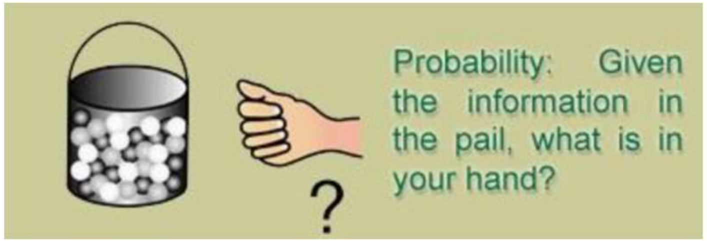
概率论

- **借助于分布函数研究随机问题.**



- 已知白球比例（分布列）,求各种事件的概率

分布函数一般事先给出，不涉及如何获取分布函数.

数理统计

- **借助于样本去研究随机问题.**

- 通过摸球去推断白球比例
- 统计推断

（1）参数估计

（2）假设检验

白球比例 = ?

白球占30%，对不对？

分布函数一般不知道，需要通过样本进行推断.

§6.3 假设检验的基本概念

在本节中，我们将讨论不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题. 这就是根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确——假设检验.

一　假设检验的分类

$$\text{假设检验}\begin{cases}\text{参数假设检验}\\\text{非参数假设检验}\end{cases}$$

对总体未知参数的取值情况进行的检验称为参数假设检验.(此时总体的分布类型一般已知).

对单个总体的分布类型，两变量是否独立，两总体的分布是否相同等进行的检验称为非参数检验.

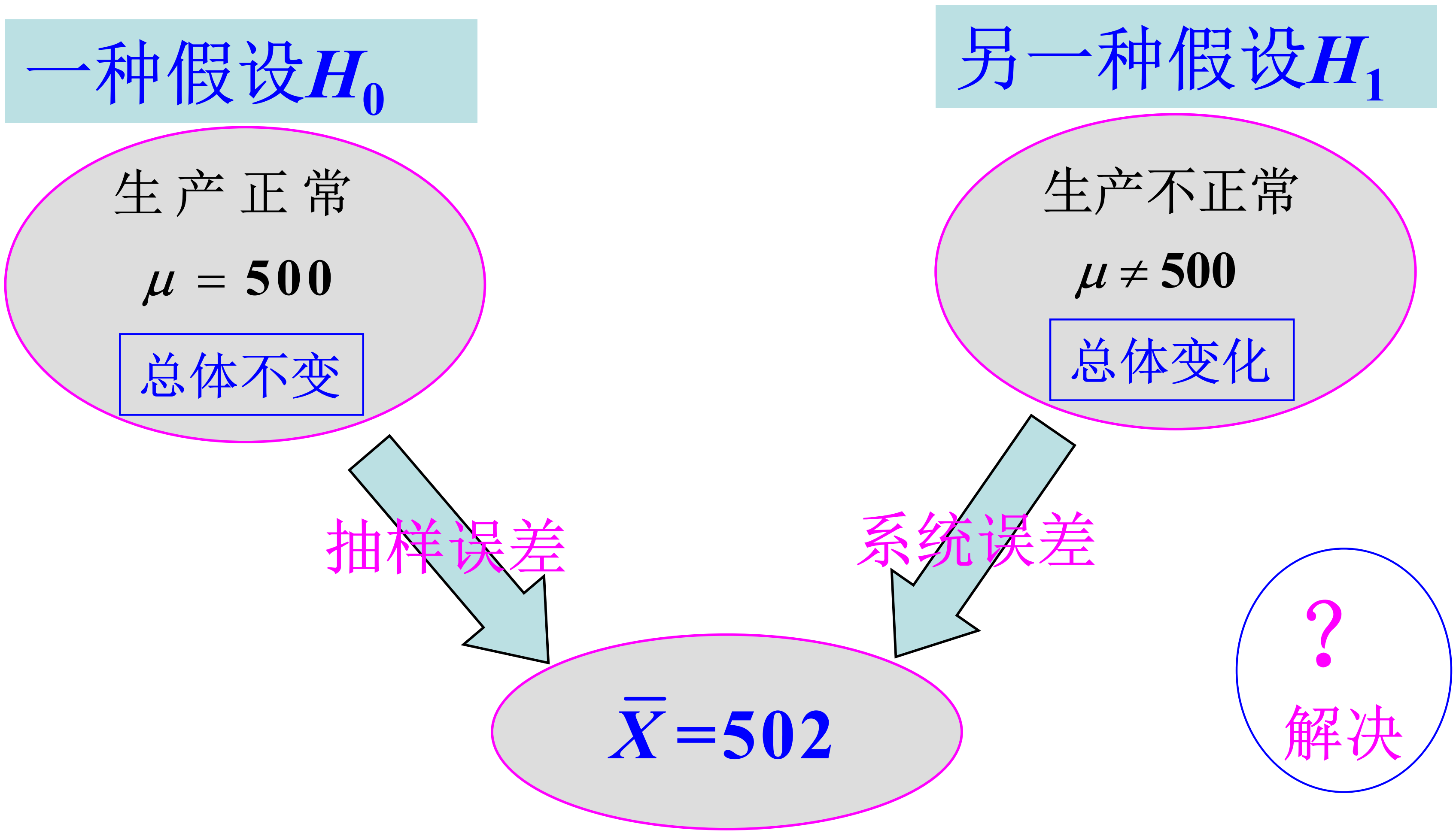
例1 某车间用一台包装机包装葡萄糖，每袋包装的糖重是一个随机变量，服从正态分布 ($\sigma = 2$ 克). 当机器正常时，其均值为500克. 在装好的葡萄糖中任取9袋, 测得平均重量为502克, 问能否认为包装量的均值是500克？——属于参数假设检验.

例2 自动车床加工中轴, 从成品中抽取11根, 测量它们的直径(毫米)数据如下： **10.52, 10.41,10.32, 10.18, 10.64, 10.77, 10.82, 10.67, 10.59,10.38, 10.49,** 问这批零件的直径是否服从正态分布?——属于非参数假设检验.

