§1・2　随机事件的概率（1）频率与概率

一　概率的直观意义

随机事件发生可能性大小的度量称为**概率**.

二　频率

$$f(A)=\frac{n_A}{n},\qquad n_A?\ \text{—频数.}$$

投币实验表


实验者	投掷次数	出正面次数	出正面频率
De.Morgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
K.Person	12000	6019	0.5016
K.Person	24000	12012	0.5005

频率的性质：

（1）非负性　　对任何事件A，有　$f_n(A)\ge 0$.

（2）规范性　　$f_n(\Omega)=1$.

（3）有限可加性　　若$AB=\Phi$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

三　概率的统计定义

频率的稳定值（中心）称为概率．记为$P(A)$.

概率$\approx$频率　（n充分大时）

§2 随机事件的概率 （2）古典概型与几何概型

一、古典模型与计算公式

我们现在先讨论一类最简单的随机现象，这种随机现象具有下列两个特点：

(1) 试验的全部可能结果是有限个, 不妨设为n个，记为$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$. 而且它们是两两互不相容的. 即样本空间是有限样本空间.

(2) 每个样本点发生的概率是相等的. 由

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)=1$$

得 $$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=1/n.$$

一般把这一类随机现象的数学模型称为古典概型.

对于任何事件A，它总可以表示为样本点之和，不妨设

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$$

由事件概率的定义

$$P(A)=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\cdots+P(\omega_{i_m})$$

$$=1/n+1/n+\cdots+1/n=m/n.$$

在古典概型中，任何事件A的概率由下式计算

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

其中$|A|$表示的有利场合数—导致A发生的样本

点的个数，即是A包含的样本点数，$|\Omega|$表示样本点总数，上式也称为概率的古典定义.

古典概型有着多方面的应用，许多的实际问题可用古典概型来刻画. 例如，质量管理中的产品抽样检查，电视节目收视率的调查，某种疾病的抽查等都可以抽象成古典概型来处理，古典概型的大部分问题都可用摸球模型来描述. 因此古典概型的很多例子都是摸球问题.

尽管古典概型的概率计算公式很简单，但古典概型中的许多概率的计算相当困难而富有技巧.
经常要用到一些排列组合公式.

二、基本的排列组合公式

1）基本计算原理

乘法原理

如果完成一件事情需要m个步骤：

完成第i步有n_i种不同的方法$(i=1,2,\cdots,m)$. 那么完成这件事情共有

$$N = n_1 \times \cdots \times n_m$$

种不同的方法.

