# 第三章　多维随机变量及其分布

## §3.1　二维随机变量及其分布

### 一　多维随机变量及其分布

在有些随机现象中，试验结果不能只用一个数来描述, 而要同时用几个数来描述. 例如学习成绩：语文、数学、物理、自然等，这样对于每个样本点$\omega$，试验的结果将是一个向量

$$X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)),$$

这个向量取值于$R^n$,这就是随机向量的概念.

**定义1** 若随机变量$X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$定义在同一个概率空间$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$上，则称

$$X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

构成一个$n$ 维随机向量，亦称$n$维随机变量. 一维随机向量就是随机变量. 简记为：$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

一方面，研究随机向量要比单独研究每个分量提供更多的信息量. 例如:语文成绩$X_1(\omega)$,数学成绩$X_2(\omega)$. $X(\omega)=\left(X_1(\omega),X_2(\omega)\right)$. 单独研究$X_1(\omega)$和$X_2(\omega)$，我们得不到事件$\left\{X_1(\omega)\geq 90,X_2(\omega)\geq 90\right\}$的概率. 即得不到两门课都优秀的学生所占比例.

另一方面，通过随机向量，我们还可以研究各分量之间的相互关系. 例如上述的两门课程成绩的关系. 实际问题中, 这类关系往往是我们最关心的.

对任意的$n$ 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, X_2(\omega) \le x_2, \cdots, X_n(\omega) \le x_n\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) \le x_i\} \in \mathbb{F}$$

也即$\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, X_2(\omega) \le x_2, \cdots, X_n(\omega) \le x_n\}$是事件, 存在概率.简记为:$\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$

类似于一维的场合，我们引入分布函数的定义.

定义2 称$n$元函数

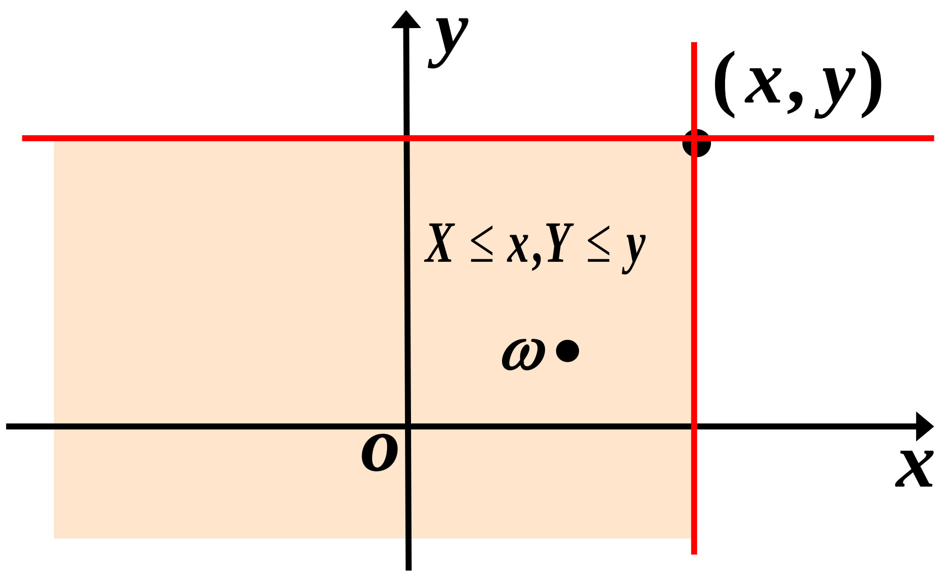
$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$的(联合)分布函数.

分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示$n$个事件$\{\omega: X_1(\omega)\le x_1\}$, $\{\omega: X_2(\omega)\le x_2\},\cdots,\{\omega: X_n(\omega)\le x_n\}$同时发生的概率.

