考核要求

- 误差的来源？误差的类型？（模型误差？截断误差？舍入误差？浮点运算舍入误差？）
- 误差的度量方法：相对误差、绝对误差
- 理解迭代序列的收敛性？误差的收敛阶（定义与表达），以及阶的估计表达
- 误差的传播途径、误差的累积、局部误差、总体误差等

- **分析讨论题：**
  1. 求方程 $x^2 + (\alpha + \beta)x + 10^9 = 0$ 的根，其中$\alpha = -10^9, \beta = -1$, 讨论如何设计计算格式才能有效地减少误差，提高计算精度.
  2. 以计算x^{31} 为例，讨论如何设计计算格式才能减少计算次数.

考核要求

- 基本概念：方程的根，不动点，迭代，收敛性和收敛速度，误差及其控制
- 算法及其收敛速率：不动点迭代，二分法，牛顿法，割线法，错位法
- 要求：熟练掌握算法设计的基本思想、收敛阶，优缺点，初始值的选择，算法收敛条件

一、理解误差：初值误差、误差传播、算法稳定性、误差的表达及误差估计等

- 求方程$2x^2 + x - 15 = 0$ 的正根（$x^* = 2.5$）近似值，分别利用如下三种格式编程计算：
  1. $x_{k+1} = 15 - x_k^2, k = 0, 1, 2, \cdots$,取初始值$x_0 = 2$.
  2. $x_{k+1} = \frac{15}{2x_k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots$,取初始值$x_0 = 2$.
  3. $x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k^2+x_k-15}{4x_k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots$,取初始值$x_0 = 2$.
- 依次计算$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$, 并作图观察解的稳定性、收敛性，并分析其原因.

二、证明方程$2-3x-\sin(x)=0$ 在(0,1)内有且只有一个实根，使用二分法求误差不大于0.0005的根，及其需要的迭代次数.

三、利用牛顿法求解方程

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-x\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x=0$$

分别取$x_0=\frac{\pi}{2},5\pi,10\pi$, 使得精度不超过$10^{-5}$. 比较初值对计算结果的影响.

四、已知

$$f(x)=5x-e^x$$

在(0,1)之间有一个实根，试分别利用二分法、牛顿法、割线法、错位法设计相应的计算格式，并编程求解(精确到4位小数).

考核要求

- 插值问题的基本概念、插值多项式的存在唯一性条件
- Lagrange插值基函数构造方法、n次Lagrange 插值多项式的的基本形式及其误差估计
- Hermite 插值及其误差估计
- 分片（分片线性、二次、三次）多项式插值及其误差估计
- 样条插值的定义及其构造方法

理论推导与计算：

一、基于不同边界条件的样条函数计算公式推导：

1. 自然边界
2. 固定边界
3. 周期边界
4. 强制第一个子区间和第二个子区间样条多项式的三阶导数相等，倒数第二个子区间和最后一个子区间的三次样条函数的三阶导数相等

二、以$y = \sin(x)$ 为例，在$[0, \pi]$ 区间内生成11个、21 个数据点，设计算法或程序，用上述4个边界条件，分别计算其样条插值，并作图比较，分析其差异性.

三、求一个次数不高于4次的多项式，使得：

1. $f(1) = f'(1) = 0, f(2) = f'(2) = 0, f(3) = 1.$
2. $f(0) = f'(0) = 0, f(1) = f'(1) = 1, f(2) = 1.$

四、怎样选取步长 h, 才能使分段线性插值函数和 $\sin x$ 的误差小于 $1/2 \times 10^{-6}$.