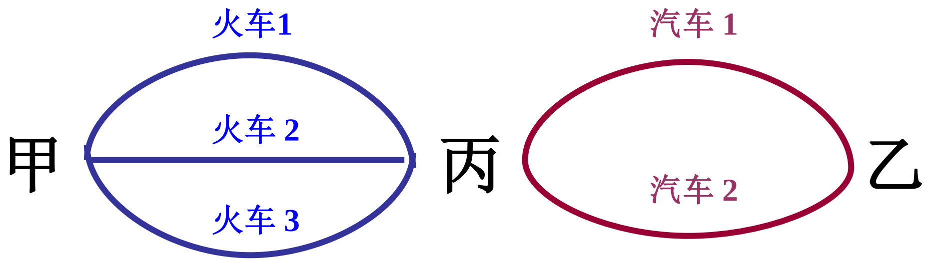
加法原理

如果完成一件事情有m种方式：

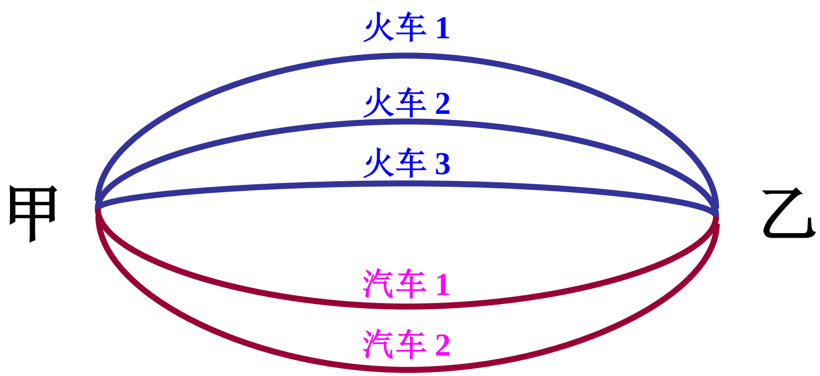
第i种方式有n_i种不同的方法$(i=1,2,\cdots,m)$. 那么完成这件事情共有

$$N = n_1 + \cdots + n_m$$

种不同的方法.



乘法原理



加法原理

2）排列

选排列：$P_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!},\ (1 \le r \le n).$$

$$P_n^n = n!$$

可重复排列：$n \cdot n \cdots \cdot n = n^r,\ (r \ge 1).$

3）组合

不重复组合：$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, \begin{cases} C_n^r = C_n^{n-r} \\ C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r \end{cases}$

$$(0 \le r \le n),$$

可重复组合：$C_{n+r-1}^r.$

证明

n个不同的元素取r个元素的可重复组合.

$n+r-1$个不同的元素取r个元素的不可重复组合.

$$(k_1,k_2,\cdots,k_r) \xleftrightarrow{l_j=k_j+(j-1),\ 1\le j\le r} (l_1,l_2,\cdots,l_r)$$

$$1\le k_1\le\cdots\le k_r\le n, \qquad 1\le l_1<\cdots<l_r\le n+r-1.$$

上述映射是一一对应的，因此两集合元素个数相同.

例如：从数字1, 2, 3中有重复的取出3个, 有重复的组合数为10，从数字1, 2, 3 ,4 ,5中有取出3个的组合数也是10. 对应关系如下：

可重复的组合	5个元素取出3的组合
111	123
112	124
113	125
122	134
123	135
133	145
222	234
223	235
233	245
333	345

4）多组组合模式

有n个不同的元素，要把它们分为k个不同的组，使得各组依次有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个元素．其中$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则一共有

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

种不同分法.

我们也把多组组合模式称为“有编号分组模式”. 上式中的数称为多项系数，它是$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$展开式$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$中的系数.

当 $k=2$时，若$n_1=r, n_2=n-r$. 即为通常的组合公式.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r.$$

当 $k=r+1$时，若 $n_1=\cdots=n_r=1,\ n_{r+1}=n-r$. 由多组组合模式知，共有

$$\frac{n!}{1!\cdot 1!\cdots 1!\cdot(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}=A_n^r$$

种分法，即为通常的排列公式. 这里r个元素的顺序变为组与组之间的顺序.

4）分球入盒问题（球相同，盒子不同）

有n个相同的球(元素)，要把它们分入r个不同的盒子中，不限定每个盒子中球的个数(允许有空盒出现)．求不同的分法有多少？

我们可以设想为：n个相同的球一字排开, 只须在它们之间加上$r-1$个隔板，把它们隔成r 段，然后让各段对号放入相应的盒子即可．由于不限定每个盒子中球的个数，因此对隔板的放置位置没有限制.

又因为球和隔板的总数是$n+r-1$，因此隔板共有$C_{n+r-1}^{r-1}=C_{n+r-1}^{n}$种放法.一旦隔板位置确定下来, 球也就分配完毕．例如：$n=5$，$r=3$时．0011000表示……

有n个相同的元素(球)，要把它们分入r个不同的盒子中，不允许有空盒出现. 不同的分法为

$$C_{n-1}^{r-1}.$$

——只能把隔板放在n个球所形成的$n-1$个间隔上.

【例】（补充）设有方程$x+y+z=15$，试分别求出它的正整数解和非负整数解的组数.