## 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

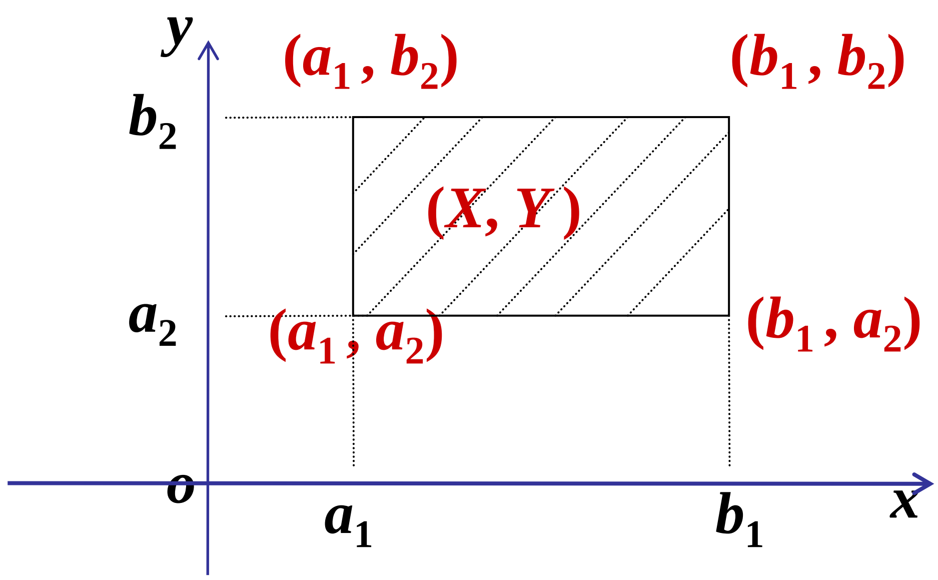


## 事件概率的计算

$$P\{a_1 < X \le b_1,\ a_2 < Y \le b_2\}$$

$$= F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2)$$

（与一维的情况进行比较）



分布函数$F(x_1,\cdots,x_n)$的性质（类似一维$F(x)$的情况）

（1）单调性：关于每个自变量$x_i$是单调不减函数；

（2）$F(x_1,\cdots,-\infty,\cdots,x_n)=0;\quad F(+\infty,\cdots,+\infty)=1.$

(3) 关于每一个自变量 $x_i$ 是右连续的.

(4) 对二元场合，对任意$a_1<b_1$，$a_2<b_2$，都有

$$F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)\geq 0,$$

注：性质4可推出性质1，但性质1推不出性质4.

满足(2), (3), (4)的二元函数是某二维随机变量的分布函数.

练习题：给出$n$ 元场合下的性质(4).

## 随机向量的分类

$$\begin{cases} \text{离散型——随机向量的取值是有限或可列个值} \\ \qquad\qquad\longleftrightarrow \text{各分量都是离散.} \\ \text{连续型——分布函数可表示成 } \boldsymbol{n} \text{ 重积分.} \end{cases}$$

## 二、二维离散型随机变量

**定义3** 若二维随机变量$(X,Y)$所取的可能值是有限对或无限可列多对，则称$(X,Y)$为二维离散型随机变量.

注： $(X,Y)$为二维离散型随机变量

$\xleftrightarrow{\text{充要条件}}$ $X,Y$都是离散型随机变量.

**定义4** 设$(X,Y)$是一个二维离散随机变量，称

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots$$

为$(X,Y)$的联合概率分布（列）.

## $(X,Y)$的联合分布表

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

其中 $p_{ij} \geq 0,$ (非负性)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1. \qquad \text{(正则性)}$$

对于二维离散型随机变量

概率分布表 $\longleftrightarrow$ 分布函数

附注：

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

$$\begin{aligned}P(X=x_i,Y=y_j)&=F(x_i,y_j)-F(x_i,y_j-0)\\&\quad-F(x_i-0,y_j)+F(x_i-0,y_j-0).\end{aligned}$$

$$i,j=1,2,\cdots.$$

**例1** 设随机变量$X$在 1, 2, 3, 4四个整数中等可能地取值, 另一个随机变量$Y$在$1\sim X$中等可能地取一整数值. 试求$(X,Y)$的分布律.

**解**: $\{X=i,Y=j\}$的取值情况为$i=1,2,3,4.$
$j$取不大于$i$的正整数，且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4.\quad j\le i.$$

于是$(X,Y)$的分布律为

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1/8 | 1/8 | 0 | 0 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 0 |
| 4 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 |

**例2** 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里，随机抽取两支，若 $X$、$Y$ 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数，求$(X,Y)$的分布律.