上述例1 可重新叙述如下：已知总体$X \sim N(\mu, 2^2)$,

要检验H_0：$\mu = \mu_0 = 500$; H_1：$\mu \neq \mu_0 = 500$哪个成立？

通常称H_0为原假设；称H_1为备择假设(或对立假设).



解决办法：

确定误差的一个界限。误差在界限内，则认为是抽样误差；误差超过界限，则认为是系统误差.

分析：由于μ是正态分布的期望值，$\bar{X}$是μ 的最小方差无偏估计, 因此当H_0成立，即$\mu=\mu_0$时, $\bar{X}$与μ_0的差距$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$应该比较小；而当$H_1$成立时，$\mu\neq\mu_0$, 此时$\bar{X}$与$\mu_0$的差距$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$应该比较大.

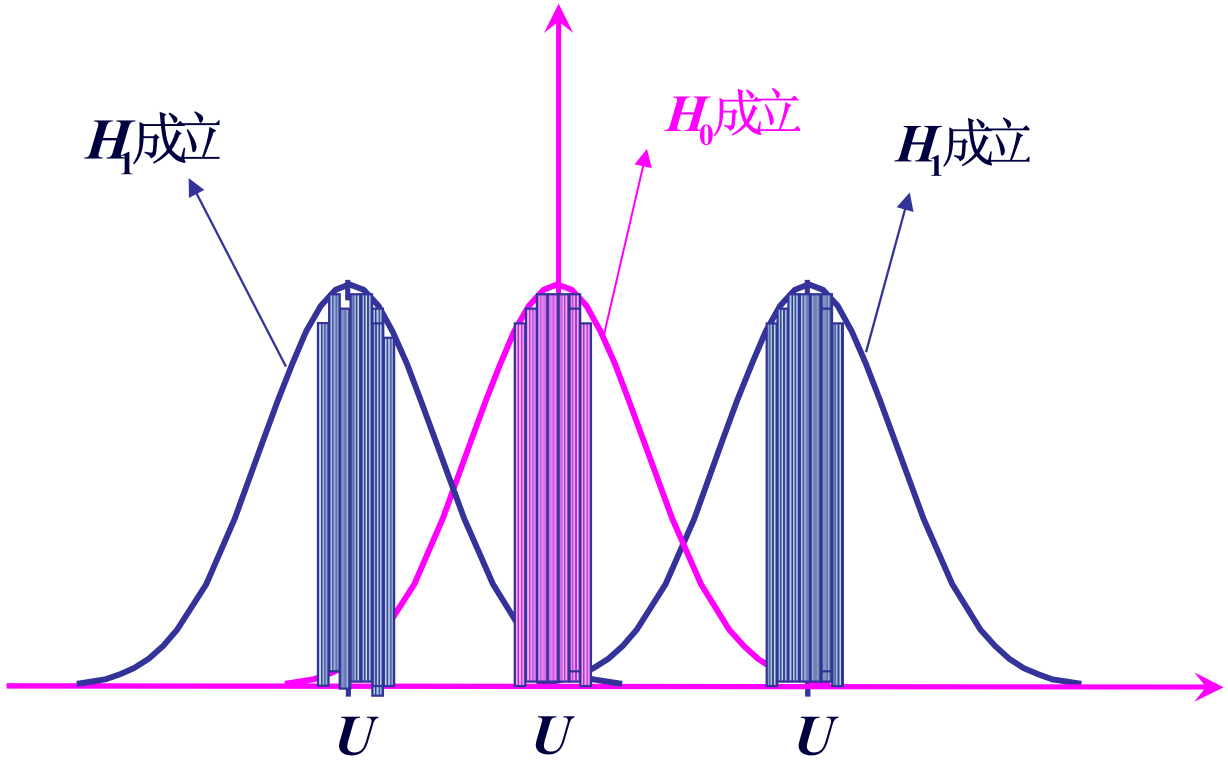
也就是说：当统计量$\left|\bar{X}-\mu_0\right|$的取值较大(大于某个临界值)时, 应该拒绝$H_0$，反之，就接受$H_0$. 这等价于根据$|U|$的大小来判断$H_0$是否成立。

其中 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. 统计量$U$的分布：

$$U\sim\begin{cases} N(0,1), & \text{当}H_0\text{成立时，} \\ N\left(\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},1\right), & \text{当}H_1\text{成立时.} \end{cases}$$

U的值集中于“0”数的周围,

U的值集中于“非0”数的周围.



通过上面的分析知：

当$|U|$的值偏小时，对H_0成立有利，$|U|$的值偏大时，对H_1成立有利，因而H_0的拒绝域W为下列形式：

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|U|>C\}$$

其中常数C就是我们要确定的临界值.

由于H_0是正常的情况，我们主观上往往倾向于保护H_0，即H_0确实成立时，作出拒绝H_0的概率应是一个很小的正数α，对给定α，拒绝域由下式决定

$$P(|U|>C\,|\,H_0\text{真})=\alpha.$$

小概率事件在一次试验中基本上不会发生.

当H_0成立时, $U \sim N(0,1)$, 因此$C = u_{\alpha/2}$. 拒绝域为

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): |U| > u_{\alpha/2}\}$$

上面的假设检验通常称为显著性假设检验，小正数α称为检验水平或称显著性水平.

对于例 1,假定α=0.05，则$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$. 因而

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): |U| > 1.96\}$$

将样本观测值 $\bar{X} = 502$ 代入得

落入拒绝域

$$|U| = \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{502 - 500}{2/\sqrt{9}}\right| = 3 > 1.96$$

这表明样本落在拒绝域W内，对H_0不利的小概率事件发生了，因此我们应拒绝H_0.

二　假设检验的步骤

第一步：提出原假设H_0和备择假设H_1(根据题意)

例1 中，$H_0: \mu = 500 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq 500$

第二步：选取检验统计量，在H_0成立下求出它的分布

例1 中，$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

能比较H_0，H_1条件下分布的不同. ★

第三步： 对给定的显著性水平α. 寻找对H_0不利的小概率事件，确定拒绝域W.

