§2.2 估计量优劣的评价标准

对于总体分布中的同一个未知参数θ，若采用不同的估计方法，可能得到不同估计量$\hat{\theta}$. 例如：

均匀总体$X \sim U(a,b)$的未知参数a,b的矩估计量和极大似然估计量分别为

$$\begin{cases} \hat{a}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{3}S_n, & \hat{b}_{矩} = \bar{X} + \sqrt{3}S_n \\ \hat{a}_{MLE} = X_{\min}, & \hat{b}_{MLE} = X_{\max} \end{cases}$$

二者不同

究竟采用哪一个估计量更好呢？这就产生了如何评价与比较估计量的好坏的问题，自然与参数的真值偏离程度越小的估计量越好.

通常用偏差平方的期望$E(\hat{\theta}-\theta)^2$来衡量估计量$\hat{\theta}$的偏离程度，并称为均方误差（MSE），记作：

$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

如果存在一个估计量$\hat{\theta}$，在所有估计量中，$\hat{\theta}$的均方误差最小，则称$\hat{\theta}$是θ的最优估计量.

均方误差MSE可分解为两项：

$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=E\left[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))+(E(\hat{\theta})-\theta)\right]^2$$

$$=E(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2+(E(\hat{\theta})-\theta)^2$$

$$=D(\hat{\theta})+(E(\hat{\theta})-\theta)^2.$$

如果把$E(\hat{\theta})$看着$\hat{\theta}$的分布中心，则上式右端的第一项$D(\hat{\theta})$度量了$\hat{\theta}$的分布聚集在其中心的紧密程度．第二项度量了分布中心与θ的距离远近.

当上式右端的两项都很小, 左端才能很小. 同时控制均方误差右端的两项是很困难的, 但是控制第二项是可能的. 要求$E(\hat{\theta})-\theta=0$，或者$E(\hat{\theta})=\theta$是合理的, 也是容易办到的. 通常在满足$E(\hat{\theta})=\theta$的类中寻找最优估计量.

例1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是从总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$抽取的样本,参数μ, σ^2未知，令$S_1^2 = C\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. 试确定$C$的值，使$E(S_1^2 - \sigma^2)^2$最小.

解 S_1^2的均方误差为

$$R(S_1^2, \sigma^2) = E(S_1^2 - \sigma^2)^2 = D(S_1^2) + \left[E(S_1^2) - \sigma^2\right]^2$$

由于$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$，所以

$$E\left[(n-1)S^2/\sigma^2\right] = n-1, \quad D\left[(n-1)S^2/\sigma^2\right] = 2(n-1),$$

因而

$$E(S_1^2) = (n-1)C\sigma^2, \qquad D(S_1^2) = 2(n-1)C^2\sigma^4,$$

$$R(S_1^2,\sigma^2)=2(n-1)C^2\sigma^4+\left[(n-1)C-1\right]^2\sigma^4.$$

令 $$\frac{\partial R}{\partial C}=\left[4(n-1)C+2(n-1)^2C-2(n-1)\right]\sigma^4=0$$

解得 $C=\dfrac{1}{n+1}$，因为 $\dfrac{\partial^2 R}{\partial C^2}=2(n^2-1)\sigma^4>0,$

所以当$C=1/(n+1)$时, 均方误差$R(S_1^2,\sigma^2)$最小. 故

$$S_1^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

是σ^2的最优估计量.

注： $E(S_1^2)=\dfrac{n-1}{n+1}\sigma^2\neq\sigma^2.$

因此，均方误差最小时，未必有$E(\hat{\theta})-\theta=0.$

下面我们讨论估计量优劣性的四个标准

（1）无偏性　　（2）有效性

（3）最小方差无偏估计　　（4）相合性.

无偏性　　有效性　　最小方差无偏估计

$E(\hat{\theta})=\theta$　　$D(\hat{\theta})$小者　　$D(\hat{\theta})$最小者

相合性　　渐进无偏性

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \Leftarrow \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \quad \lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0.$$

一、无偏性

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的一个估计量，

如果 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计(量).

如果 $E(\hat{\theta})\neq\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的有偏估计(量).

称$E(\hat{\theta})-\theta$为估计量$\hat{\theta}$的偏差.

