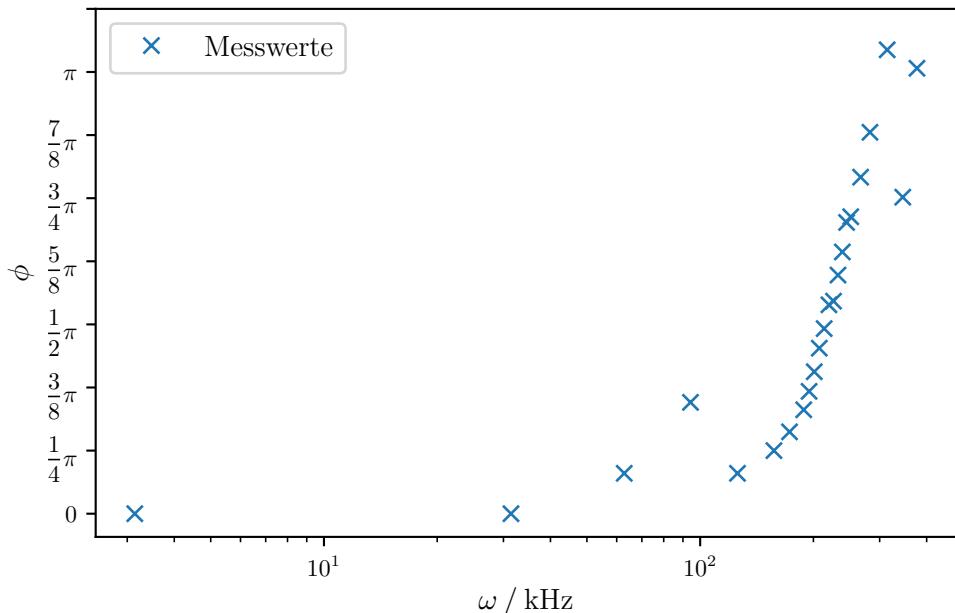


Abbildung 11: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung

Die Messwerte aus Tabelle 3 werden in Abbildung 11 dargestellt. In Abbildung 12 ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt. Diese lässt sich an der Stelle $\pi/2$ als

$$\omega_{res} = 239 \text{ kHz}$$

ablesen. Im Vergleich zum, durch Gleichung 17, gerechneten Wert

$$\omega_{res} = (161, 7 \pm 0, 7) \text{ kHz}$$

fällt auf, dass(VERGLEICH). Auch hier wurde $R = (271, 6 \pm 0, 1) \Omega + 600 \Omega$ angenommen.

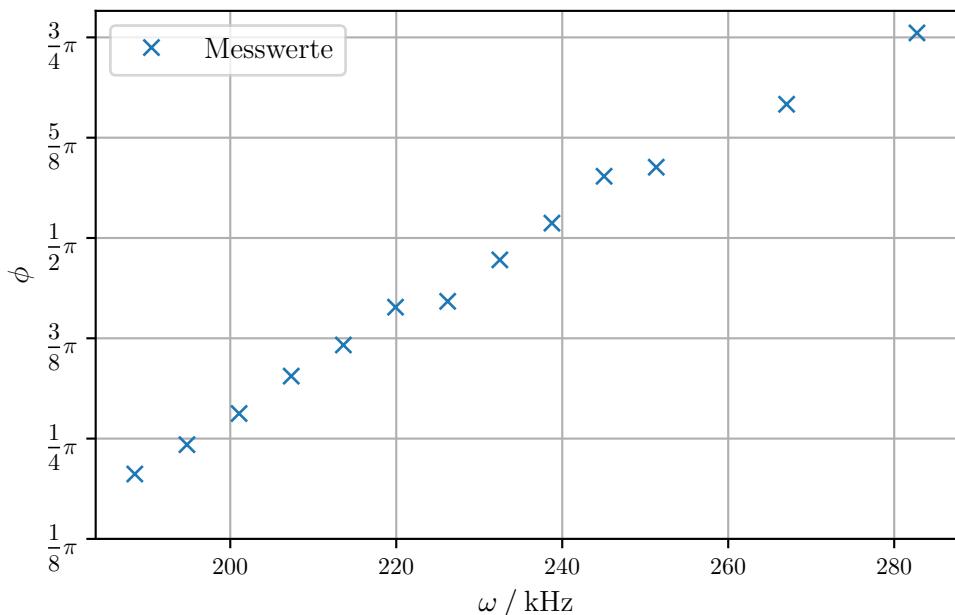


Abbildung 12: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorenspannung in Nähe der Resonanz

