一　概率的直观意义

随机事件发生可能性大小的度量称为概率.

二　频率

$f(A)=\dfrac{n_A}{n}$,　　n_A？—频数.

投币实验表

实验者	投掷次数	出正面次数	出正面频率
De.Morgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
K.Person	12000	6019	0.5016
K.Person	24000	12012	0.5005

频率的性质：

（1）非负性　　对任何事件A，有　$f_n(A)\geq 0.$

（2）规范性　　$f_n(\Omega)=1.$

（3）有限可加性　　若$AB=\Phi$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

三　概率的统计定义

频率的稳定值(中心)称为概率．记为$P(A)$.

概率$\approx$频率　（n充分大时）

第三节　古典概型

一、模型与计算公式

我们现在先讨论一类最简单的随机现象，这种随机现象具有下列两个特点：

(1) 试验的全部可能结果是有限个，不妨设为n个，记为$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. 而且它们是两两互不相容的. 即样本空间是有限样本空间.

(2) 每个样本点发生的概率是相等的. 由

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$$

得

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = 1/n.$$

一般把这一类随机现象的数学模型称为古典概型.

对于任何事件A，它总可以表示为样本点之和，不妨设

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$$

由事件概率的定义

$$P(A)=P(\omega_{i_1})+P(\omega_{i_2})+\cdots+P(\omega_{i_m})$$

$$=1/n+1/n+\cdots+1/n=m/n.$$

在古典概型中，任何事件A的概率由下式计算

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{的有利场合数}}{\text{样本点总数}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

其中$|A|$表示的有利场合数—导致A发生的样本

点的个数，即是A包含的样本点数，$|\Omega|$表示样本点总数，上式也称为概率的古典定义.

古典概型有着多方面的应用，许多的实际问题可用古典概型来刻画. 例如，质量管理中的产品抽样检查，电视节目收视率的调查，某种疾病的抽查等都可以抽象成古典概型来处理，古典概型的大部分问题都可用摸球模型来描述. 因此古典概型的很多例子都是摸球问题.

尽管古典概型的概率计算公式很简单，但古典概型中的许多概率的计算相当困难而富有技巧.
经常要用到一些排列组合公式.

二、基本的排列组合公式

1）基本计算原理

乘法原理

如果完成一件事情需要m个步骤：

完成第i步有n_i种不同的方法$(i=1,2,\cdots,m)$. 那么完成这件事情共有

$$N = n_1\times\cdots\times n_m$$

种不同的方法.

