§3.2 随机向量 随机变量的独立性

一 随机向量及其分布

在有些随机现象中, 试验结果不能只用一个数来描述, 而要同时用几个数来描述. 例如学习成绩: 语文、数学、物理、自然等, 这样对于每个样本点 ω, 试验的结果将是一个向量

$$X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)),$$

这个向量取值于 R^n,这就是随机向量的概念.

定义3.2.1 若随机变量 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ 上，则称

$$X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

构成一个n 维随机向量，亦称n维随机变量. 一维随机向量就是随机变量. 简记为：$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

一方面，研究随机向量要比单独研究每个分量提供更多的信息量. 例如：语文成绩$X_1(\omega)$,数学成绩$X_2(\omega)$. $X(\omega)=\left(X_1(\omega),X_2(\omega)\right)$. 单独研究$X_1(\omega)$和$X_2(\omega)$，我们得不到事件$\left\{X_1(\omega)\ge 90, X_2(\omega)\ge 90\right\}$的概率. 即得不到两门课都优秀的学生所占比例.

另一方面，我们还可以研究各分量之间的相互关系. 例如上述的两门课程成绩的关系. 实际问题中，这类关系往往是我们最关心的问题.

对任意的n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\{\omega : X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \cdots, X_n(\omega) < x_n\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) < x_i\} \in \mathbb{F}$$

从而$\{\omega : X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \cdots, X_n(\omega) < x_n\}$是事件, 存在概率.简记为:$\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \cdots, X_n < x_n\}$

类似于一维的场合，我们引入分布函数的定义.

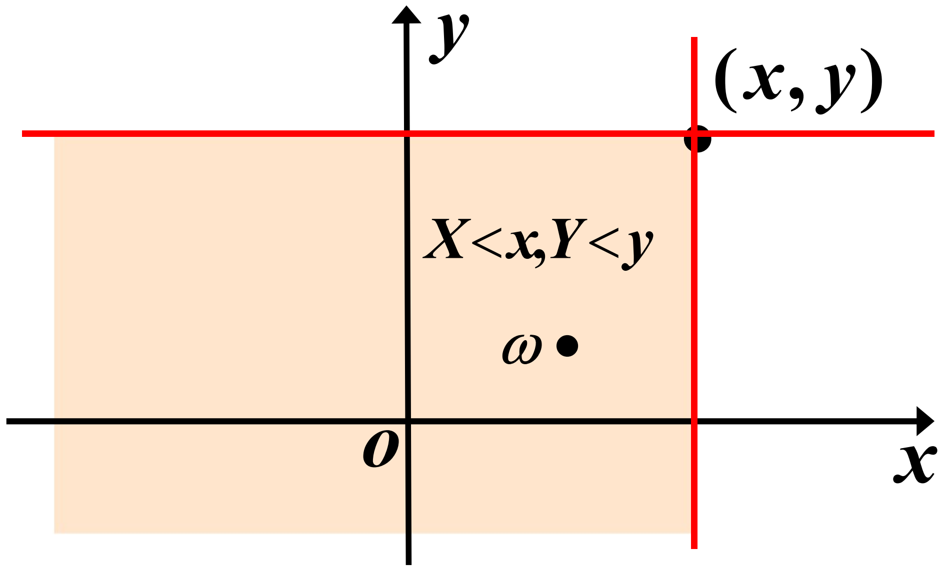
定义3.2.2 称n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \cdots, X_n < x_n\}$$

为随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$的(联合)分布函数.

二维随机变量分布函数

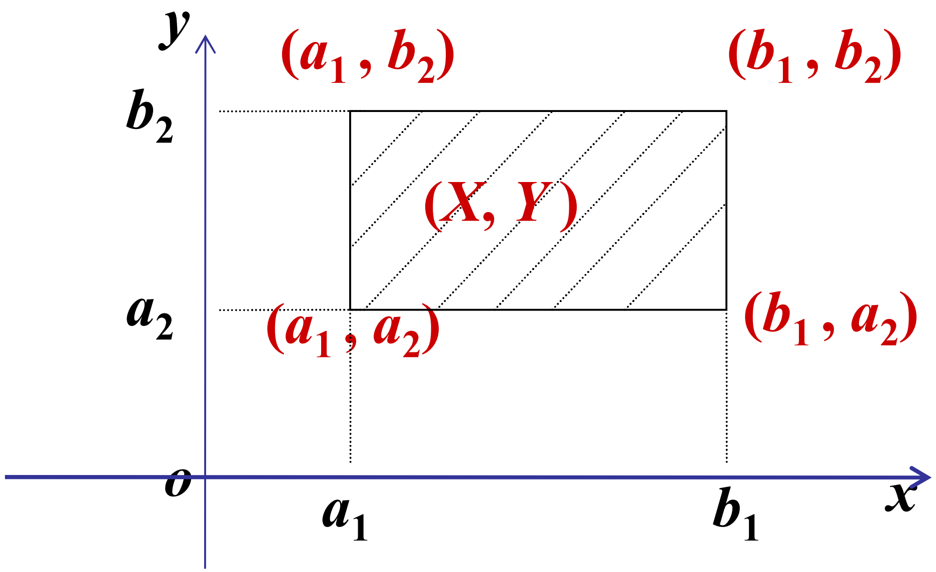
$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$



事件概率的计算

$$P\{a_1 \le X < b_1,\ a_2 \le Y < b_2\}$$
$$= F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2)$$

（与一维的情况进行比较）



分布函数$F(x_1,\cdots,x_n)$的性质（类似一维$F(x)$的情况）

（1）单调性：关于每个自变量x_i是单调不减函数；

（2）$F(x_1,\cdots,-\infty,\cdots,x_n)=0$; $F(+\infty,\cdots,+\infty)=1.$

(3) 关于每一个自变量 x_i是左连续的.

(4) 对二元场合，对任意$a_1<b_1$，$a_2<b_2$，都有

$$F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)\ge 0,$$

注：性质4可推出性质1，但性质1推不出性质4.

满足(2), (3), (4)的二元函数是某二维随机变量的分布函数.

练习题：给出n 元场合下的性质(4).

随机向量的分类

$$\begin{cases} \text{离散型——随机向量的取值是有限或可列个值} \\ \qquad\qquad \longleftrightarrow \text{各分量都是离散.} \\ \text{连续型——分布函数可表示成 } \boldsymbol{n} \text{ 重积分.} \end{cases}$$

常见的离散型随机向量

【多项分布】 在伯努利试验中, 每次试验的可能结果为$A_1, A_2, \cdots, A_r$, 设$P(A_i) = p_i$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.重复进行n 次试验, 它们相互独立. 以$X_1, X_2, \cdots, X_r$分别记$A_1, A_2, \cdots, A_r$出现的次数. 则

$$P\left\{X_1=k_1,\cdots,X_r=k_r\right\}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}.$$

连续型随机向量

如果$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数可表示成下列形式

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$

这里 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0,$

$$\int_{-\infty}^{+\infty_1}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=1.$$

则称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是n 维连续型随机变量，

$f(x_1,,\cdots,x_n)$称为密度函数.