解：设想将15个相同的球分入3个不同的盒子, 再分别将第1, 2, 3个盒中的球数对应为x，y，z的值即可. 所以非负整数解的组数为

$$C_{15+3-1}^{15}=C_{17}^{2}=136.$$

正整数解的组数为 $C_{15-1}^{3-1}=C_{14}^{2}=91.$

特点：球相同，盒子不同.

球不相同，盒子不同(此即为多组组合模式).

5）无编号分组模式（球不同，盒子相同）

有n个不同的球，要把它们分入k个相同的盒子中，使得有k_1个盒子各有n_1个球,……，有k_m个盒子各有n_m个球，其中

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=r，\ k_1n_1+k_2n_2+\cdots+k_mn_m=n.$$

则一共有α/β种不同分法，其中

$$\alpha=\frac{n!}{(n_1!)^{k_1}(n_2!)^{k_2}\cdots(n_m!)^{k_m}},\quad \beta=k_1!k_2!\cdots k_m!.$$

6） 大间距组合

如果要从数集$\{1,2,\cdots,n\}$中取出r个不同的数

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n,$$

使之满足

$$j_2 - j_1 > m，\ j_3 - j_2 > m，\ \cdots\cdots，\ j_r - j_{r-1} > m.$$

其中m是正整数，且有$(r-1)m < n$，所有不同的取法数目为

$$C_{n-(r-1)m}^{r}.$$

组合问题可看成$m=0$的情况，有重复的组合可看成$m=-1$的情况.

7）关于二项系数的一些公式（书本P23，略）

三、古典概型的一些例子

【例1】 在幸运37选7福利彩票中，每期从中开出7个基本号码和一个特殊号码，彩民们在购买每一张彩票时都预先选定7个号码. 规定7个基本号码全部选中获一等奖，选中6个基本号码及特殊号码者获二等奖. 试求购买一张彩票中一等奖的概率p_1及中二等奖的概率p_2.

解：从37个数中选出7个数是一个组合问题，所以

$$|\Omega| = C_{37}^{7} = 10295472$$

由于摇奖时各数地位的对称性, 各个样本点出现的概

率是相等的，这是一个古典概型．一等奖的有利场合数目为$C_7^7C_{30}^0=1$，所以

$$p_1=\frac{1}{C_{37}^7}=9.713\times10^{-8},$$

二等奖的有利场合数目为$C_7^6C_1^1C_{29}^0=7$，所以

$$p_2=\frac{7}{C_{37}^7}=6.8\times10^{-7}.$$

【例2】（投球入格）设有n个球，每个球都能以同样的概率$1/N$落到N个格子$(N \ge n)$的每一个格子中，试求：

（1）某指定的n个格子各有一个球的概率；

（2）任何n个格子各有一个球的概率；

（3）在所指定的某一个中恰好放入k个球.

解：这是一个古典概型问题，$|\Omega| = N^n$.

（1）$|A_1| = n!$，　　$P_1 = n!/N^n$，

（2）$|A_2| = C_N^n n!$，$P_2 = \dfrac{C_N^n n!}{N^n} = \dfrac{N!}{N^n (N-n)!}$，

（3）$|A_3| = C_n^k (N-1)^{n-k}$，$P_3 = \dfrac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$.

生日问题：求参加聚会的n个人至少有两个人生日相同的概率p_n．若把个人看作上面的个球，而把一年中的365天作为格子，则$N=365$，所求的概率就是$1-p_2$，即

$$p_n = 1 - 365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1) \big/ N^n .$$

下表给出了若干个n与p_n的数值：

n	5	10	20	23	30	40	60
p_n	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.994

【例3】 一个笼子里关着10只猫，其中有7只白猫，3只黑猫．把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫，猫争先恐后地往外钻．如果10只猫都钻出了笼子，以A_k表示第k只出笼的猫是黑猫的事件，试求$P(A_k)$，$k=1,2,\cdots,10$.

