

doi:10.3969/j.issn.1001-2400.2017.01.005

# 张拉整体结构外力与形变间关系分析及实验验证

李团结, 车明奎

(西安电子科技大学 机电工程学院, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 针对张拉整体结构中杆件只受轴向压力, 绳索和弹簧等只受轴向拉力的情况, 采用拉格朗日动力学和样机实验, 对外力作用下张拉整体结构中弹簧变形量进行了分析和测量. 首先, 推导了张拉整体结构平衡状态的力学模型, 对非保守力作用下张拉整体结构弹簧的变形量进行了计算; 然后, 通过三杆六索张拉整体结构样机实验, 对弹簧变形量进行了测量. 实验与计算结果的对比分析, 验证了张拉整体结构力学模型的合理性, 揭示了外力与形变间的内在数学关系.

**关键词:** 张拉整体结构; 变形; 弹簧; 实验; 力学

**中图分类号:** TH112    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1001-2400(2017)01-0024-05

## Analysis and experimental verification of relationship between external force and deformation of tensegrity structures

LI Tuanjie, CHE Mingkui

(School of Mechano-electronic Engineering, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The tensegrity structures suffer the axial pressure in struts and the axial tension in cables and springs, so they are widely used in many engineering fields such as architecture, biotechnology, aerospace and robotics. Based on the Lagrangian dynamics and prototype experiment, the spring deformation of the tensegrity structure under the action of external forces is analyzed and measured. First, the dynamic model of the equilibrium state of the tensegrity structure is derived. The spring deformation of the tensegrity structure under the action of external nonconservative forces is analyzed. Then, by means of the prototype experiment on the tensegrity structure with six struts and three cables, the spring deformation is measured. The comparison and analysis between the experimental and numerical results validate the dynamic model of the tensegrity structure and reveal the mathematical relation between external forces and deformation of the tensegrity structure.

**Key Words:** tensegrity structure; deformation; spring; experiment; dynamic

张拉整体的概念最早是由美国结构工程师、著名建筑学大师富勒(Fuller)在 20 世纪 40 年代首次提出的. 富勒提出张拉整体的概念后, 著名雕塑家耐莫森设计出第 1 个张拉整体的实体模型<sup>[1]</sup>, 即一个由弦将 3 根离散的杆张紧在一起形成的张拉整体结构.

复杂张拉整体结构是在近几十年得到广泛关注并得到发展的一种空间结构. 张拉整体结构由一系列受拉索和一系列离散受压杆组成. 张拉整体结构的刚度由结构的预应力形成, 在结构初始预应力为零时, 结构几乎没有刚度. 由于张拉整体结构中杆件只受轴向压力, 索结构只受轴向拉力, 因此能充分发挥杆件及索的材料性能, 在很大程度上提高了材料的利用率. 并且张拉整体结构构思巧妙, 造型新颖, 可应用范围宽广, 经济实用, 因而受到工程师的广泛青睐<sup>[2-3]</sup>.

收稿日期: 2016-02-05

网络出版时间: 2016-05-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51375360)

作者简介: 李团结(1972—), 男, 教授, E-mail: tjli@mail.xidian.edu.cn.

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1076.TN.20160523.1727.010.html>

过去几十年间,张拉整体结构在能量采集<sup>[4]</sup>、大跨度结构<sup>[5]</sup>、机器人<sup>[6-7]</sup>等方面的应用取得很大进展.文献[8]将张拉整体用于传感器,对张拉整体传感器进行初步理论研究,然而未对张拉整体传感器工程应用进行深入研究.目前对于张拉整体结构的研究主要有张拉整体结构找形<sup>[9]</sup>、动力学分析<sup>[10-11]</sup>等.

张拉整体结构一般是由一系列张拉整体结构单元按照一定规律组成的<sup>[12]</sup>,笔者从张拉整体结构的基本单元入手,对张拉整体结构外力与弹簧形变量关系进行研究.

## 1 张拉整体结构及其构件数学描述

底部固定的张拉整体结构由 6 根受拉弹簧和 3 根受压杆组成,如图 1 所示,固定节点  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  位于底部平面, $A_2A_3$  与  $x$  轴平行, $A_1B_1$ 、 $A_2B_2$ 、 $A_3B_3$  为受压杆, $A_1B_3$ 、 $A_3B_2$ 、 $A_2B_1$ 、 $B_1B_2$ 、 $B_2B_3$ 、 $B_3B_1$  为受拉弹簧或索.