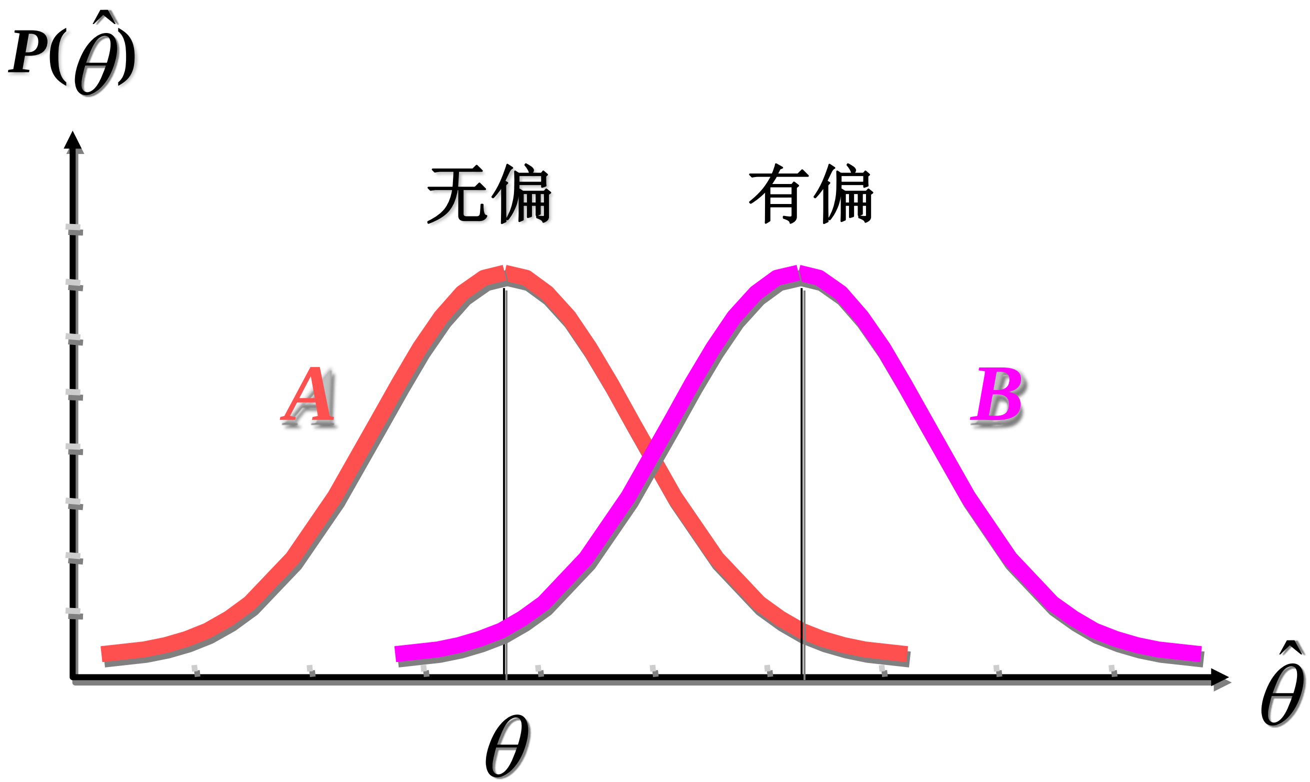
如果θ的一列估计$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

$(n=1,2,\cdots)$，满足关系式

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}_n$是θ的渐进无偏估计(量).

注：无偏估计量的意义：估计量的观测值总是围绕着真值摆动，其多次试验的平均值等于参数的真值.



无偏估计不存在的例子：

考察二项分布族$\{B(m,p),\ 0<p<1\}$,则不管样本容量n为多少, 参数$g(p)=p^{-1}$的无偏估计不存在.

以$n=1$为例： 反证法

设$g(p)$有无偏估计$\hat{g}(X_1)$，则有

$$E\hat{g}(X_1)=\sum_{k=0}^{m} g(k)C_m^k p^k(1-p)^{m-k}=p^{-1},$$

于是 $\sum_{k=0}^{m} g(k)C_m^k p^{k+1}(1-p)^{m-k}-1=0, \qquad 0<p<1.$

上式左端是p的$m+1$次多项式，它最多有$m+1$个实根，矛盾.

无偏估计“不好”的例子：

设总体$X \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$是未知参数．可以证明$\hat{g}(X_1)=(-2)^{X_1}$是参数$g(\lambda)=e^{-3\lambda}$的无偏估计.

$$E\hat{g}(X_1)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-2)^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-2\lambda)^k}{k!}=e^{-3\lambda}.$$

显然它不是一个好的估计.