解：看成全排列 $$P(A_k)=\frac{C_3^1 9!}{10!}=\frac{3}{10};$$

看成组合 $$P(A_k)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};$$

看成选排列 $$P(A_k)=\frac{C_3^1 A_9^{k-1}}{A_{10}^k}=\frac{3}{10}.$$

这里用三种不同的解法得到了完全相同的结果. 这个例子告诉我们：对于古典概型问题，可以采用不同的排列组合模式计算样本点的个数，从而得到不同的解法. 需要注意的是：必须对样本空间和随机事件采用相同的计数模式，并且能够给出合理的解释.

此外，这个问题的答案表明：不论k等于几，都有$P(A_k)=3/10$，即恰好等于黑猫在所有猫中所占的比例. 这个结果揭示了“抽奖的公平性”——抽到奖券（中奖）的概率与抽的次序无关.

【例4】 10名男同学及5名女同学随机地站成一行，求任何两名女同学都不相邻的概率.

解：显然这是一个排列问题， $|\Omega| = 15!$.

如果用A表示任何两名女同学都不相邻的事件，先让10名男同学随机的站成一行，再让5名女同学两两不相邻地站到10名男同学之间. 女同学的位置共有C_{11}^{5}种情况，选好位置后，她们进行排列，即有

$$|A| = 10!C_{11}^{5}5! = \frac{10!\cdot 11!}{6!},$$

由于“随机地站成一行”表示各种不同排法是等可能的，

所以 $$P(A) = \frac{10!\cdot 11!}{15!\cdot 6!} = \frac{2}{13}.$$

【例5】 从5双不同的鞋子中随机的抽取4只，试求下列各事件的概率.

(1) 事件 — 4只鞋子中任何两只不成双；

(2) 事件 — 4只中有两只成双，另两只不成双；

(3) 事件 — 4只鞋子恰好成两双.

解：
$$|\Omega| = C_{10}^{4} = 210.$$
$$|A| = C_5^4 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 80;$$
$$|B| = C_5^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 120;$$
$$|C| = C_5^2 \cdot C_2^2 \cdot C_2^2 = 10.$$

所以

$$P(A) = 8/21; \quad P(B) = 4/7; \quad P(C) = 1/21.$$

【例6】 设有n个人定了n张票，其中有k张甲级票，现让这n个人各抽一张，在未抽完之前先抽者不准宣布结果. 试证明：每个人抽的甲级票的概率相等皆为k / n，而与取的先后顺序无关.

解 设$A_m = \{$第m人抽的甲级票$\}$

$$P(A_m) = \frac{C_k^1 (n-1)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

【例7】 从1, 2,⋯, 9共9个数字中任取一个，然后放回，先后取出5个数字，求下列事件的概率.

（1）A：最后取出的数字是奇数；

（2）B：五个数字全不相同；

（3）C：恰好出现两次；

（4）D：1至少出现两次；

解： $|\Omega| = n = 9^5.$

$$n_A = 9^4 \times 5, \quad n_B = A_9^5, \quad n_C = C_5^2 \times 8^3,$$

$$n_D = 9^5 - 8^5 - C_5^1 \times 8^4.$$

由古典概型的计算公式即可求得概率..

【例7】 9个国籍不同的乒乓球队，内有3个亚洲国家队，抽签分成3组进行预赛(每组3队)，试求：

（1）A：3个组各有1个亚洲国家队的概率；

（2）B：3个亚洲国家队集中在第一组的概率；

（3）C：3个亚洲国家队集中在某一组的概率.

解： 此问题属于多组组合问题,分法总数为

$$n=\frac{9!}{3!\cdot 3\cdot !3!},\qquad n_A=\frac{6!}{2!\cdot 2\cdot !2!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!},$$

$$n_2=\frac{6!}{3!\cdot 3!},\qquad n_3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\times 3.$$

$$p_1=\frac{n_1}{n}=\frac{9}{28},\ \ p_2=\frac{n_2}{n}=\frac{1}{84},\quad p_3=\frac{n_3}{n}=3p_2=\frac{1}{28}.$$

四、二项分布与超几何分布

产品抽样检查有两类，即有放回抽样与不放回抽样.

