

Versuch 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Nico Schaffrath
nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt
mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.12.2019

Abgabe: 17.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Der ideale Schwingkreis	3
2.2 Der reale Schwingkreis	3
3 Durchführung	4
4 Auswertung	4
4.1 Dämpfung des elektischen Schwingkreises	4
4.2 Aperiodischer Grenzfall	7
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	8
4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung	11
5 Diskussion	13
6 Anhang	13
Literatur	13

1 Ziel

2 Theorie

2.1 Der ideale Schwingkreis

In der Elektrotechnik setzt sich ein idealer Schwingkreis lediglich aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L zusammen. Unter der Voraussetzung, dass diesem einmalig Energie hinzugeführt wurde, pendelt diese periodisch zwischen Kondensator und Spule hin und her. Dies äußert sich darin, dass beispielsweise zu Beginn der Kondensator aufgeladen ist und sich zwischen den Kondensatorplatten ein elektrisches Feld bildet. Wandern die Elektronen nun von der einen Kondensatorplatte durch den Draht und damit auch mitunter durch die Spule, so nimmt mit dem elektrischen Feld auch die darin gespeicherte Energie ab. Allerdings baut sich in der Spule ein magnetisches Feld auf. Da davon ausgegangen wird, dass ein verlustfreier Schwingkreis vorliegt, muss Energieerhaltung gelten, was bedeutet, dass die Abnahme der im elektrischen Feld gespeicherten Energie exakt der Zunahme der elektrischen Energie im magnetischen Feld entspricht.

2.2 Der reale Schwingkreis

Der Unterschied zwischen idealem und realem Schwingkreis liegt darin, dass bei einem realen Schwingkreis ein ohmscher Widerstand verbaut ist. Somit verliert der Schwingkreis mit jedem Durchgang Energie in Form von Joulescher Wärme. In diesem Fall wird von einem gedämpften Schwingkreis gesprochen. Wie der Abbildung (Referenz) entnommen werden kann, bildet der RCL-Schwingkreis eine Masche. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Masche gleich null. Somit ergibt sich für den RCL-Kreis die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Dabei gelten für die Spannungen die Beziehungen

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt}, \quad (4)$$

wobei für die Stromstärke

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (5)$$

gelten soll. Mithilfe dieser Zusammenhänge ergibt sich aus 1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L} \dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0, \quad (6)$$

welche sich mithilfe des Ansatzes

$$I(t) = Ue^{i\omega t} \quad (7)$$

lösen lässt. Durch Einsetzen des Ansatzes ergibt sich schließlich die charakteristische Gleichung

$$-w^2 + i\frac{R}{L}w + \frac{1}{LC} = 0. \quad (8)$$

Mit den beiden Kreisfrequenzen w_1 und w_2

$$w_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (9)$$

kann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = U_1 e^{iw_1 t} + U_2 e^{iw_2 t}, \quad (10)$$

wobei U_1 und U_2 komplexe Koeffizienten darstellen. Wird nun die Darstellung

$$\mu = \frac{R}{4\pi L} \quad (11)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (12)$$

verwendet, lässt sich 10 zu

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i2\pi\nu t} + U_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (13)$$

umschreiben.

[sample]

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Dämpfung des elektischen Schwingkreises

(BILD)

$t / \mu\text{s}$	U_C / V
5	4
35	2,8
60	2
85	1,5
115	1,1
140	0,8
165	0,6
195	0,5
220	0,4
250	0,3
275	0,2
300	0,2

Tabelle 1: Kondensatorsspannung in Abhängigkeit der Zeit beim gedämpften Schwingkreis

Aus Abbildung (REFERENZ) wurden 12 Wertepaare abgelesen und in Tabelle 3 aufgelistet. Um die Abklingdauer T_{ex} zu bestimmen wurde nun zunächst eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei wurde eine Lineare Ausgleichsgerade mit Matplotlib erstellt, welche in Abbildung 2 zu sehen ist. Die Steigung

$$m = -0,01032 \cdot 10^{-3}$$

dieser Geraden entspricht dem Faktor im Exponenten in Gleichung (REFERENZ AUF GLEICHUNG), da $U_C(t)$ proportional zu $I(t)$ ist. Die Abklingdauer kann nach Gleichung (REFERENZ AUF GLEICHUNG) durch das Inverse des Betrags der Steigung als

$$T_{ex} = 96,9 \cdot 10^{-3}$$

berechnet werden. Mit der Abklingdauer kann nun eine nichtlineare Ausgleichskurve erstellt werden, die der Einhüllenden in Abbildung (REFERENZ) entspricht. Die Ausgleichsgerade ist mit den abgelesenen Messwerten in Abbildung 1 zu sehen.