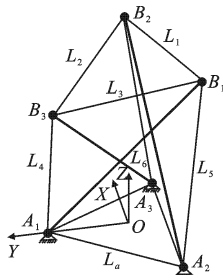


图 1 张拉整体结构简图

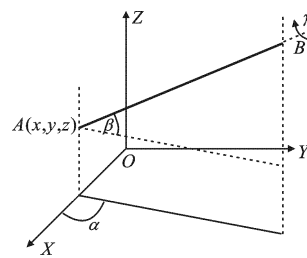


图 2 杆件的欧拉角描述

在空间中描述一个刚体的姿态需要 6 个坐标,包括刚体 3 个相对旋转的角度,即旋进角  $\alpha$ 、章动角  $\beta$  和自旋角  $\gamma$ ,以及刚体上一点的坐标.张拉整体结构第  $i$  个构件的空间姿态可表示为 6 个广义坐标,如图 2 所示.

根据空间位置关系,求得  $B$  点坐标为

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

对于图 1 所示的结构,形态分析时不考虑杆件的自旋,且底部 3 个顶点固定,通过确定每个杆的两个欧拉角  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  ( $i=1,2,3$ ),即可确定杆件的位置.因此,结构中 3 根杆件的  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$  作为广义坐标.

## 2 力与弹簧变形量力学建模

为分析外力与弹簧变形量之间的关系,对图 1 所示的张拉整体结构进行力学建模.运用拉格朗日方程建立张拉整体结构的动力学模型,即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = f_n, \quad (2)$$

其中,  $T$  为张拉整体结构动能;  $f_n$  为施加在结构上的非保守力;  $q$  为张拉整体结构的广义坐标;  $U$  为张拉整体结构势能,其表达式为

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{K_1}{2} (L_i - L_{01})^2 + \sum_{i=4}^6 \frac{K_2}{2} (L_i - L_{02})^2 + \frac{1}{2} mgL (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \sin \beta_3), \quad (3)$$

其中,  $K_1$  为图 1 所示张拉整体结构中顶部弹簧  $B_1B_2$ 、 $B_2B_3$ 、 $B_3B_1$  的刚度系数,  $K_2$  为侧部弹簧  $A_1B_3$ 、 $A_3B_2$ 、 $A_2B_1$  的刚度系数,  $L_{01}$  为顶部弹簧的原长,  $L_{02}$  为侧部弹簧的原长,  $L_i$  为外力作用下弹簧长度,  $L$  为杆  $A_1B_1$ 、 $A_2B_2$ 、 $A_3B_3$  的长度.

文中研究的张拉整体结构外力与弹簧变形量的关系是结构处于平衡状态下的关系,所以张拉整体结构的动能  $T=0$ . 因此,式(3)简化为

$$\partial U / \partial q = f_n. \quad (4)$$

施加在结构上非保守力可通过虚功原理得到,即

$$f_1 = -F_{1x}L \cos\beta_1 \sin\alpha_1 + F_{1y}L \cos\beta_1 \cos\alpha_1, \quad (5)$$

$$f_2 = -F_{1x}L \sin\beta_1 \cos\alpha_1 - F_{1y}L \sin\beta_1 \sin\alpha_1 + F_{1z}L \cos\beta_1, \quad (6)$$

$$f_3 = -F_{2x}L \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + F_{2y}L \cos\beta_2 \cos\alpha_2, \quad (7)$$

$$f_4 = -F_{2x}L \sin\beta_2 \cos\alpha_2 - F_{2y}L \sin\beta_2 \sin\alpha_2 + F_{2z}L \cos\beta_2, \quad (8)$$

$$f_5 = -F_{3x}L \cos\beta_3 \sin\alpha_3 + F_{3y}L \cos\beta_3 \cos\alpha_3, \quad (9)$$

$$f_6 = -F_{3x}L \sin\beta_3 \cos\alpha_3 - F_{3y}L \sin\beta_3 \sin\alpha_3 + F_{3z}L \cos\beta_3. \quad (10)$$

在张拉整体结构节点上施加确定外力的情况下,联合式(4)~(10)并运用含三角函数超越方程组求解方法<sup>[13]</sup>,可解出张拉整体结构的广义坐标  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ .

顶部弹簧的长度可表示为

$$L_{pi} = \left( (b_{i+1} - b_i)^T (b_{i+1} - b_i) \right)^{1/2}. \quad (11)$$

侧部弹簧的长度可表示为

$$L_{ai} = \left( (a_{i+1} - b_i)^T (a_{i+1} - b_i) \right)^{1/2}, \quad (12)$$

其中,  $a_i$  和  $b_i$  为图 1 所示结构中点  $A_i$  和  $B_i$  ( $i=1,2,3$ ) 的坐标.

