§3.5 多维随机变量函数的分布

前面讨论了一维随机变量函数的分布问题.

已知X的分布 ⟶ $Y = g(X)$的分布.

本节将讨论多维(二维)随机变量函数的分布问题.

已知(X,Y)的分布 ⟶ $Z = g(X,Y)$的分布.

离散型(X,Y)时　　$Z = g(X,Y)$的分布

连续型(X,Y)时　　$Z = g(X,Y)$的分布

主要讲述：　$Z = X+Y$,　　$Z = \dfrac{X}{Y}$,

$M = \max(X,Y)$,　　$N = \min(X,Y)$.

一　离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\left|X-Y\right|$ 的分布律.

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

例2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

练习题 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律.

练习题答案

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

二　连续型随机变量函数的分布

设连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$. 求随机变量$Z=g(X,Y)$的概率密度.

一般方法

(1) 求Y的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$$

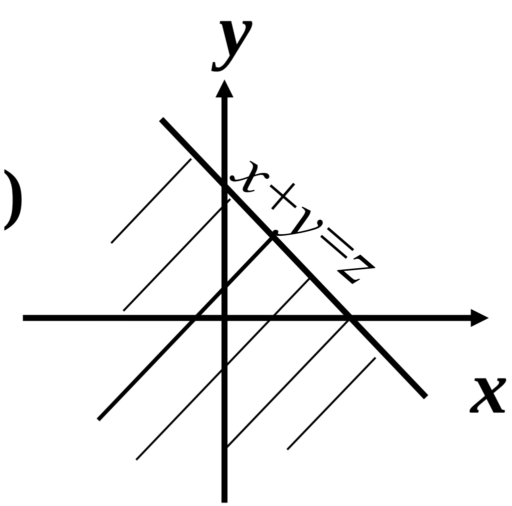
$$=P\left\{(X,Y)\in\left\{(x,y)\middle|g(x,y)\le z\right\}\right\}$$

$$=\iint\limits_{D_z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

★关键：解不等式得D_Z,二重积分化为二次积分.

(2) 对$F_Z(z)$求导,得到$f_Z(z)$,　$f_Z(z)=F_Z'(z)$.

1 和的分布 $Z = X + Y$



$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\mathrm{d}x, \quad -\infty < z < +\infty \quad (1)$$

或

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x, \quad -\infty < z < +\infty.$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\mathrm{d}y, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2)$$

特别地，若X ,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z),$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z).$$

$$-\infty<z<+\infty.$$

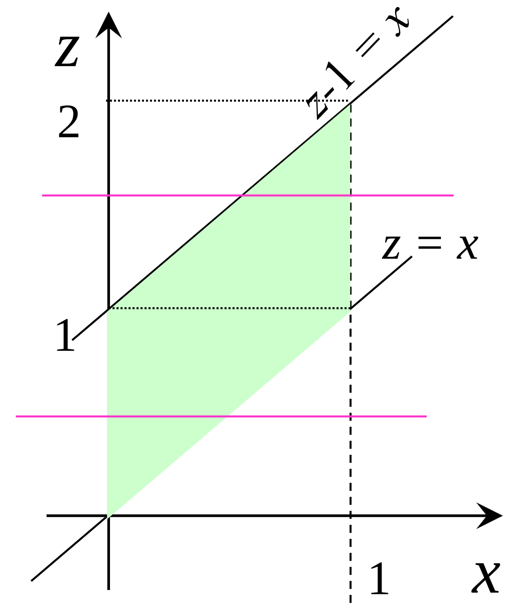
称之为函数$f_X(z)$与$f_Y(z)$的卷积.

【例3】 已知(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

设 $Z=X+Y$,

试求$f_Z(z)$.



解： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

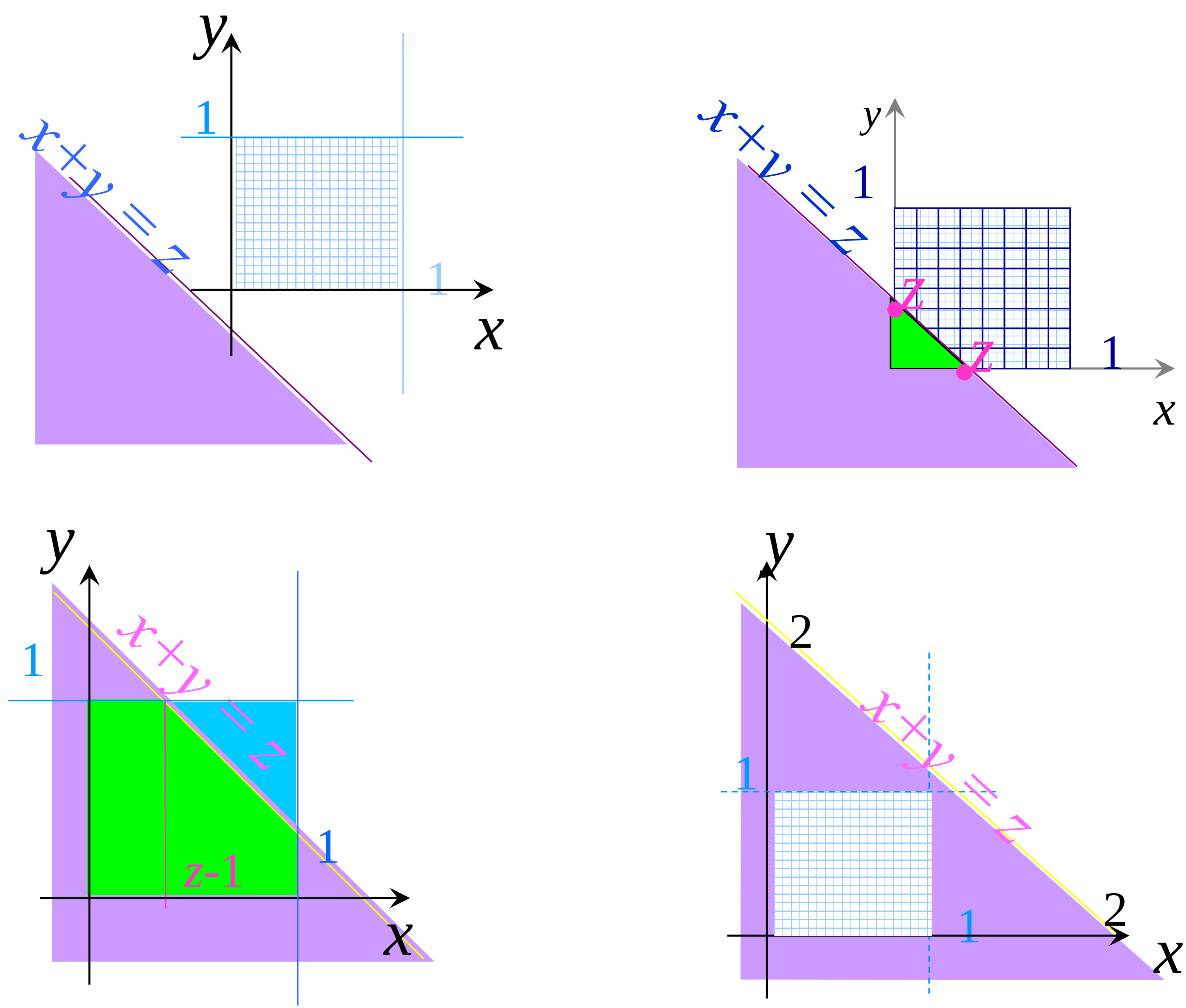
$$=\begin{cases}1, & 0<x<1, z-1<x<z,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_0^1 f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2,\\ \int_0^z 1\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 1\mathrm{d}x, & 1<z<2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2\\ z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}.$$

解法二　从分布函数出发

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



y
1
x+y = z
1
x
y
x+y = z
1
z
z
1
x
y
1
x+y = z
1
z-1
x
y
2
x+y = z
1
2
1
x

当$z<0$时，

$$F(z)=0, \qquad f_Z(z)=0.$$

当 $0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} 1\mathrm{d}y=\int_0^z (z-x)\mathrm{d}x=z^2/2,$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=z.$$

当$1\le z<2$时，

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{z-x} 1\mathrm{d}y$$

$$=z-1+\int_{z-1}^1 (z-x)\mathrm{d}x=2z-z^2/2-1.$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2-z.$$

当 $z \geq 2$ 时，

$$F_Z(z) = 1, \qquad f_Z(z) = 0.$$

所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z > 2, \\ z, & 0 < z < 1, \\ 2 - z, & 1 < z < 2. \end{cases}$$

练习题

已知(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, \ 0 < y < x. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 $Z = X + Y$. 试求 $f_Z(z)$.