二维密度函数的性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

(3) 设G是xoy平面上的一个区域，则

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4) 在$f(x,y)$的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

曲顶柱体的体积

【均匀分布】　若G为R^n中有限区域，其测度$S>0$.则由密度函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases} S^{-1}, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G, \\ 0, & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin G. \end{cases}$$

给出的分布称为G上的均匀分布.

【多元正态分布】由密度函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^T\right\}$$

所决定的分布称为n元正态分布. 其中$\Sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$是

$\boldsymbol{n}$ 阶正定对称矩阵，Σ^{-1}是其逆矩阵，$\mathbf{det}\,\Sigma$是其行列式的值，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$是任意实行向量

$\boldsymbol{n}$ 元正态分布是最重要的一种多维分布，它有很多重要的性质, 无论在理论研究还是实际应用中, 它都占用重要的位置, 本章只讨论二元正态分布. 第四章将对一般的情况进行深入研究.

例1　设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

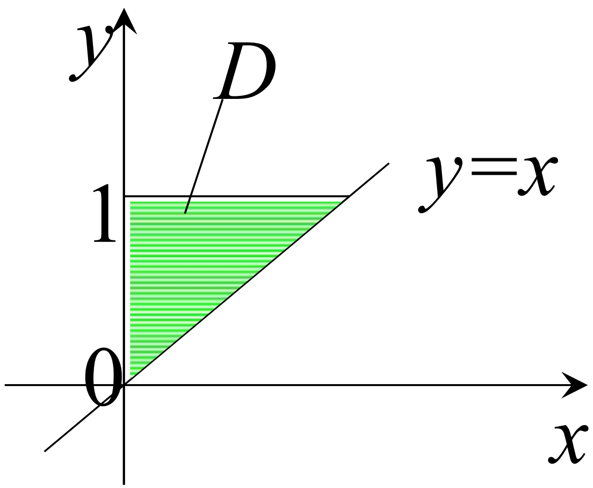
$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中k为常数．求

（1）常数k;　（2）$P(X+Y\ge 1)$,$P(X<0.5)$.

解：令

$$D=\left\{(x,y)\middle| 0\le x\le y, 0\le y\le 1\right\}$$



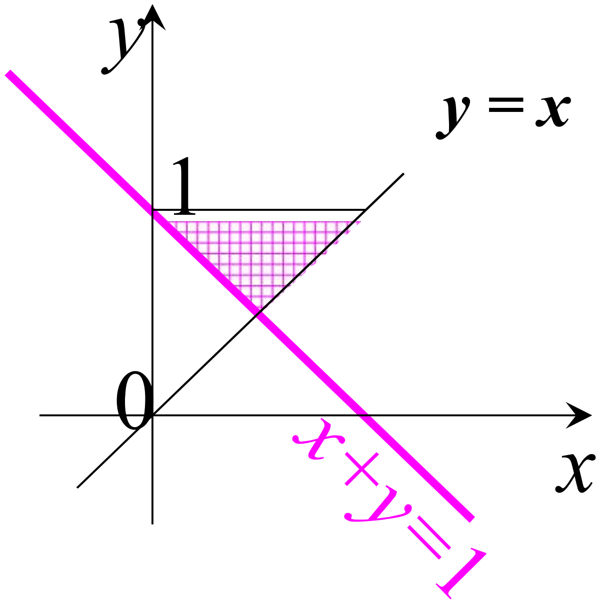
（1）　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$

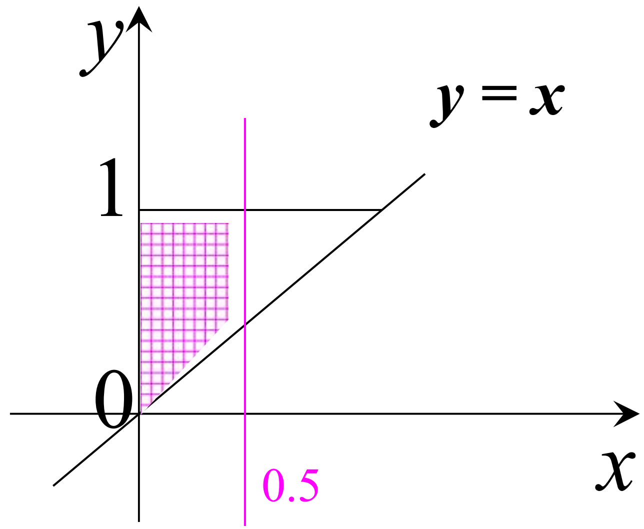
$$1=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dy\int_0^y kxy\,\mathrm{d}x=k\int_0^1 y\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{k}{8},$$

$k=8.$

（2） $$P(X+Y\geq 1)=\int_{0.5}^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^y 8xy\,\mathrm{d}x=5/6.$$

$$P(X<0.5)=\int_0^{0.5}\mathrm{d}x\int_x^1 8xy\,\mathrm{d}y=7/16.$$





练习题　设$(X, Y) \sim U(D)$,

$$D=\left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}$$

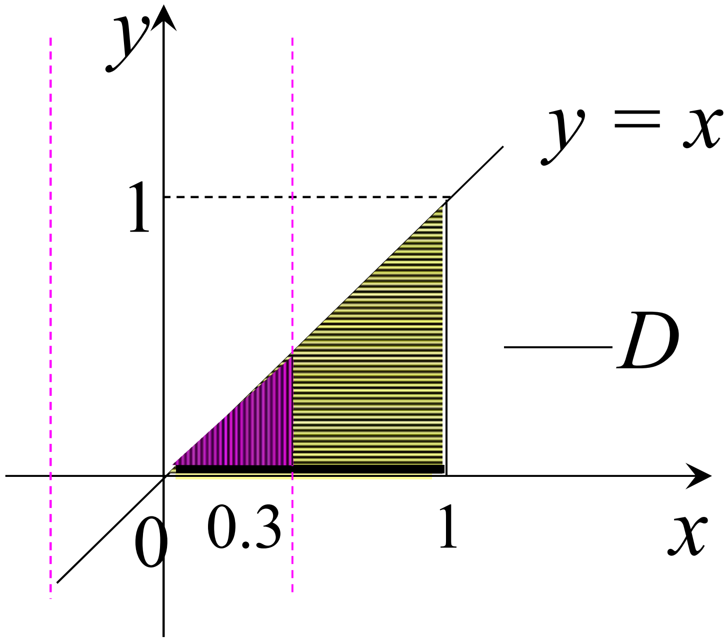
试求：　(1) $f(x, y)$;　(2) (X, Y)在平面上的落点到 y 轴距离小于0.3的概率. (3) $P(Y > X^2)$.