因为$e^{-3\lambda} \in (0,1)$，而$(-2)^{X_1}$的取值为$1,-2,4,-8,\cdots\cdots$.

例2　设总体X的一阶和二阶矩存在，记

$$E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2.$$

则样本均值$\bar{X}$ 是μ 的无偏估计，S_n^2是σ^2的渐近无偏估计，样本方差S^2是σ^2无偏估计.

证明　$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu.$$

无偏估计

$$E(S_n^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

渐进无偏

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mu^2+\sigma^2)-n\left(\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2\right)\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2,$$

$$E(S^2)=\frac{n}{n-1}E(S_n^2)=\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2.$$

无偏估计

例3 设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$是总体X的一个样本，$X \sim B(n, p)$, $n > 1$,求p^2的无偏估计量.

解 由于 $E(\bar{X}) = E(X) = np$,

无偏估计

$$E(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2) = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p).$$

无偏估计

因而 $$E(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \bar{X}) = (n^2 - n)p^2.$$

因此 p^2的无偏估计量为

无偏估计

$$\hat{p}^2 = \frac{1}{n^2 - n}(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \bar{X}) = \frac{1}{mn(n-1)}\sum_{i=1}^{m} X_i(X_i - 1).$$

例4 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一组样本，总体X的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

其中$\theta>0$为未知常数.

试证明$\hat{\theta}_1=\bar{X}$， $\hat{\theta}_2=nX_{(1)}$都是θ的无偏估计量.

证明 $X\sim E(1/\theta)$，$E(X)=\theta$.故$E(\hat{\theta}_1)=E(\bar{X})=E(X)=\theta$.

$X_{(1)}$的密度函数为 $f_{X_{(1)}}(t)=\begin{cases} \dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nt}{\theta}}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$X_{(1)}\sim E(n/\theta)$，$E(X_{(1)})=\theta/n$，故 $E(\hat{\theta}_2)=E(nX_{(1)})=\theta$.

练习题

设总体$X \sim U(0,\theta)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体的样本. 试证明

$$(n+1)X_{(1)} = (n+1)\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\},$$

$$\frac{n+1}{n}X_{(n)} = \frac{n+1}{n}\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

都是θ的无偏估计.