练习题解答

公式法 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, x<z<2x.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

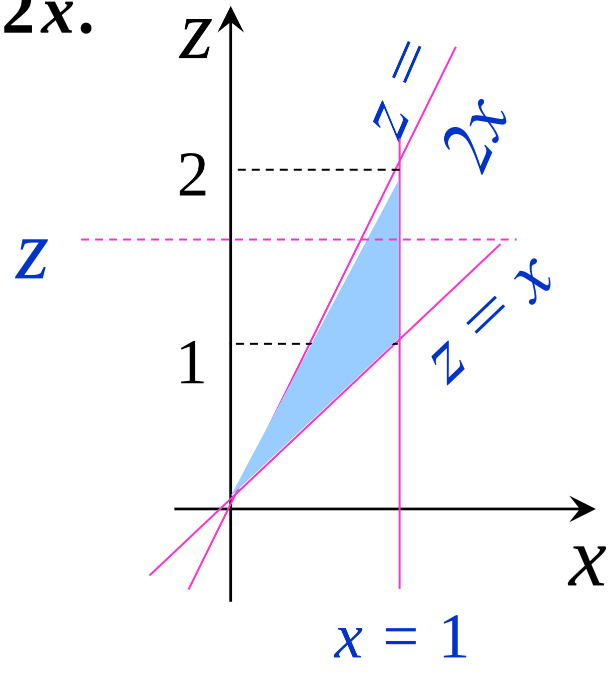
当 $0\le z<1$时，

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{z} 3x\mathrm{d}x=\frac{9}{8}z^2.$$

当 $1\le z<2$时，

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{1} 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4}),$$

其他 $f_Z(z)=0.$



例3 设两个独立的随机变量X与Y都服从标准正态分布，求$Z = X + Y$的概率密度.

解：由于 $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

由公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x$， 得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} \mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即

$$Z \sim N(0,2).$$

更一般的情况

设X,Y相互独立, 且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

$$\Downarrow$$

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例3 在一简单电路中,两电阻R_1和R_2串联联接,设R_1, R_2相互独立，它们的概率密度均为

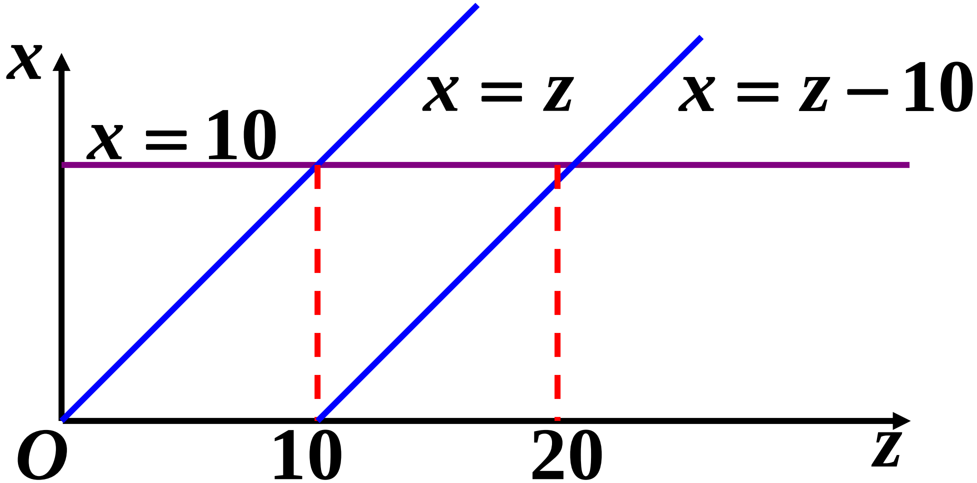
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻$R=R_1+R_2$的概率密度.