由式(11)和式(12),可求得弹簧变形后长度,进一步可得出张拉整体结构对应的弹簧变形量.

### 3 力与弹簧变形量间关系实验

#### 3.1 实验装置

在基于拉格朗日方程对张拉整体结构外力与弹簧形变量力学分析的基础上,设计制造了张拉整体结构实验样机,通过实验对该分析方法及其结果进行验证.

实验设计了一个三杆六索的张拉整体结构实验样机,如图 3 所示. 张拉整体结构由 3 大部分组成: 杆与弹簧以及底座构成的张拉整体结构基本框架部分、球状节点及十字万向铰构成的节点部分、亚克力支撑架以及数显标尺构成的测量部分.

压杆采用规格为  $8 \text{ mm} \times 6 \text{ mm} \times 578 \text{ mm}$  (外径  $\times$  内径  $\times$  长度) 的碳纤维管,碳纤维材料具有复合材料的各种优良性能,如密度小、轴向强度大、弹性模量大、耐热性能和耐腐蚀性好等. 实验中采用的空心碳纤维杆的密度为  $1.8 \text{ g/cm}^3$ ,密度远低于普通金属等材料,碳纤维的轴向强度大,可采用空心杆件,体积仅为实心杆件的 43%,这样就大大降低了杆件的重量对实验结果的影响.

弹簧均采用  $0.8 \text{ mm} \times 6.0 \text{ mm} \times 135.0 \text{ mm}$  (簧丝直径  $\times$  弹簧外径  $\times$  长度) 的拉簧,其刚度为

$$k = Gd / (8c^3 n), \quad (13)$$

其中,  $c = D_2/d$ , 弹簧钢的切变模量  $G = 7.9 \times 10^4 \text{ MPa}$ ,  $n$  为有效圈数;若弹簧中径  $D_2 = 5.6 \text{ mm}$ , 簧丝直径  $d = 0.8 \text{ mm}$ , 则求得的弹簧的弹性系数  $K = 0.1732 \text{ N/mm}$ .

杆件与底座采用钢制的万向铰连接,保证杆件可始终沿着受压力的方向,避免产生弯曲应力或扭转应力,确保杆件始终只受沿着轴向方向的压力.

底座为角铝搭建的三角框架. 铝材料机械加工性能好,便于加工装成正三角形,角铝底部与地面接触面积小,构成的三角形底面平整度好,可保证张拉整体结构实验装置的稳定性. 角铝承载能力强,受力形变小,有利于提高实验装置的整体精度.

顶部节点采用 3D 打印制造的直径为  $30 \text{ mm}$  的球体. 本实验装置中由于节点的设计需要在球体上有夹角为  $40^\circ$ 、 $55^\circ$  和  $75^\circ$  的孔,采用传统加工技术制造难度较大,而且要求该节点体积小、强度大,采用 3D 打印制造该节点可精确达到制造要求. 3D 打印的球形节点密度小、质量轻,可提高该张拉整体结构实验的整体精

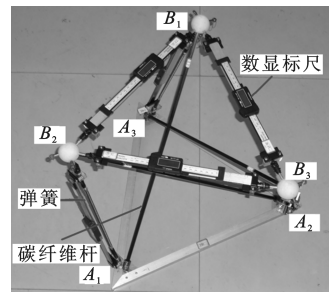


图 3 张拉整体结构实验样机

度. 弹簧与节点的连接为 M209 万向铰, 可使弹簧始终沿着受拉力的方向拉伸.

顶部测量采用量程为 150 mm 的碳纤维横式数显标尺, 碳纤维标尺重量轻, 可以减少装置重量对张拉整体结构受力的影响, 标尺精确可达 0.1 mm. 侧部由于标尺的底端与底座铰接, 标尺的重量对张拉整体结构受力的影响非常小, 所以选用重量较大而测量精度为 0.01 mm 的不锈钢卡尺, 其量程为 200 mm.

标尺与万向铰采用激光切割制造的亚克力块连接. 首先, 亚克力具有密度小重量轻的优点, 这一特性符合本实验装置对零件选取的重要标准; 其次, 激光切割制造精度高, 可满足实验要求的亚克力块与万向轴紧配合的要求. 亚克力机械加工性能好, 可以减小安装及配合的难度.

