§1.6 贝努里（Bernoulli）概型

一、伯努利概型

在许多问题中，我们对试验感兴趣的是某一类结果(事件A)是否出现．例如在产品抽样检查中注意的是抽到废品，还是抽到正品；在抛掷硬币时注意的是出现正面还是出现反面；在电视节目收视率的调查中注意的调查对象是否观看了节目.

在这类问题中我们可把一次试验的事件域取为

$$F=\left\{\phi, A, \overline{A}, \Omega\right\}$$

并称出现A为“成功”，$\overline{A}$为“失败”．这种只有两个结果的试验称为伯努利试验.

在伯努利试验中，首先要给出下面的概率：

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q = 1 - p.$$

其中： $p \geq 0,\ q \geq 0,\ p + q = 1.$

现在考虑 n 重伯努利试验. 即满足

(1)每次试验至少出现两个可能结果之一：A与$\bar{A}$.

(2)事件A在每次试验中出现的概率p保持不变.

(3)各次试验相互独立,

(4)共进行n次试验.

n重伯努利试验的基本结果可以记作

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$$

其中ω_i或者为A,或者为$\bar{A}$,这样的ω_i共有2^n个.

这2^n个样本点组成了样本空间Ω.

设样本点$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$中有$k$个$A$，$n-k$个$\bar{A}$.
所以由独立性知

$$P(\omega)=p^k q^{n-k}.$$

每个样本点的概率可由上式得到，因而任何事件的概率都可计算出来.

例如：三重伯努利试验共有8个样本点:

$$(\bar{A},\bar{A},\bar{A}),\ (A,\bar{A},\bar{A}),\ (\bar{A},A,\bar{A}),\ (\bar{A},\bar{A},A),$$
$$(A,A,\bar{A}),\ (A,\bar{A},A),\ (\bar{A},A,A),\ (A,A,A).$$

概率分别为

$$p^0q^3 \qquad p^1q^2 \qquad p^1q^2 \qquad p^1q^2$$
$$p^2q^1 \qquad p^2q^1 \qquad p^2q^1 \qquad p^3q^0$$

问题：在n重Bernoulli试验中，事件A恰好发生k次的概率.

下面求在 n 重伯努利试验中事件 A 出现 k 次的概率. 记该事件为B_k，其概率记为 $b(k;n,p)$.

显然事件B_k 共包含C_n^k个样本点. 其中任何一个样本点的概率都是$p^k q^{n-k}$. 因而事件B_k的概率为

$$b(k;n,p) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n$$

注意到 $b(k;n,p)$ 是二项式 $(q+p)^n$ 展开式的一般项，因此称为二项分布. 显然有

$$\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1$$

【例1】若在N件产品中有M件次品，现进行n次有放回的抽样调查，问共抽得k件次品的概率是多少？

解：由于抽样是有放回的，因此这是n重伯努利试验，记A表示抽得次品这一事件，则

$$p = P(A) = \frac{M}{N}$$

因此所求的概率为

$$b(k;n,p) = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

【例2】电灯泡使用寿命在1000小时以上的概率为0.2，求3个灯泡在使用1000小时后，最多只有一个坏了的概率.

解：设A＝使用寿命大于1000小时。

则$P(A)=0.2$，所求概率为：

$$P_3(k\geq 2)=P_3(2)+P_3(3)$$

$$=C_3^2(0.2)^2(0.8)^1+C_3^3(0.2)^3(0.8)^0$$

$$=0.096+0.008=0.104$$

【例3】 甲乙两名运动员进行乒乓球比赛，已知每一局甲胜的概率为0.6，乙胜的概率为0.4. 比赛可采用三局两胜制或五局三胜制，问在哪一种比赛制度下，甲获胜的可能性大？

解：（1）若采用三局两胜制，则下列两种情况下甲获胜

$$A_1 = "2:0" = \text{甲胜前两局},$$

$$A_2 = "2:1" = \text{前两局各胜一局，第三局甲胜}.$$

则 $P(\text{甲胜}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$$= P_2(2) + P_2(1) \times 0.6$$

$$= 0.6^2 + C_2^1 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.6 = 0.648$$

（2）若采用五局三胜制，则下列三种情况下甲获胜

$B_1 = "3:0" =$ 甲胜前三局，

$B_2 = "3:1" =$ 前三局甲胜二局，第四局甲胜.

$B_3 = "3:2" =$ 前四局中甲乙各胜两局，第五局甲胜

则 $P(\text{甲胜}) = P(B_1 + B_2 + B_3)$

$$= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

$$= P_3(3) + P_3(2) \times 0.6 + P_4(2) \times 0.6$$

$$= 0.6^3 + C_3^2 0.6^2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + C_4^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6$$

$$= 0.682$$

结论：五局三胜制对甲有利.

【例4】某店内有四名售货员，据经验每名售货员平均在1小时内只用台秤15分钟，问该店配置几台秤较为合理？

解：设$A=$售货员在1小时内使用台秤. 则

$\overline{A}=$售货员在1小时不使用台秤.

由题意：$P(A)=\dfrac{15}{60}=\dfrac{1}{4}$

P(1小时内没有人使用台秤）

$$=P_4(0)=C_4^0(\tfrac{1}{4})^0(\tfrac{3}{4})^3=\frac{81}{256}$$

P(1小时内只有1名售货员使用台秤)

$$=P_4(1)=C_4^1(\tfrac{1}{4})^1(\tfrac{3}{4})^2=\frac{108}{256}$$

P(1小时内有2名售货员使用台秤)

$$= P_4(2) = C_4^2 (\tfrac{1}{4})^2 (\tfrac{3}{4})^1 = \tfrac{54}{256}$$

故　P(1小时内不超过2名售货员使用台秤)

$$= P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = \tfrac{243}{256} > \tfrac{1}{2}$$

而　P(1小时内有3名售货员使用台秤)

$$= P_4(3) = C_4^3 (\tfrac{1}{4})^3 (\tfrac{3}{4})^1 = \tfrac{12}{256} \approx 0.05$$

P(1小时内有4名售货员使用台秤)

$$= P_4(4) = C_4^4 (\tfrac{1}{4})^4 (\tfrac{3}{4})^0 = \tfrac{1}{256} \approx 0.004$$

结论分析：

【例5】已知昆虫生k个卵的概率为$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(\lambda>0)$，而每一个卵能孵化成昆虫的概率为p，且各卵的孵化是相互独立的，试求这昆虫的下一代有r只的概率.

解：设$A_k=\{$昆虫产k卵$\}$，$B=\{$昆虫有r个下一代$\}$

由全概率公式：

$$P(B)=\sum_{k=r}^{\infty}P(A_k)P(B|A_k)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}C_k^r p^r(1-p)^{k-r}$$

$$=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-r}}{(k-r)!}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}.$$