解：由题意知R的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $0<x<10$, $0<z-x<10$, 即 $0<x<10$, $z-10<x<z$ 时, 上述积分中的被积函数不为零.

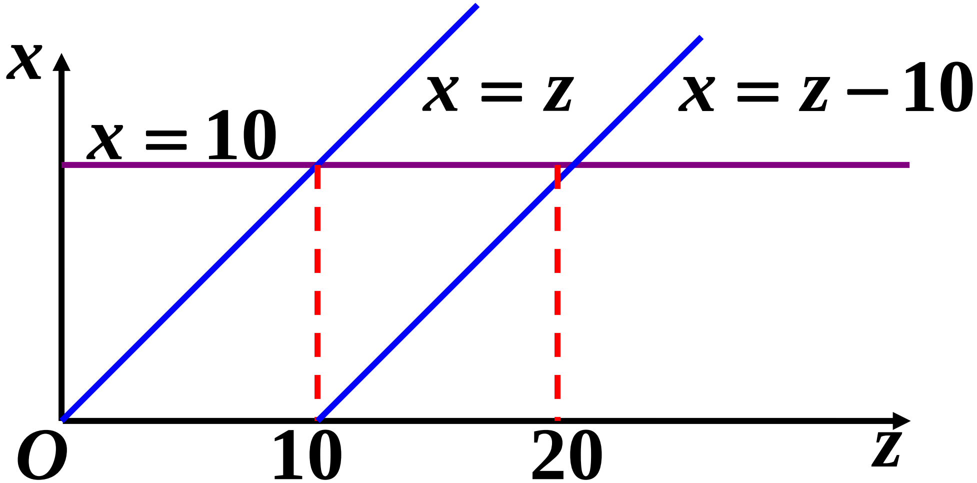


当$0 \le z < 10$时，

$$f_R(z) = \int_0^z f(x) f(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^z \frac{10-x}{50} \times \frac{10-(z-x)}{50}\,\mathrm{d}x$$

$$= (z^3 - 60z^2 + 600z)\big/15000.$$



当$10 \le z \le 20$时，

$$f_R(z) = \int_{z-10}^{10} \frac{10-x}{50} \times \frac{10-(z-x)}{50} \mathrm{d}\,x.$$

$$= (20-z)^3 \big/ 15000$$

其他情况时， $f_R(z) = 0.$

例4 设$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$，$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$. 且$X_1, X_2$相互独立，$X_1, X_2$的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

$$f_{X_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}(\beta y)^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\alpha_1>0, \beta>0$，$\alpha_2>0, \beta>0$.

试证明：$X_1+X_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

证明： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}\,x$

当$z<0$时， 易知 $f_Z(z)=0.$

当$z>0$时， $Z=X_1+X_2$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}[\beta(z-x)]^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\overset{x=zt}{=\!=}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\overset{x=zt}{=\!=}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{贝塔函数的性质}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}.$$

或令

$$A=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t,$$

利用 $\int_0^{+\infty} f_Z(z)\,\mathrm{d}z=1$ 可得到

$$A=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

代入上式即可.　证毕.

此结论可推广到 n 个相互独立的Γ分布变量之和的情况.

若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立,且X_i服从参数为α_i, β $(i=1,2,\cdots,n)$的Γ分布, 则$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$服从参数为$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta$ 的Γ分布.