**解**：$(X,Y)$所取的可能值是

$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$.

$$P\{X=0,Y=0\}=C_3^0C_2^0C_3^2\big/C_8^2=3/28,$$

$$P\{X=0,Y=1\}=C_3^0C_2^1C_3^1\big/C_8^2=3/14,$$

$$P\{X=1,Y=0\}=C_3^1C_2^0C_3^1\big/C_8^2=9/28,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

于是$(X,Y)$的分布律为

故所求分布律为

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $3/28$ | $9/28$ | $3/28$ |
| 1 | $3/14$ | $3/14$ | 0 |
| 2 | $1/28$ | 0 | 0 |

## 三、二维连续型随机变量

定义5　设二维随机变量$(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积函数$f(x,y)$，使得对于任意实数$x,y$有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称$(X,Y)$为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为联合概率密度函数，简称概率密度函数.

此时，$F(x,y)$是绝对连续函数，因而也是连续函数.

## 二维密度函数的性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设$G$是$xoy$平面上的一个区域，则

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) 在$f(x,y)$的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

公式很重要

**例1** 设二维随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

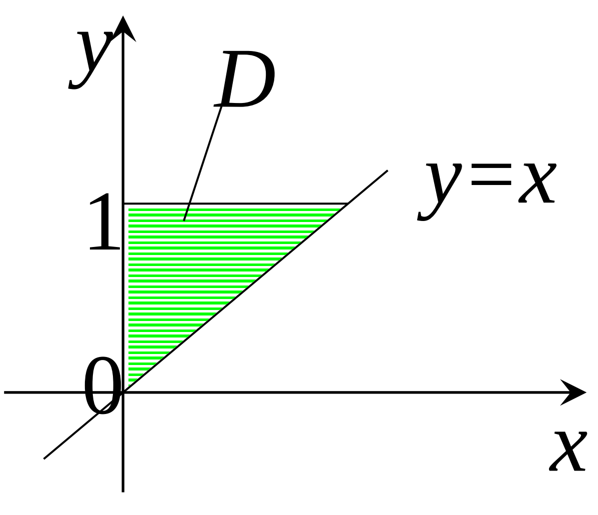
$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$k$为常数. 求

(1) 常数$k$;  (2) $P(X+Y\ge 1)$ , $P(X<0.5)$.

