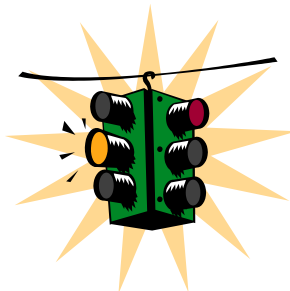
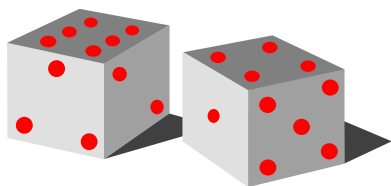


序 言

在我们所生活的世界上,充满了不确定性从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏,到复杂的社会现象;从婴儿的诞生,到世间万物的繁衍生息;从流星坠落,到大自然的千变万化……,我们无时无刻不面临着不确定性和随机性.



随机现象

在自然界和人类社会生活中，普遍存在着两类现象：

确定性现象 Certainty phenomena

—— 在一定条件下必然出现的现象。

随机现象 Random phenomena

—— 事先无法准确预知其结果的现象。

（带有随机性、偶然性）。

A. 太阳从东方升起；

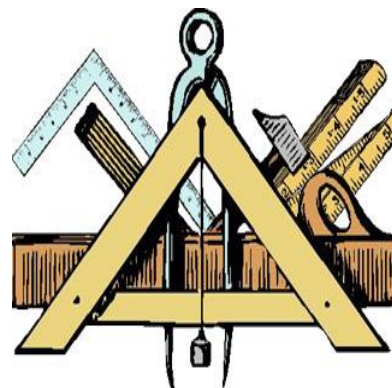
B. 上抛物体一定下落；

C. 明天的最高温度；

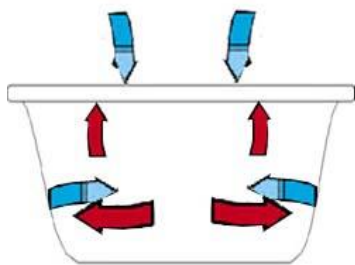
D. 新生婴儿的体重。

例1 一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标(有随机误差)，但多枚炮弹的弹着点就呈现出一定的规律.如：命中率等.

例2 测量一件物体的长度，由于仪器或观测者受到环境的影响，每次测量的结果可能有差异，但多次测量结果的平均值随着测量次数的增加而逐渐稳定在常数，并且各测量值大多落在此常数附近，离常数越远的测量值出现的可能性越小.



例3 在一个容器内有许多气体分子，每个气体分子的运动存在着不定性，无法预言它在指定时刻的动量和方向，但大量分子的平均活动却呈现出某种稳定性，如在一定的温度下，气体对器壁的压力是稳定的，呈现“**无序中的规律**”。



请回答：



“天有不测风云”和“天气可以预报”有矛盾吗？

天有不测风云指的是：对随机现象进行一次观测其观测结果具有偶然性；

天气可以预报指的是：观测者通过大量的气象资料对天气进行预测，得到天气的变化规律。

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是随机的，但多次观察某个随机现象，便可以发现在大量的偶然之中存在着必然的规律。

概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。



第一章 随机事件与概率

本章主线提示：先由随机试验引出样本空间，并给出概率的描述性定义，然后介绍古典概型与几何概型中概率的求法. 在对概率有了一些直观了解的基础上，引出了事件的域，进而给出了概率的公理化定义，并由此定义导出概率的基本性质.

§ 1.1 随机事件及其运算

一 随机试验 random Experiments

一个试验如果满足下列条件则称为随机试验.
记为 E .

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行.

——(可重复性).

(2) 试验的所有结果明确可知,并且不止一个.

——(全部可知性).

(3) 每次试验只能出现一个结果,事先不能确定.

——(随机性).

二 随机事件

1 基本事件(样本点) Sample Point

试验中的每一个基本的结果称为基本事件(样本点). 用 ω 表示.

2 样本空间 Sample Space

全体样本点构成的集合, 用 Ω 表示.

