先观察一个随机试验: 盒子中有n个白球和1 个黑球. 每次从中取出一个球, 不再放回, 直到取出黑球为止. 该随机试验有$n+1$个样本点，其样本空间为

$$\Omega=\{(\text{黑}),(\text{白},\text{黑}),(\text{白},\text{白},\text{黑}),\cdots,(\text{白},\text{白},\cdots,\text{白},\text{黑})\}$$

这些样本点分别记为ω_1，$\omega_2,\cdots$，ω_{n+1}.

显然, 每个样本点ω_k可以用所需要的取球次数来表示, 如果用X表示所需的取球次数，那么X具有以下特点:

(1) X是样本点的函数，即$X=X(\omega)$. 由于样本点ω的出现是随机的，因而$X(\omega)$的取值也是随机的.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,n+1\}$.

(3) $\{\omega : X(\omega)=k\}$表示样本点ω_k，更进一步的，对任给实数x，$\{\omega : X(\omega)\le x\}$都是随机事件.

例如：

$\{\omega : X(\omega)\le 0\}$是不可能事件

$\{\omega : X(\omega)\le 5\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$

——取到的白球数不超过5个.

显然**X是样本空间到实数空间的映射,是试验结果的"数量化",** 借助于X，可以很方便的描述事件.

第二章 随机变量及其分布

§2.1 随机变量与分布函数

一、随机变量的概念

先观察一个随机试验：盒子中有n个白球和1 个黑球. 每次从中取出一个球, 不再放回, 直到取出黑球为止. 该随机试验有$n+1$个样本点，其样本空间为

$$\Omega=\{(\text{黑}),(\text{白},\text{黑}),(\text{白},\text{白},\text{黑}),\cdots,(\text{白},\text{白},\cdots,\text{白},\text{黑})\}$$

这些样本点分别记为ω_1，$\omega_2,\cdots$，ω_{n+1}.

显然, 每个样本点ω_k可以用所需要的取球次数来表示, 如果用X表示所需的取球次数，那么X具有以下特点：

(1) X是样本点的函数，即$X = X(\omega)$. 由于样本点ω的出现是随机的，因而$X(\omega)$的取值也是随机的.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,n+1\}$.

(3) $\{\omega : X(\omega)=k\}$表示样本点ω_k, 更一般的, 对任给实数x，$\{\omega : X(\omega)\le x\}$都是随机事件.

例如：

$\{\omega : X(\omega)\le 0\}$是不可能事件

$\{\omega : X(\omega)\le 5\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$

——取到的白球数不超过5个.

显然X是样本空间到实数空间的映射,是试验结果的“数量化”，借助于X，可以很方便的描述事件.

随机变量的概念.

说明：

1 有些试验结果本身与数值有关. 例如：每天从某火车站下火车的人数；昆虫的产卵数等.

2 在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但可以引进一个变量来表示它的各种结果.

第二章 随机变量及其分布

§2.1 随机变量与分布函数

一、随机变量及分布函数的概念

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便的研究随机现象，便于数学上的推导和计算，就需将任意的试验结果数量化．也就是要建立样本空间到实数空间的映射*X*，这就是随机变量的概念．

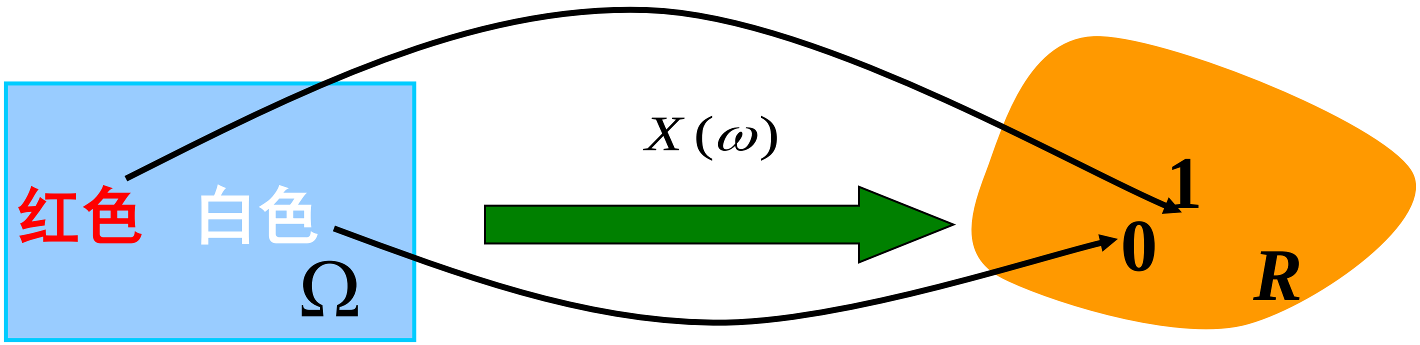
1 有些试验结果本身与数值有关．例如：每天从某火车站下火车的人数；昆虫的产卵数等.