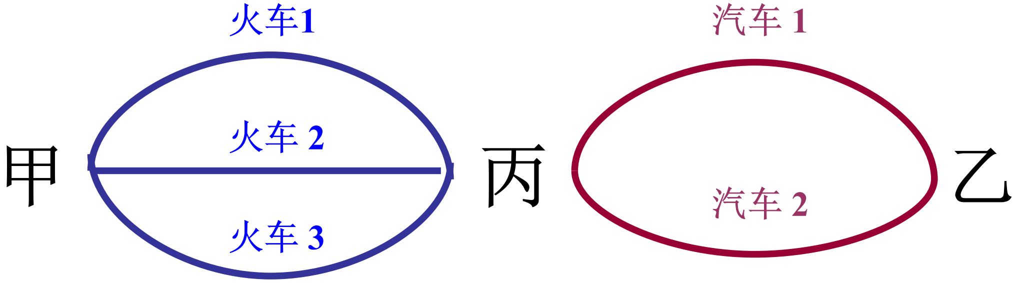
加法原理

如果完成一件事情有m种方式：

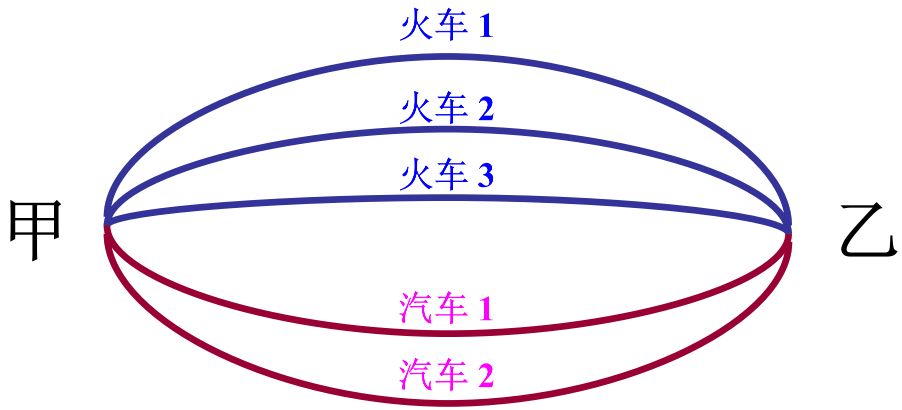
第i种方式有n_i种不同的方法$(i=1,2,\cdots,m)$. 那么完成这件事情共有

$$N = n_1+\cdots+n_m$$

种不同的方法.



乘法原理



加法原理

2）排列

选排列：$P_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}, \quad (1 \le r \le n).$$

$$P_n^n = n!$$

可重复排列： $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^r$， $(r \ge 1)$.

3）组合

不重复组合：$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, \begin{cases} C_n^r = C_n^{n-r} \\ C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r \end{cases}$

$$(0 \le r \le n),$$

可重复组合：C_{n+r-1}^r.

证明

n个不同的元素取r个元素的可重复组合.

$n+r-1$个不同的元素取r个元素的不可重复组合.

$$(k_1,k_2,\cdots,k_r) \xleftrightarrow{l_j=k_j+(j-1),\ 1\le j\le r} (l_1,l_2,\cdots,l_r)$$

$$1\le k_1\le\cdots\le k_r\le n, \qquad 1\le l_1<\cdots<l_r\le n+r-1.$$

上述映射是一一对应的，因此两集合元素个数相同.

例如：从数字1,2,3中有重复的取出 3个, 有重复的组合数为10，从数字1,2,3,4,5中有取出 3个的组合数也是10．对应关系如下：

可重复的组合	**5个元素取出3的组合**
111	**123**
112	**124**
113	**125**
122	**134**
123	**135**
133	**145**
222	**234**
223	**235**
233	**245**
333	**345**

4）多组组合模式

有n个不同的元素，要把它们分为k个不同的组，使得各组依次有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个元素. 其中$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则一共有

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

种不同分法.

我们也把多组组合模式称为"有编号分组模式".

上式中的数称为多项系数，它是$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$展开式$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$中的系数.

当 $k=2$时，若$n_1=r, n_2=n-r$. 即为通常的组合公式.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r.$$

当 $k=r+1$时，若 $n_1=\cdots=n_r=1$, $n_{r+1}=n-r$. 由多组组合模式知，共有

$$\frac{n!}{1!\cdot 1!\cdots 1!\cdot(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}=A_n^r$$

种分法，即为通常的排列公式. 这里r个元素的顺序变为组与组之间的顺序.

4）分球入盒问题（球相同，盒子不同）

有n个相同的球(元素)，要把它们分入r个不同的盒子中，不限定每个盒子中球的个数(允许有空盒出现)．求不同的分法有多少？

我们可以设想为：n个相同的球一字排开, 只须在它们之间加上$r-1$个隔板，把它们隔成r 段，然后让各段对号放入相应的盒子即可．由于不限定每个盒子中球的个数，因此对隔板的放置位置没有限制.

又因为球和隔板的总数是$n+r-1$，因此隔板共有$C_{n+r-1}^{r-1}=C_{n+r-1}^{n}$种放法.一旦隔板位置确定下来, 球也就分配完毕．例如：$n=5$，$r=3$时．0011000表示……

有n个相同的元素(球)，要把它们分入r个不同的盒子中，不允许有空盒出现. 不同的分法为

$$C_{n-1}^{r-1}.$$

——只能把隔板放在n个球所形成的$n-1$个间隔上.