【例8】如果某批产品中有a件次品b件合格品，我们采用有放回及不放回抽样方式从中抽n件产品，问正好有k件次品的概率各是多少？

【有放回抽样场合】 $$b_k=\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}.$$

b_k是二项式$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)^n$展开式的一般项，上述概率称为二项分布. 关于二项分布更进一步的讨论在以后章节陆续展开.

【不放回抽样场合】 $$h_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

这个概率称为超几何分布.

超几何分布当k比a小很多，$n-k$比b小很多时：有

$$h_k \approx b_k.$$

这是因为

$$h_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{(A_a^k / k!) \cdot (A_b^{n-k} / (n-k)!)}{A_{a+b}^n / n!} = C_n^k \frac{A_a^k A_b^{n-k}}{A_{a+b}^n}$$

$$= \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} \cdot \frac{A_a^k / a^k \cdot A_b^{n-k} / b^{n-k}}{A_{a+b}^n / (a+b)^n} \approx \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = b_k$$

若一批产品共有N件，其中有M件次品$(M < N)$件，今抽取n件，则其中恰有m件次品的概率是

$$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

这里 $0 \le n \le N$，$0 \le m \le M$，$0 \le n - m \le N - M$. 这是超几何分布的另一种常见形式.

五、概率的基本性质

根据古典概型的概率计算公式，不难证得概率有下面三个基本性质：

（1）非负性　　对任何事件A，　有　$P(A)\geq 0$.

（2）规范性　　$P(\Omega)=1$.

（3）有限可加性　　若$A_1, A_2, \cdots A_n$两两互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明　（略）

推论1　　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

推论2　　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

利用概率的三条性质及其推论，可以帮助我们计算古典概型中许多复杂事件的概率.

【例9】（德梅尔问题）一颗骰子投4次至少得到 1 个六点与两颗骰子投24次至少得到 1个双六，这两个事件的概率哪个更大些？

解：以A表示一颗骰子投4次至少得到1个六点这一事件，则$\overline{A}$表示一颗骰子投4次都没有得到六点，易得

$$P(\overline{A}) = (5/6)^4.$$

因而有 $$p_1 = P(A) = 1 - (5/6)^4 = 0.5177,$$

与上面类似得 $$p_2 = 1 - (35/36)^{24} = 0.4914.$$

因此, 前者的概率大于0.5，后者的概率小于0.5, 前者的概率更大些.

【例10】一口袋中装有$N-1$只黑球和1只白球, 每次从袋中随机地摸出一球，并换入1只黑球，这样继续下去, 问第k次摸球时摸到黑球的概率是多少?

解：以A表示第k次摸球时摸到黑球这一事件，则$\bar{A}$表示第k次摸球时摸到白球，则前面的$k-1$次摸球时都摸出黑球而第k次摸出白球，由于

$$P(\bar{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

因而

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

【例11】$2n$名同学来自n个不同班级，每班2人，现在他们随机地坐成一排，试求有同班同学不相邻的概率？

解：以A有同班同学不相邻这一事件，则$\bar{A}$表示各班2人都相邻

$$|\Omega| = (2n)!, \quad |\bar{A}| = n! \cdot (2!)^n = 2^n n!.$$

因而

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2^n n!}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

【例12】 从这10个数码中不放回的任取n个, 求这个数的乘积能被10整除的概率.$(1 \le n \le 10)$

解：以E_n表示取出的n个数的乘积能被10整除这一事件.

当$n=1$时，　$P(E_1)=1/10$,

当$n=9, n=10$时，　$P(E_9)=P(E_{10})=1.$

在其余情况下，以A表示所取的个数码中有0这一事件，则显然有$E_n = A + \bar{A}E_n$，因而

$$P(E_n) = P(A) + P(\bar{A}E_n).$$

由于$|\Omega| = C_{10}^n, |A| = C_9^{n-1}$，所以　$P(A) = \dfrac{C_9^{n-1}}{C_{10}^n}.$

下面求$P(\bar{A}E_n)$.