**解**: 令 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y, 0\le y\le 1\}$

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$

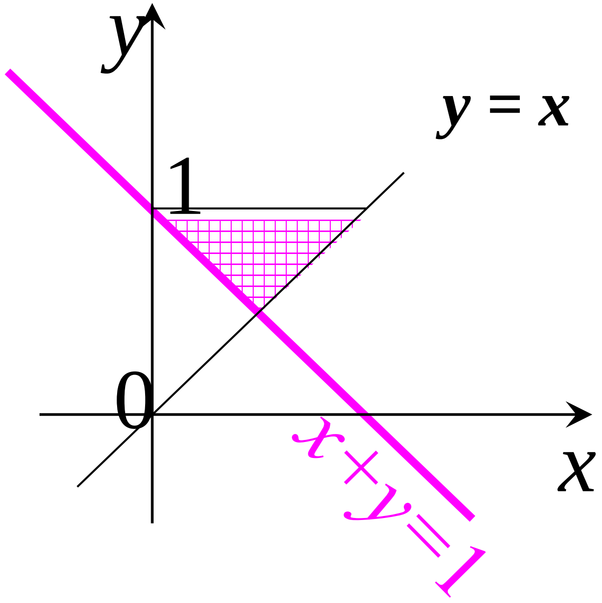


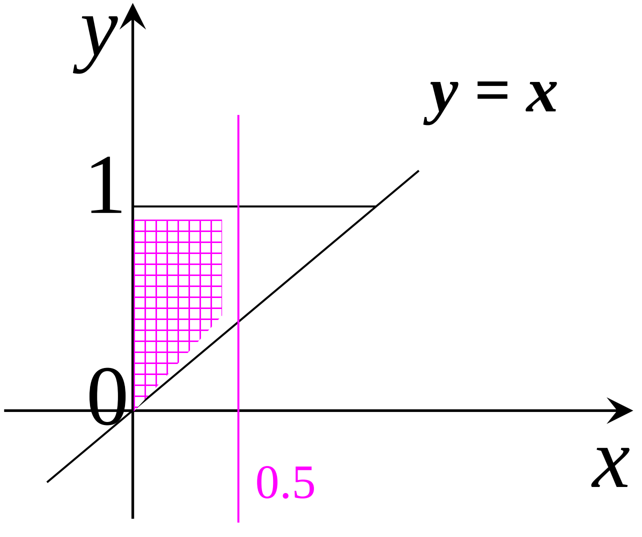
$$1=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y kxy\mathrm{d}x=k\int_0^1 y\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{k}{8},$$

$$k=8.$$

(2) $$P(X+Y\ge 1)=\int_{0.5}^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^y 8xy\mathrm{d}x=5/6.$$

$$P(X<0.5)=\int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_x^1 8xy\mathrm{d}y=7/16.$$



练习题　设$(X, Y) \sim U(D)$,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x\}$$

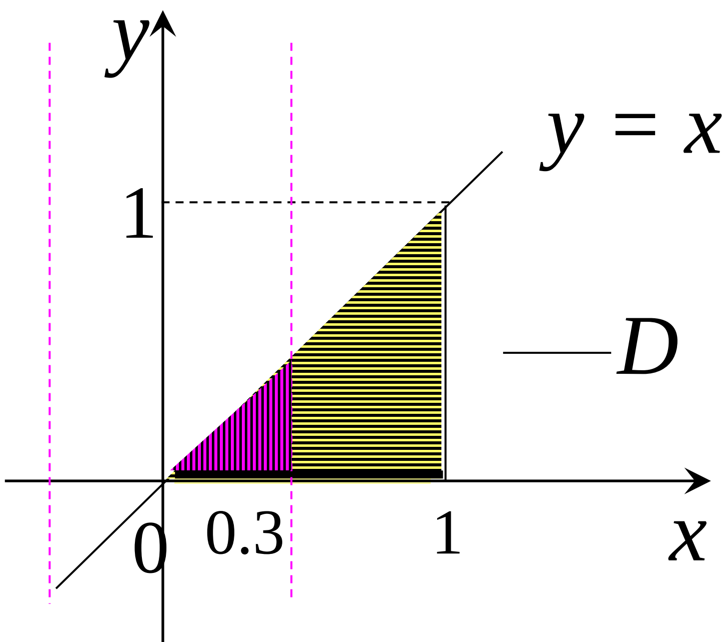
试求：　(1) $f(x, y)$;　(2)$(X, Y)$在平面上的落点到 $y$ 轴距离小于0.3的概率.　(3)$P(Y > X^2)$.