【例】(补充) 设有方程$x+y+z=15$，试分别求出它的正整数解和非负整数解的组数.

解：设想将15个相同的球分入3个不同的盒子, 再分别将第1,2,3个盒中的球数对应为x，y，z的值即可. 所以非负整数解的组数为

$$C_{15+3-1}^{15}=C_{17}^{2}=136.$$

正整数解的组数为 $C_{15-1}^{3-1}=C_{14}^{2}=91.$

特点：球相同，盒子不同.

球不相同，盒子不同(此即为多组组合模式).

5）无编号分组模式（球不同，盒子相同）

有n个不同的球，要把它们分入r个相同的盒子中，使得有k_1个盒子各有n_1个球,……，有k_m个盒子各有n_m个球，其中

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=r，\quad k_1n_1+k_2n_2+\cdots+k_mn_m=n.$$

则一共有α/β种不同分法，其中

$$\alpha=\frac{n!}{(n_1!)^{k_1}(n_2!)^{k_2}\cdots(n_m!)^{k_m}},\quad \beta=k_1!k_2!\cdots k_m!.$$

6） 大间距组合

如果要从数集$\{1,2,\cdots,n\}$中取出r个不同的数

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n,$$

使之满足

$$j_2 - j_1 > m，\ j_3 - j_2 > m，\ \cdots\cdots，\ j_r - j_{r-1} > m.$$

其中m是正整数，且有$(r-1)m < n$，所有不同的取法数目为

$$C_{n-(r-1)m}^{r}.$$

组合问题可看成$m=0$的情况，有重复的组合可看成$m=-1$的情况.

7）关于二项系数的一些公式（书本P23，略）

三、古典概型的一些例子

【例1】 在幸运37选7福利彩票中，每期从中开出7个基本号码和一个特殊号码，彩民们在购买每一张彩票时都预先选定7个号码. 规定7个基本号码全部选中获一等奖，选中6个基本号码及特殊号码者获二等奖. 试求购买一张彩票中一等奖的概率p_1及中二等奖的概率p_2.

解：从37个数中选出7个数是一个组合问题，所以

$$|\Omega| = C_{37}^{7} = 10295472$$

由于摇奖时各数地位的对称性, 各个样本点出现的概

率是相等的，这是一个古典概型． 一等奖的有利场合数目为$C_7^7C_{30}^0=1$，所以

$$p_1=\frac{1}{C_{37}^7}=9.713\times10^{-8},$$

二等奖的有利场合数目为$C_7^6C_1^1C_{29}^0=7$，所以

$$p_2=\frac{7}{C_{37}^7}=6.8\times10^{-7}.$$

【例2】（投球入格）设有n个球，每个球都能以同样的概率$1/N$落到N个格子$(N \geq n)$的每一个格子中，试求：

（1）某指定的n个格子各有一个球的概率；

（2）任何n个格子各有一个球的概率；

（3）在所指定的某一个格子中恰好放入k个球.

解：这是一个古典概型问题，$|\Omega| = N^n$.

（1）$|A_1| = n!$，　　$P_1 = n!/N^n$，

（2）$|A_2| = C_N^n n!$，$P_2 = \dfrac{C_N^n n!}{N^n} = \dfrac{N!}{N^n (N-n)!}$，

（3）$|A_3| = C_n^k (N-1)^{n-k}$，$P_3 = \dfrac{C_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$.

生日问题：求参加聚会的n个人至少有两个人生日相同的概率p_n．若把个人看作上面的n 个球，而把一年中的365天作为格子，则$N=365$，所求的概率就是$1-p_2$，即

$$p_n = 1 - 365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)\big/N^n .$$

下表给出了若干个n与p_n的数值：

n	5	10	20	23	30	40	60
p_n	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.994

【例3】一个笼子里关着10只猫，其中有7只白猫，3只黑猫. 把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫，猫争先恐后地往外钻. 如果10 只猫都钻出了笼子，以A_k表示第k只出笼的猫是黑猫的事件，试求$P(A_k)$，$k=1,2,\cdots,10$.

