- 图论

图论

- 图的概念

1) 图的概念

定义 一个**图*G***是指一个二元组$(V(G),E(G))$，其中:

1) $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$是非空有限集，称为**顶点集**，其中元素称为图$G$的**顶点**.

2) $E(G)$是顶点集$V(G)$中的无序或有序的元素偶对(v_i,v_j)组成的集合，即称为**边集**,其中元素称为**边**.

定义 图G的**阶**是指图的顶点数$|V(G)|$, 用 ν来表示；图的边的数目$|E(G)|$用ε来表示.

|E(G)|

用 $G=(V(G),E(G))$ 表示图，简记 $G=(V,E)$.
也用 v_iv_j 来表示边 (v_i,v_j).

- 图的种类

> **定义** 若一个图的顶点集和边集都是有限集，则称其为**有限图**. 只有一个顶点的图称为**平凡图**，其他的所有图都称为**非平凡图**.

定义若图G中的边均为有序偶对(v_i,v_j),称G为**有向图**. 称边$e=(v_i,v_j)$为**有向边**或**弧**,称 $e=(v_i,v_j)$是从v_i**连接** v_j，称 v_i为e的**尾**，称v_j为e的**头**.

若图G中的边均为无序偶对v_iv_j，称G为**无向图**.称边$e=v_iv_j$为**无向边**，称e**连接**v_i和v_j，顶点v_i和v_j称为e的**端点**. 既有无向边又有有向边的图称为**混合图**.

- 常用术语

常用术语

1) 边和它的两端点称为互相关联.

2)与同一条边关联的两个端点称为相邻的顶点，与同一个顶点点关联的两条边称为相邻的边.

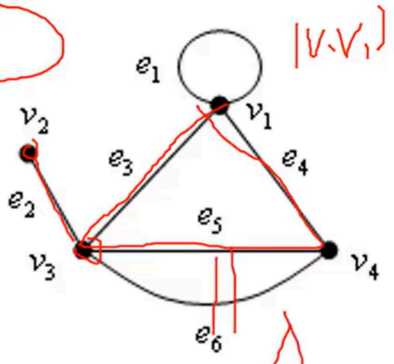


图 2: 图G

3) 端点重合为一点的边称为环，端点不相同的边称为连杆.

4) 若一对顶点之间有两条以上的边联结，则这些边称为重边.

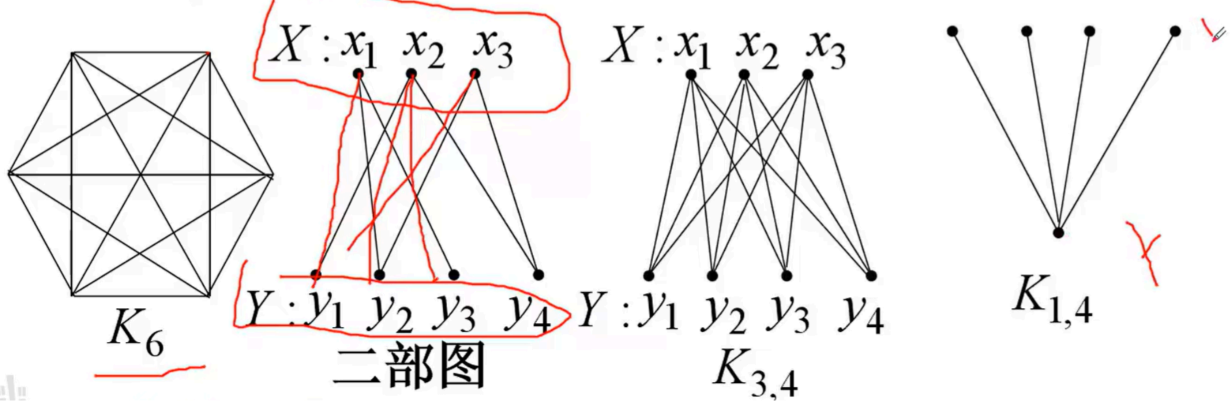
5) 既没有环也没有重边的图，称为简单图.

常用术语

6) 任意两顶点都相邻的简单图,称为完全图. 记为K_v.

7) 若$V(G)=X\bigcup Y$，$X\bigcap Y=\phi$，且X中任意两顶点不相邻，Y中任意两顶点不相邻，则称为二部图或偶图；若X中每一顶点皆与Y中一切顶点相邻,称为完全二部图或完全偶图,记为$K_{m,n}$ ($m=|X|,n=|Y|$).

8) 图$K_{1,n}$叫做星.