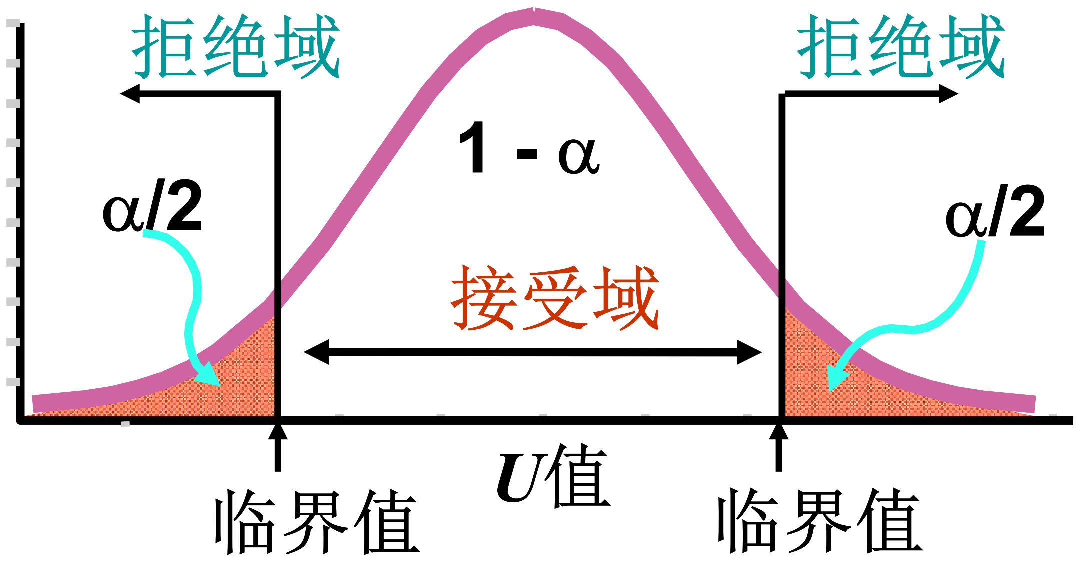
例 1中，$\alpha=0.05$，$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|U|>1.96\}$.

第四步：计算检验统计量的值，并判断是否拒绝H_0.

例 1中，$|U|=3>1.96$，落入W内，拒绝H_0.

抽样分布

(双侧)检验示意图



注意：接受H_0并不是肯定H_0一定对，而只是说差异还不够显著，还没有达到足以否定H_0的程度 。

三　假设检验的原假设与备择假设

通常将参数正常情况下的取值作为原假设H_0，原假设一般不能轻易加以否定，处于“被保护”的地位. 当H_0被拒绝时而接受的假设作为备择假设. 前面的例1中，根据样本均值502，可能怀疑总体的均值变化了，因此假设检验为

$$H_0: \mu = 500 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq 500.$$

也就是说，当拒绝H_0后，我们将认为总体的均值变化了.如果根据样本均值502，可能怀疑总体的均值增加了，假设检验将变为

$$H_0: \mu = 500 \Leftrightarrow H_1: \mu > 500.$$

如果怀疑总体的均值下降了，假设检验就变为

$$H_0: \mu = 500 \Leftrightarrow H_1: \mu < 500.$$

上述参数假设检验都可写成如下的统一形式

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \Leftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$$

其中Θ是参数空间，Θ_0与Θ_1非空.

即参数空间分解成互不相容的两部分，根据样本去判断参数属于那一部分.

如果Θ_1位于Θ_0的两侧，这样的检验称为双侧检验;

如果Θ_1位于Θ_0的右侧，这样的检验称为右侧检验;

如果Θ_1位于Θ_0的左侧，这样的检验称为左侧检验.

只有1个值的假设称为简单假设，否则称为复合假设.

双侧检验与单侧检验

假设	研究的问题		
	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$
H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$

只有一个取值的参数假设称为简单假设;

有多个取值的参数假设称为复合假设.

假设的选取原则

- 原假设与备择假设的选择取决于研究者对问题的态度：
- 通常把研究者要证明的假设作为备择假设；
- 通常把研究者要反对的假设作为原假设；
- 将所作出的声明作为原假设；
- 把现状（**Status Quo**）作为原假设；
- 把不能轻易否定的假设作为原假设；

例3 某批发商欲从生产厂家购进一批灯泡，根据合同规定，灯泡的使用寿命平均不能低于1000小时. 已知灯泡使用寿命服从正态分布, 标准差为20小时. 在总体中随机抽取100只灯泡，测得样本均值为960小时. 批发商是否应该购买这批灯泡?(α=0.05)

解：根据题意，原假设和备择假设如下：

$$H_0: \mu \geq 1000 \Leftrightarrow H_1: \mu < 1000$$

取 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量，$U \sim N(a,1)$.