当$6\le n\le 8$时，所取出的n个号码中一定有偶数，当$\bar{A}E_n$发生时，数码0没有被取出，因而数码5一定要取出，其余的$n-1$个数码可以在除了0与5之外的其余8个数中任取，因此$\left|\bar{A}E_n\right|=C_8^{n-1}$，故

$$P(E_n)=P(A)+P(\bar{A}E_n)=\frac{C_9^{n-1}+C_8^{n-1}}{C_{10}^n},\ 6\le n\le 8.$$

当$2\le n\le 5$时, 若$\bar{A}E_n$发生, 则5一定被取出, 并且还至少取出了1个非0偶数. 在5被取出的情况下，其余$n-1$个数码全为奇数的取法有C_4^{n-1}种，所以

$\left|\bar{A}E_n\right| = C_8^{n-1} - C_4^{n-1}$，故得

$$P(E_n) = P(A) + P(\bar{A}E_n) = \frac{C_9^{n-1} + C_8^{n-1} - C_4^{n-1}}{C_{10}^{n}},$$

$$2 \le n \le 5.$$

六、几何模型与计算公式

引例1　某汽车站每隔5分钟有一辆汽车到站，乘客到达车站的时刻是随机的，求一个乘客候车时间不超过3分钟的概率.

引例2　如果在一个5万平方公里的海域里有表面达40平方公里的大陆架蕴藏着石油, 假设在这海域里随意任取一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

引例3　在400ml的自来水中有一个大肠杆菌，今从中随机取出2ml水，放在显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率是多少？

定义

若随机试验满足以下条件，则称其为几何概型。

1 有无限个样本点，且样本空间是几何空间中的一个有限区域.

2 样本点落在有限区域的概率与区域的度量大小(长度, 面积, 体积)成正比,而与区域的位置形状无关.

概率计算公式:

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

几何概率

求几何概率的关键是对样本空间和所求事件用图形描述清楚，然后计算出相应的度量.

几何概型的概率的性质

（1）非负性　　对任何事件A，　有　$P(A) \geq 0.$

（2）规范性　　$P(\Omega) = 1.$

（3）可列可加性　若$A_1, A_2, \cdots$两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

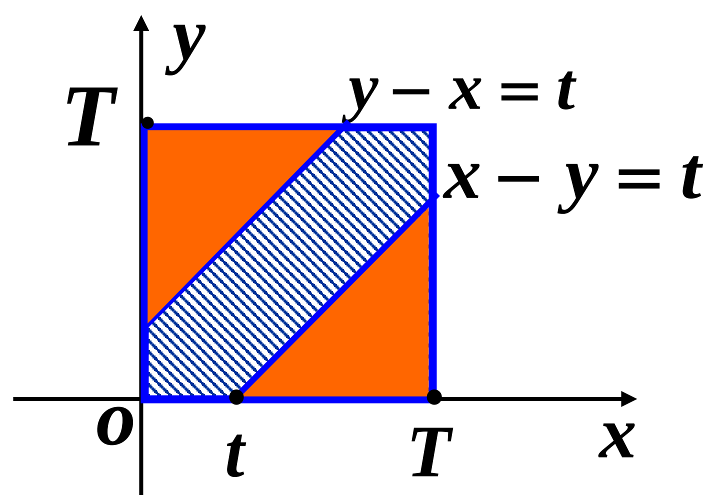
前两个性质与古典概型类似，最后一个性质要比古典概型的性质强（以后证明）.

例1（会面问题）甲、乙两人相约在 0 到T这段时间内，在预定地点会面. 先到的人等候另一个人，经过时间$t(t<T)$后离去. 设每人在0 到T这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两人到达的时刻互不影响. 求甲、乙两人能会面的概率.