例1 写出下列试验的样本空间

- 1) 连续投一枚硬币两次, 观察出现正反面的情况;
- 2) 观察某城市某个月内交通事故发生的次数;
- 3) 研究电视机的使用寿命.

解：(1) 一枚硬币抛掷两次，样本空间四个样本点组成：

$$\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}.$$

(2) 某个月内交通事故发生的次数;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

(3) 研究电视机的使用寿命.

$$\Omega = \{t \mid t \geq 0\}.$$



www.sharp.com.cn

8509412111302027





从一副扑克(大小王去掉)中抽取一张牌, 写出下列事件的样本空间.

- (1)只考虑花色,
- (2)考虑大小和花色.



3 随机事件

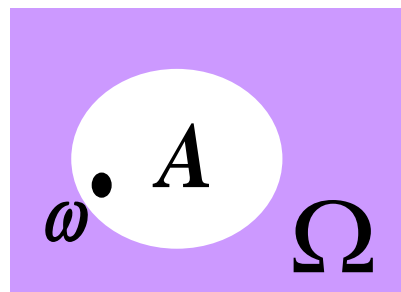
定义: 样本空间中具有某种性质的样本点的集合.

事件 A , 必然事件 Ω ,

不可能事件 Φ .

事件 A 发生 \Leftrightarrow

A 中的某个样本点出现.



三 事件的关系及运算

1 关系及运算

1) 包含关系 $A \subset B$ ($B \supset A$).

2) 相等关系 $A = B$

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A = B$.

3) 并 $A \cup B$

事件 A, B 中至少有一个发生的事件.

推广1: $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一个发生.

推广2: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots 中至少有一个发生.

4) 交 $A \cap B$

事件 A, B 同时发生的事件.

推广1: $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生.

推广2: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 A_1, A_2, \dots 同时发生.

5) 差 $A - B$

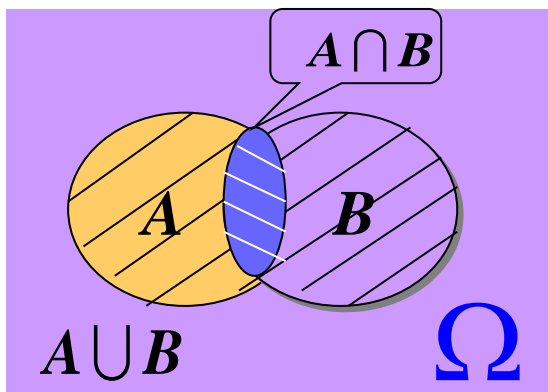
事件 A 发生而事件 B 不发生.

6) 互不相容 (互斥)

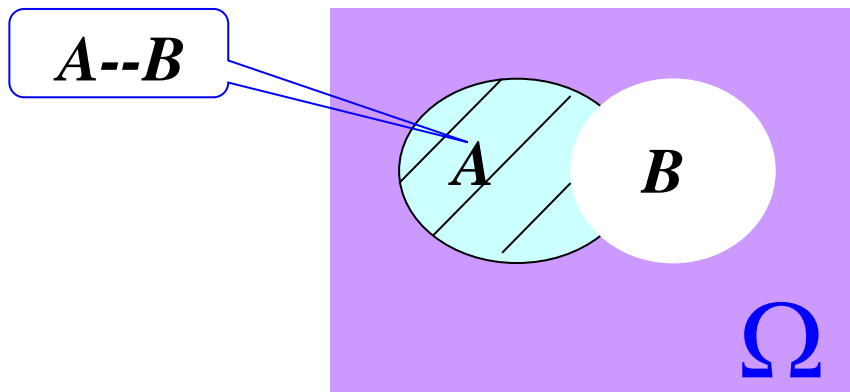
若事件 A, B 不能同时发生. 即 $A \cap B = \Phi$.