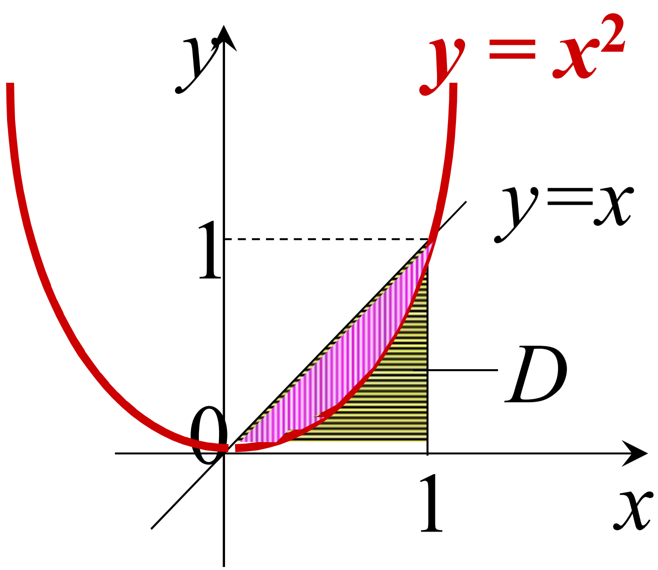
解答 （1） $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（2） $P(|X|<0.3)=P(-0.3<X<0.3)$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(0.3)^2=0.09$$

（3） $P(Y>X^2)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2dy=1/3.$





二　边际分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是定义在$(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$上的$n$个随机变量，它们之中任意$k$个随机变量也构成$k$ 维随机向量，$k=1, 2, \cdots, n-1$. 我们把这样的k 维随机向量称为n 维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的k 维边际随机向量，共有C_n^k个. 每个k 维边际随机向量都有自己的分布函数，这种分布函数称为k 维边际分布. 特别$k=1$ 时，有n 个不同的一维边际分布.

边际分布的求解

$$F_{1,2,\cdots,k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=P\{X_1<x_1,X_2<x_2,\cdots,X_k<x_k\}$$
$$=P\{X_1<x_1,\cdots,X_k<x_k,X_{k+1}<+\infty,\cdots,X_n<+\infty\}$$
$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty).$$

二维随机向量的边际分布

	随机向量	分布函数	
	(X,Y)	$F(x,y)$	
边际	X	$F_1(x)=F(x,+\infty)$	边际
向量	Y	$F_2(y)=F(+\infty,y)$	分布

边际分布可由联合分布唯一决定, 反之不成立.

(见后面的例子).

对于二维离散型随机变量(X,Y)，设X取值$x_1,x_2,\cdots$，Y取值$y_1,y_2,\cdots$.

联合分布与边际分布表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_1(x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_1(x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_1(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_1(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_2(y_j)$	$p_2(y_1)$	$p_2(y_2)$	$\cdots$	$p_2(y_j)$	$\cdots$	1

记 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p(x_i,y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$

$$P\{X=x_i\}=p_1(x_i),\qquad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_2(y_j),\qquad j=1,2,\cdots$$

显然 $p_{ij}\ge 0,\quad \sum_{i,j} p_{ij}=1.$

$$p_1(x_i)=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_2(y_j)=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots$$

【例2】 袋中装有2只白球和3只黑球.现在进行有放回和不放回的两种摸球，定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次摸出白球,}\\ 0, & \text{第一次摸出黑球。}\end{cases} \quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次摸出白球,}\\ 0, & \text{第二次摸出黑球。}\end{cases}$$

对有放回摸球，可求得

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}, \quad \text{等}$$

有放回摸球的概率分布

$X \backslash Y$	0	1	$p_1(x_i)$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$3/5$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$2/5$
$p_2(y_j)$	$3/5$	$2/5$	

不放回摸球的概率分布

$X \backslash Y$	0	1	$p_1(x_i)$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$3/5$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$2/5$
$p_2(y_j)$	$3/5$	$2/5$	

例3 设随机变量X在1，2，3，4四个整数中等可能地取值，一个随机变量Y在$1 \sim X$中等可能地取一整数值．试求(X,Y)的分布律.

解：$\{X=i,\ Y=j\}$ 的取值情况为

$i=1,2,3,4.$　　j取不大于i的正整数，

且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}$$

$$=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4.\quad j\le i.$$

于是(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

例4 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里,随机抽取两支，若X、Y分别表示抽出的蓝笔数和红笔数. 求(X,Y)的分布律.

解： (X,Y)所取的可能值是

$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$，$(0,2)$，$(2,0)$.

$$P\{X=0,Y=0\}=C_3^0C_2^0C_3^2\big/C_8^2=3/28,$$

$$P\{X=0,Y=1\}=C_3^0C_2^1C_3^1\big/C_8^2=3/14,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=C_3^0C_2^2C_3^0\big/C_8^2=1/28,$$

....

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	3/28	9/28	3/28
1	3/14	3/14	0
2	1/28	0	0

在前面的两个表中,中间部分是(X,Y)的联合概率分布,边沿部分是X及Y的边际分布，边际分布相同，而联合分布不同. 这表明:

联合分布不能由边际分布唯一决定.

设二维连续型随机变量(X,Y)密度函数为$f(x,y)$,则

$$F_1(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dy\right]\mathrm{d}t$$

因此X是连续型随机变量，其密度函数为

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

同理Y是连续型随机变量，其密度函数为

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$f_1(x)$及$f_2(y)$称为$f(x,y)$的边际（分布）密度函数.