2. $Z=\frac{X}{Y}$的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则$Z=\frac{X}{Y}$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}$$

$$=\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

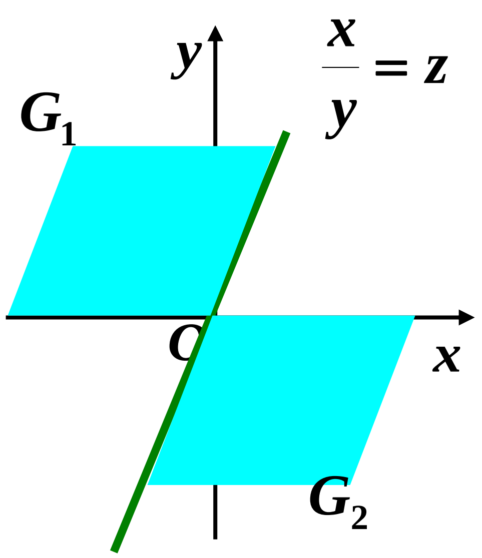
$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令$u=x/y$,

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\mathrm{d}u\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u.$$



同理可得

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u,$$

故
$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

$$f(z) = F_Z'(z) = \int_0^{+\infty} yf(yz,y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)\mathrm{d}y.$$

【例5】 设X,Y分别表示两只不同型号的灯泡的寿命，X,Y相互独立，它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度函数.

解：(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$z>0$时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2ye^{-yz}e^{-2y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{(2+z)^2},$$

当$z \le 0$时， $f_Z(z) = 0.$

故 $$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

3. $M = \max(X, Y)$及$N = \min(X, Y)$的分布

设X, Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

则有

$$F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$
$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$
$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$
$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$
$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$
$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

再若X,Y是连续型随机变量，密度函数分别为$f_X(x),f_Y(y)$. 则

$$f_{\max}(z)=f_X(z)F_Y(z)+f_Y(z)F_X(z),$$
$$f_{\min}(z)=f_X(z)[1-F_Y(z)]+f_Y(z)[1-F_X(z)].$$

推　广

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_{X_i}(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$.则

$$M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

$$N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的分布函数$F(x)$. 则

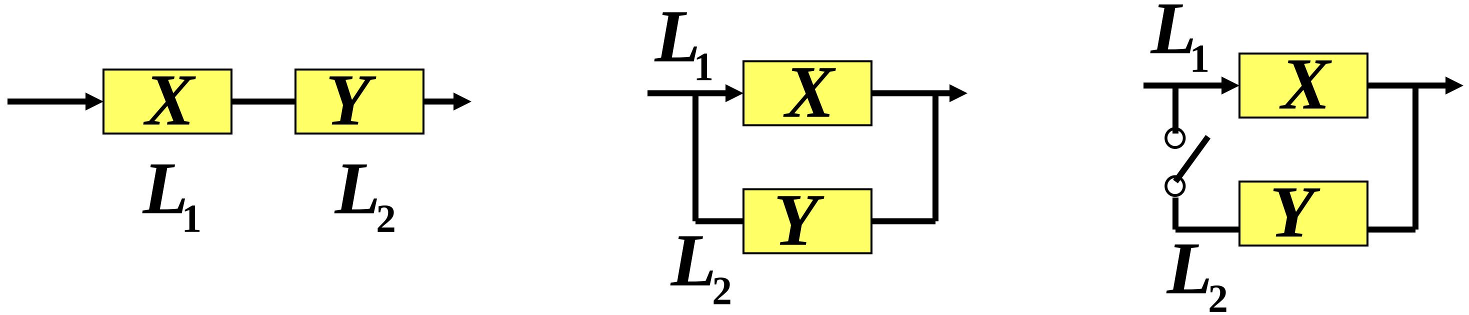
$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

再若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是连续型，密度函数为$f(x)$，则

$$f_{\max}(z) = nf(z)[F(z)]^{n-1},$$

$$f_{\min}(z) = nf(z)[1 - F(z)]^{n-1}.$$

例6：设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联接而成，连接的方式分别为 (i)串联，(ii)并联，(iii)备用(当系统L_1损坏时, 系统L_2开始工作). 如图所示.



设L_1, L_2的寿命分别为X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出L的寿命Z的概率密度.

解：(i)串联情况　$Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$f_Y(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

得

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(ii) 并联情况 $\quad Z = \max(X, Y).$

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况 $Z = X + Y$

当 $z > 0$ 时，$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\mathrm{d}y = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当 $z < 0$ 时，, $f(z) = 0$，于是$Z = X + Y$的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

四、 小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}.$$
$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

2.连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$的分布

(3) $M = \max(X, Y)$及$N = \min(X, Y)$的分布