Домашнее задание 1

Алексеев К.П.

Отрицательное биномиальное распределение

1 Основные характеристики распределения

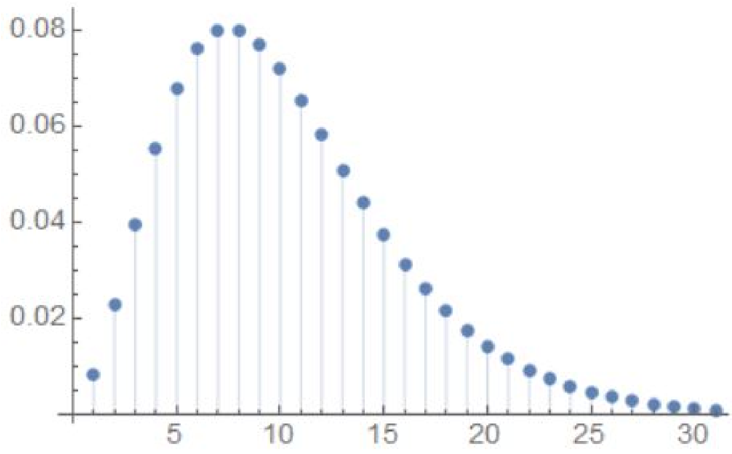
Отрицательное биномиальное распределение имеет следующую функцию вероятности:
$P(\xi = k) = \binom{r+k-1}{k} * q^k * p^r$, где ξ - случайная величина, k - число "неудач r - число "успехов".
Распределение используется, когда проводят некие испытания, которые могут быть успешными (вероятность наступления одного такого события - p) или неуспешными (верятность равна 1-p = q). Испытания проводят до того момента, пока не наступит успех с номером r, то есть распределение задается двумя параметрами: вероятностью успеха одного события p, и числом неудачных испытаний r. $\xi \sim$ NB(r, p).
Найдем **мат. ожидание для данного распределения**. Общая формула мат. ожидания для дискретного случая:
$M_\xi = \Sigma_{i=0}^{n} x_i * P(\xi = i)$;
Получаем для отрицательного биномаильного распределения:
$M_\xi = \Sigma_{i=0}^{\infty} i * \binom{r+i-1}{i} * q^r * p^i$
Найдём производящую функцию моментов для данного распределения. Общая формула:
$f_\xi(s) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(\xi = i) * e^{ti}$
Заметим, что промежутки между моментами появления соседних успехов с номерами n и n+1 (n+1 <= r), независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Другими словами, случайную величину ξ можно представить в виде суммы $\Sigma_{i=1}^{r} \xi_i$, где ξ_i для $\forall$ i имеет геометрическое распределение, все ξ_i - н.о.р.с.в. (действительно, каждый такой промежуток состоит из набора n неудач, которые проводились до испытания, проведенного успешно, и, непосредственно, 1 успеха, что характерно для геометрического распределения). При этом, по свойствам производящей функции моментов:

$f_\xi(t) = \Sigma_{i=0}^{\infty} P(\xi = i) * e^{ti} = \Pi_{k=0}^{r} f_{\xi_k}(t)$, если $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_r$
Тогда вычислим производящие функцию моментов для каждой ξ_k:
$f_{\xi_k}(t) = \Sigma_{i=0}^{\infty} q^i * p * e^{tk} = \{$как сумма бесконечно убывающей регрессии, 0<p*q<1$\} = p * \frac{1}{1-qe^t}$
Тогда для отрицательного биномиального распределения получаем:
$f_\xi(t) = \Pi_{k=1}^{r} f_{\xi_k}(t) = (f_{\xi_k})^r = (\frac{p}{1-qe^t})^r$
Зная функцию распределения моментов можно найти мат. ожидание и дисперсию:
M$[\xi] = \frac{df_\xi(t)}{dt}$ (при t = 0)
M$[\xi] = r(\frac{p}{1-qe^t})^{r-1} \frac{p(-1)}{(1-qe^t)^2}(-q)e^t = \{\text{t} = 0\} = \frac{rp^r q}{p^{r+1}} = \frac{rq}{p}$
M$[\xi^2] = \frac{d^2 f_\xi(s)}{ds^2} = \frac{qr(\frac{(-1)p}{qe^t-1})^r(\frac{qre^t}{qe^t-1} + \frac{qe^t}{qe^t-1} - 1)e^t}{qe^t-1} = \{\text{t} = 0\} = \frac{qr(\frac{qr}{-p} + \frac{q}{-p} - 1)}{-p} = \frac{p^2 r(r+1) + qrp}{p^2}$
$D[\xi] = M[\xi^2] - (M[\xi])^2]$
$D[\xi] = \frac{q^2 r(r+1) + prq}{p^2} - (\frac{rq}{p})^2 = \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p} = \frac{qr(p+q)}{p^2} = \frac{qr}{p^2}$
Таким образом, для отрицательного биномиального распределения получили, что мат. ожидание равно $M[\xi] = \frac{rq}{p}$;
для дисперсии: $D[\xi] = \frac{rq}{p^2}$
Найдем **функцию распределения**:
$F_\xi(x) = P\{\xi <= x\} = \Sigma_{i:x_i<=x} P\{\xi = x_i\}$, где x_i - одно из значений случайной величины.
$F_\xi(x) = \Sigma_{i:x_i<=x} \binom{r+i-1}{i} * q^i * p^r$