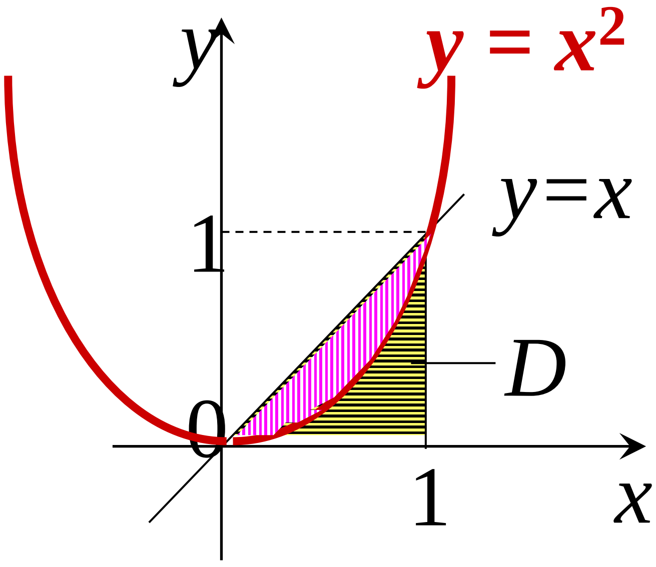
解答 （1） $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（2） $P(|X|<0.3)=P(-0.3<X<0.3)$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(0.3)^2=0.09$$

（3） $P(Y>X^2)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}2dy=1/3.$



【二元正态分布】

若二维随机变量$(X\ ,Y)$的密度函数为

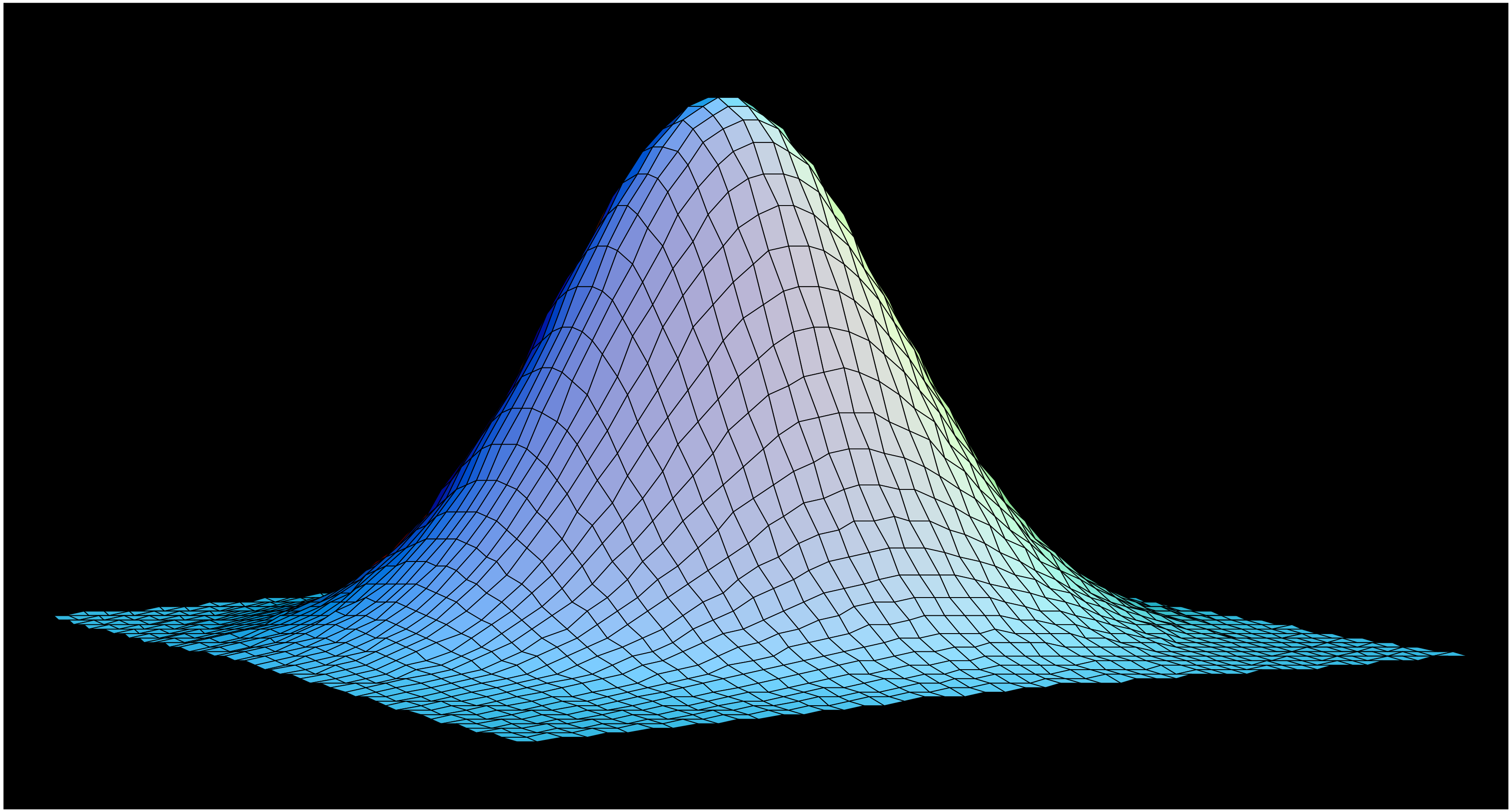
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