- 赋权图和子图

2）赋权图与子图

定义 若图 $G=(V(G),E(G))$ 的每一条边 e 都赋以一个实数 $w(e)$，称 $w(e)$ 为边 e 的**权**，G 连同边上的权称为**赋权图**.

定义 设 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个图.

1) 若 $V'\subseteq V, E'\subseteq E$，称 G' 是 G 的一个**子图**，记 $G'\subseteq G$.

2) 若 $V'=V, E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的**生成子图**.

3) 若 $V'\subseteq V$，且 $V'\neq\phi$，以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集的图 G 的子图，称为 G 的**由 V' 导出的子图**，记为 $G[V']$.

4) 若 $E'\subseteq E$，且 $E'\neq\phi$ ，以 E' 为边集，以 E' 的端点集为顶点集的图 G 的子图，称为 G 的**由 E' 导出的边导出的子图**，记为 $G[E']$.

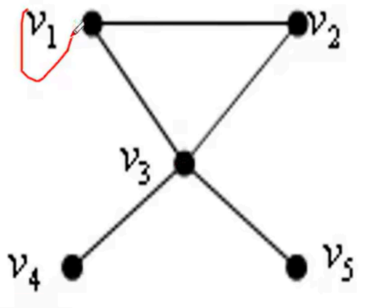
- 矩阵表示
  - 无向图邻接矩阵（一定对称）

3）图的矩阵表示

邻接矩阵: (以下均假设图为简单图).

1) 对无向图 G，其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ ，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_i与v_j相邻,\\ 0, & 若v_i与v_j不相邻.\end{cases}$$

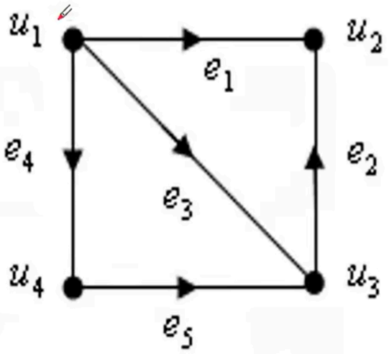


$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

- 有向图邻接矩阵（不一定对称）

2) 对有向图 $G=(V,E)$ **,其邻接矩阵** $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ **,其中:**

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若(v_i,v_j)\in E,\\ 0, & 若(v_i,v_j)\notin E.\end{cases}$$



$$A=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{matrix}$$

- 有向赋权图邻接矩阵（无向赋权图类似）

3) 对有向赋权图 $G=(V,E)$ **，其邻接矩阵** $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ **，其中:**

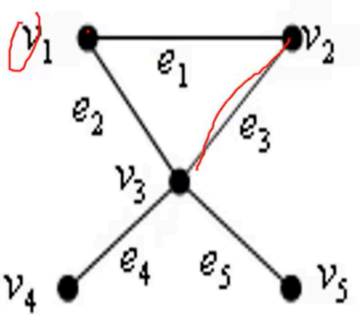
$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij}, & 若(v_i,v_j)\in E,且w_{ij}为其权,\\ 0, & i=j,\\ \infty, & 若(v_i,v_j)\notin E.\end{cases}$$

- 无向图关联矩阵

关联矩阵

1) 对无向图 $G=(V,E)$ **，其关联矩阵** $M=(m_{ij})_{\nu\times\varepsilon}$ **，其中:**

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_i与e_j相关联,\\ 0, & 若v_i与e_j不关联.\end{cases}$$



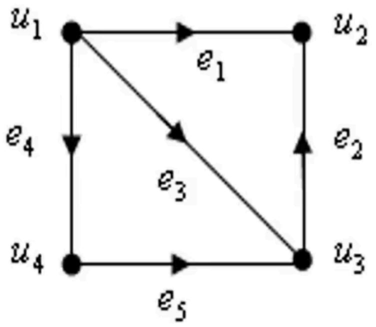
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ M= & \begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{matrix}\end{array}$$

- 有向图关联矩阵

2) 对有向图$G=(V,E)$，其关联矩阵$M=(m_{ij})_{\nu\times\varepsilon}$，

其中：

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若v_i是e_j的尾,\\ -1, & 若v_i是e_j的头,\\ 0, & 若v_i不是e_j的头与尾.\end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} & \\ M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \end{array}$$

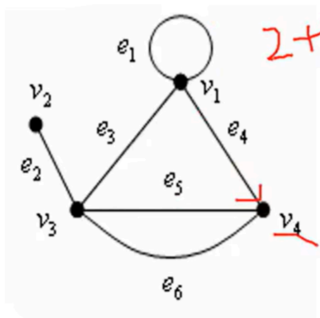
。

- 顶点度

4) 图的顶点度

定义 1) 在无向图G中，与顶点v关联的边的数目(环算两次),称为顶点v的**度**或**次数**，记为$d(v)$或$d_G(v)$. 称度为奇数的顶点为**奇点**，度为偶数的顶点为**偶点**.