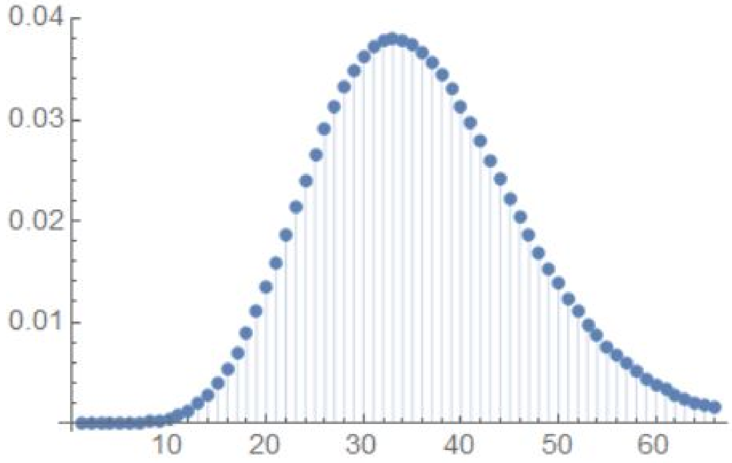
Найдем **характеристическую функцию** данного распределения:
$\phi_\xi(t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k)$ - определение хар. функции
Найти эту функцию для отрицательного биномиального распределения можно, пользуясь тем, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_r$, где $\forall i \xi_i$ имеет геометрическое распределение, и все эти величины не зависят друг от друга. В этом случае для характеристической функции ϕ_ξ(t) верно следующее:
$\phi_\xi(t) = \Pi_{k=1}^{r} \phi_{\xi_k}(t)$

$\forall k : \phi_{\xi_k}(t) = \Sigma_{j=0}^{\infty} e^{itj} q^j p = p\frac{1}{1-e^{it}q}$

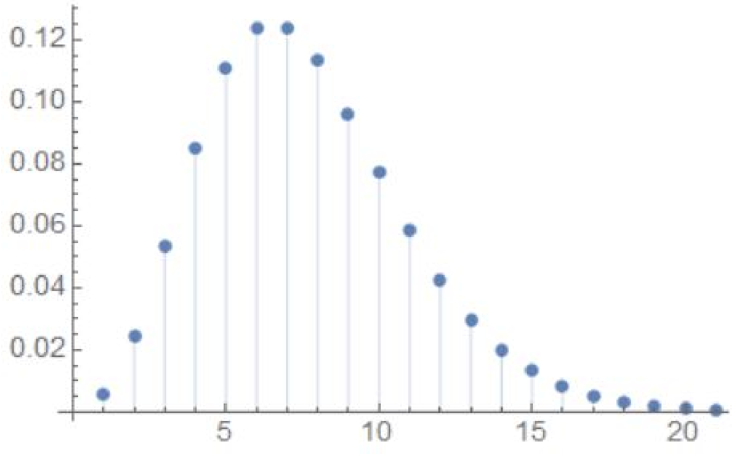
$\phi_\xi(t) = \Pi_{k=1}^{r} \frac{p}{1-e^{it}q} = (\frac{p}{1-e^{it}q})^r$ - **характеристическая функция отрицательного биномиального распределения**.
Найдём **производящую функцию**. Общая формула:
$f_\xi(s) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P\{\xi = k\} s^k$;
находим аналогично характеричтической функции:
$f_{\xi_k}(s) = \Sigma_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = \frac{p}{1-qs}$;
$f_\xi(s) = \Pi_{i=1}^{r} \frac{p}{1-qs} = (\frac{p}{1-qs})^r$
Функция вероятности при p = 0.3, r = 4:



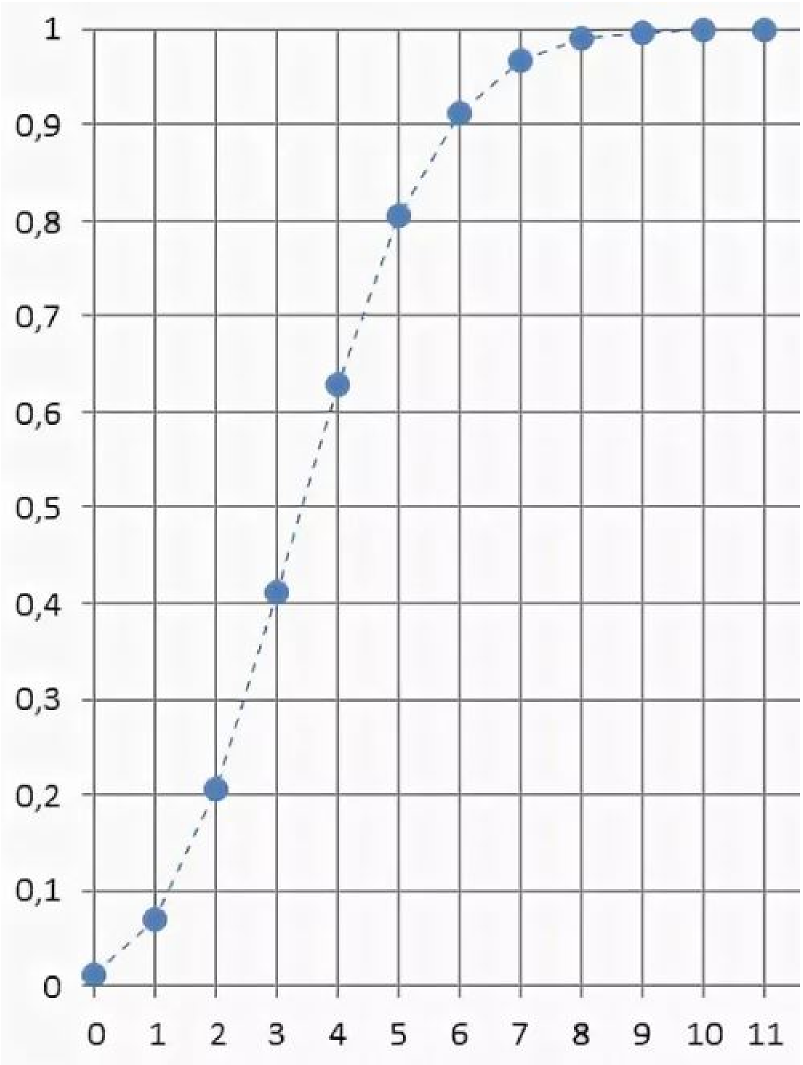
Функция вероятности при p = 0.3, r = 15:



Функция вероятности при p = 0.6, r = 10:



Функция распределения вероятности при p = 0.8, r = 20:



2 Примеры событий, которые могут быть описаны отрицательным биномиальным распределением

Связь отрицательного биномиального распределения с другими:
Связь отрицательного биномиального и геометрического распределений:
Геометрическое распределение — это частный случай отрицательно би-

номиального распределения, соответствующий случаю r = 1 (число успехов в последовательности испыфтаний Бернулли). Действительно, в этом случае функции вероятности у обоих распределений совпадают:
$P(\xi = k) = \binom{r+k-1}{k} * q^k * p^r =$ q$^k p^1 = q^k p -$ дляотрицательногобиномиального.
P$(\xi_2 = k) = q^k p = P(\xi = k)$ - для геометрического.
Из этого следует, что если $\{X_1, X_2,.., X_n\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с геометрическим распределением с параметром p, то С.В. ξ: $\xi = \Sigma_{i=1}^n X_i$ имеет отрицательное биномиальное распределение $\overline{Bi}(n,p)$.

Связь отрицательного биномиального и логарифмического распределений

Пусть у нас есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_1, X_2,.., X_n\}$ с логарифмическим распределением (производящая функция для каждой из этих С.В. - $\frac{ln(1-\theta z)}{ln(1-\theta)}$), при этом N - случайная величина с Пуассоновским распределением с параметром λ, которая не зависит ни от какого X_i. Пусть у нас есть случайная величина $\xi = \Sigma_{i=1}^n X_i$. Тогда производящая функция для ξ:
$f_\xi(z) = \Pi_{k=1}^n \frac{ln(1-\theta z)}{ln(1-\theta)} =$ exp$[\lambda \frac{ln(1-\theta z)}{ln(1-\theta)} - 1] = (\frac{1-\theta}{1-\theta z})^{-\lambda/ln(1-\theta)}$ - производящая функция для отрицательного биномиального распределения $\overline{Bi}(r,p)$, r = $-\lambda/ln(1-\theta)$, p = 1 - θ.

Связь отрицательного биномиального и Пуассоновского распределений:

Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона:
X$\sim$Pois(λ),
при этом λ - случайная величина и имеет гамма-распределение:
$\lambda \sim \Gamma$(r,$\frac{p}{1-p}$).
Тогда X имеет отрицательное биномиальное распределение:
P(X = k) = $\int_0^\infty P_{Pois}(X = k|\lambda = \omega) f_{Gamma}(\omega) d\omega =$
$= \int_0^\infty \frac{\omega^k e^\omega}{k!} \frac{1}{\Gamma(r)(\frac{p}{1-p})^r} \omega^{r-1} e^{-\frac{\omega(1-p)}{p}} d\omega = \frac{(1-p)^r}{k!\Gamma(r)p^r} \int_0^\infty \omega^{k+r-1} e^{\frac{w}{p}} d\omega =$
$= \frac{(1-p)^r}{k!\Gamma(r)p^r} p^{r+k} \Gamma(r+k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\Gamma(r)} (1-p)^r p^k$ - функция вероятности

для отрицательного биномиального распределения

Связь отрицательного биномиального распределения и урновой модели Пойа

Рассмотрим случайный выбор n шаров из урны, в которой Np белых и N(1p) черных шаров. Предположим, что после каждого вытаскивания вынутый шар возвращается обратно вместе с t = Nβ шарами того же цвета.
Пусть X - число белых шаров в выборке. Тогда:
P(X = x) = $C_n^x (\frac{p}{\beta})^{[x]} (\frac{q}{\beta})^{[n-x]} / (\frac{1}{\beta})^{[n]}$, где обозначение $a^[x]$ = a(a+1)..(a+x-1).