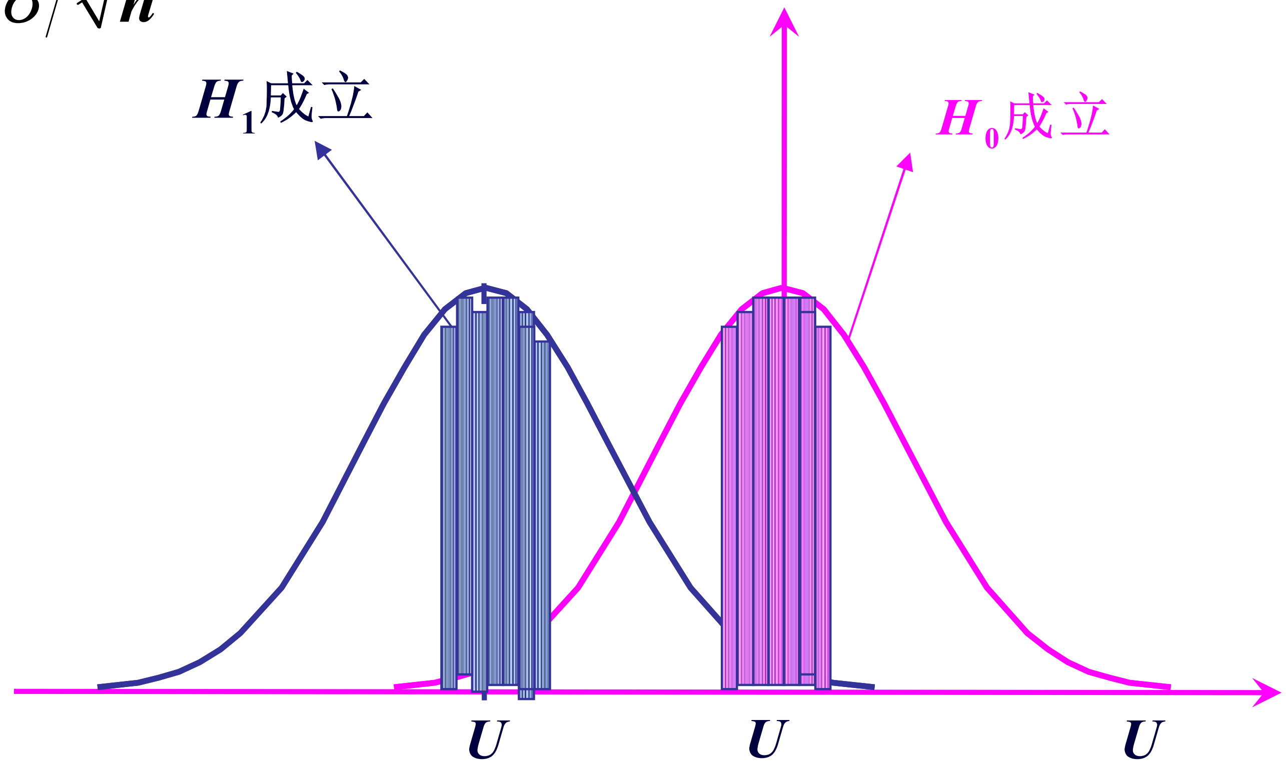
其中 $a = \dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \begin{cases} \geq 0, & \text{当 } H_0 \text{成立}, \\ < 0, & \text{当 } H_1 \text{成立}。 \end{cases}$

其中 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. 统计量$U$的分布：

$$U\sim\begin{cases} N\left(\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},1\right), & \text{当}H_0\text{成立时}, \\ N\left(\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},1\right), & \text{当}H_1\text{成立时}. \end{cases}$$

当H_0成立时，U的值集中于“非负数”的周围，

当H_1成立时，U的值集中于“负数”的周围.