2 在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但可以引进一个变量来表示它的各种结果.

例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球,观察摸出球的颜色.

$$\Omega = \{红色、白色\} \quad \longrightarrow \quad 非数量$$

可采用下列方法将Ω数量化.



即有
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 红色, \\ 0, & \omega = 白色. \end{cases}$$

这样便将非数量的$\Omega = \{红色，白色\}$数量化了.

例2　盒子中有n 个白球和1个黑球。每次从中取出球1个球，不再放回，直到取出黑球为止，考虑所需的取球次数.

解：用X表示所需的取球次数.　特点：

(1) X的取值由试验结果而定-----随机而定.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,\ n+1\}$是有限集合.

(3) $\{X=k\}$是事件, 显然：$X=k \Leftrightarrow$ 第k 次才取到黑球.

根据乘法原理

$$P\{X=k\}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n+1}$$

且

$$\sum_{k=1}^{n+1}P\{X=k\}=1.$$

例3 上例中，每次取出1个球后，若不是黑球. 则将其放回，直到取得黑球为止. 考虑所需要的取球次数.

解： 用X表示所需的取球次数. X**特点：**

(1) X的取值由试验结果而定-----随机而定.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$是可数集合.

(3) $\{X=k\}$是事件，显然

$$X=k \Leftrightarrow \text{第}k\text{次才取到黑球.}$$

根据乘法原理

$$P\{X=k\}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1}\times\frac{1}{n+1}, \qquad k=1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

且
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=1.$$

例4 在区间$(0,1]$内随机抛掷一个质点，考虑质点所在位置的坐标.

解： 用X表示质点所在位置的坐标. **特点：**

(1) X的取值由试验结果而定----随机而定;

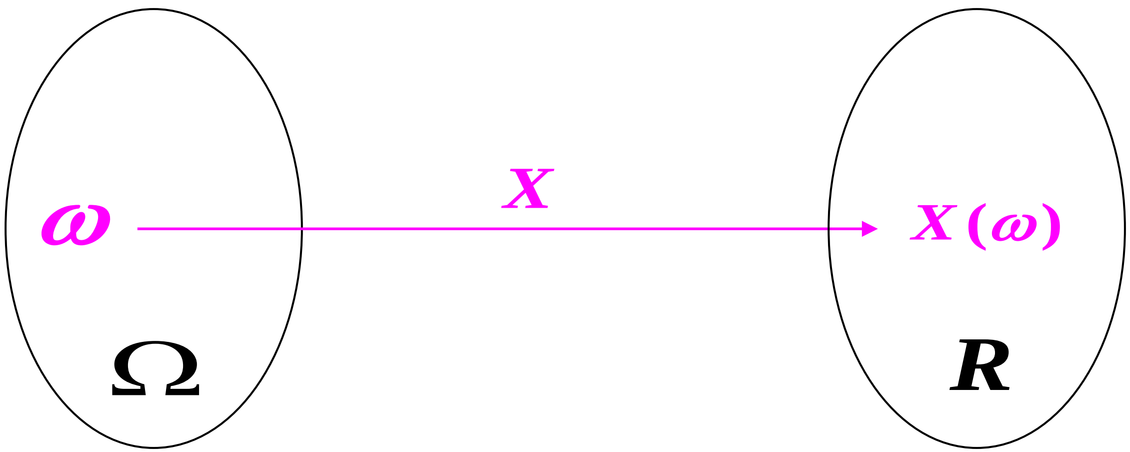
(2) X的所有可能取值为区间$(0,1]$;

(3) 对$\forall x \in (0,1]$, $\{X \le x\}$是随机事件，

$$P\{X \le x\} = \frac{L(0,x]}{L(0,1]} = x$$

更一般的
$$P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1,. \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

上述三个例子都是建立了样本空间到实数空间的映射.



样本空间: $\Omega \xrightarrow{X} R$ 实数空间

样本点: $\omega \xrightarrow{X} X(\omega)$ 实数(点)

事 件: $A \xrightarrow{X} \{X(\omega): \omega \in A\}$ 实数子集

我们感兴趣的是$X(\omega)$落在某区间$(-\infty, x]$内或者等于某个值$\{x\}$的概率. 这要求样本点集合$\{\omega: X(\omega)\le x\}$有概率, 即要求对$\forall x\in R$，集合$\{\omega: X(\omega)\le x\}$是事件.

$$\{\omega: X(\omega)\le x\}\in\mathbb{F}$$

随机变量的定义（**random variable**）

定义1 设$X(\omega)$是定义在概率空间$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$上的单值实函数，如果对于任给$x\in R$，有

$$\{\omega: X(\omega)\le x\}\in\mathbb{F}$$

则称$X(\omega)$为随机变量，称

$$F(x)=P\{X(\omega)\le x\},\qquad -\infty<x<\infty.$$

为随机变量$X(\omega)$的分布函数. 简记为$X\sim F(x)$.