解：设 x, y 分别为甲,乙两人到达的时刻，则

$$0 \le x \le T, \quad 0 \le y \le T.$$

两人会面的充要条件为 $|x-y| \le t,$



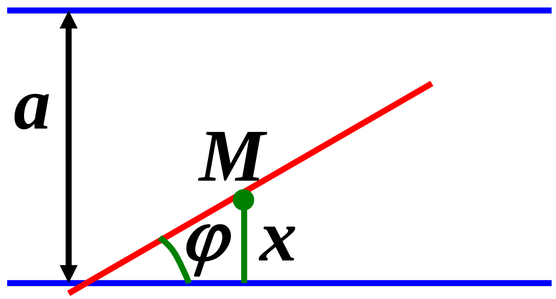
若以x,y表示平面上点的坐标，则所求的概率为

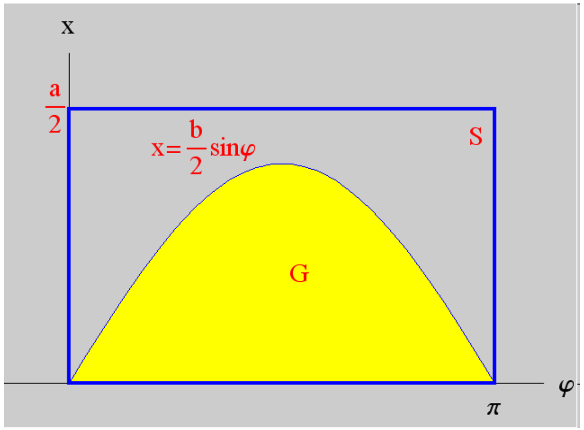
$$p=\frac{阴影部分面积}{正方形面积}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-(1-\frac{t}{T})^2.$$

蒲丰投针试验

例2　1777年, 法国科学家蒲丰(Buffon)提出了投针试验问题. 平面上画有等距离为$a(>0)$的一些平行直线，现向此平面任意投掷一根长为$b(<a)$的针, 试求针与任一平行直线相交的概率.

解：以x表示针投到平面上时，针的中点M到最近的一条平行直线的距离. φ表示针与该平行直线的夹角. 那么针落在平面上的位置可由(x,φ)完全确定.





投针试验的所有可能结果与矩形区域

$$\Omega = \{(x,\varphi) \mid 0 \le x \le \frac{a}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\}$$

中的所有点一一对应.

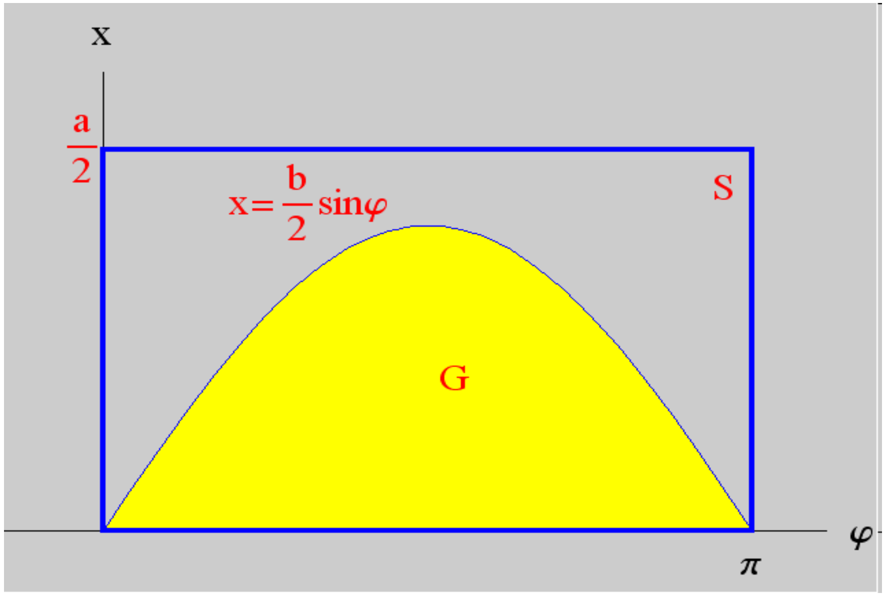
由投掷的任意性可知,这是一个几何概型问题.