7) 对立事件 (逆事件)

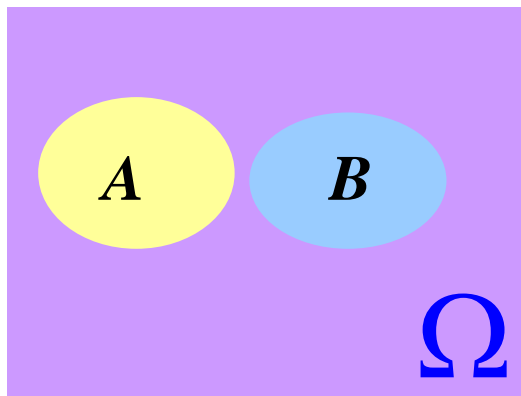
若 $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \Phi$. 记为 $\bar{A} = B$.



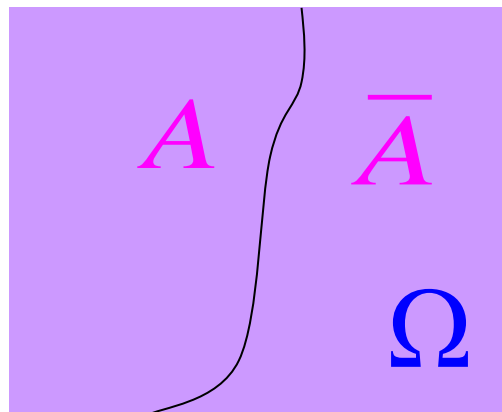
并与交



差



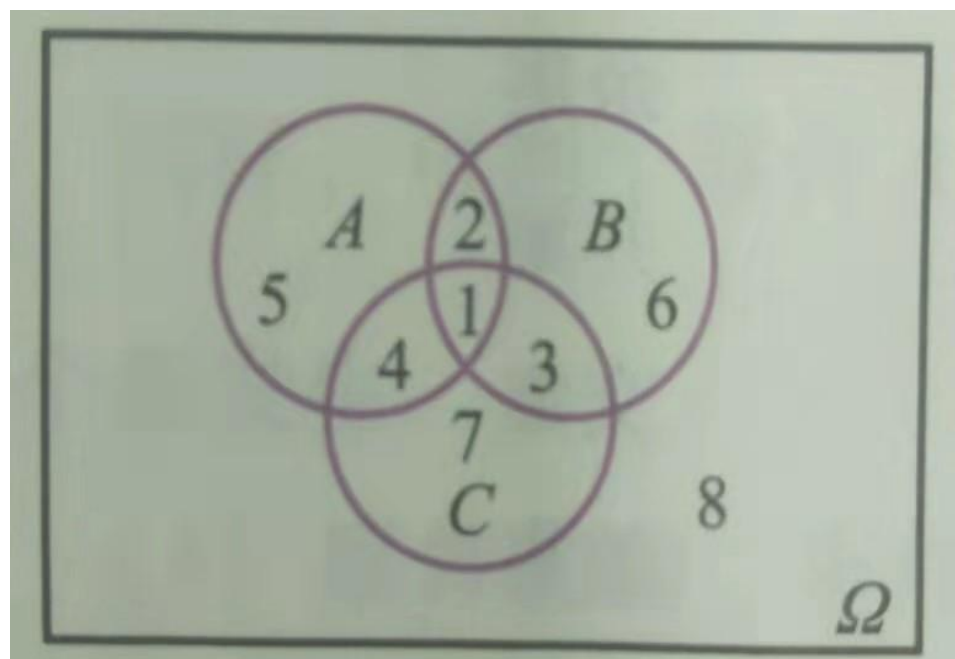
互不相容



相互对立

思考题 1-1

设 A, B, C 是样本空间 Ω 中的三个事件，它们将样本空间 Ω 划分为 8 部分，如图 1.1.7 所示. 试用事件的关系及其运算将它们分别表示出来，并解释每一部分的含义.



对事件运算的顺序作如下约定：

先逆运算，再交运算，最后进行并或差的运算。

几个常用的运算式子

$$A - B = A\bar{B} = A - AB, \quad (A - B) + B = A \cup B,$$

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A = AB \cup A\bar{B}.$$

例2 设 A, B, C 是某概率空间中的随机事件，试用事件间的运算关系表示下列事件。

- (1) A, B, C 中至少有一个发生,
- (2) A, B, C 中至少有两个发生,
- (3) 事件 A 与 B 发生而 C 不发生,

(4) A, B, C 中恰好有两个发生,

(5) 事件 A, B, C 中至多有一个发生.