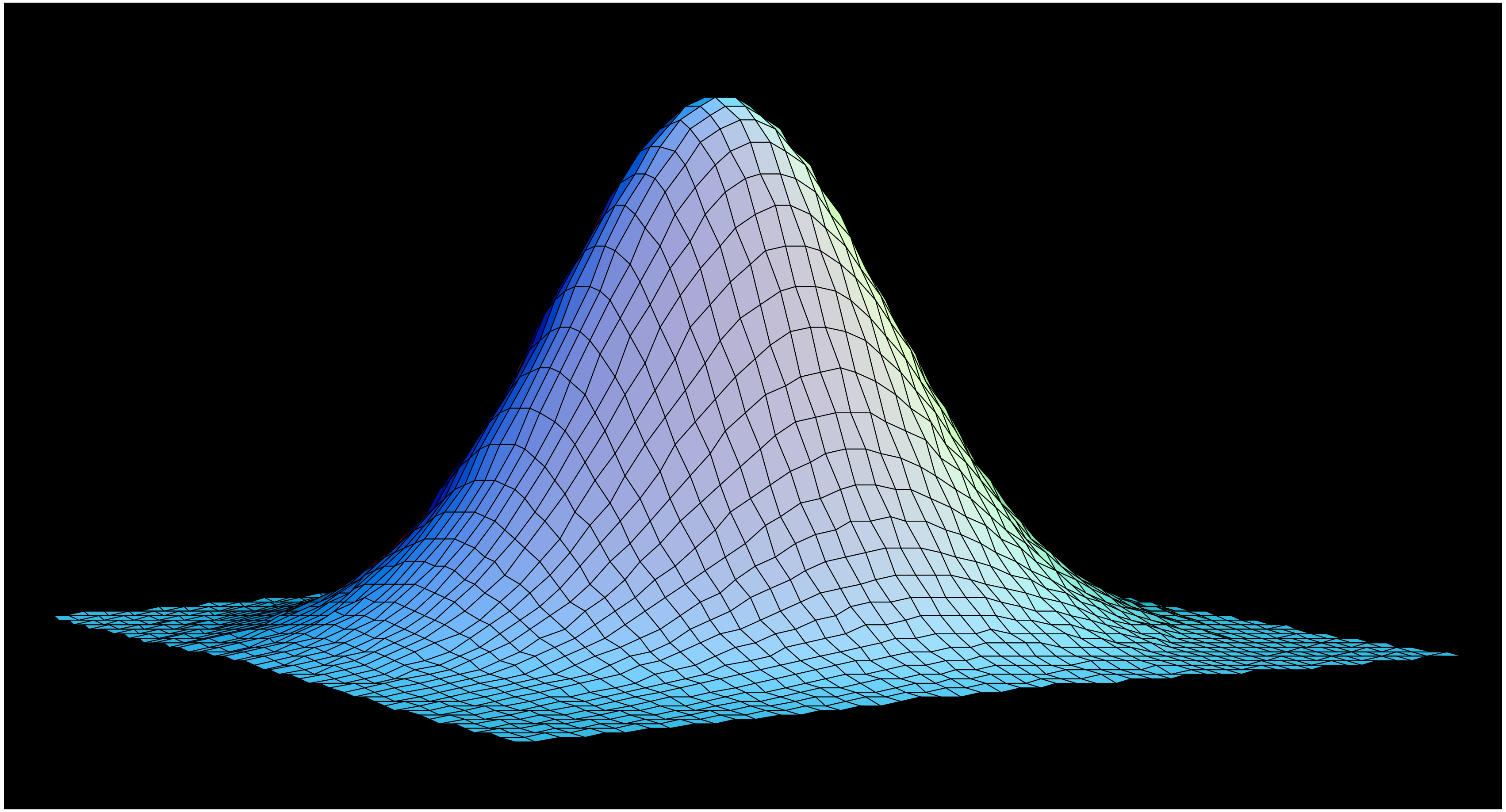
【二元正态分布】

定理3.2.1 （二元正态密度函数的典型分解）

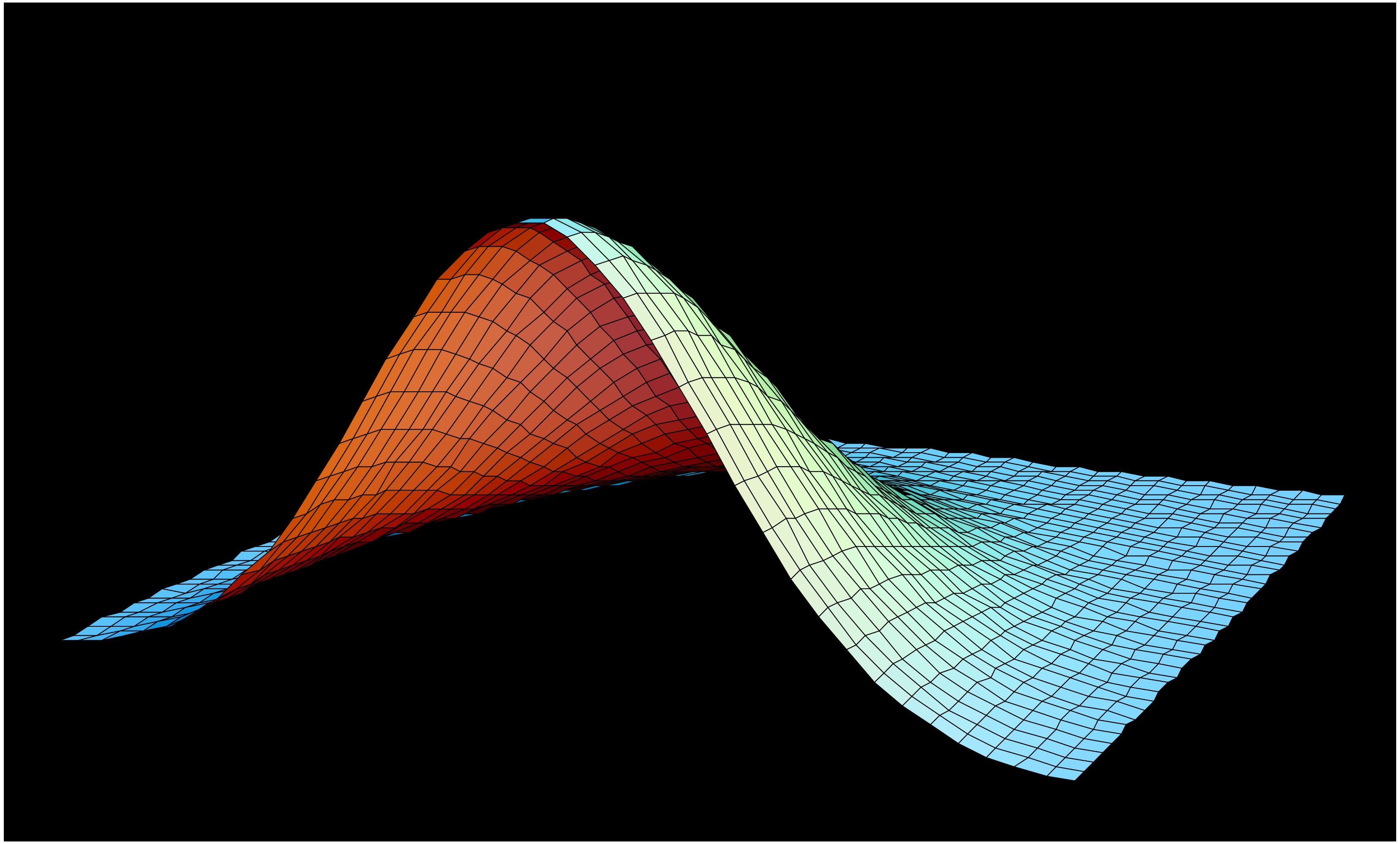
二元正态分布(X,Y)的密度函数

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$



二元正态分布图



二元正态分布剖面图

有下列两种形式的分解

$$p(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}$$

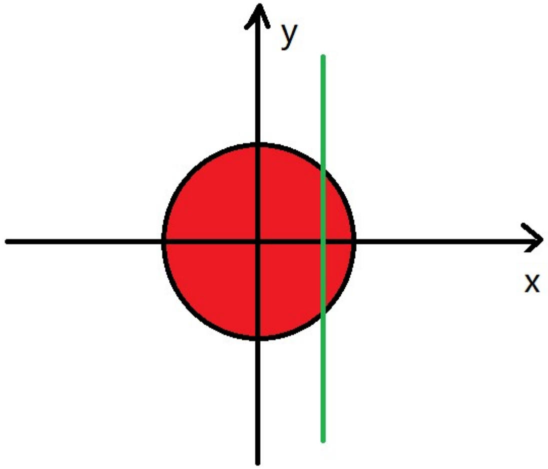
$$p(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))\right]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}$$

利用上述结论不难求得二元正态分布的边际分布

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

因而二元正态分布的边际分布也是正态分布，这个结论对n元正态分布也成立．n元正态分布的k维边际分布是元正态分布.



思考题：

假设$(X,Y)\in U(D):D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le r^2\right\}$

X,Y的边际分布是否为均匀分布？

思考题：

假设X,Y是连续型随机变量，那么(X,Y)是否为二维连续型随机变量？

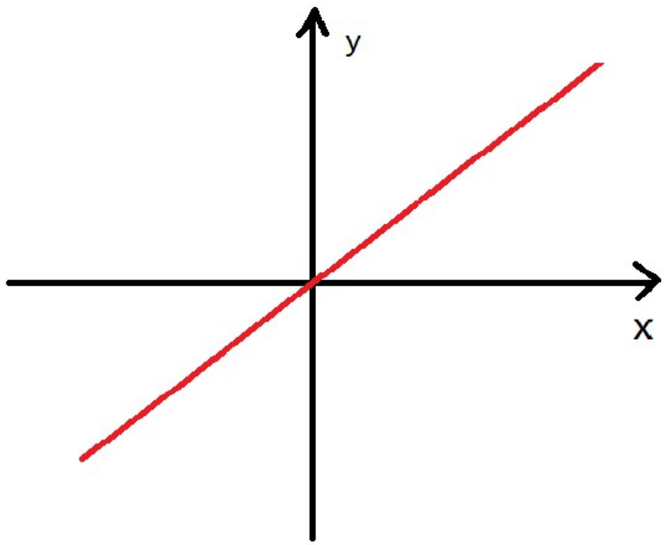
例子： 假设$X \sim N(0,1)$， $Y = X \sim N(0,1)$. 则$(X,Y)=(X,X)$不是二维连续型随机变量.

证明：反证法 若是二维连续型

$$D=\{(x,y): x=y\}$$

则$P\{(X,Y)\in D\}=0$， 但根据题意

$$P\{(X,Y)\in D\}=1.$$



三　条件分布

当一个随机向量的部分分量的取值确定以后，我们考虑另外一些分量的分布问题，这就产生了条件分布的概念.

例如：对二维随机变量(X,Y)—(身高，体重)，当身高(X)确定后，我们研究体重(Y)的分布.

随机变量X的取值确定包括多种情况：$X=x$，$X\in(a,b]$，$X\in(-\infty,a)$等.　本节主要研究二维随机变量（X,Y)—当$X=x$，或$Y=y$时，另外一个分量的分布问题.

例如：

$X = 1.7$m时，Y的分布，就是身高为1.7m的这些人的体重的分布.

$Y = 60kg$时，X的分布，就是体重为$60kg$的这些人的身高的分布.