2) 在有向图中，从顶点v引出的边的数目称为顶点v的**出度**，记为$d^+(v)$，从顶点v引入的边的数目称为v的**入度**，记为$d^-(v)$. 称$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$为顶点v的**度**或**次数**.



2+2=4

v_1 $d^+(v)$

$d^-(v)$

$d(v_1)=4$

- 路和连通

5) 路和连通

定义1) 无向图G的一条途径（或通道或链）是指一个有限非空序列$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对$1 \le i \le k$，$e_i$的端点是$v_{i-1}$和$v_i$，称$W$是从$v_0$到$v_k$的一条途径，或一条$(v_0, v_k)$途径。整数$k$称为$W$的长。顶点$v_0$和$v_k$分别称为的起点和终点，而$v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$称为$W$的内部顶点。

2) 若途径W的边互不相同但顶点可重复，则称W为迹或简单链。

3) 若途径W的顶点和边均互不相同，则称W为路或路径。一条起点为v_0，终点为v_k的路称为(v_0, v_k)路

定义

1) 途径$W = v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$中由相继项构成子序列$v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_j v_j$称为途径$W$的节。

2) 起点与终点重合的途径称为闭途径。

3) 起点与终点重合的的路称为圈(或回路)，长为k的圈称为k阶圈，记为C_k。

4) 若在图G中存在(u,v)路，则称顶点u和v在图G中连通。

5) 若在图G中顶点u和v是连通的，则顶点u和v之之间的距离$d(u,v)$是指图G中最短(u,v)路的长；若没没有路连接u和v，则定义为无穷大。

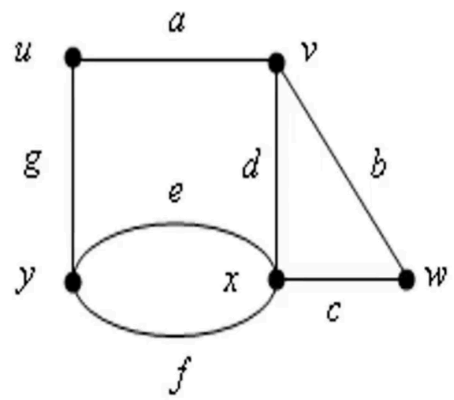
6) 图G中任意两点皆连通的图称为连通图.

7) 对于有向图G，若$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$，且$e_i$有头$v_i$和尾$v_{i-1}$，则称$W$为有向途径.

类似地，可定义有向迹，有向路和有向圈.

例 在右图中：

途径或链： $ugyexeyfxcw$



6) 图G中任意两点皆连通的图称为连通图.

7) 对于有向图G，若$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$，且$e_i$有头$v_i$和尾$v_{i-1}$，则称$W$为有向途径.

类似地，可定义有向迹，有向路和有向圈.

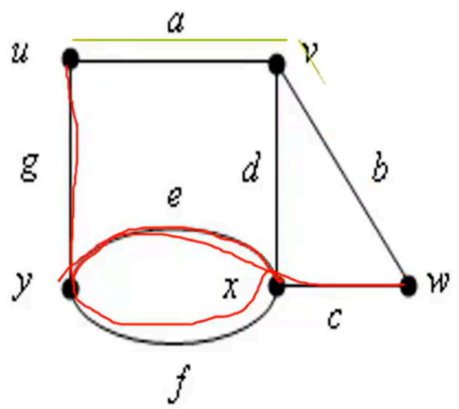
例 在右图中：

途径或链： $ugyexeyfxcw$

迹或简单链：$vbwcxdvaugy$

路或路径：$uavdxcw$

圈或回路：$uavbwcxfygu$



- 最短路问题和算法

3. 最短路问题及算法

最短路问题是图论应用的基本问题，很多实际问题，如线路的布设、运输安排、运输网络最小费用流等问题,都可通过建立最短路问题模型来求解.

- 最短路的定义
- 最短路问题的两种方法：***Dijkstra***和***Floyd***算法 .

1) 求赋权图中从给定点到其余顶点的最短路.

2) 求赋权图中任意两点间的最短路.

[$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$]