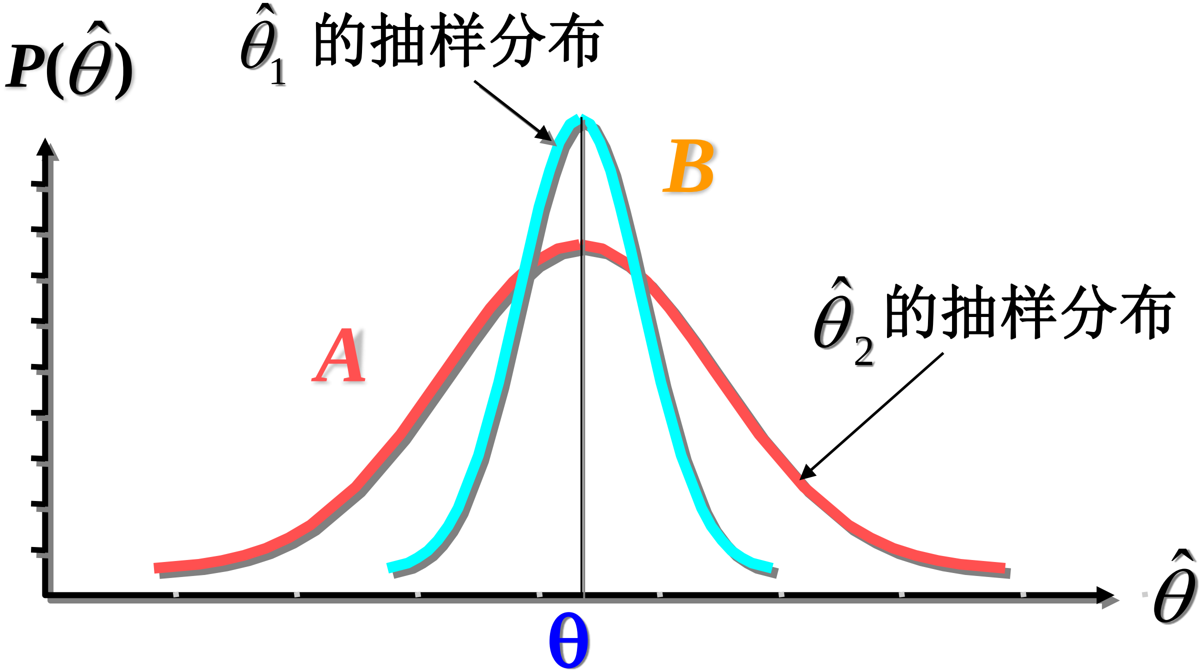
注 顺序统计量$X_{(1)}, X_{(n)}$的密度函数分别为

$$f_{X_{(1)}}(x) = n[1-F(x)]^{n-1} f(x).$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x).$$

二、有效性

设$\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是θ 的无偏估计(量). 且$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$. 则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$ 更有效.



例5（续例4）由例4知：$\hat{\theta}_1=\bar{X}$，$\hat{\theta}_2=nX_{(1)}$都是θ的无偏估计量．问哪个估计量更有效？

解 $D(\bar{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$，$D(nX_{(1)})=\theta^2$．

所以估计量$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效.

例6 设总体$\bar{X}\sim U\ [0,\theta]$，参数$\theta>0$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$X$样本.

(1)试证明：θ的矩估计量$\hat{\theta}_1=2\bar{X}$和修正的极大似然估计量$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$均是$\theta$的无偏估计；

(2)问：$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$哪一个更有效？（$n\geq 2$）.

证 (1) $E(\hat{\theta}_1)=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2E(X)=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta,$

所以$2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

因为$X\sim U[0,\theta]$，密度函数 $f(x)=\begin{cases}1/\theta, & x\in[0,\theta]\\ 0, & 其它\end{cases}$

分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0\\ x/\theta, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$

所以 $X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度为

$$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$E(X_{(n)})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X_{(n)}}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{0}^{\theta}x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^{n}}\,\mathrm{d}\,x=\frac{n}{n+1}\theta,$$

所以 $E\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\theta,$ 即$\hat{\theta}_2$也是θ的无偏估计量.

(2)问：$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$和$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$哪一个更有效?

由于

$$D(\hat{\theta}_1)=4D(\bar{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{3n},$$

$$D(\hat{\theta}_2)=D\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2D(X_{(n)}).$$

又因为 $E(X_{(n)})=\dfrac{n}{n+1}\theta,$

$$E(X_{(n)}^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_{X_{(n)}}(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^{n+1}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(X_{(n)})=E(X_{(n)}^2)-[E(X_{(n)})]^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta}_2)=D(\frac{n+1}{n}X_{(n)})=(\frac{n+1}{n})^2 D(X_{(n)})=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2.$$

又$n\geq 2$，所以 $D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1)$， $\hat{\theta}_2$较$\hat{\theta}_1$有效.

$$\boxed{D(\hat{\theta}_1)=\frac{\theta^2}{3n}}$$

练习题

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自均匀总体$X \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$的一组样本.

试证明$\hat{\theta}_1 = \bar{X}$， $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$都是$\theta$的无偏估计量. 并指出哪一个更有效?

答案 $$f_{X_{(1)}}(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1}f(x)$$

$$=\begin{cases} n(\theta+0.5-x)^{n-1}, & \theta-0.5\le x\le\theta+0.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x)=n\left[F(x)\right]^{n-1}f(x)$$

$$=\begin{cases} n(x-\theta+0.5)^{n-1}, & \theta-0.5\le x\le\theta+0.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X_{(1)})=\theta-0.5+1/(n+1),\quad E(X_{(n)})=\theta+0.5-\frac{1}{n+1}$$

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)=n(n-1)\left[F(y)-F(x)\right]^{n-2}f(x)f(y)$$

$$=\begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & \theta-0.5\le x\le y\le\theta+0.5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

答案(续)

$$E(X_{(1)}+X_{(n)})^2=4\theta^2+\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$D(\hat{\theta}_1)=\frac{1}{12n},\qquad D(\hat{\theta}_2)=\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