不难得知：H_0的拒绝域是下列形式

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ U<C\}$$

对给定α=0.05，拒绝域由下式决定

$$P(U<C\,|\,\mu\geq 1000)\leq\alpha=0.05.$$

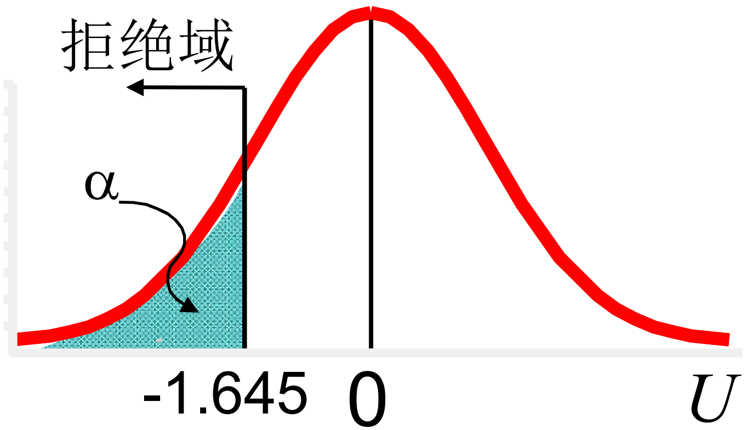
而 $P(U<C\,|\,\mu\geq 1000)$

$$=P(U-a<C-a\,|\,\mu\geq 1000)=\Phi(C-a)\leq\Phi(C)$$

令$\Phi(C)=\alpha=0.05$，得$C=-\mu_\alpha=-\mu_{0.05}=-1.645.$

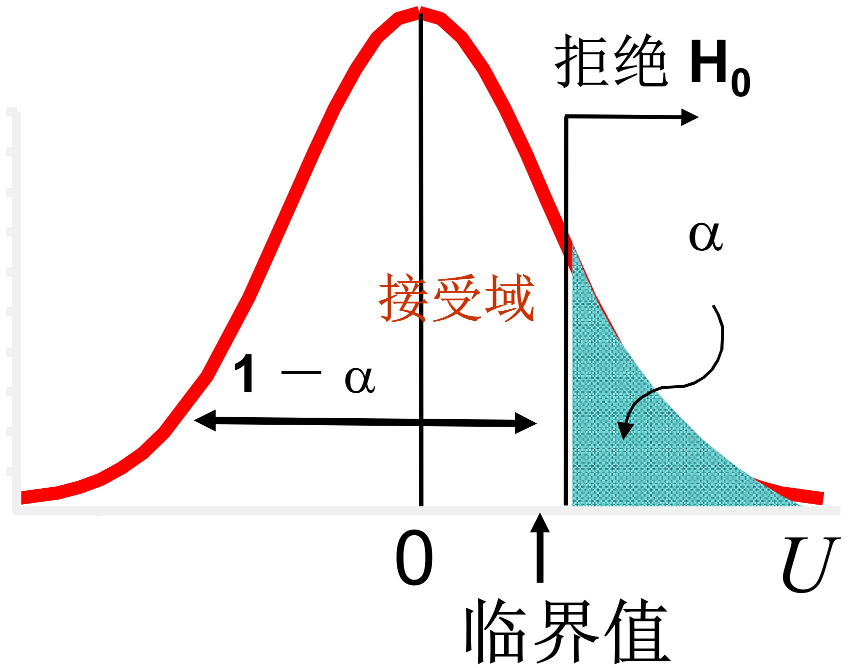
拒绝域为 $W=\{U<-1.645\}$，由于

$$U=\frac{960-1000}{20/\sqrt{100}}=-2<-1.645.$$

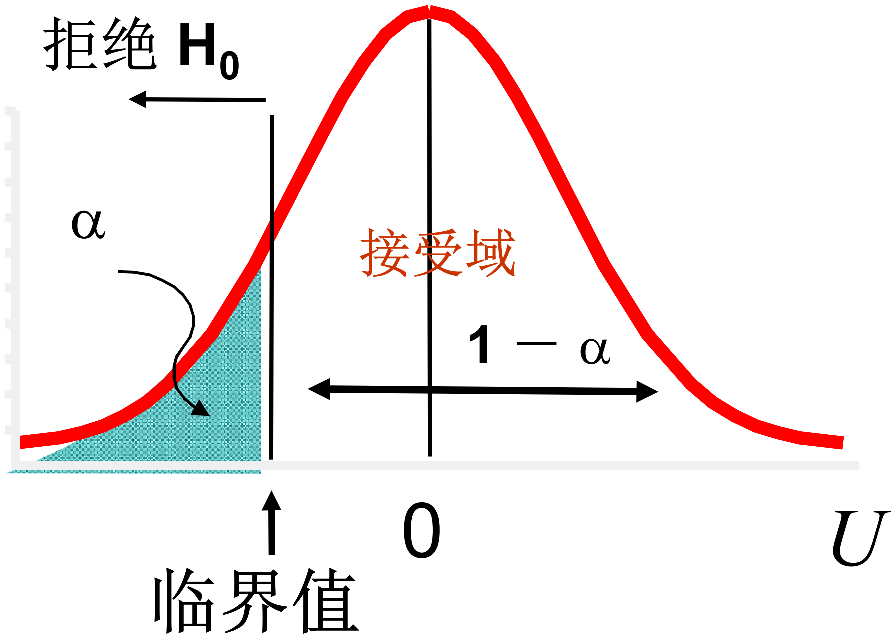


因而拒绝H_0.

右侧检验示意图



左侧检验示意图



练习题： 已知总体$X \sim N(\mu,1)$，样本$X_1 = 0.5$. 选取显著性水平$\alpha = 0.05$. 试对下列两种假设进行检验：

（I） H_0: $\mu = 0$; H_1: $\mu = 1$.

（II） H_0: $\mu = 1$; H_1: $\mu = 0$.

进一步讨论当X_1取什么值时，两种假设检验的检验结果：（$\mu_{0.05}=1.645$，$\mu_{0.025}=1.96$）.

（1）都是接受$\mu = 0$;

（2）都是接受$\mu = 1$;

（3）检验结果不相同？

答案 （I）是右侧检验，H_0： $\mu=0$ 的拒绝域为

$$W=\{x_1: \ U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=x_1>1.645=\{x_1: \ x_1>1.645\}$$

由于$X_1=0.5<1.645,$ 接受原假设, 即认为$\mu=0.$

（II）是左侧检验，H_0： $\mu=1$ 的拒绝域为

$$W=\{x_1: \ U=x_1-1<-0.645\}=\{x_1: \ x_1<-0.645\}$$

由于$X_1=0.5>-0.645$，接受原假设，即认为$\mu=1.$

当$X_1\in(-\infty,-0.645)$时, 检验结果相同，接受$\mu=0$；

当$X_1\in(1.645,+\infty)$时, 检验结果相同，接受$\mu=1$；

当$X_1\in[-0.645,1.645]$时, 结果不同, 都接受原假设.

四　假设检验的两类错误

假设检验的主要依据是“小概率事件原理”，即小概率在一次试验中不发生．而小概率事件并非绝对不发生．在例1 中，

当H_0成立时，事件$W=\{|U|>u_{\alpha/2}\}$会发生，根据判定准则，我们将拒绝H_0，这种误判称为犯了第 I 类错误(弃真)；

当H_1成立时，事件$\bar{W}=\{|U|\le u_{\alpha/2}\}$也会发生．根据判定准则，我们将接受$H_0$，这种误判称为犯了第 II 类错误(存伪)．这两类错误列表如下

实际情况	假设检验的结果	
	拒绝 H_0	"接受" H_0
H_0 成立	I 型错误(α)	推断正确($1-\alpha$)
H_0 不成立 即 H_1 成立	推断正确($1-\beta$)	II 型错误(β)

两类错误概率的计算

$$\alpha = P\{W \mid H_0\}; \quad \beta = P\{\bar{W} \mid H_1\}$$

假设检验中的两类错误(决策结果)

H_0: 无罪

假设检验就好像一场审判过程

统计检验过程

陪审团审判		
裁决	实际情况	
	无罪	有罪
无罪	正确	错误
有罪	错误	正确

H_0 检验		
决策	实际情况	
	H_0为真	H_0为假
未拒绝H_0	正确决策 $(1-\alpha)$	第 II 类错误(β)
拒绝H_0	第 I 类错误(α)	正确决策 $(1-\beta)$

例4 设总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，在显著性水平$\alpha$ 给定条件下,试计算假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0$$——右侧检验

犯第二类错误的概率β.

解：这是右侧检验，H_0拒绝域为

$$W = \left\{ U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} > u_\alpha \right\}$$

$$\beta = P(\bar{W} \mid H_1 \text{真}) = P(U \le u_\alpha \mid \mu = \mu_1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \le u_\alpha \mid \mu = \mu_1\right).$$

$$= P_{H_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right).$$

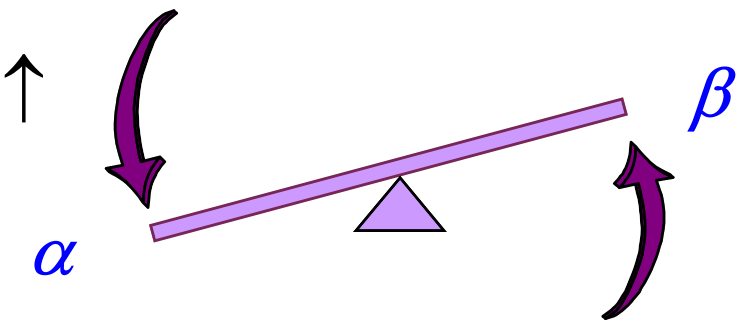
这表明：$u_\alpha - \dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$是标准正态分布的上侧$1-\beta$分位数.