Тогда при n $\to \infty$, p $\to 0$, $\beta \to 0$ получаем, что np $\to \theta$k, n$\beta \to \theta$, и таким образом, предельная форма P(X = x) представляет собой функцию вероятности для отрицательного биномиального распределения P(X = θ) с вероятностями p и q.

Типичная интерпретация

Пусть у нас есть последовательность испытаний Бернулли $\{X_1,\ X_2,\ ...\}$, которая зависит от некоторых параметров (будет сказано позднее). Пусть испытания будут проводиться до r-ого успеха, r $\in N$. p - вероятность успеха, r = 1-p - вероятность неудачи для каждого испытания Бернулли. Тогда это будет отрицательное биномиальное распределение $\overline{Bi}\{r, p\}$, r, p - параметры, задающие распределение (от параметра r зависит последовательность испытаний Бернулли - значение r задает число испытаний Бернулли (при разных r число испытаний зачастую будет сильно разниться)).

Нетипичная интерпретация

Пусть испытания системы обработки информации проводятся ежедневно в одинаковых условиях до второго по порядку появления отказа (r = 2), а в качестве отказа могут быть приняты такие события, как отказ программнотехнических средств обработки заявок, поступающих в систему, переполнение памяти в очереди на обработку данных, запаздывание в обработке заявок свыше какого-либо заданного значения времени и т.п.). Найти вероятность того, что до момента появления второго отказа система проработает безотказно не менее 20 дней (k 20), если вероятность отказа в произвольно взятый день постоянна и равна q = 0,01.
Составим функцию вероятности для случайной величины ξ, которая равна количеству дней, которое система проработала при числе отказов меньше 2:
P(ξ = k) = $C^k_{k+2-1}p^kq^2$ - случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение. Найдем вероятность того, что система проработала таким образом не менее 20 дней: P = 1 - P(ξ = 0) - P(ξ = 1) - ... - P(ξ = 19) = 1 - $\Sigma^{19}_{i=0}P(\xi = i)$ = 1 - $q^2\Sigma^{19}_{i=0}C^i_{i+1}p^i$

Отрицательное биномиальное распределение имеет применение в задаче Банаха о спичечных коробках. Пусть у нас еcnь два спичечных коробка, в каждом из которых по N спичек (N > 0). С течением времени мы

достаем из выбранного наугад коробка одну спичку. В конечном итоге, сложится ситуация, когда мы достанем пустую коробку. В этот момент в другой коробке будет r спичек, r может быть в интервале [0, 1,...N]. Тогда найти вероятность того, что r равно какому-то конкретному значению, можно используя отрицательное биномиальное распределение. Если вынутая коробка пуста, а в другой k спичек, то всего мы вытащили 2N-k спичек, причем из одной коробки мы вытащили N. Пронумеруем коробки; пусть p - вероятность вынуть первую коробку, соответсвенно, q = 1 - p - вероятность вынуть вторую. Пусть пустой оказалась первая коробка (в тот момент, когда ее вынули). Тогда вероятность того, что во второй окажется k спичек, равна:
P_2(r = k) = $C_{2N-k}^{N} p^N q^{N-k}$, k <= N (иначе сначала вынули бы вторую коробку).
Соответственно, если пустой оказалась первая коробка, когда ее вынули, то вероятность того, что во второй коробке будет k спичек:
P_1(r = k) = $C_{2N-k}^{N} p^{N-k} q^N$, k <= N.
Тогда вероятность того, что в спичечном коробке, который остался невынутым после того, как в другом не оказалось спичек в момент, когда его вытащили, равна:
P(r = k) = P_1(r = k) + P_2(r = k).
В случае, если коробки симметричные (p = q = $\frac{1}{2}$):
P(r = k) = $2C_{2N-k}^{N}(\frac{1}{2})^{2N-k}$

