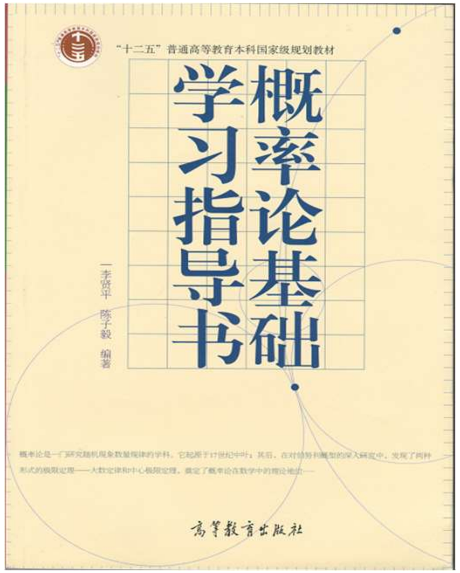
教材 / 辅导书


普通高等教育"十一五"国家级规划教材
概率论基础
第三版
复旦大学 李贤平
高等教育出版社


"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
概率论基础学习指导书
李贤平 陈子毅 编著
高等教育出版社

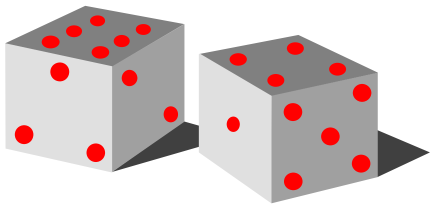
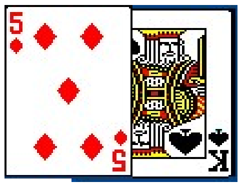
参考书

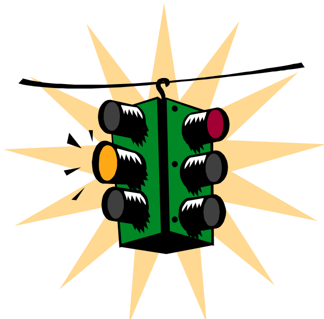

北京高等教育精品教材
概率引论
何书元
高等教育出版社


中国科学技术大学数学教学丛书
概率论
苏 淳 编著
科学出版社
www.sciencep.com

序　言

在我们所生活的世界上, 充满了不确定性从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；从婴儿的诞生，到世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化……，我们无时无刻不面临着不确定性和随机性.


随机现象

在自然界和人类社会生活中的出现的现象，根据条件和结果的关系可分成两类现象：

确定性现象**Certainty phenomena**

——在一定条件下必然出现的现象.

随机现象**Random phenomena**

——事先无法准确预知其结果的现象.

（带有随机性、偶然性）.

A. 太阳从东方升起；

B. 上抛物体一定下落；

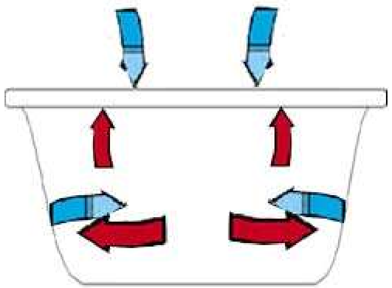
C. 明天的最高温度；

D. 新生婴儿的体重.

例1 一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标(有随机误差)，但多枚炮弹的弹着点就呈现出一定的规律.如：命中率等.

例2 测量一件物体的长度，由于仪器或观测者受到环境的影响，每次测量的结果可能有差异，但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加而逐渐稳定在常数，并且各测量值大多落在此常数附近，离常数越远的测量值出现的可能性越小.

例3 在一个容器内有许多气体分子，每个气体分子的运动存在着不定性，无法预言它在指定时刻的动量和方向，但大量分子的平均活动却呈现出某种稳定性，如在一定的温度下，气体对器壁的压力是稳定的，呈现“无序中的规律”.



???

请回答：

“天有不测风云”和”天气可以预报”有矛盾吗？

天有不测风云指的是：对随机现象进行一次观测其观测结果具有偶然性；

天气可以预报指的是：观测者通过大量的气象资料对天气进行预测，得到天气的变化规律。

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是随机的，但多次观察某个随机现象，便可以发现在大量的偶然之中存在着必然的规律.

概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科.

第一章 随机事件与概率

本章主线提示：先由随机试验引出样本空间，并给出概率的描述性定义, 然后介绍古典概型与几何概型中概率的求法. 在对概率有了一些直观了解的基础上, 引出了事件的域, 进而给出了概率的公理化定义，并由此定义导出概率的基本性质.

§1·1-2　随机事件及其运算

一　随机试验 random Experiments

一个试验如果满足下列条件则称为随机试验.记为E.

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行.

——(可重复性).

(2) 试验的所有结果明确可知,并且不止一个.

——(全部可知性).