二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，两个边际分布为$F_1(x)=F(x,+\infty)$，$F_2(y)=F(+\infty,y)$.设 $a<b$. 就有

$$P(a\le X<b)=F_1(b)-F_1(a)=F(b,+\infty)-F(a,+\infty)$$

$$P(a\le Y<b)=F_2(b)-F_2(a)=F(+\infty,b)-F(+\infty,a)$$

如果$P(a\le Y<b)>0$. 则对一切$x\in R$，计算条件概率.

$$P(X<x\mid a\le Y<b)=\frac{P(X\le x,a\le Y<b)}{P(a\le Y<b)}$$

$$=\frac{F(x,b)-F(x,a)}{F(+\infty,b)-F(+\infty,a)}$$

上述函数具有单调不降性、规范性和左连续型.因而它是一元分布函数.称之为随机变量X在条件$a \le Y < b$之下的条件分布函数.记为$F_1(x|a \le Y < b)$.同理可定义$F_1(x|Y < b)$，$F_1(x|Y \ge a)$等条件分布函数. 因而两个边际分布函数分别可看成$Y < +\infty$，$X < +\infty$条件下的条件分布函数.

二维离散型随机变量的条件分布

设离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots$$

关于X和Y的边缘概率分布为

$$P(X=x_i)=\sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\cdot}, \qquad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij} \triangleq p_{\cdot j}, \qquad j=1,2,\cdots,$$

若对某一固定的i，若$P(X=x_i)=p_{i\cdot}>0$，则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j=1,2,\cdots$$

为在$X = x_i$的条件下，随机变量Y的条件分布.

若对某一固定的 j , 若$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} > 0$，则称

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

为在$Y = y_j$的条件下，随机变量X的条件分布.

例1 把三个球等可能地放入编号为 1,2,3 的三个盒子中，每盒可容球数无限. 记X为落入1号盒的球数，Y为落入2号盒的球数. 求

(1)在$Y = 0$ 的条件下，X的分布律;

(2)在$X = 2$ 的条件下，Y的分布律.