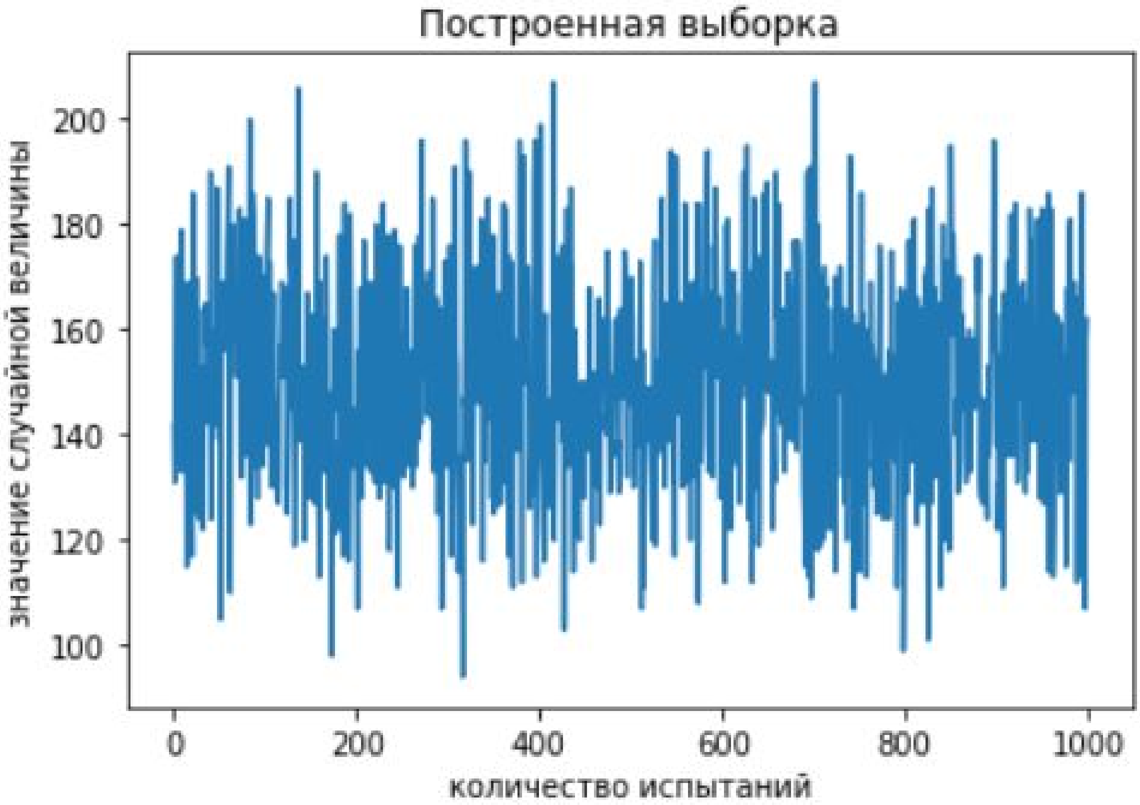
3 Описание способа моделирования отрицательного биномиального распределения

Пусть у нас есть бесконечная последовательность испытаний Бернулли X_n. $X_i = 1$ с вероятностью p, p < 1. Тогда реализацией бесконечной выборки будет бесконечный набор из нулей и единиц. Число нулей до первой единицы в данной реализации имеет геометрическое распределение (следует из модели геометрического распределения). Пусть Y - случайная величина, равная количеству нулей до первой единицы. Тогда Y = min{j, j>=0, $X_{j+1} = 0$} - случайная величина, $\mathscr{L}$(Y) = $\overline{Bi}(1,p)$ - геометрическое распределение. Отсюда следует, что алгоритм моделирования выборки (Y_1, Y_2,..,Y_r) из распределения $\overline{Bi}(1,p)$ можно задать следующим образом:
$Y_i = min\{j >= 0 : X_{Y_{i-1}+j+1+i} = 0\}$, i = 1, 2, .., r; $Y_0 = 0$.
Y_i - случайная величина - число единиц между i-1 и i нулями (Y_1 - число

единиц дло первого нуля).
При этом известно, что $\mathscr{L}(Y_1+Y_2+...+Y_r) = \overline{Bi}(r,p)$ (следует из свойств отрицательного биномиального распределения и было не раз показано, что случайная величина с отрицательным биномиальным распределением с параметрами r и p является суммой из r н.о.р.С.В. с геометрическим распределением с параметром p - **свойство воспроизводимости** отрицательного биномиального распределения). Тогда смоделировать выборку $(\xi_1,\xi_2,..,\xi_n)$ из распределения $\overline{Bi}(r,p)$ можно по следующей формуле:
$\xi_j = Y_{(j-1)r+1} + ... + Y_{jr}$, j = 1, 2, .., n,
т.е. просуммировав числа $\{Y_i\}$ последовательными группами по r подряд идущих чисел.
Проблемой данного алгоритма является линейная зависимость от r, что означает,что при больших r работа алгоритма будет занимать много времени. Тогда можно воспользоваться связью отрицательного биномиального и Пуассоновского распределений:
если X$\sim$Pois(λ), λ $\sim\Gamma$(r, $\frac{p}{1-p}$), то X$\sim$ $\overline{Bi}(r,p)$ (Доказано в связи отрицательного биноимального и пуассоновского распределений). Однако в данном домашнем задании мы ограничимся моделью, реализованной на последовательности испытаний Бернулли.
Ниже представлен код на языке Python, реализующий модель:

```
def Geom(prob):
    j=0
    k = np.random.binomial(size=1, n=1, p=prob)
    lst.append(k)
    while k==1:
        j=j+1
        k = np.random.binomial(size=1, n=1, p=prob)
        lst.append(k)
    return j

def Neg_Binom(rr, prob):
    xi = 0
    for i in range(rr):
        xi += Geom(prob)
    return xi
```