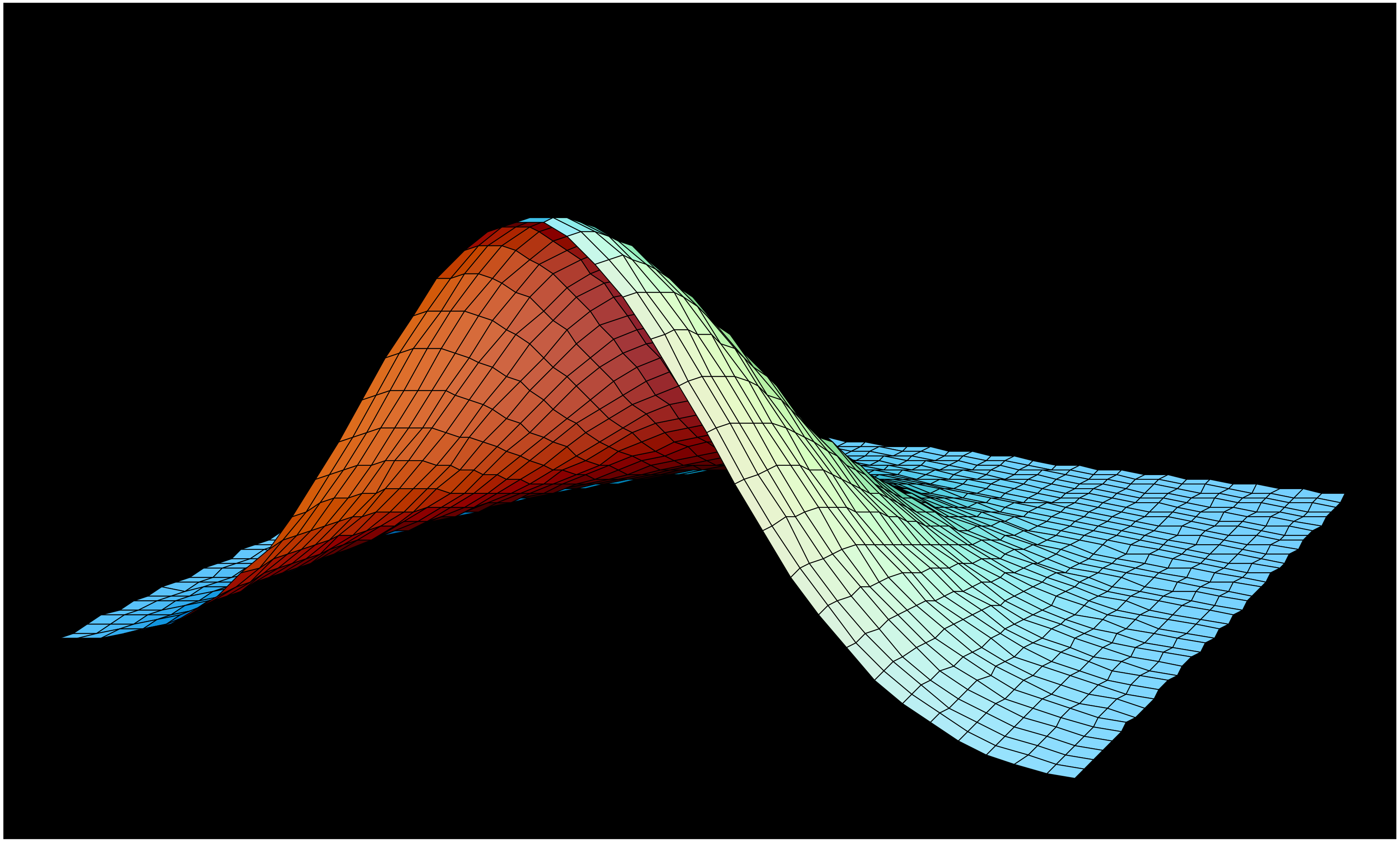
则称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$的正态分布,