解：看成全排列 $$P(A_k)=\frac{C_3^1 9!}{10!}=\frac{3}{10};$$

看成组合 $$P(A_k)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10};$$

看成选排列 $$P(A_k)=\frac{C_3^1 A_9^{k-1}}{A_{10}^k}=\frac{3}{10}.$$

这里用三种不同的解法得到了完全相同的结果. 这个例子告诉我们：对于古典概型问题，可以采用不同的排列组合模式计算样本点的个数，从而得到不同的解法. 需要注意的是：必须对样本空间和随机事件采用相同的计数模式，并且能够给出合理的解释.

此外，这个问题的答案表明：不论k 等于几, 都有$P(A_k)=3/10$，即恰好等于黑猫在所有猫中所占的比例. 这个结果揭示了“抽奖的公平性”——抽到奖券（中奖）的概率与抽的次序无关.

【例4】 10名男同学及5名女同学随机地站成一行，求任何两名女同学都不相邻的概率.

解：显然这是一个排列问题， $|\Omega| = 15!$.

如果用A表示任何两名女同学都不相邻的事件，先让10名男同学随机的站成一行，再让5名女同学两两不相邻地站到10名男同学之间. 女同学的位置共有C_{11}^5种情况，选好位置后，她们进行排列，即有

$$|A| = 10!\,C_{11}^5\,5! = \frac{10!\cdot 11!}{6!},$$

由于“随机地站成一行”表示各种不同排法是等可能的，

所以 $$P(A) = \frac{10!\cdot 11!}{15!\cdot 6!} = \frac{2}{13}.$$

【例5】 从5双不同的鞋子中随机的抽取4只，试求下列各事件的概率.

(1) 事件A — 4只鞋子中任何两只不成双;

(2) 事件B — 4只中有两只成双，另两只不成双;

(3) 事件C — 4只鞋子恰好成两双.

解: $$|\Omega| = C_{10}^4 = 210.$$

$$|A| = C_5^4 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 80;$$

$$|B| = C_5^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 120;$$

$$|C| = C_5^2 \cdot C_2^2 \cdot C_2^2 = 10.$$

所以

$$P(A) = 8/21; \quad P(B) = 4/7; \quad P(C) = 1/21.$$

四、二项分布与超几何分布

产品抽样检查有两类，即有放回抽样与不放回抽样.

【例6】如果某批产品中有a件次品b件合格品，我们采用有放回及不放回抽样方式从中抽n件产品，问正好有k件次品的概率各是多少？

【有放回抽样场合】 $$b_k = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}.$$

b_k是二项式$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)^n$展开式的一般项，上述概率称为二项分布. 关于二项分布更进一步的讨论在以后章节陆续展开.

【不放回抽样场合】 $$h_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

这个概率称为超几何分布.

超几何分布当k比a小很多，比$n-k$小b很多时：有

$$h_k \approx b_k.$$

这是因为

$$h_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{(A_a^k / k!) \cdot (A_b^{n-k} / (n-k)!)}{A_{a+b}^n / n!} = C_n^k \frac{A_a^k A_b^{n-k}}{A_{a+b}^n}$$

$$= \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} \cdot \frac{A_a^k / a^k \cdot A_b^{n-k} / b^{n-k}}{A_{a+b}^n / (a+b)^n} \approx \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = b_k$$

若一批产品共有N件，其中有M件次品$(M < N)$件，今抽取n 件，则其中恰有m 件次品的概率是

$$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

这里 $0 \le n \le N$，$0 \le m \le M$，$0 \le n - m \le N - M$. 这是超几何分布的另一种常见形式.