Распределение Релея:

4 Основные характеристики распределения

Распределение Релея - это распределение вероятностей случайной величины X с **плотностью**
$f(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, x>=0, σ>0, σ - параметр масштаба.
(при x<0 функция плотности равна 0);
Отсюда получаем **функцию распределения**:
$P(X <= x) = \int_0^x f_\xi(x,\sigma)dx = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^x - \int_0^\infty 0 * (-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}) = 1$ - $exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$
при x<0 P(X<=x) = 0;

Из функции плотности также можно вывести **мат. ожидание**:
M[ξ] $= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$
(проводим замену t = $\frac{x^2}{\sigma^2}$) $= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-t}\sigma^2}{2\sqrt{t\sigma^2}} dt = \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{t}e^{-t}dt =$
(раскрывая через Гауссов интеграл, получаем) $= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

ξ - случайная величина с распределением Релея;
Также выводим **дисперсию распределения**:

$\mathrm{D}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M[\xi])^2 f_\xi(x,\sigma)dx = \int_0^{\infty}(x - \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma)^2 \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx =$

$= lim_{b\to\infty}\int_0^b(x - \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma)^2 \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx =$

(раскладывая по частям и приводя слагаемые, получаем)

$= -2\sigma^2 lim_{b\to\infty}[\frac{1-\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2b}}{e^{\frac{b^2}{2\sigma^2}}} + \frac{\pi}{2}\sigma^2 + 2\sigma^2 - \pi\sigma^2] = 2\sigma^2 * 0 + \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

Зная функцию плотности распределения можно также получить **характеристическую функцию** распределения Релея:

$\phi(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x,\sigma)dx = \int_0^{\infty} e^{itx}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx =$

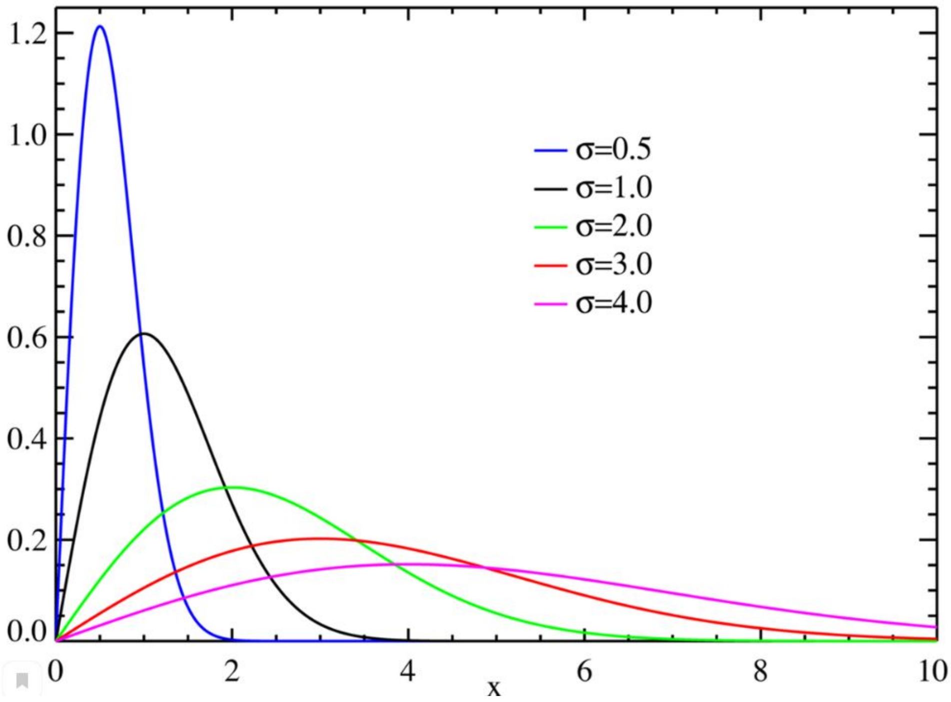
$= -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{itx}|_0^x - \int_0^x -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{itx}it\,dx =$

$= -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{itx} + 1 - \frac{\sqrt{\pi}e^{-\frac{-t^2}{-4\frac{1}{2\sigma^2}}} erf(\sqrt{(\frac{1}{2\sigma^2})}x - \frac{it}{2\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}}})}{2\sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}}}|_0^x =$