$n>2$时

$$D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1).$$

三、相合性

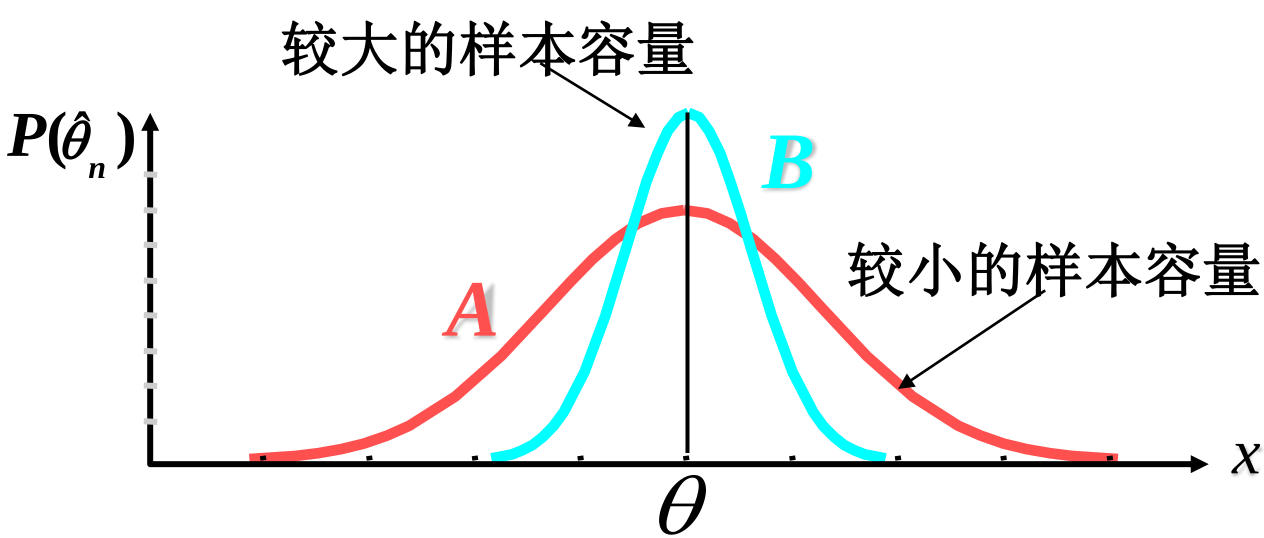
若$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为参数$\theta$的估计序列, 如果$\hat{\theta}_n$依概率收敛于$\theta$, 即对任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量(或一致估计量).



定理2.2.1 设$\hat{\theta}_n$是θ的一个估计量,若$\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta$,

且$\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n)=0$，则$\hat{\theta}_n$是$\theta$的相合估计(或一致估计).

证明

$$0 \le P\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} E(\hat{\theta}_n-\theta)^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2} E\left[(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n)+(E\hat{\theta}_n-\theta)\right]^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}[D(\hat{\theta}_n)+(E\hat{\theta}_n-\theta)^2]$$

令$n\to\infty$，由定理的假设得

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right| \ge \varepsilon\}=0$$

即$\hat{\theta}_n$是θ的相合估计.

例如：样本$k(k \geq 1)$阶矩是总体X的k阶矩 $E(X^k)$ 的相合估计量(辛钦大数定律). 因此，矩估计一般是相合估计.

例8 试证: (1)样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的相合估计量; (2) 样本无偏方差 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 及样本方差$S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$都是总体方差 σ^2 的相合估计量.

证明 (1) 由大数定律知, $\forall \varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

所以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的相合估计量.

(2)又 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-\bar{X}^2$

$=A_2-\bar{X}^2$，(A_2是样本二阶原点矩)

由大数定律知

$$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\text{依概率收敛于}E(X^2),$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\text{依概率收敛于}E(X),$$

故 $S_n^2=A_2-\bar{X}^2$依概率收敛于$E(X^2)-[E(X)]^2=\sigma^2$,

所以S_n^2是σ^2的相合估计量.

$$S^2=\frac{n}{n-1}S_n^2\text{也是}\sigma^2\text{的相合估计量.}$$

练习题

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布,

$$EX_1=\mu,\quad DX_1=\sigma^2<+\infty,$$

试证$\hat{\mu}=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i$是$\mu$ 的相合估计.

四、小结

估计量的评价标准

无偏性	有效性	最小方差无偏估计
$E(\hat{\theta})=\theta$	$D(\hat{\theta})$小者	$D(\hat{\theta})$最小者
相合性	渐进无偏性	

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \Leftarrow \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \quad \lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0.$$

相合性是对估计量的一个基本要求，不具备相合性的估计量是不予以考虑的.