解：求联合分布：先求$P(X=i,Y=j)$

$$i=0,1,2,3; \quad j=0,\cdots,3-i.$$

每个球投到盒子中相当于进行一次贝努力试验，记A表示“球落入1号盒子中”，则

$P(A)=1/3$. $X=i$ 相当于在三次贝努力试验中事件A发生i 次，故

$$P(X=i)=C_3^i(1/3)^i(2/3)^{3-i}.$$

类似得 $P(Y=j|X=i)=C_{3-i}^j(1/2)^j(1/2)^{3-i-j}.$

所以

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)$$
$$=C_3^i(1/3)^i(2/3)^{3-i}\cdot C_{3-i}^j(1/2)^j(1/2)^{3-i-j}.$$

联合分布与边缘分布如下表所示

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	1/27	1/9	1/9	1/27	8/27
1	1/9	2/9	1/9	0	4/9
2	1/9	1/9	0	0	2/9
3	1/27	0	0	0	1/27
$p_{\cdot j}$	8/27	4/9	2/9	1/27	1

（1） $$P(X=i \mid Y=0)=\frac{P(X=i, Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$=\frac{P(X=i, Y=0)}{8/27}, \qquad i=0,1,2,3$$

将表中第一列数据代入得条件分布

X	0	1	2	3
$P(X=i \mid Y=0)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

（2） 当$X=2$时，Y只可能取0与1. 将表中第三行数据代入下式

$$P(Y=j \mid X=2)=\frac{P(X=2, Y=j)}{2/9}, \qquad j=0,1$$

得Y的条件分布

Y	0	1
$P(Y=j \mid X=2)$	1 / 2	1 / 2

例2 一射手进行射击训练，设击中目标的概率为 $p(0<p<1)$,射击到击中目标两次为止. 设以X表示首次击中目标所需要的射击次数，以Y表示总的射击次数. 试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解：由题意知 X 取 m 且 Y 取 n时,有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)$$

$$=p^2q^{n-2},$$

其中 $q=1-p;\quad n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1.$

此即为X和Y的联合分布律.

现在求条件分布律.

$$P\{X=m \mid Y=n\}, \quad P\{Y=n \mid X=m\},$$

由于

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2}$$

$$=p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2}=\frac{p^2 q^{m-1}}{1-q}=p q^{m-1},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m, Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2}$$

$$=(n-1) p^2 q^{n-2}, \quad n=2,3,\cdots.$$

所以当 $n=2,3,\cdots$ 时,

$$P\{X=m \mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$

这里$m=1,2,\cdots,n-1.$

当 $m=1,2,\cdots$ 时

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},$$

这里$n=m+1,m+2,\cdots.$

二　二维连续型随机变量的条件分布

当(X,Y)是二维连续型随机变量时，$P(X=x)=0$, $P(Y=y)=0$. 所以不能直接利用条件概率去定义条件分布.

$X=x$可以理解为$x-\triangle x<X\le x$. 由于$\triangle x>0$时

$$P(Y\le y \mid x-\Delta x<X\le x)=\frac{P(x-\Delta x<X\le x,Y\le y)}{P(x-\Delta x<X\le x)}$$

$$=\frac{P(X\le x,Y\le y)-P(X\le x-\Delta x,Y\le y)}{P(x-\Delta x<X\le x)}$$

$$=\frac{F(x,y)-F(x-\Delta x,y)}{F_X(x)-F_X(x-\Delta x)}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{[F(x,y)-F(x-\Delta x,y)]/\Delta x}{[F_X(x)-F_X(x-\Delta x)]/\Delta x}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{dF_X(x)}{dx}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_X(x)} \overset{\text{def.}}{=} P(Y\le y \mid X=x)$$

$f(x,y)$连续 $\nearrow$

$f_X(x)\neq 0$,连续

定义2 若$f(x,y)$在点(x, y)连续，$f_X(x)$在点x处连续且$f_X(x)>0$，则称

$$\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_X(x)} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$$

为$X=x$时，Y的条件分布函数，记作

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$$

此时，Y是连续型随机变量，其密度函数

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

称为$X=x$时，Y的条件概率密度函数.

类似地有$Y = y$时，X的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du.$$

$Y = y$的条件下，X的条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

注意：（1）$F_{Y|X}(y|x)$，$f_{Y|X}(y|x)$仅是y的函数，x是常数，对每一$f_X(x) > 0$的x处，只要符合定义的条件，都能定义相应的函数. 当 $f_X(x) = 0$时，可定义

$$F_{Y|X}(y|x) = 0 \quad , f_{Y|X}(y|x) = 0 \quad .$$

（2）类似于乘法公式

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad f_X(x)>0,$$

$$\quad = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \qquad f_Y(y)>0.$$

例3 已知 (X,Y)服从圆域 $x^2+y^2=r^2$上的均匀分布. 求 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

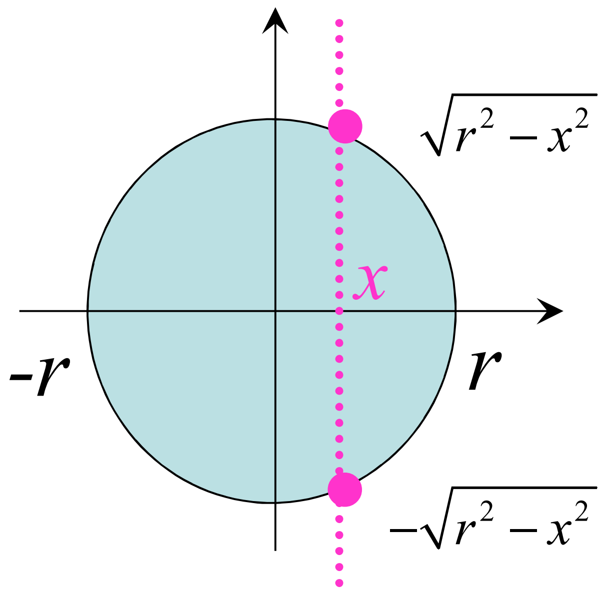
解： $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy, & -r<x<r,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$\Uparrow$

边缘分布不再是均匀分布!



当 $-r<x<r$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & -\sqrt{r^2-x^2}<y<\sqrt{r^2-x^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

—这里x是常数，当$X = x$时，

$$Y \sim U(-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}).$$

$$\Uparrow$$

$X = x$给定时，Y的条件分布是均匀分布！

同理

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi r^2}, & -r < y < r, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

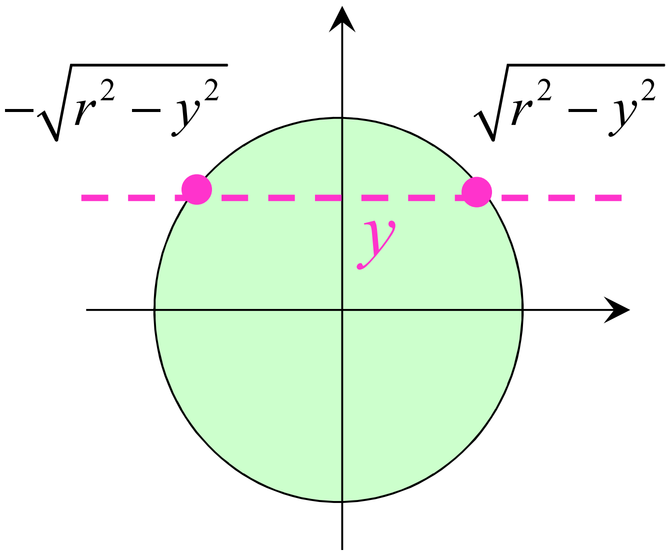
当$-r < y < r$时

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2}<x<\sqrt{r^2-y^2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

—这里y是常数，当$Y=y$时，

$$X \sim U(-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}).$$



【例5】求二元正态分布的条件密度函数.