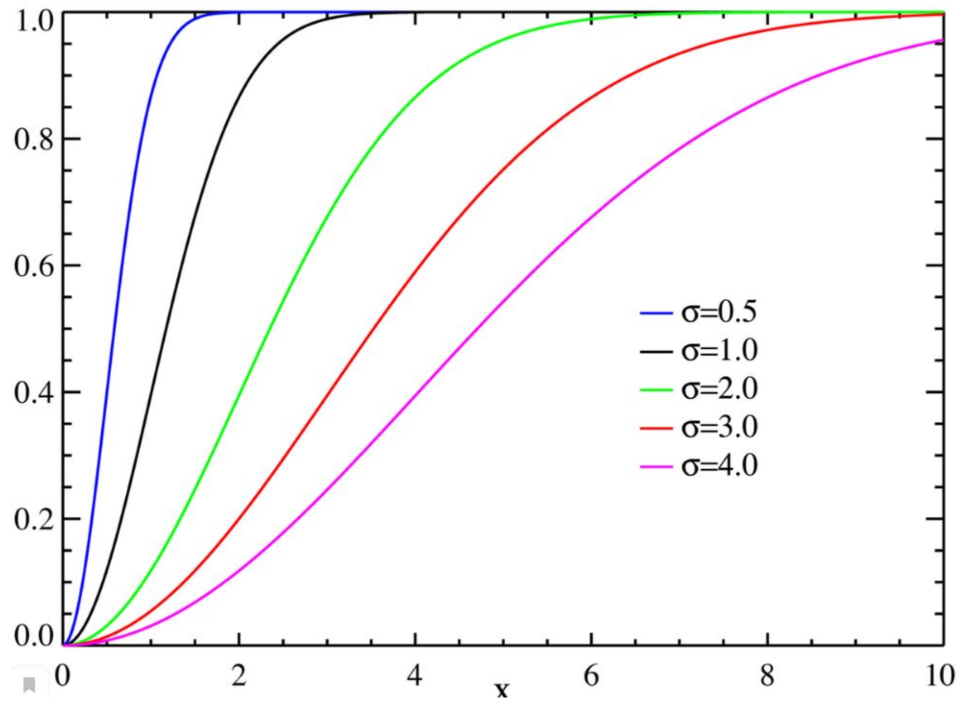
$= 1 - \sigma t e^{-\sigma^2 t^2/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(erfi(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}})) - i)$

Производящей функции для распределения Релея **нет**.

Функция плотности для данного распределения при разных параметрах масштаба:



Функция распределения вероятности при разных σ:



5 Примеры событий, которые могут быть описаны распределением Релея

Связь распределения Релея с другими распределениями:
Связь распределения Релея с Хи-распределением
Пусть у нас есть выборка из расстояний от начала координат до конкретной точки: $(Y_1, Y_2, .., Y_n)$ - в N-мерном Евклидовом пространстве, где Y_i - случайная нормальная величина. Тогда, если случайные величины Y_i независимы и каждая из них подчинена распределению N(0,σ^2), то плотность распределения случайной величины X $= \sqrt{\Sigma_{i=1}^{N} Y_i^2}$ (которая имеет распределение $\chi^2(n)$) имеет вид:
$p_x(x; N; \sigma) = \frac{2}{(2\sigma^2)^{N/2}(\Gamma(N/2))} x^{N-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, x>0, σ>0.
Другими словами, распределение Релея есть просто хи-распределение с двумя степенями свободы и масштабным параметром σ.
Связь распределения Релея с распределением Вейбулла:
Распределение Релея является частным случаем распределение Вейбулла при его параметрах k = 2, $\lambda = \sqrt{2}\sigma$;
функция плотности для распределения Вербулли:
$f_X(x) = \frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}$;

Из чего следует, что при k = 2, $\lambda = \sqrt{2}\sigma$ она будет совпадать с функцией плотности случайной величины с распределением Релея с параметрами x, σ.

Связь распределения Релея с распределением Райса:

Плотность распределения Райса с параметрами (ν, σ) есть функция вида:

$\phi(x) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2+\nu^2}{2\sigma^2}}I_0(\frac{\nu x}{\sigma^2})H(x)$, σ>0;

где H - функция Хевисайда, I_0 - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Соответственно, при $\nu = 0$ функция $\phi(x)$ становится эквивалентной функции плотности для распределения Релея.

Типичная интерпретация:

Пусть есть выборка из n н.о.р.с.в.: $(Y_1, Y_2, .., Y_n)$, $\forall Y_i \sim N(\nu = 0, \sigma^2)$ Тогда случайная величина $\xi = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} Y_i^2}$ подчинена законку распределения Релея и может использоваться для изучения свойств данной выборки из n случайных величин (проще работать с одной случайной величиной, чем с выборкой из n СВ).

Нетипичная интерпретация:

Пусть лучник стреляет в мишень диаметром d см, пусть её центр совпадает с началом прямоугольной системы координат. Тогда расстояния от него до точек попадания стрел - случайные величины, равные двумерным векторам: отклонение по осям X и Y соответственно. Пусть средние квадратические отклонения разброса по абсциссе и ординате равны $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Если принять, что случайные величины распределены по нормальному закону, то расстояние от точки попадания стрелы до мишени (отклонение разброса), равное $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ будет случайной величиной с распределением Релея,плотность вероятности для которой записывается:

$f(r) = \sigma^2 r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$, r >= 0; (получено, используя тот факт, что ξ является корнем суммы квадратов двух н.о.р. случайных величин,что позволяет использовать свойства характеричтической функции);

Зная параметры, можем найти вероятность того,что стрелок не попадет в мишень:

P(непопадание в мишень) = 1-f($\frac{d}{2}$) $= 1 - [1 - e^{-\frac{(\frac{d}{2})^2}{2\sigma^2}}]$

Таким образом, распределение Релея используется, когда у нас есть набор н.о.р.с.в. с нормальным распределением.