五、概率的基本性质

根据古典概型的概率计算公式，不难证得概率有下面三个基本性质：

（1）非负性　　对任何事件A，　有　$P(A)\geq 0.$

（2）规范性　　$P(\Omega)=1.$

（3）有限可加性　　若$A_1,A_2,\cdots A_n$两两互不相容，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明　（略）

推论1　　$P(\overline{A})=1-P(A).$

推论2　　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$

利用概率的三条性质及其推论，可以帮助我们计算古典概型中许多复杂事件的概率.

【例7】（德梅尔问题）一颗骰子投4次至少得到1个六点与两颗骰子投24次至少得到1个双六，这两个事件的概率哪个更大些?

解：以A表示一颗骰子投4 次至少得到1个六点这一事件，则$\overline{A}$表示一颗骰子投4 次都没有得到六点，易得

$$P(\overline{A})=(5/6)^4.$$

因而有 $$p_1=P(A)=1-(5/6)^4=0.5177,$$

与上面类似得 $$p_2=1-(35/36)^{24}=0.4914.$$

因此, 前者的概率大于0.5，后者的概率小于0.5, 前者的概率更大些.

【例8】一口袋中装有$N-1$只黑球和1只白球, 每次从袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去, 问第k次摸球时摸到黑球的概率是多少?

解：以A表示第k次摸球时摸到黑球这一事件，则$\overline{A}$表示第k次摸球时摸到白球，则前面的$k-1$次摸球时都摸出黑球而第k次摸出白球，由于

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

因而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\cdot\frac{1}{N}.$$

【例9】$2n$名同学来自n个不同班级，每班2人，现在他们随机地坐成一排，试求有同班同学不相邻的概率？

解：以A有同班同学不相邻这一事件，则$\overline{A}$表示各班2人都相邻

$$|\Omega| = (2n)!, \quad |\overline{A}| = n! \cdot (2!)^n = 2^n n!.$$

因而

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2^n n!}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

【例10】 从0, 1, 2,⋯, 8, 9这10个数码中不放回的任取n个, 求这n个数的乘积能被10整除的概率.（$1 \le n \le 10$）

解：以E_n表示取出的n个数的乘积能被10整除这一事件.

当$n=1$时，　　$P(E_1)=1/10$,

当$n=9, n=10$时，　　$P(E_9)=P(E_{10})=1$.

在其余情况下，以A表示所取的个数码中有0这一事件，则显然有$E_n=A+\bar{A}E_n$，因而

$$P(E_n)=P(A)+P(\bar{A}E_n).$$

由于$|\Omega|=C_{10}^n, |A|=C_9^{n-1}$，所以　$P(A)=\dfrac{C_9^{n-1}}{C_{10}^n}$.

下面求$P(\bar{A}E_n)$.

当$6 \le n \le 8$时，所取出的n个号码中一定有偶数，当$\bar{A}E_n$发生时，数码0没有被取出，因而数码5一定要取出，其余的$n-1$个数码可以在除了0与5之外的其余8个数中任取，因此$\left|\bar{A}E_n\right| = C_8^{n-1}$，故

$$P(E_n) = P(A) + P(\bar{A}E_n) = \frac{C_9^{n-1} + C_8^{n-1}}{C_{10}^n}, \quad 6 \le n \le 8.$$

当$2 \le n \le 5$时, 若$\bar{A}E_n$发生, 则5一定被取出, 并且还至少取出了1个非0偶数. 在5被取出的情况下，其余$n-1$个数码全为奇数的取法有C_4^{n-1}种，所以

$$\left|\bar{A}E_n\right| = C_8^{n-1} - C_4^{n-1}$$，故得

$$P(E_n) = P(A) + P(\bar{A}E_n) = \frac{C_9^{n-1} + C_8^{n-1} - C_4^{n-1}}{C_{10}^{n}},$$

$$2 \le n \le 5.$$