记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

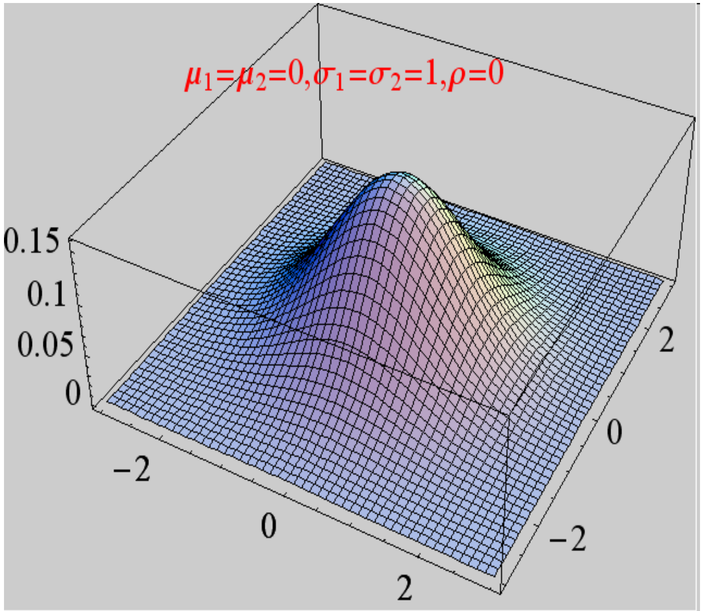
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$均为常数,且$\sigma_1,\sigma_2>0,\ -1<\rho<1$

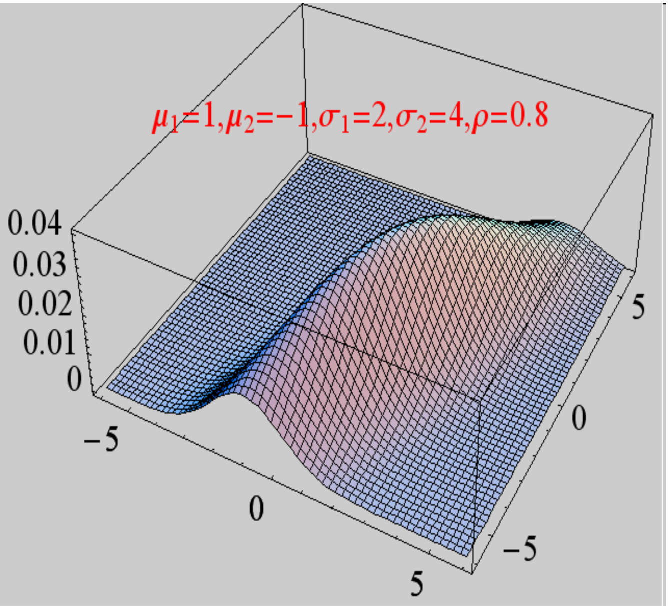


二元正态分布图



二元正态分布剖面图


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
−2
0
2
2
0
−2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−5
0
5
5
0
−5