故有 $u_\alpha - \dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = u_{1-\beta} = -u_\beta$, $\quad u_\alpha + u_\beta = \dfrac{\sqrt{n}\,|\mu_1-\mu_0|}{\sigma_0}$

由此可见，当 n 固定时

(1) 若 $\alpha\downarrow \Rightarrow \mu_\alpha\uparrow \Rightarrow \mu_\beta\downarrow \Rightarrow \beta\uparrow$

(2) 若 $\beta\downarrow \Rightarrow \mu_\beta\uparrow \Rightarrow \mu_\alpha\downarrow \Rightarrow \alpha\uparrow$



两类错误概率的关系

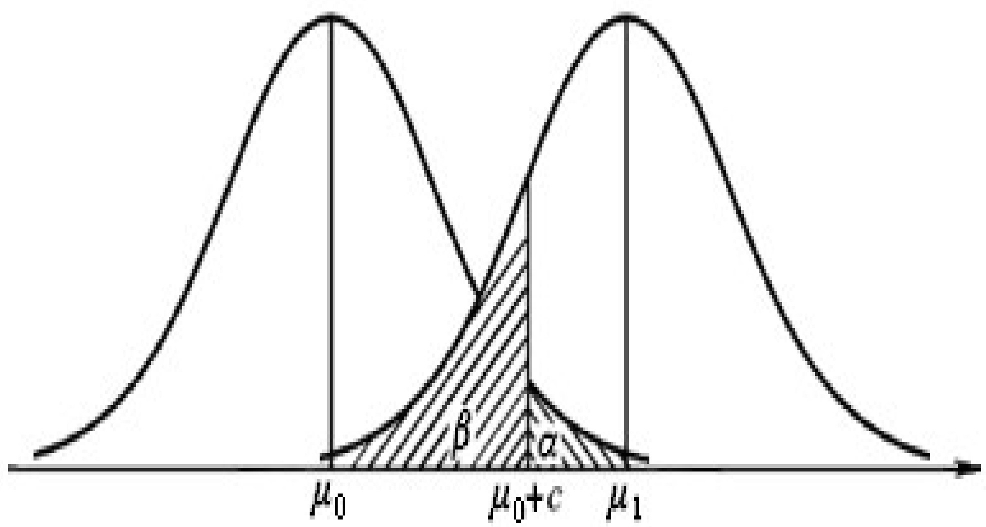
$$\mu_\alpha - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \mu_{1-\beta},\text{所以 } \mu_\alpha > \mu_{1-\beta},\text{因而}\alpha < 1-\beta, \alpha+\beta < 1.$$

两类错误关系示意图

正态总体均值的右侧检验

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu = \mu_1 > \mu_0.$$



练习题 设总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，在水平$\alpha$ 给定条件下,试计算检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$$

犯第二类错误的概率β.

答案 解： 这是左侧检验，H_0拒绝域为

$$W=\left\{U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<-u_\alpha\right\}$$

$$\beta=P(\bar{W}\,|\,H_1\text{ 真})=P(U\geq-\mu_\alpha\,|\,\mu=\mu_1)$$

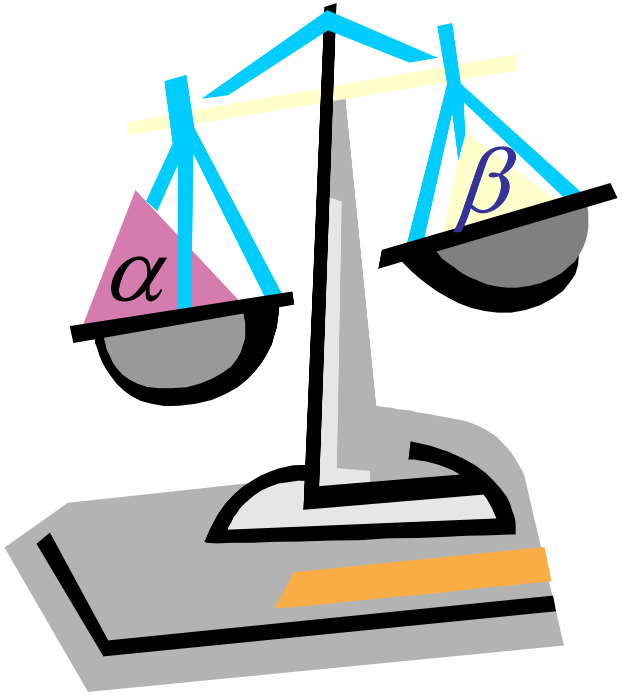
$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq-u_\alpha\,\middle|\,\mu=\mu_1\right)=P_{H_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq-u_\alpha-\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right).$$

故有 $-u_\alpha-\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=u_\beta,\quad u_\alpha+u_\beta=\dfrac{\sqrt{n}\,|\mu_1-\mu_0|}{\sigma_0}$

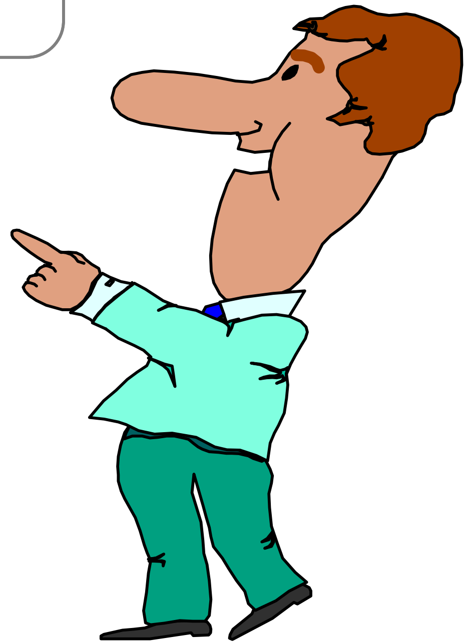
由此可见，当 n 固定时

(1) 若 $\alpha\downarrow\Rightarrow\mu_\alpha\uparrow\Rightarrow u_\beta\downarrow\Rightarrow\beta\uparrow$

(2) 若 $\beta\downarrow\Rightarrow\mu_\beta\uparrow\Rightarrow u_\alpha\downarrow\Rightarrow\alpha\uparrow$



你不能同时减少两类错误!