(3) 每次试验只能出现一个结果, 事先不能确定.

——(随机性).

二　随机事件

1 基本事件(样本点)**Sample Point**

试验中的每一个基本的结果称为基本事件(样本点). 用ω表示.

2 样本空间**Sample Space**

全体样本点构成的集合，用Ω表示.

例1　写出下列试验的样本空间

1）连续投一枚硬币两次, 观察出现正反面的情况;

2）观察某城市某个月内交通事故发生的次数;

3）研究电视机的使用寿命.

解：(1)一枚硬币抛掷两次，样本空间由四个样本点组成：

$$\Omega=\{(\text{正},\text{正}),\ (\text{正},\text{反}),\ (\text{反},\text{正}),\ (\text{反},\text{反})\}.$$

(2)某个月内交通事故发生的次数；

$$\Omega=\{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}.$$

(3)研究电视机的使用寿命.

$$\Omega=\{t \mid t\geq 0\}.$$

从一副扑克(大小王去掉)中抽取一张牌，写出下列试验的样本空间.

(1)只考虑花色，

(2)考虑大小和花色.

3 随机事件

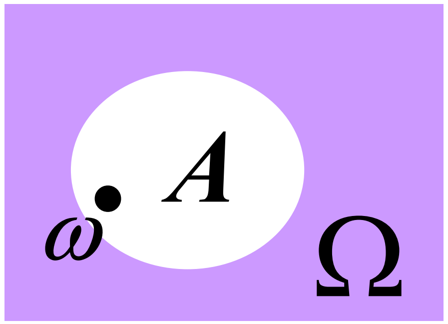
定义：样本空间中具有某种性质的样本点的集合.

事件A，必然事件Ω，

不可能事件Φ.

事件A发生 $\Leftrightarrow$

A中的某个样本点出现.



三　事件的关系及运算

1 关系及运算

1) 包含关系　$A \subset B \quad (B \supset A)$.

2) 相等关系　$A = B$

若$A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A = B$.

3) 并　$A \cup B$

事件A,B中至少有一个发生的事件.

推广1:　$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$表示$A_1, A_2, \cdots A_n$中至少有一个发生.

推广2:　$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示$A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生.

4) 交 $A \cap B$

事件A,B同时发生的事件.

推广1: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$表示$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生.

推广2: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$表示$A_1, A_2, \cdots$同时发生.

5) 差 $A - B$

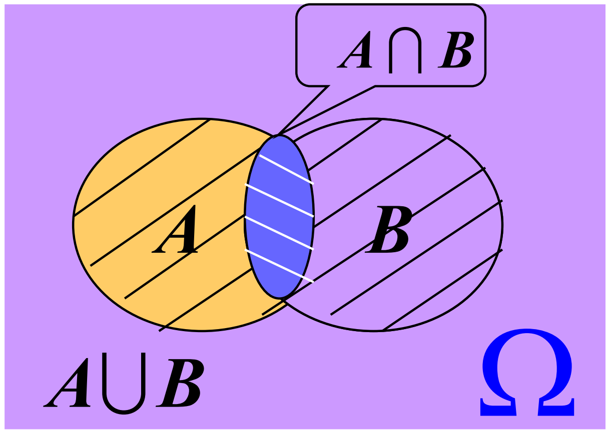
事件A发生而事件B不发生.

6) 互不相容（互斥）

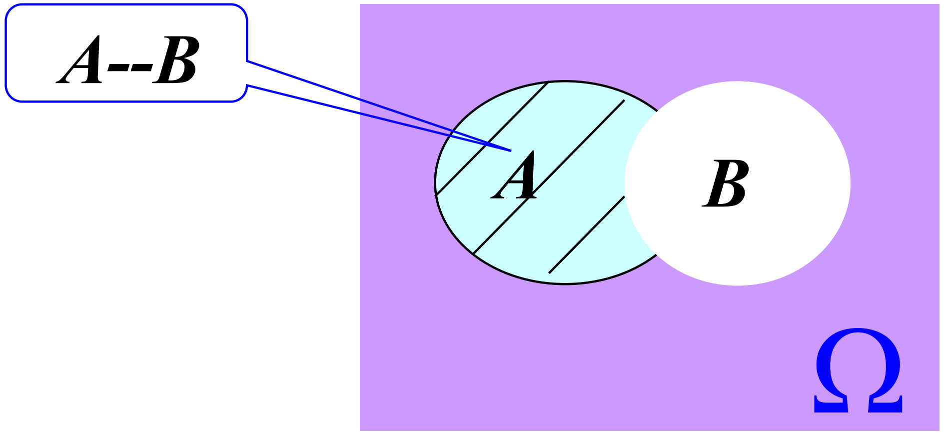
若事件A, B不能同时发生. 即$A \cap B = \Phi$.