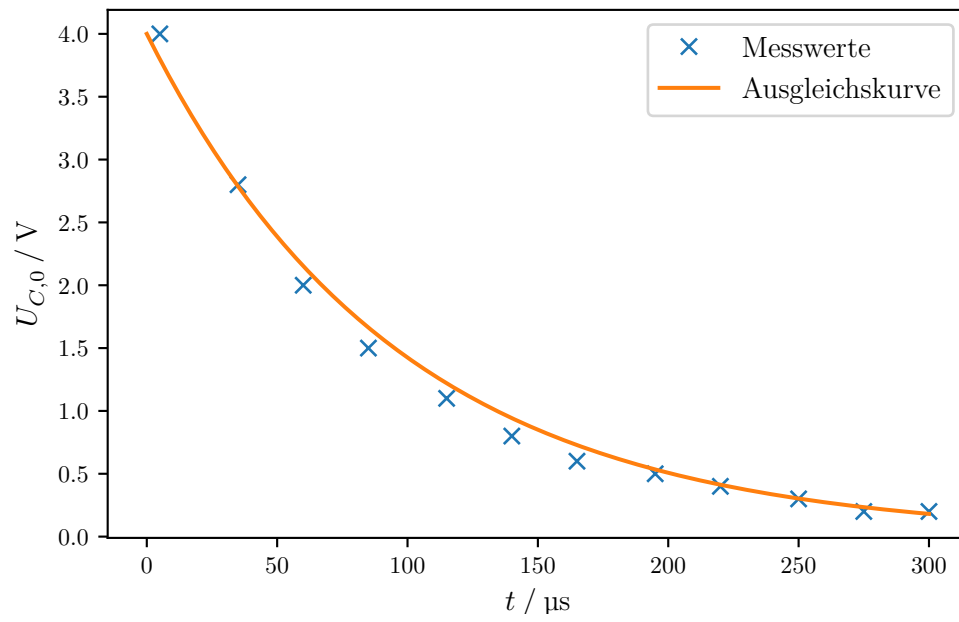


Abbildung 1: Amplitudenmaximum der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit

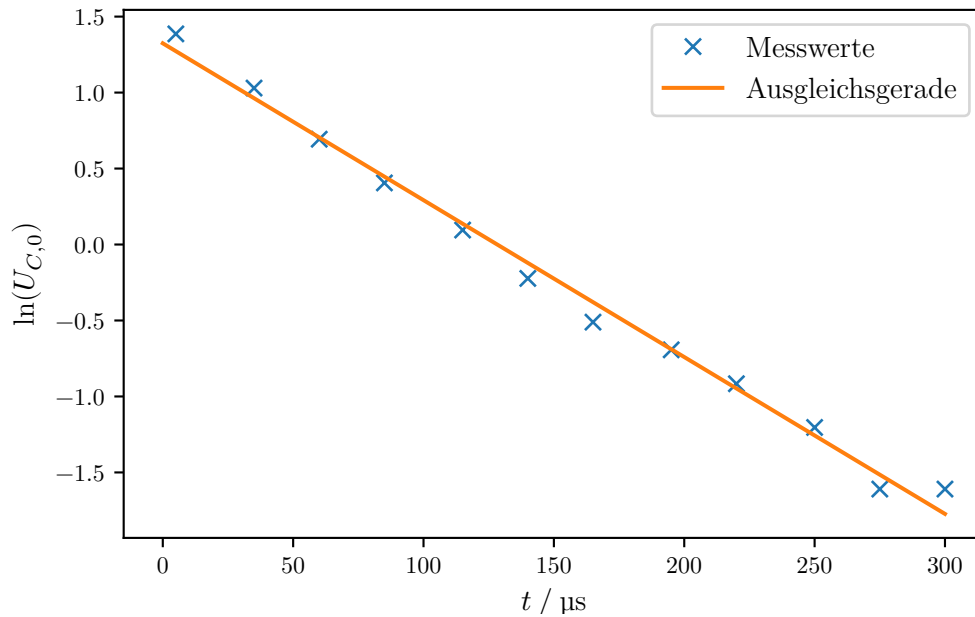


Abbildung 2: Linearisierte Darstellung der Amplitudenmaxima der Kondensatorspannung eines RLC-Kreises in Abhängigkeit der Zeit

Der Dämpfungswiderstand R_{eff} ergibt sich durch Zusammenhang (REFERENZ) als WERT.

Die Abweichung zum eigentlichen Widerstandwert $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega$ lässt sich durch den Innenwiderstand des Generators erklären, welcher $R_G = 600 \Omega$ beträgt.

4.2 Aperiodischer Grenzfall

Bei der Messung nach (REFERENZ AUF DURCHFÜHRUNG) ergab sich für R_{ap} ein Wert von

$$R_{ap} = 1,4 \text{ k}\Omega$$

Mit Gleichung (REFERENZ) lässt sich R_{ap} als

$$R_{ap} = 1,67 \text{ k}\Omega$$

berechnen. Beim Vergleich mit dem Messwert fällt wieder auf, dass sich die Abweichung durch den nicht beachteten Innenwiderstand $R_G = 600 \Omega$ des Generators erklären lässt.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

ω / kHz	U_C / V
3	2,3
31	2,3
63	2,5
94	2,7
126	3,1
157	3,8
173	4,2
188	4,8
195	5,0
201	5,2
207	5,6
214	5,8
220	5,8
226	5,8
232	5,8
239	5,6
245	5,4
251	5,0
267	4,2
283	3,4
314	2,3
346	1,7
377	1,4
942	0,14
1885	0,02

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

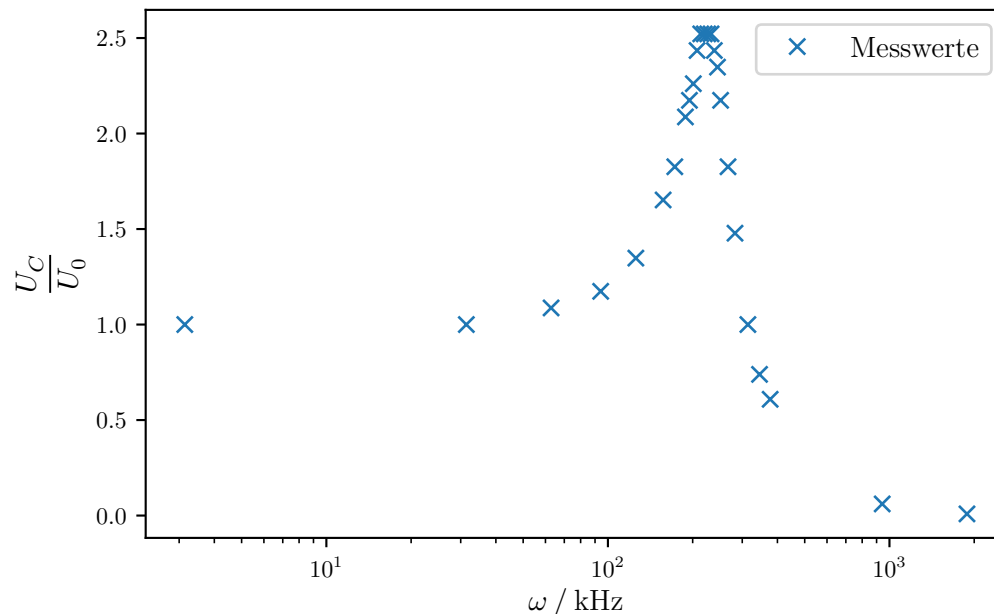


Abbildung 3: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung

Die Messwerte aus Tabelle 2 werden in Abbildung ?? dargestellt. Dabei ist U_0 der gemessene Wert $U_0 = 2,3 \text{ V}$ der Generatorspannung. Die Resonanzüberhöhung lässt sich als

$$q = 2,52$$

ablesen. Dieser lässt sich mit dem nach Gleichung (REFERENZ) als

$$q = 0,9599 \pm 0,0024$$

errechneten Wert vergleichen. Für diesen wurde nun $R = (271,6 \pm 0,1) \Omega + 600 \Omega$ angenommen. (VERGLEICH) In Abbildung (REFERENZ) ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt.