对双侧检验，H_0拒绝域为

$$W=\left\{U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_{\alpha/2}\right\}\cup\left\{U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}<-u_{\alpha/2}\right\}$$

$$\beta=P(\bar{W}\,|\,H_1\text{真})=P(-u_{\alpha/2}\le U\le u_{\alpha/2}\,|\,\mu\ne\mu_0)$$

$$=P(-u_{\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le u_{\alpha/2}\,|\,\mu\ne\mu_0)$$

$$=P_{H_1}(-u_{\alpha/2}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le u_{\alpha/2}-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}).$$

$$=\Phi(u_{\alpha/2}-\lambda)-\Phi(-u_{\alpha/2}-\lambda)$$

$$=\Phi(u_{\alpha/2}+\lambda)+\Phi(u_{\alpha/2}-\lambda)-1.\ \text{其中}\lambda=\frac{|\mu_1-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}.$$

U检验法中β的计算公式

右侧检验 $$\beta = \Phi(u_\alpha - \lambda)$$

左侧检验 $$\beta = \Phi(u_\alpha - \lambda)$$

双侧检验 $$\beta = \Phi(u_{\alpha/2} + \lambda) + \Phi(u_{\alpha/2} - \lambda) - 1$$

其中 $$\lambda = \frac{\sqrt{n}\left|\mu_1 - \mu_0\right|}{\sigma_0}$$

单侧检验 $$\beta'_\lambda = \Phi'_\lambda(\mu_\alpha - \lambda) = -\varphi(\mu_\alpha - \lambda) < 0$$

双侧检验 $$\beta'_\lambda = \varphi(\mu_{\alpha/2} + \lambda) - \varphi(\mu_{\alpha/2} - \lambda)$$

$$= \varphi(\mu_{\alpha/2} + \lambda) - \varphi(\left|\mu_{\alpha/2} - \lambda\right|) < 0$$

五 假设检验的P 值

对于一个假设检验问题，当显著性水平α 给定后, 检验的结果不是拒绝原假设就是接受原假设, 但显然假设检验的结果受到α大小的影响.

例如：正态总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu > \mu_0.$$

在显著性水平α 给定后，H_0的拒绝域为

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \ U > \mu_\alpha\}$$

假定根据样本得 $U = 2.1$，

如果$\alpha = 0.05$， u_α=1.645. 检验结果为：拒绝H_0;

如果$\alpha = 0.025$， u_α=1.96. 检验结果为：拒绝H_0;

如果$\alpha = 0.01$， u_α=2.33. 检验结果为：接受H_0;

如果$\alpha = 0.005$， u_α=2.58. 检验结果为：接受H_0;

从上面的分析我们看到：接受还是拒绝原假设，取决于u_α是否大于2.1 (根据样本得到的统计量U的值).

若u_α=2.1， 查表得 $\alpha = 0.0179$,故

当$\alpha > 0.0179$ 时， $u_\alpha < 2.1$， 检验结果:拒绝H_0;

当$\alpha < 0.0179$ 时， $u_\alpha > 2.1$， 检验结果:接受H_0.

由此可以看出：**0.0179** 是能用U的观测值**2.1** 做出“拒绝H_0”的最小的显著性水平，这个值称为检验的p值.

定义　在一个假设检验问题中，利用观测值能够做出拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的p值.