7) 对立事件（逆事件）

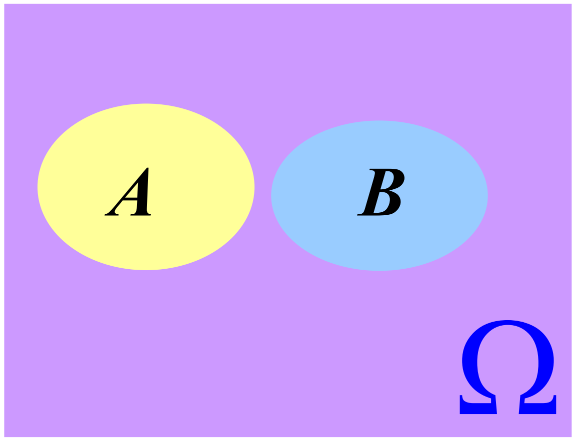
若$A \cup B = \Omega$，$A \cap B = \Phi$. 记为 $\overline{A} = B$.



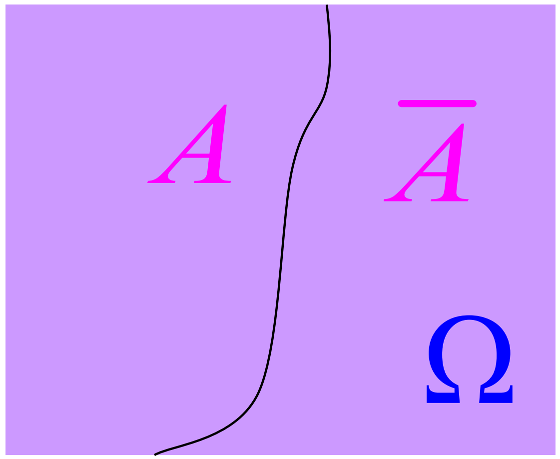
并与交



差



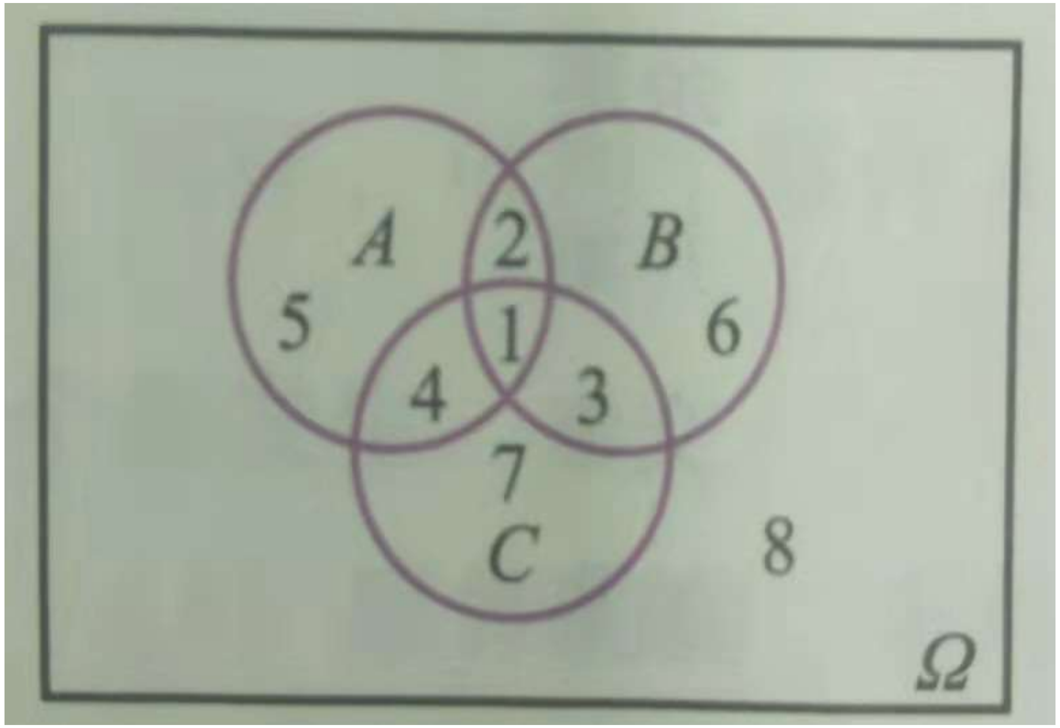
互不相容



相互对立

思考题 1-1

设 A, B, C 是样本空间 Ω 中的三个事件，它们将样本空间 Ω 划分为 8 部分，如图 1.1.7 所示. 试用事件的关系及其运算将它们分别表示出来，并解释每一部分的含义.



对事件运算的顺序作如下约定:

先逆运算，再交运算，最后进行并或差的运算.