### 3.2 理论仿真及实验结果

确定机构参数: 杆长  $L=578$  mm, 顶部弹簧原长  $L_{01}=356$  mm, 侧部弹簧原长  $L_{02}=336$  mm, 顶部弹簧刚度系数  $K_1=0.1732$  N/mm, 侧部弹簧刚度系数  $K_2=0.1732$  N/mm, 底部节点间距  $L_a=410$  mm. 底部节点坐标:  $A_1=[0, 3^{1/2}L_a/3, 0]$ ,  $A_2=[L_a/2, -3^{1/2}L_a/6, 0]$ ,  $A_3=[-L_a/2, -3^{1/2}L_a/6, 0]$ .

以在  $B_1$  点施加沿  $z$  轴负方向  $0\sim 10$  N 的力为例, 由式(3)~(10)计算得张拉整体结构的广义坐标, 由式(11)和式(12)求得相应受力状态下弹簧伸长量. 在图 3 所示的实验样机上施加同样力并测量对应的弹簧的伸长量, 仿真结果及测量数据与外力的关系如图 4 所示, 其中纵坐标  $\Delta L_i (i=1, 2, \dots, 6)$  为弹簧的伸长量.

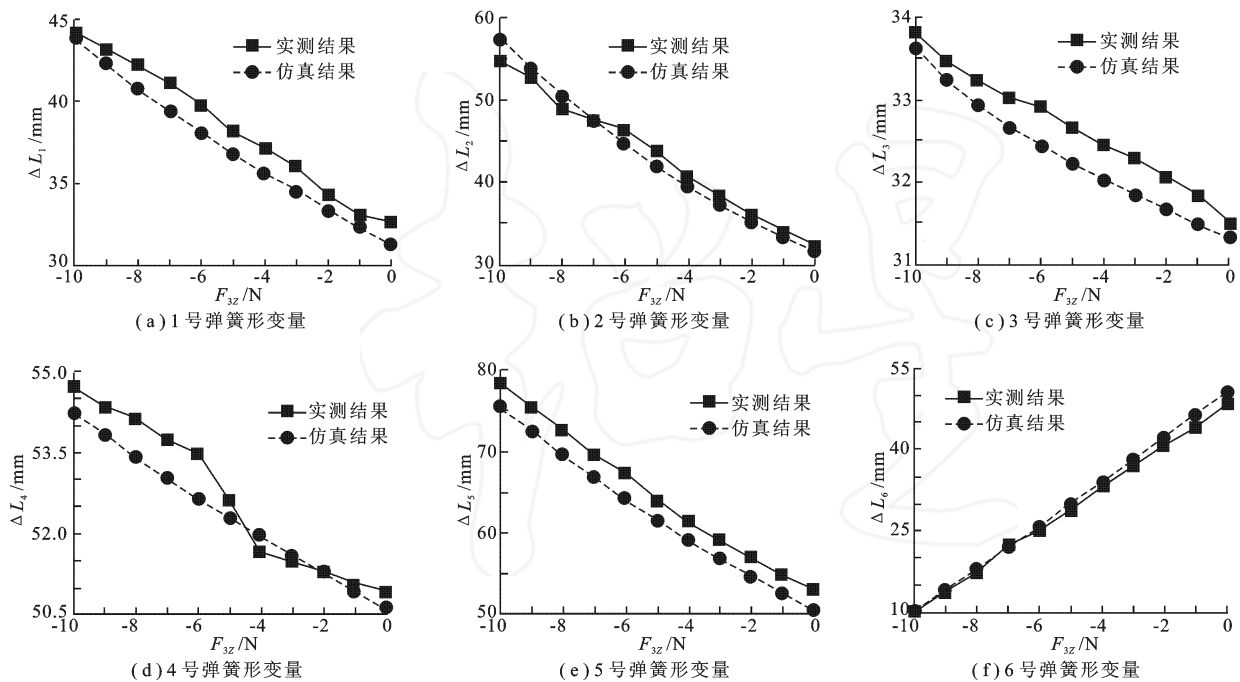


图 4 弹簧形变量随外力的变化结果

对实验数据与计算数据进行分析可得, 实验数据与计算数据的最大误差在 5% 以内, 考虑到机械加工精度的限制, 可认为实验数据与计算结果在误差允许范围内一致. 产生误差的因素有数显标尺等测量构件的重量影响、测量时施加力的方向误差、零件尺寸加工误差及万向节摩擦等.