Другим примером использования распределения Релея являяется нахождение остатка жизни или ожидаемая продолжительность жизни для случайной величины, подчиненной распределению Релея. Пусть у нас есть "функция надежности"случайной величины X:
$R_X(x) = 1 - F_X(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где $F_X(x)$ - функция распределения. Тогда:
$e_x = \int_x^\infty \frac{R_X(u)}{R_X(x)} du = e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$ - ожидаемая продолжительность остаточной жизни для X.

6 Описание способа моделирования распределения Релея

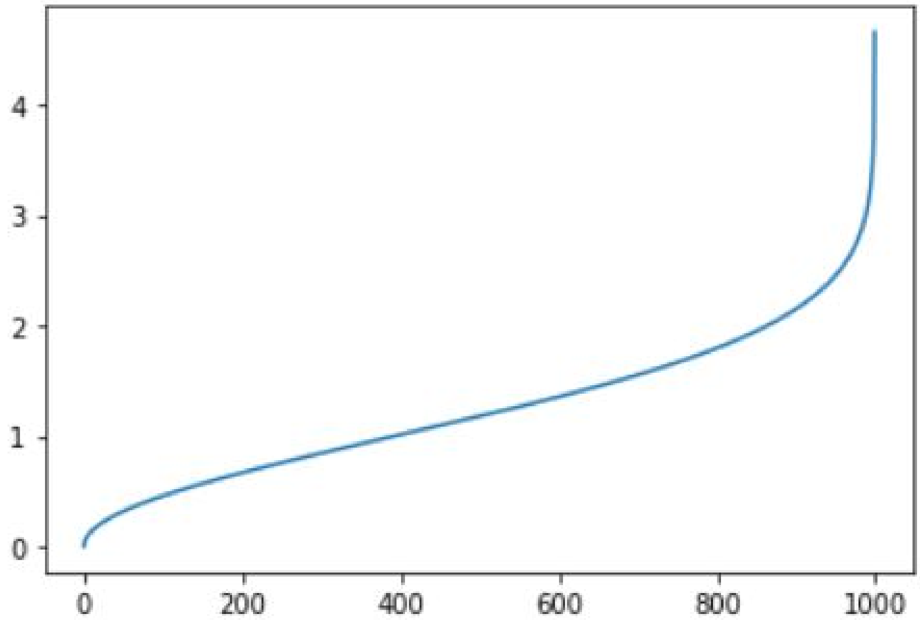
Воспользуемся методом обратных функций для построения модели распределения Рэлея.
Определим функцию G: (0,1) $\to \mathcal{R}$ равенством
$G(y) = inf\{x \in \mathcal{R} : F(x) > y\}$. F(x) - функция распределения Рэлея;
Тогда будет выполняться следующее:
1. При y∈(0,1) и t∈ $\mathcal{R}$ неравенства G(y)<t и y<F(t) эквивалентны;
2. функция G является монотонно неубывающей и непрерывной справа.

Отсюда следует, что случайная величина G(α) имеет распредение Рэлея - это следует из цепочки равенств: P(G(α)<x) = P(α<F(x)) = F(x);
Пусть x∈ $\mathcal{R}$ и y∈(0,1) связаны соотношением F(x)=y. Тогда, если в окрестности точки x функция F(x) обратима, то G(y) = x. Функция распределения Рэлея монотонно возрастает на полуинтервале [0; $+\infty$), то есть, она на этом полуинтервале обратима. Тогда на этом полуинтервале выполняется следующее:
G(y) = inf{x : F(x)>y} = inf{x : x > $F^{-1}(y)$} = $F_*^{-1}(y)$.
Выпишем G(y):
G(y) = inf{x : $1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} > y$};
находим inf:
$1 - e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} > y$;
$-\frac{x^2}{2\sigma^2} <$ ln(1-y);
x > $\sqrt{-ln(1-y)2\sigma^2}$ - найденный инфинум, то есть G(y) = $\sqrt{-ln(1-y)2\sigma^2}$
Тогда для реализации выборки н.о.р.с.в. подчиненных закону распределения Рэлея с параметром σ $(X_1, X_2, .., X_n)$ необходимо реализовать выборку н.о.р.с.в. $(Y_1, Y_2, .., Y_n)$, которые имеют стандартное равномерное распределение, $Y_i \in$ (0,1).

Код, где реализована модель:

```
sample = 1000
sig = 1
X = np.array([])
Xmas = np.array([])
Y = np.linspace(0.00001, 0.99998, sample)
for i in range(sample):
    X = np.append(X, math.sqrt(math.log(1-Y[i])*(-1)*2*(sig**2)))
    Xmas = np.append(Xmas, i)
plt.plot(Xmas, X)
plt.show()
```

получившийся график значений:



Из графика видно, что значения случайной величины (при одном коэффициенте масштаба) при большом количестве испытаний остаются одинаковыми