五. 求满足下列条件的三次样条插值函数 $s(x)$:

$$s(1) = s(2) = 1,\ s(3) = 2,\ s'(1) = 0,\ s'(3) = 3.$$

考核要求

- 熟练掌握利用Taylor展开式构造一阶导数、二阶导数的差商近似计算格式及其误差估计：向前差分、向后差分、中心差分
- 熟练掌握利用拉格朗日插值多项式构造数值差分格式的方法及其误差估计
- 理解并掌握：
    - 数值积分的定义
    - 利用拉格朗日多项式逼近构造数值积分计算格式的基本过程、常见计算格式（梯形、抛物型即Simpson格式、中矩形）及其误差估计、代数精确度
    - 复合（Compsite）梯形、抛物型即Simpson格式及其误差估计
    - 基于误差控制的逐次半积分方法

一、推导复合（Composite）梯形公式及其误差估计；推导基于误差控制的逐次半积分梯形公式及其误差估计。

二、let $h=(b-a)/3, x_0=a, x_1=a+h, x_2=b$. Find the degree of precision of the quadrature formula

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}hf(x_1)+\frac{3}{4}hf(x_2).$$

三、上机实验：

1. 自行编制复合梯形公式、Simpson公式的计算程序；
2. 取$h=0.01$，分别利用复合梯形、Simpson公式计算定积分
$$I(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \exp^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
试与精确解比较，说明两种格式的优劣
3. 若取计算精度为10^{-4}, 则$h=?.n=?$

四、上机实验：
分别利用复合梯形、Simpson公式计算定积分

$$I(f) = \int_1^6 (2 + \sin(2\sqrt{x}))\mathrm{d}x$$

取$h = 0.5, 0.25, 0.125$, 列表给出两种格式的近似计算结果.

本章学习重点

- 掌握求取微分方程数值解的基本过程或步骤,解的存在唯一性条件
- 掌握把微分方程离散成数值计算格式的三种常见方法：泰勒法、差商法、积分法
- 掌握系统误差、截断误差、局部误差、总体误差的基本定义；
- 掌握常见的欧拉法（显式、隐式）、梯形格式、预估校正格式；龙格库塔四阶格式；
- 掌握常微分承租、高阶常委分方程的数值计算格式构造方法
- 了解多步法的格式构造过程

一、求$y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ 的数值解(分别用欧拉显格式、梯形预估修正格式、4阶龙格库塔格式, 并与解析解比较这三种格式的收敛性）。)

二、用龙格库塔4阶方法求解描述振荡器的经典的 van der Pol 微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \mu(1 - y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

分别取$\mu = 0.01, 0.1, 1$，作图比较计算结果.

三、试用Adams Fourth-Order Predictor-Corrector格式，求解如下常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t-y}{2}, & 0 \leq t \leq 3; \\ y(0) = 1, & . \end{cases}$$

的数值解（分别取$h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$）

考核要求

- 基本概念：向量与矩阵范数，特殊矩阵（对称正定，对角占优矩阵）
- 算法及其收敛性、收敛速率：
  - 直接求解算法—LU分解、对称矩阵的LL^T, LDL^T分解；
  - 迭代算法：Jacobi、Gauss-Seidel、SOR
- 难点：算法的优劣性，收敛速率

1. 求解线性方程组

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned}$$

(1) 试用LU 分解求解此方程组
(2) 分别用Jacobi, Gauss-Seidel 方法求解此方程组

一、已知观测数据

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	2	1	0

求一个二次多项式拟合这组数据，试写出其最小二乘拟合模型，并给出其正则方程组及其解.

二、研究发现单原子波函数的基本形式为$y = ae^{-bx}$，试根据实验室测试数据（如表所示）确定参数a, b.

x	0	1	2	4
y	2.010	1.210	0.740	0.450

教学要求

- 向量的范数，矩阵的范数，向量序列收敛，收敛矩阵
- 谱半径，圆盘定理
- 幂法、反幂法，对称幂法的算法、异同
- Householder变换，Givens旋转变换的相关理论及矩阵的QR分解

一、已知矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

是一个对称矩阵，且其特征值为 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=1$.

分别利用幂法、对称幂法、反幂法求其最大特征值和特征向量.

注意：可取初始向量$\mathbf{x}^{(0)}=(1\ 1\ 1)^T$.

二、分别利用Householder 变换和Givens 旋转变化方法求$\mathbf{A}$ 的$\mathbf{QR}$ 分解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

写出每一步具体求解过程，及最终分解结果