§3.5　似然比检验

似然比检验是构造检验较为一般的方法，它的应用很广泛.

设总体X的密度函数(或分布列)为$f(x;\theta)$。其中$\theta \in \Theta$，$X_1,\cdots,X_n$为X的一样本，考虑假设检验问题

$$H_0:\ \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$$

似然函数 $L(\theta) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$是事件$\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\}$发生的概率(或点$(x_1,\cdots,x_n)$邻域内).

它是参数θ的函数。当H_0: $\theta \in \Theta_0$成立时，$L(\theta)$在Θ_0上应该具有较大的函数值.

下面从似然函数出发，构造检验的统计量.

一、广义似然比检验

令 $$\lambda=\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta)}=\frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})}$$

其中，$\hat{\theta}$和$\hat{\theta}_0$分别是参数θ在整个参数空间Θ和在参数子空间Θ_0上的最大似然估计，它们都是样本的函数，与参数θ无关. $\boxed{\lambda\text{是一个统计量}}$. 由于$\Theta_0\subset\Theta$，所以$0\le\lambda\le1$.

广义似然比检验统计量

当 H_0：$\theta \in \Theta_0$成立时，显然有

$$L(\theta_{真}) \le L(\hat{\theta}_0) \le L(\hat{\theta})$$

根据极大似然估计的原理，$\hat{\theta}$应该与$\theta_{真}$相差不大，因而$L(\hat{\theta}_0)$应该与$L(\hat{\theta})$相差不大. 也即λ的值应该偏大，所以若λ取值较小, 也就是$L(\hat{\theta}_0)$较$L(\hat{\theta})$很小时，在给定$\tilde{x}$下，Θ_0中的θ出现的可能性都很小，即原假设Θ_0成立的可能性很小，我们有理由怀疑H_0不真.

(1)检验准则：　　当$\lambda < \lambda_0$时，拒绝H_0;

当$\lambda \ge \lambda_0$时，接受H_0.

(2)临界值λ_0的选取：给定显著性水平α后，使得

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} p(\lambda<\lambda_0)\le\alpha \text{且尽可能的接近}\alpha.$$

我们把这样得到的检验称为水平为α的广义似然比检验.

说明：若存在一个统计量$H(X_1,\cdots,X_n)$，$\lambda(X_1,\cdots,X_n)$是$H(X_1,\cdots,X_n)$的严格单调函数，那么可用$H(X_1,\cdots,X_n)$作为检验统计量：拒绝域为

$$W=\{H<C\}, \quad \text{当单调上升时,}$$

$$W=\{H>C\}, \quad \text{当单调下降时.}$$

在λ的分布没有现成的表可查时，但H的分布是我们所熟悉分布时，常利用此方法构造似然比检验.

例1 设样本$X_1,\cdots,X_n$取自正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知，取显著性水平为α. 试给出广义似然比检验

$$H_0:\ \mu=\mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \mu\neq\mu_0.$$

解: 参数空间$\Theta=\left\{(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<+\infty,\sigma^2>0\right\}$

$$\Theta_0=\left\{(\mu_0,\sigma^2):\sigma^2>0\right\}$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

在Θ上可求得μ,σ^2的极大似然估计$\hat{\mu}=\bar{X},\hat{\sigma}^2=S_n^2$.

在 Θ_0上可求得σ^2的极大似然估计$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$,

所以广义似然比

$$\lambda=\frac{L(\mu_0,\hat{\sigma}_0^2)}{L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)}=\frac{L(\mu_0,\hat{\sigma}_0^2)}{L(\bar{X},S_n^2)}=$$

$$=\left(\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-n/2}=\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

其中$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\times\sqrt{n}$, λ是$|t|$的严格单调减函数，因而

拒绝域为 $W=\{|t|>C\}$

由于 $t \overset{H_0成立}{\sim} t(n-1)$，所以检验的拒绝域为

$$W=\left\{|t|>t_{\alpha/2}\right\}$$

与前面给出的拒绝域相同。

二、似然比检验.

令
$$\lambda=\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1} L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}=\frac{L(\hat{\theta}_1)}{L(\hat{\theta}_0)}$$

其中，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_0$分别是参数θ在参数子空间Θ_1和在参数子空间Θ_0上的最大似然估计，它们都是样本的函数, 与参数θ无关. 称λ为似然比，它是一个统计量.

用似然比进行的检验称为似然比检验。检验的拒绝域为$W=\{\lambda>\lambda_0\}$，λ_0应满足$P(\lambda>\lambda_0 | H_0)\le\alpha$.

例2　设样本$X_1,\cdots,X_n$取自正态分布$N(\mu,\sigma_0^2)$，μ未知，取显著性水平为α. 试给出似然比检验

$$H_0:\ \mu\le\mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \mu>\mu_0.$$

解：　似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

$$=(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

$$=(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left[(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2\right]\right\}$$

参数子空间$\Theta_0=\{\mu:\mu\le\mu_0\},\Theta_1=\{\mu:\mu>\mu_0\}$。参数$\mu$在$\Theta_1,\Theta_0$上的极大似然估计分别为

$$\hat{\mu}_0=\min\{\bar{X},\mu_0\},\qquad \hat{\mu}_1=\max\{\bar{X},\mu_0\}$$

所以似然比

$$\lambda=\frac{L(\hat{\mu}_1)}{L(\hat{\mu}_0)}=\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left[(\bar{X}-\hat{\mu}_1)^2-(\bar{X}-\hat{\mu}_0)^2\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{n}{2\sigma_0^2}(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_0)\left[2\bar{X}-(\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_0)\right]\right\}$$

$$=\exp\left[\frac{n(\bar{X}-\mu_0)}{2\sigma_0^2}\left|\bar{X}-\mu_0\right|\right]=\exp\left[\frac{n}{2}U\left|U\right|\right]$$

其中$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\times\sqrt{n}$,显然$\lambda$是$U$的严格单调增函数，

因而原假设H_0的拒绝域为

$$W=\{U>C\}$$

要使 $P\{U>C \mid \mu\le\mu_0\}\le\alpha$，只需

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0}\times\sqrt{n}>C \,\middle|\, \mu\le\mu_0\right\}=\alpha$$

故$C=u_\alpha$. 原假设H_0的拒绝域为

$$W=\{U>u_\alpha\}$$