解 (1) $A \cup B \cup C$, (2) $AB \cup BC \cup AC$,

(3) $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$ 或 $AB - ABC$

(4) $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$,

(5) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

2 运算规律

1) 交换律: $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A.$

2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

4) 对偶律: (D.Morgan律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

5) 幂等律: $A \cup A = A \quad A \cap A = A.$

对于可列个事件的场合，我们定义

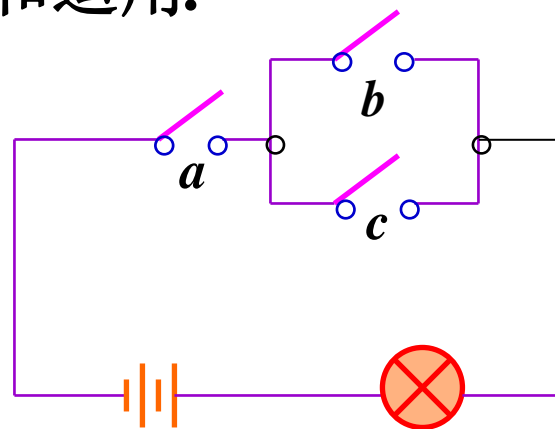
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

此时对偶定理依然成立. $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

易得 $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}, \quad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}, \quad A - B = A \overline{B}.$

因此事件的运算本质上只需要两种运算“交与逆”或“并与逆”。但定义4种运算更易理解和运用。

例3 如右图所示的电路中，设事件 A 、 B 、 C 分别表示开关 a 、 b 、 c 闭合，用 A 、 B 、 C 表示事件“指示灯亮”及事件“指示灯不亮”。



解 设 D 表示事件“指示灯亮”，即“事件 A ”及“事件 $B \cup C$ ”都发生，所以

$$D = A(B \cup C).$$

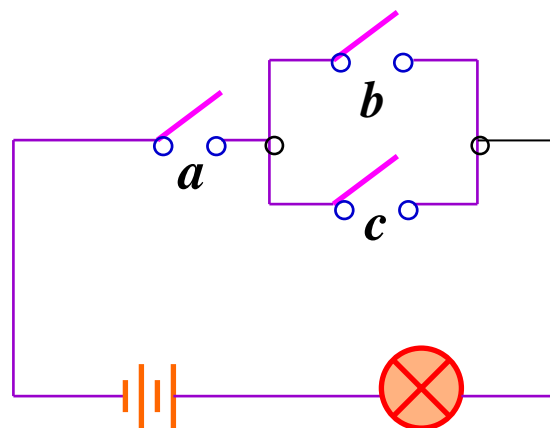
\bar{D} 表示事件“指示灯不亮”

$$\bar{D} = \overline{A(B \cup C)} = \bar{A} \cup (\bar{B}\bar{C}).$$

或者直接算：

\bar{D} 表示事件“指示灯不亮”，即事件 \bar{A} 及事件 $\bar{B}\bar{C}$ 至少有一个发生，所以

$$\bar{D} = \bar{A} \cup (\bar{B}\bar{C}).$$



思考题



向指定的目标射击三枪，用 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示第一、二、三枪击中目标，试表示以下事件：

- (1)只击中第一枪;
- (2)只击中一枪;
- (3)三枪都未击中;
- (4)至少击中一枪.

思考题答案

向指定的目标射击三枪，用 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示第一、二、三枪击中目标，试表达以下事件：

- (1)只击中第一枪； (2)只击中一枪；
(3)三枪都未击中； (4)至少击中一枪.

(1) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; (2) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$;
(3) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; (4) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

四 小结

(1) 随机现象的特征: 条件不能完全决定结果.

(2) 随机现象是通过随机试验来研究的.

**随机
试
验**

(1)可以在相同的条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验、样本空间与随机事件的关系



随机事件

基本事件
复合事件
必然事件
不可能事件