解：由于二元正态分布的密度函数有下列两种形式的分解

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))\right]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}$$

又因为 $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}$， $p_2(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$

所以 $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))\right]^2}{2\sigma_1{}^2(1-\rho^2)}}$

这是正态分布$N(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1{}^2(1-\rho^2))$的密度函数.

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2}{2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}}$$

这是正态分布$N(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2{}^2(1-\rho^2))$的密度函数.

因此二元正态分布的条件分布也是正态分布. 由于$f(x,y)=f_1(x)f(y|x)=f_2(y)f(x|y)$，这说明:二元正态分布的密度函数可分为两部分：第一部分是边际密度，而另一部分是条件密度.

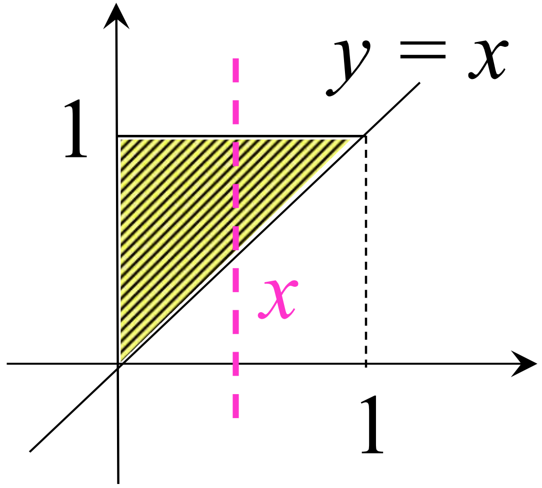
练习题：设(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

试求：$f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

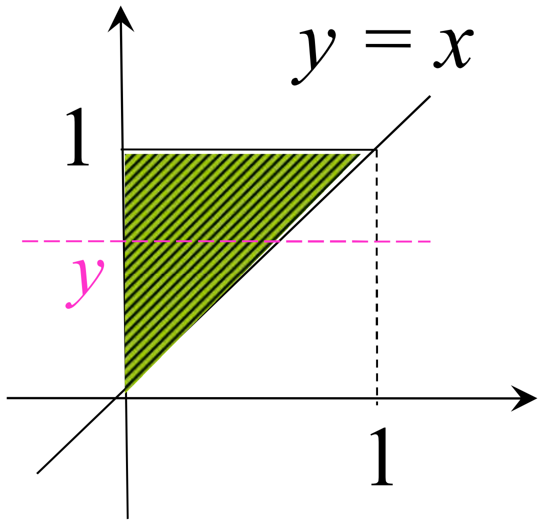
解：$f_X(x) = \begin{cases} \int_x^1 8xy\,dy, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

$= \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$



$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y 8xy\,dx, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$= \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$



故

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1,\ \ 0<x<1.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

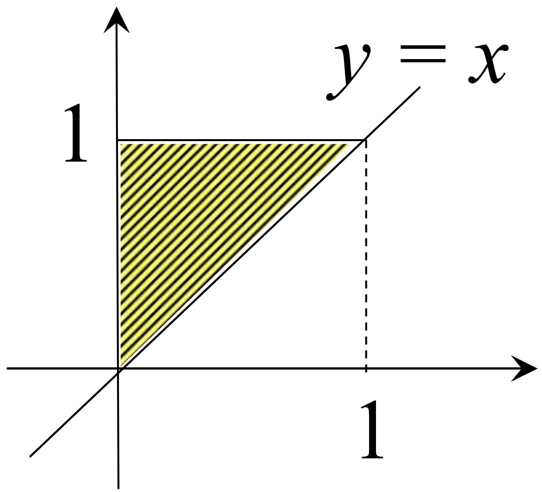
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0\le x\le y,\ \ 0<y<1.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例6: 已知 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求：$P(X+Y\ge 1)$, $P(Y<1/2)$,

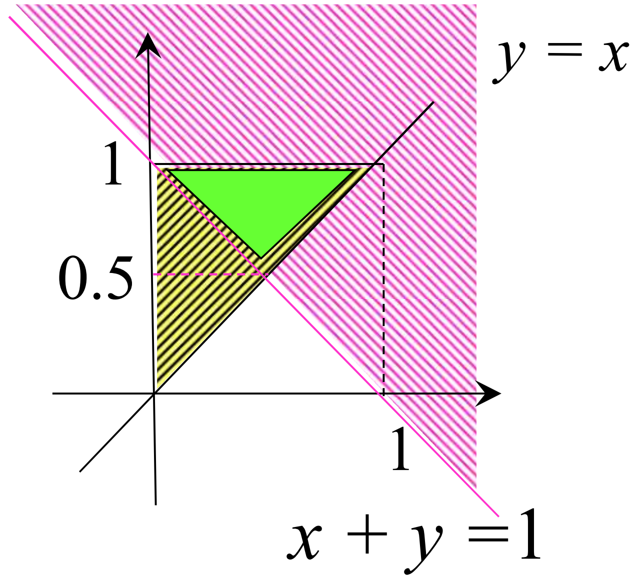
$P(Y<2/3|X=1/2)$.



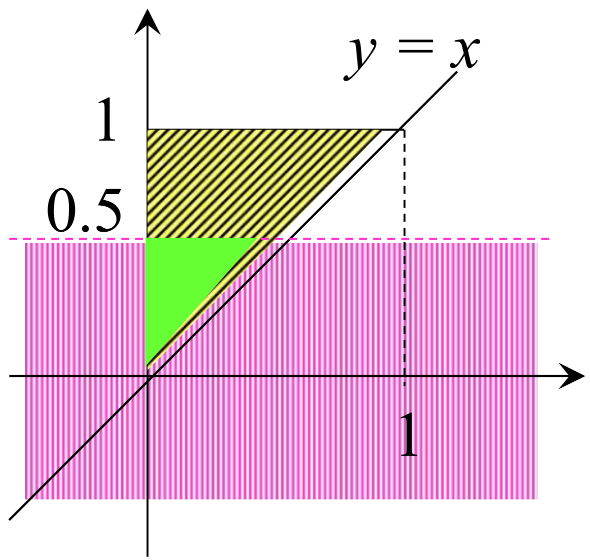
解： $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$, 故