所关心的事件

$$A=\{\text{针与某一平行直线相交}\}$$

发生的充分必要条件为Ω中的点满足

$$0 \le x \le \frac{b}{2}\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi.$$



$$P(A)=\frac{\mathrm{m}(G)}{\mathrm{m}(\Omega)}=\frac{G\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{b}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2b}{a\pi}.$$

蒲丰投针试验的应用及意义 $P(A)=\dfrac{2b}{a\pi}$

根据频率的稳定性，当投针试验次数n很大时，算出针与平行直线相交的次数m，则频率值m/n即可作为$P(A)$的近似值，代入上式得

$$\frac{m}{n}\approx\frac{2b}{a\pi},\qquad\Rightarrow\pi\approx\frac{2bn}{am}.$$

利用上式可计算圆周率 π 的近似值.

历史上一些学者的计算结果(直线距离$a=1$)

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.8333	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

这是一个颇为奇妙的方法：只要设计一个随机试验, 使一个事件的概率与某个未知数有关, 然后通过重复试验，以频率估计概率，即可求得未知数的近似解.

一般说来，试验次数越多，则求的近似解就越精确. 随着电子计算机的出现, 人们便可利用计算机来大量重复模拟所设计的随机试验，人们称之为随机模拟法，也称为蒙特卡罗（**Montecarlo**）法.

例如：可利用随机模拟法求定积分.

例3 在长度为a 的线段内任取两点将其分为三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解：这是一个几何概型问题.

分别用x, y和$a-x-y$表示线段被分成的三段长度，则显然有

$$0<x<a, \qquad 0<y<a, \qquad 0<a-x-y<a.$$

所以样本空间为

$$\Omega=\{(x, y): 0<x<a，\ a,\ 0<y<a,\ 0<x+y<a\}$$

又根据构成三角形的条件：三角形任意两边之和大于第三边，得事件A所含样本点(x, y)必须满足

$$0 < a - x - y < x + y, \quad 0 < x < y + (a - x - y),$$

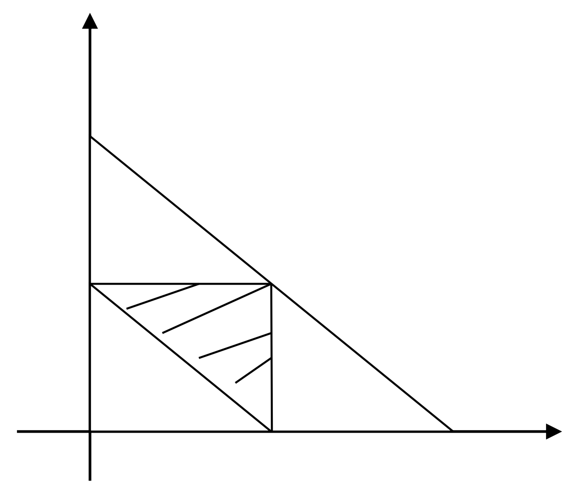
$$0 < y < x + (a - x - y).$$

整理得

$$\frac{a}{2} < x + y < a, \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad 0 < y < \frac{a}{2}.$$

所以事件A可用图示中阴影部分表示

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$



例4(贝特朗奇论)在一个半径为1的圆周上随机地任取一条弦，求其长度大于内接等边三角形边长($\sqrt{3}$)的概率，这个问题在历史上曾称为**Bertrand悖论**，因为问题有不同的答案．因此**Bertrand**悖论对几何概率提出了批评，这种善意的批评,推动了概率论的发展.

在这个问题中，随机性至少有三种理解：

（1）先在圆周上取定一点A，然后再在圆周上随机地取一个点B，连接A与B成为弦；

（2）取定一条直径，然后在该直径上随机地取一个点B，作一条过B与直径垂直的弦；

（3）以圆内的任何点作为中点的弦是唯一决定的，因此以这个对应，随机地取一条弦就等同于随机地在圆内取一点B.

上述三种情况下，不难得概率分别为

$$\frac{1}{3}，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}.$$