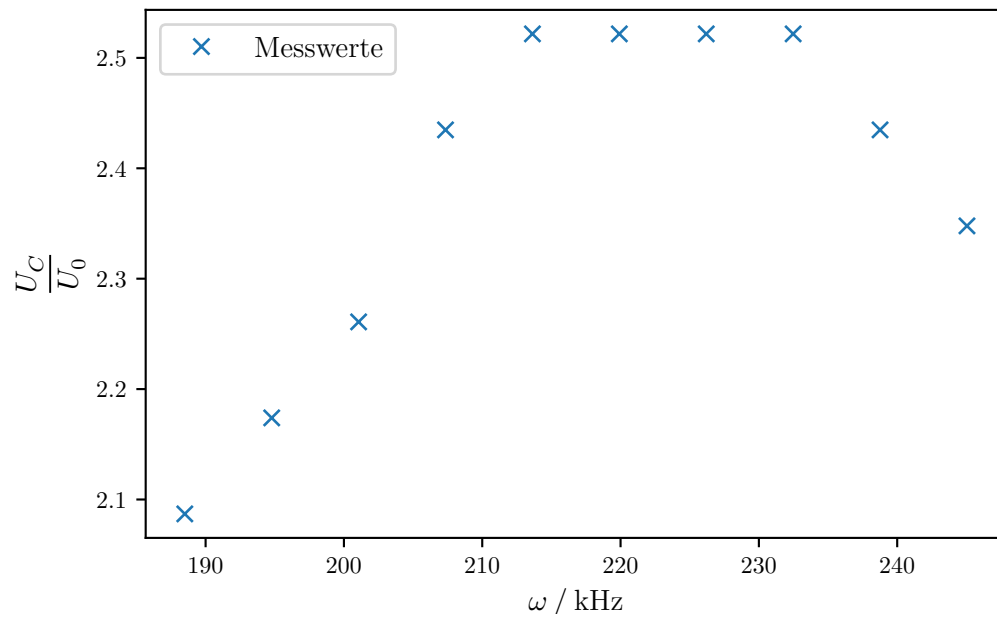


Abbildung 4: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung bei einer erzwungenen Schwingung in Nähe der Resonanz

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung

ω / kHz	$a / \mu\text{s}$	$b / \mu\text{s}$	ϕ
3	0,0	2000,0	0,00
31	0,0	100,0	0,00
63	2,0	50,0	0,25
94	7,5	68,0	0,69
126	2,0	50,0	0,25
157	2,5	40,0	0,39
173	3,0	37,0	0,51
188	3,5	34,0	0,65
195	4,0	33,0	0,76
201	4,5	32,0	0,88
207	5,0	30,5	1,03
214	5,5	30,0	1,15
220	6,0	29,0	1,30
226	6,0	28,5	1,32
232	6,5	27,5	1,49
239	7,0	27,0	1,63
245	7,5	26,0	1,81
251	7,5	25,5	1,85
267	8,0	24,0	2,09
283	8,5	22,5	2,37
314	8,5	18,5	2,89
346	5,8	18,5	1,97
377	7,5	17,0	2,77