几个常用的运算式子

$$A-B=A\overline{B}=A-AB,\quad (A-B)+B=A\cup B,$$

$$A+\overline{A}=\Omega,\qquad A=AB+A\overline{B}.$$

例2 设A,B,C是某样本空间中的随机事件，试用事件间的运算关系表示下列事件.

（1）A,B,C中至少有一个发生,

（2）A,B,C中至少有两个发生,

（3）事件A与B发生而C不发生,

（4）A, B, C中恰好有两个发生,

（5）事件A, B, C中至多有一个发生.

解　（1）$A \cup B \cup C$,　　（2）$AB \cup BC \cup AC$,

（3）$AB\overline{C}$或$AB - C$或$AB - ABC$

（4）$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$,

（5）$A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

2 运算规律

1）交换律： $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A.$

2）结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3）分配律： $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

4）对偶律： (D.Morgan律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

5）幂等律： $A \cup A = A \quad A \cap A = A.$

对于可列个事件的场合，我们定义

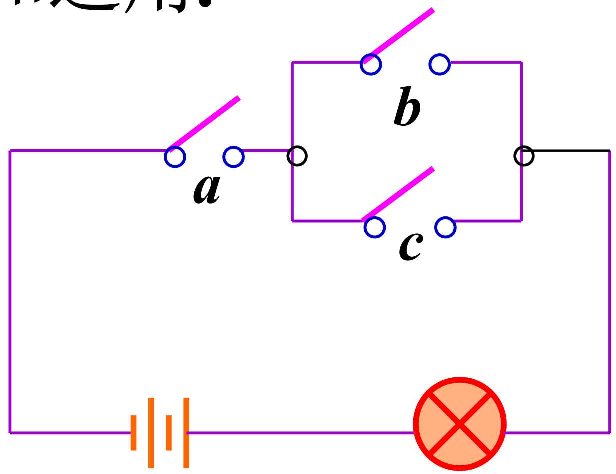
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

此时对偶定理依然成立. $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

易得 $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}, \ A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}, \ A - B = A\overline{B}.$

因此事件的运算本质上只需要两种运算“交与逆”或“并与逆”. 但定义4种运算更易理解和运用.

例3 如右图所示的电路中，设事件 A、B、C分别表示开关a、b、c闭合，用A、B、C表示事件“指示灯亮”及事件“指示灯不亮”。



解　设D表示事件“指示灯亮”，即“事件A”及“事件$B\cup C$”都发生，所以

$$D = A(B\cup C).$$

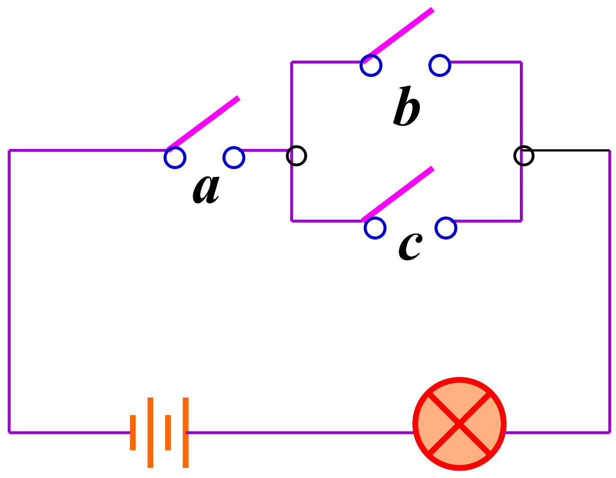
$\bar{D}$表示事件“指示灯不亮”

$$\bar{D} = \overline{A(B\cup C)} = \bar{A}\cup(\bar{B}\bar{C}).$$

或者直接算：

$\bar{D}$表示事件“指示灯不亮”，即事件$\bar{A}$及事件$\bar{B}\bar{C}$至少有一个发生，所以

$$\bar{D} = \bar{A}\cup(\bar{B}\bar{C}).$$



思考题

向指定的目标射击三枪，用A_1、A_2、A_3分别表示第一、二、三枪击中目标，试表示以下事件：

(1)只击中第一枪;

(2)只击中一枪;

(3)三枪都未击中;

(4)至少击中一枪.

思考题答案

向指定的目标射击三枪，用A_1、A_2、A_3分别表示第一、二、三枪击中目标，试表达以下事件：

(1)只击中第一枪；　(2)只击中一枪；

(3)三枪都未击中；　(4)至少击中一枪.

(1) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；　(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(3) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；　(4) $A_1\cup A_2\cup A_3$.

四　小结

(1) 随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

(2) 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验

(1)可以在相同的条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 $\xrightarrow[\text{结果}]{\text{全体}}$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件
- 基本事件
- 复合事件
- 必然事件
- 不可能事件