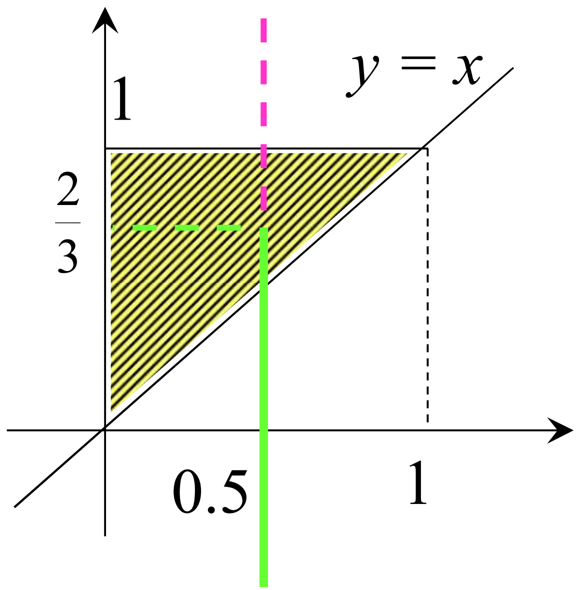
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$P(X+Y\geq 1)=\int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xydx=\frac{5}{6}.$$



$$P(Y<0.5)=\int_{0}^{1/2}dy\int_{0}^{y}8xydx=\frac{1}{16}$$





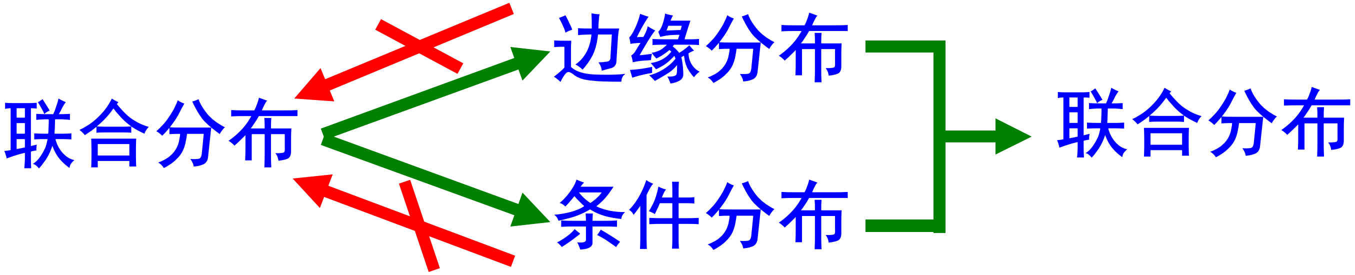
$$P(Y < 2/3 \mid X = 1/2) = \int_{-\infty}^{2/3} f_{Y|X}\left(y \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= \int_{1/2}^{2/3} \frac{2y}{1-0.5^2} dy = \int_{1/2}^{2/3} \frac{8y}{3} dy$$

$$= \frac{7}{27}.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



四、随机变量的独立性

利用事件的独立性，我们给出随机变量独立性的定义.

若对任意的区间A, B.事件$\{X \in A\}$与$\{Y \in B\}$相互独立.
则称随机变量X与Y相互独立.

上述等价于对任意的实数x, y.事件$\{X \in (-\infty, x)\}$
与$\{Y \in (-\infty, y)\}$相互独立.即

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

定义3.2.3 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是定义在概率空间$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$上的$n$个随机变量，如果对任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n$成立

$$P\{X_1<x_1,X_2<x_2,\cdots,X_n<x_n\}$$
$$=P\{X_1<x_1\}P\{X_2<x_2\}\cdots P\{X_n<x_n\}$$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$是**相互独立的**.

上式等价于对任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n).$$

其中$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是联合分布函数，$F_i(x_i)$是X_i的分布函数.

思考题

1. 如何证明随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立？

2. 如何证明随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$不相互独立？

以两个随机变量X, Y为例进行说明。

显然，在相互独立的条件下，联合分布可由边际分布唯一决定. 此时，条件分布化为无条件分布.

对于离散型随机变量，独立性的上述定义等价于对任意一组可能取的值$x_1, x_2, \cdots, x_n$成立

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$
$$= P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\}$$

例1中有放回摸球时的X与Y是相互独立的，此时联合分布可由边际分布得到，不放回摸球时的X与Y不是独立的.

对于连续型随机变量，独立性的上述定义等价于对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n$几乎处处成立.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

其中$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是联合密度函数，$f_i(x_i)$是的X_i的密度函数.

例如：二元正态分布(X,Y)的两个分量X与Y相互独立$\Leftrightarrow$ $\rho=0$.

【例6】 若(X,Y)服从

$$G=\{(x,y):a\le x\le b,c\le y\le d\}$$

上的均匀分布，则

$$X\sim U[a,b],\ \ Y\sim U[c,d].$$

并且它们相互独立.

思考题：若G是圆，结论是否成立？

练习题

若随机变量X,Y相互独立，则对任意的$a<b$, $c<d$，事件

$$\{a \le X < b\}与\{c \le Y < d\}相互独立.$$

更一般的：

若随机变量X与Y相互独立. 则对任意的区间A,B。事件

$$\{X \in A\}与\{Y \in B\}相互独立.$$

定理 若随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立. 则随机变量$f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$也相互独立.

证明 对任意的区间$A_1, A_2, \cdots, A_n$(一维博雷尔集合)有

$$P\left\{f_1(X_1)\in A_1, f_2(X_2)\in A_2, \cdots, f_n(X_n)\in A_n\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1), X_2 \in f_2^{-1}(A_2), \cdots, X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1)\right\} P\left\{X_2 \in f_2^{-1}(A_2)\right\} \cdots P\left\{X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{f_1(X_1)\in A_1\right\} P\left\{f_2(X_2)\in A_2\right\} \cdots P\left\{f_n(X_n)\in A_n\right\}$$

五、随机向量的独立性

设$X=(X_1,\cdots,X_n)$是n维随机向量，$Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$是m维随机向量. 如果对任意的n维博雷尔集A及任意的m维博雷尔集B成立

$$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\}$$

则称随机向量X与Y相互独立.

上式成立的充分必要条件是

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)$$
$$=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

若X与Y相互独立，则显然X的k维边际子向量与Y的l维向量相互独立. 特别地，X_i与Y_j相互独立.

例如随机向量$X=(X_1,X_2)$与随机向量$Y=(Y_1,Y_2)$独立.

则X_1与Y_2相互独立。

证明 $$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=F_X(x_1,x_2)F_Y(y_1,y_2)$$

$$F(x_1,+\infty,+\infty,y_2)=F_X(x_1,+\infty)F_Y(+\infty,y_2)$$

即 $$F_{(X_1,Y_2)}(x_1,y_2)=F_{X_1}(x_1)F_{Y_2}(y_2)$$

证毕.

若n维随机向量$X=(X_1,\cdots,X_n)$与m维随机向量$Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$相互独立，则$f(X_1,\cdots,X_n)$与$g(Y_1,\cdots,Y_m)$相互独立. 其中$f(x_1,\cdots,x_n),g(y_1,\cdots,y_m)$分别是$n$维，$m$维博雷尔函数.

可列个随机变量相互独立：如果其中任意有限个随机变量都是相互独立的.