## 4 结束语

基于拉格朗日方程对张拉整体结构外力作用下的弹性变形进行了分析, 设计制作了张拉整体样机进行了实验验证.

- (1) 推导了张拉整体结构平衡状态的力学模型, 可对非保守力作用下张拉整体结构的变形量进行计算;
- (2) 构建了三杆六索张拉整体结构实验装置, 可对外力作用下弹簧变形量进行测量;

(3) 理论结果与实验数据间的最大误差在 5% 以内, 验证了力学模型的正确性, 揭示了外部作用力与变形间的数学关系.

## 参考文献:

- [1] JUAN S H, MIRATS TUR J M. Tensegrity Frameworks: Static Analysis Review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(7): 859-881.
- [2] OHSAKI M, ZHANG J Y. Nonlinear Programming Approach to Form-finding and Folding Analysis of Tensegrity Structures Using Fictitious Material Properties [J]. International Journal of Solids and Structures, 2015, 69-70: 1-10.
- [3] MOTOR R. Tensegrity: Structural Systems for the Future [M]. London: Butterworth-Heinemann, 2006.
- [4] 纪志飞. 3-SPS 张拉整体并联机构的构型综合与运动性能分析及能量采集研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2015.
- [5] 陆金钰, 武啸龙, 赵曦蕾, 等. 基于环形张拉整体的索杆全张力穹顶结构形态分析[J]. 工程力学, 2015, 32(6): 66-71.
- LU Jingyu, WU Xiaolong, ZHAO Xilei, et al. Form Finding Analysis of Cable-strut Tensile Dome Based on Tensegrity Torus [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(6): 66-71.
- [6] CALUWAERTS K, DESPRAZ J, IŞÇEN A, et al. Design and Control of Compliant Tensegrity Robots through Simulation and Hardware Validation [J]. Journal of the Royal Society Interface, 2014, 11(98): 20140520.
- [7] 纪红娜. 张拉整体移动机器人动力学及运动性能分析[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2011.
- [8] SULTAN C, SKELTON R. A Force and Torque Tensegrity Sensor [J]. Sensors and Actuators, A: Physical, 2004, 112(2/3): 220-231.
- [9] 林敏, 李团结, 纪志飞. 采用改进鱼群算法的张拉整体结构找形方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2014, 41(5): 112-117.
- LIN Min, LI Tuanjie, JI Zhifei. Form-finding of Tensegrity Structures Based on IAFSA [J]. Journal of Xidian University, 2014, 41(5): 112-117.
- [10] 孙国鼎. 张拉整体结构的形态分析[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2010.
- [11] 纪志飞, 李团结, 林敏. 张拉整体并联机构波浪能采集研究[J]. 西安电子科技大学学报, 2015, 42(4): 70-75.
- JI Zhifei, LI Tuanjie, LIN Min. Research on a Tensegrity Parallel Mechanism for Wave Energy Harvesting [J]. Journal of Xidian University, 2015, 42(4): 70-75.
- [12] 王征. 张拉整体结构的找形和稳定性分析[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- [13] 李团结, 贾建援, 胡雪梅. 机械工程中两类非线性方程组的完全解[J]. 西安电子科技大学学报, 2005, 32(1): 71-74.
- LI Tuanjie, JIA Jianyuan, HU Xuemei. Global Set of Solutions for Two Types of Systems of Nonlinear Equations in Mechanical Engineering [J]. Journal of Xidian University, 2005, 32(1): 71-74.

(编辑: 齐淑娟)

(上接第 11 页)

- [19] 林伟. 多元 LDPC 码: 设计、构造与译码 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- [20] IEEE Standards Association. IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks. Part 16: Air Interface for Fixed and Mobile Broadband Wireless Access Systems: IEEE 802.16e-2006 [S]. New York: IEEE, 2006.
- [21] CCSDS. Short Block Length LDPC Codes for TC Synchronization and Channel Coding, Research and Development for Space Data System Standards: CCSDS 231.1-O-1 [S]. Washington: CCSDS, 2015.
- [22] SONG L Y, ZHANG M, HUANG Q, et al. Low Error-floor Majority-logic Decoding Based Algorithm for Non-binary LDPC Codes [C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Communications: 2015. Piscataway: IEEE, 2015: 4072-4076.
- [23] POLYANSKIY Y, POOR H V, VERDU S. Channel Coding Rate in the Finite Block Length Regime [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(5): 2307-2359.

(编辑: 齐淑娟)