注：(1) 任何随机变量都存在分布函数；

(2) 由于映射X不一定是一一映射，因此形如

$\{\omega : X(\omega) \le x\}$事件的全体不一定等于$\mathbb{F}$.

例如：$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 定义

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & 若\omega是偶数 \\ 1, & 若\omega是奇数 \end{cases}$$

则 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \overset{全体}{=\!=\!=\!=\!=} \Omega$，$\phi$，$\{1, 3, 5\}$，$\{2, 4, 6\}$.

二、分布函数的性质　事件概率的计算

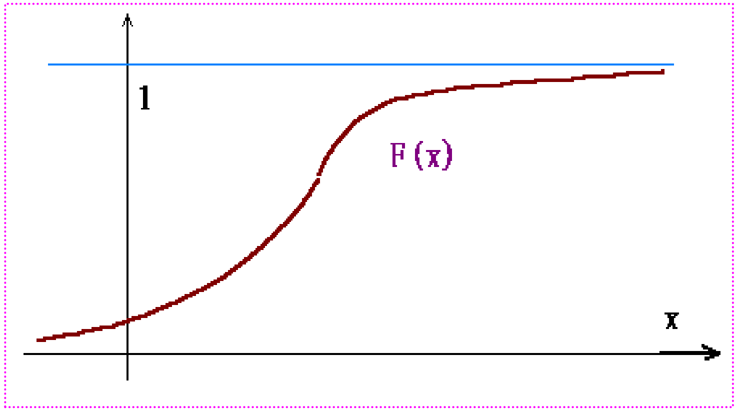
由于分布函数是事件的概率，根据概率的性质得到

定理1　分布函数$F(x)$具有下列性质：

（1）单调性：若$a<b$，则 $F(a)\le F(b)$;

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$,　　$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$;

（3）右连续性：$F(x+0)=\lim\limits_{t\to x+0} F(t)=F(x)$.



证明 （1）$F(b)-F(a)=P\{a<X\leq b\}\geq 0$;

（2）$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{-\infty<X\leq -n\}=\phi$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{-\infty<X\leq n\}=\Omega$.

上述两端求概率，并利用概率的连续性得

$$\lim_{n\to+\infty}P\{-\infty<X\leq -n\}=0,\qquad \lim_{n\to+\infty}P\{-\infty<X\leq n\}=1.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}F(-n)=0,\qquad \lim_{n\to+\infty}F(n)=1.$$

由$F(x)$的单调性知

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{n\to\infty}F(-n)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{n\to+\infty}F(n)=1.$$

通常记作 $F(-\infty)=0,\qquad F(+\infty)=1.$

（3）由于$F(x)$是单调函数，只须证明对于单调下降的数列 $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots, x_n \to x$ 成立

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$$

即可.

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \le x_n\}\right]$$

$$\xlongequal{\text{概率的上连续性}} \lim_{n\to+\infty} P\{X \le x_n\} = \lim_{n\to+\infty} F(x_n).$$

$$\{\omega : X(\omega)=a\}$$ 简记为 $$\{X=a\}$$

$$\{X=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{a-\frac{1}{n}<X\le a\right\}$$

$$P\{X=a\}\overset{\text{概率的上连续性}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{n\to+\infty}P\left\{a-\frac{1}{n}<X\le a\right\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[F(a)-F(a-\frac{1}{n})\right]=F(a)-F(a-0)$$

利用分布函数可计算下列事件的概率

—— 求“函数值”

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a),$$

$$P(X>b)=1-F(b)$$

$$P(X=a)=F(a)-F(a-0),$$

$$P(a\le X\le b)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(a<X<b)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(a\le X<b)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(X\ge b)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

三、例题　书本P33

练习题

设r.v.X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x+1/3 & 0\le x<1/2 \\ 1 & x\ge 1/2 \end{cases}.$$

计算　$P(X=0)$　　$P(X=1/4)$　　$P(X\ge 1/4)$

$P(0<X\le 1/3)$　　$P(0\le X\le 1/3)$

答 案

1/3; 0; 5/12; 1/3; 2/3.

四 随机变量的分类

$$\textbf{随机变量}\begin{cases}\text{离散型}\\ \text{非离散型}\begin{cases}\text{连续型}\\ \text{奇异型}\end{cases}\end{cases}$$

离散型 可能取值的个数为有限个或至多可列个的随机变量.

连续型 可能取值充满某个（有限，无限）区间，并且其分布函数可表为某非负函数的积分的随机变量.