可以根据p值的大小进行假设检验：

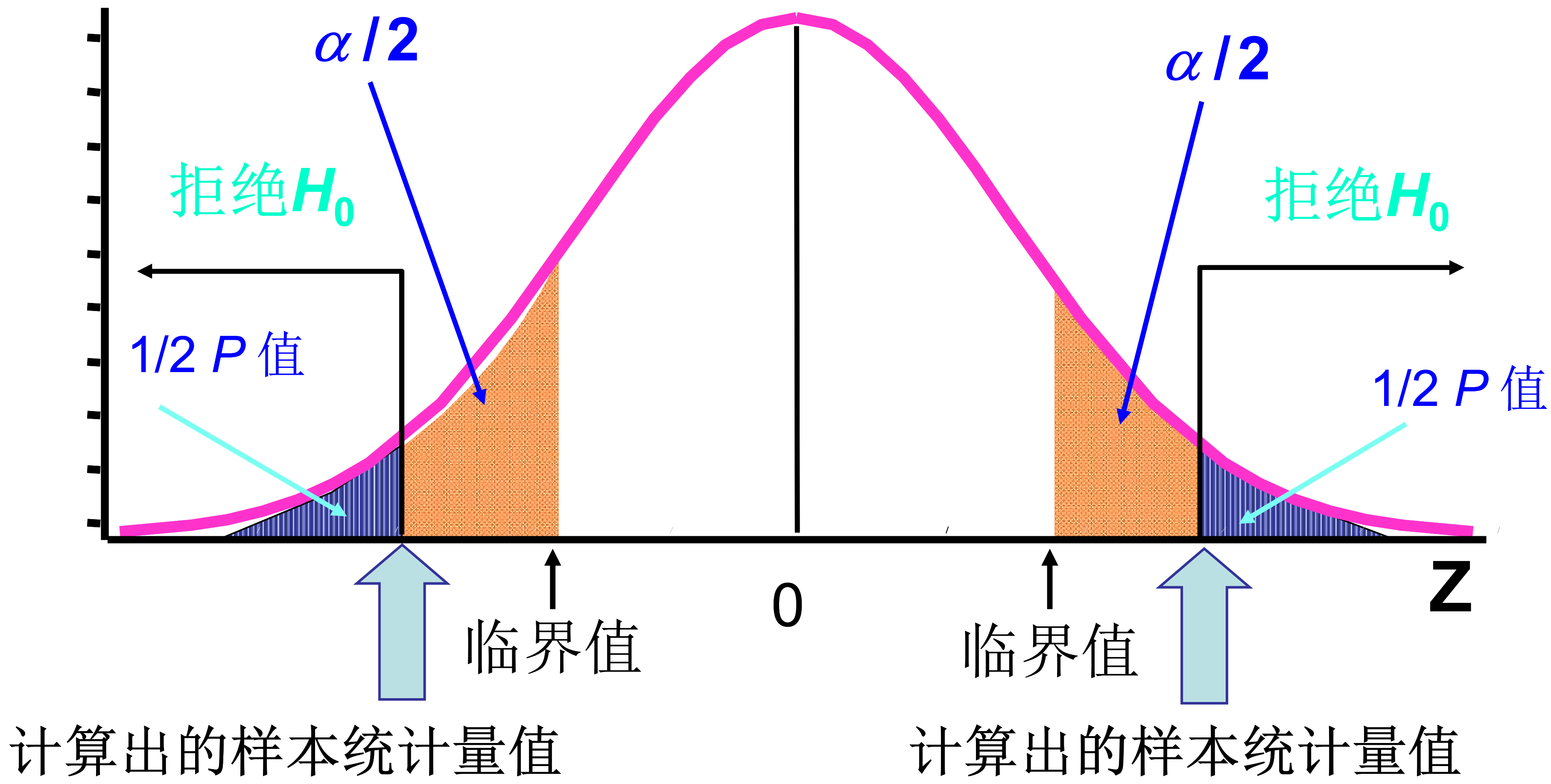
如果$\alpha > p$，则在显著性水平α下拒绝原假设；

如果$\alpha < p$，则在显著性水平α下接受原假设；

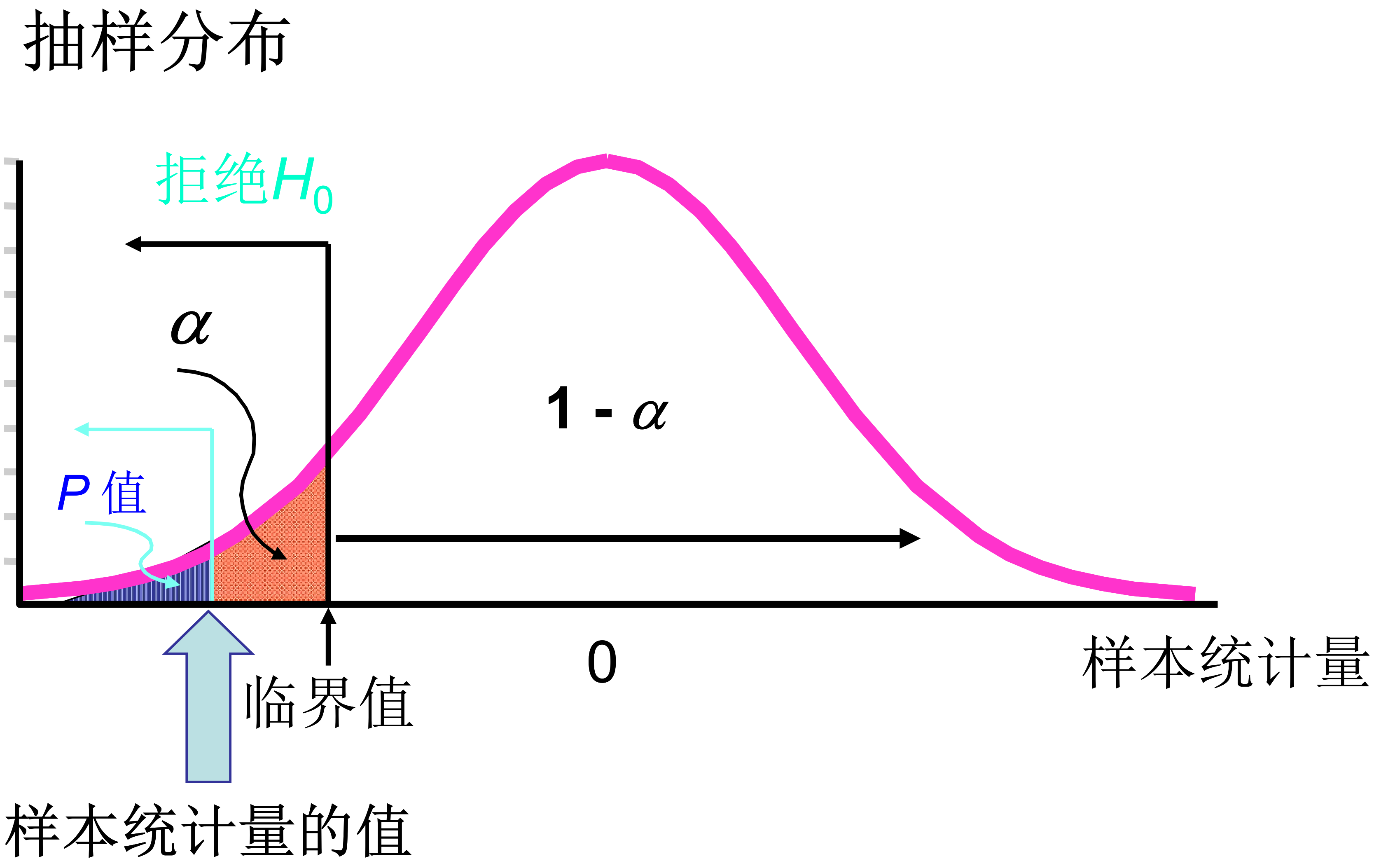
如果$\alpha = p$，一般需重新抽样后，再进行检验.

p值在应用中很方便，如今的统计软件中对检验问题一般都会给出检验的p值.

双侧检验的*P* 值



左侧检验的*P* 值



右侧检验的*P* 值

抽样分布