Tabelle 3: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung

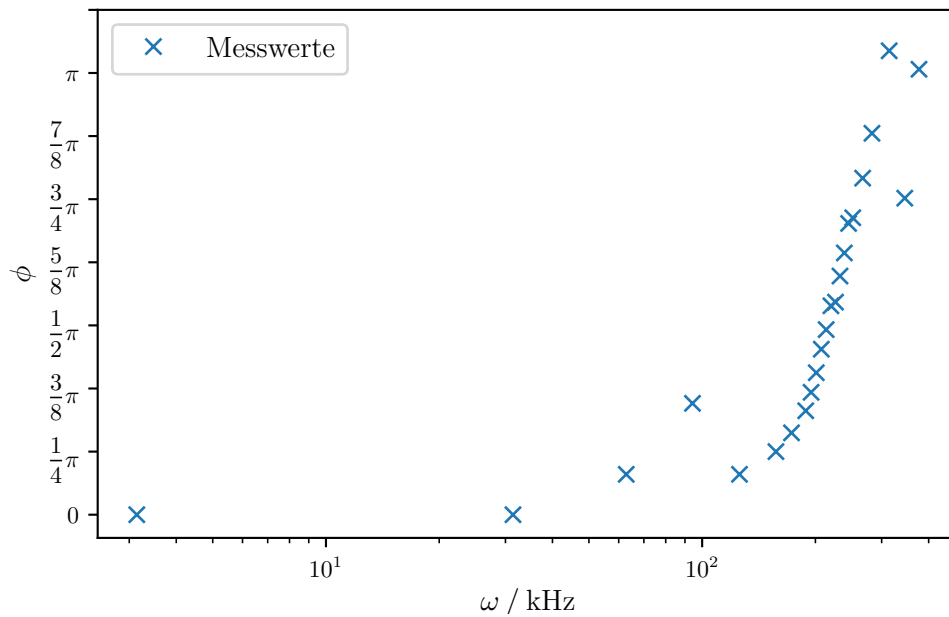


Abbildung 5: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung

Die Messwerte aus Tabelle (REFERENZ) werden in Abbildung (REFERENZ) dargestellt. In Abbildung (REFERENZ) ist der Bereich um die Resonanzfrequenz linear dargestellt. Diese lässt sich an der Stelle $\pi/2$ als (WERT) ablesen. Im Vergleich zum gerechneten Wert (WERT) fällt auf, dass(VERGLEICH).

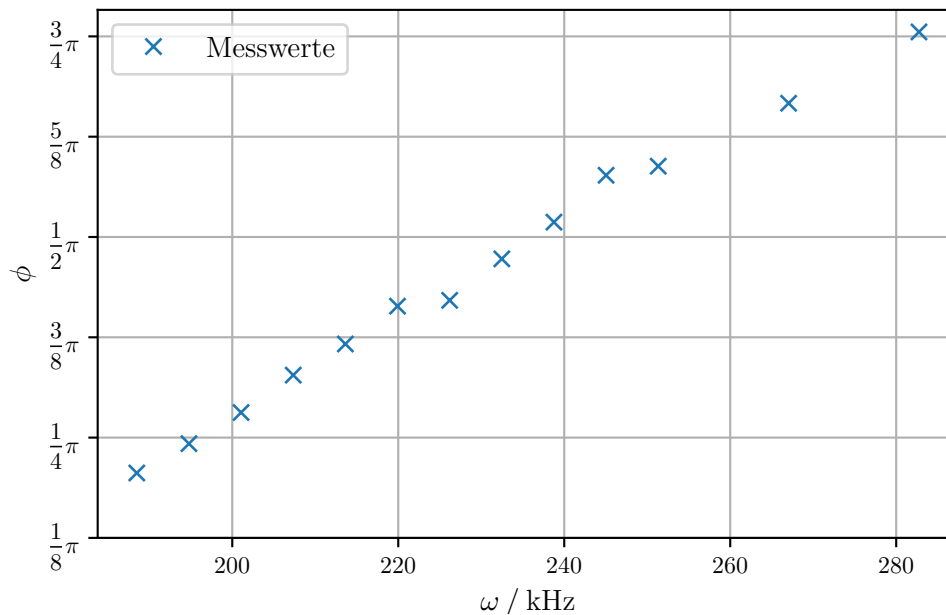


Abbildung 6: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Generatorspannung in Nähe der Resonanz

ω_1 liegt bei $\pi/4$ und entspricht somit dem Messwert (WERT).

ω_1 liegt bei $\pi \cdot 3/4$ und entspricht somit dem Messwert (WERT).

Diese Werte können mit den beiden aus Gleichung (REFERENZ) errechneten Werten (WERTE)

verglichen werden. (VERGLEICH)

5 Diskussion

6 Anhang

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.

- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.