ω_1 liegt bei $\pi/4$ und entspricht somit dem Messwert

$$\omega_1 = 195 \text{ kHz}.$$

ω_1 liegt bei $\pi \cdot 3/4$ und entspricht somit dem Messwert

$$\omega_2 = 283 \text{ kHz}.$$

Diese Werte können mit den beiden aus Gleichung (REFERENZ) errechneten Werten

$$\omega_1 = (145 \pm 0,4) \text{ kHz}$$

$$\omega_2 = (394 \pm 0,9) \text{ kHz}$$

verglichen werden. (VERGLEICH)

5 Diskussion

Das vom Oszilloskop aufgenommene Bild 6 entspricht der erwarteten Form einer gedämpften Schwingung (siehe 3)

-Problem mit Inversem erklären? -Probelm, dass Innenwiderstand vielleicht nicht dem unseres Gerätes entspricht

Bei der Messung der Phasenverschiebung wurden nicht genug Werte aufgenommen um den nach Gleichung (REFERENZ) erwarteten Verlauf eines Arcustangens zu erkennen. Außerdem stechen einige Werte, wie der dritte Messwert in Abbildung 9 ungewöhnlich hervor, was wohl auf ein falsches Ablesen der Größen a oder b zurückzuführen ist. Bei der Bestimmung von ω_1 und ω_2 sind Ungenauigkeiten dadurch entstanden, dass jeweils der Wert abgelesen wurde, welcher am nähsten am gesuchten Vielfachen von π liegt. Doch diese Ungenauigkeiten können nicht erklären, warum vro allem $\omega_2 = 283 \text{ kHz}$ so stark vom errechneten Wert $\omega_2 = (394 \pm 0,9) \text{ kHz}$ abweicht. (VERWEIS AUF PROBLEM MIT INNENWIDERSTAND?)

6 Anhang

a) $f = 500 \text{ Hz}$	Zeit [μs]	$U [\text{V}]$
	0,150	0
	0,7 - 5,0	28
	1,2 - 5,0	2
	1,7 - 5,0	4,5
	2,3 - 5,0	4,1
	2,8 - 5,0	0,8
	3,3 - 5,0	0,6
	3,9 - 5,0	0,5
	4,4 - 5,0	0,4
	5 - 5,0	0,3
	5,5 - 5,0	0,2
	6 - 5,0	0,2

b) $f = 500 \text{ Hz}$	$R_{AP} = 0,28 \cdot 5 \Omega$

c) Frequenzabhangigkeit der Kondensatortspannung an einem Serienresonanzkreis

d) Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatortspannung				
$f \text{ in Hz}$	$U_c [\text{V}]$	$U_o [\text{V}]$	α°	b
500	2,3	2,3	0,5	2ms
5000	2,3	0,5	5,2 - 10 ms	
10 000	2,5	0,2 - 10 ms	7,5 - 20 ms	
15 000	2,7	1,5 - 5 ms	6,8 - 10 ms	
20 000	3,1	0,2 - 10 ms	5 - 10 ms	
25 000	3,8	0,9 - 5 ms	4 - 10 ms	
- 27 500	4,2	0,6 - 5 ms	3,7 - 10 ms	
30 000	4,8	0,7 - 5 ms	3,4 - 10 ms	
31 000	5	0,8 - 5 ms	3,3 - 10 ms	
32 000	5,2	0,9 - 5 ms	3,2 - 10 ms	
33 000	7,8 - 2	5 ms	6,1 - 5 ms	
34 000	7,9 - 2	7,1 - 5 ms	6 - 5 ms	
35 000	2,9 - 2	1,2 - 5 ms	5,8 - 5 ms	
36 000	2,9 - 2	1,2 - 5 ms	5,7 - 5 ms	
37 000	2,9 - 2	1,3 - 5 ms	5,5 - 5 ms	
38 000	2,8 - 2	1,4 - 5 ms	5,4 - 5 ms	
39 000	2,7 - 2	1,5 - 5 ms	5,2 - 5 ms	
- 40 000	2,5 - 2	1,5 - 5 ms	5,1 - 5 ms	
42 500	2,1 - 2	1,6 - 5 ms	4,8 - 5 ms	
45 000	3,4	1,7 - 5 ms	4,5 - 5 ms	
50 000	2,3	1,7 - 5 ms	3,7 - 5 ms	
55 000	1,7	2,0 - 1,6 - 5 ms	3,7 - 5 ms	
60 000	1,4	1,5 - 5 ms	3,4 - 5 ms	
150 000	0,7 - 0,2			
300 000	0,2 - 0,1			

S. Venhaus

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.