§ 3.3　随机变量的函数及其分布

一　随机变量的函数

随机变量的截断

$$Y=\begin{cases} X, & X \le 10^{10}-1; \\ 10^{10}-1, & X > 10^{10}-1. \end{cases}$$

记录仪记录一天中来到α粒子数目X.

$$Y = X \cdot I_{(X \le 10^{10}-1)} + (10^{10}-1) \cdot I_{(X > 10^{10}-1)}$$

随机变量的限尾

$$Y=\begin{cases} a, & X < a; \\ X, & a \le X < b; \\ b, & X > b. \end{cases}$$

若$X \sim N(0,1)$，令 $y = g(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

（1）求$Y = g(X)$的分布函数.

（2）判断$Y = g(X)$是离散型随机变量还是连续型随机变量，还是既不离散也不连续.

解：Y的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = \begin{cases} P\{X < y\} = \Phi(y), & y \le 0, \\ P\{Y < y\} = 1, & y > 0. \end{cases}$$

$Y = g(X)$既不是离散型也不是连续型.

思考题

设 $y=g(x)$是连续函数，下列说法是否正确？

（1）若X是离散型随机变量，则$Y=g(X)$一定是离散型随机变量.

（2）若X是连续型随机变量，则$Y=g(X)$一定是连续型随机变量.

思考题答案

第一个结论正确，第二个结论不正确.

通过限尾可以把无界的随机变量变成有界的随机变量, 这种方法在概率论的研究中经常用到. 但本节主要研究：随机变(向)量的初等函数的分布问题.

已知X的分布，求解$Y=g(X)$的分布.

(1) 1维$\longrightarrow$1维: $Y=g(X)$

(2) n维$\longrightarrow$1维 $Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

(3) n维$\longrightarrow$$m$维 $Y=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$

其中$g_i=g_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, $i=1,2,\cdots,m.$

(1)′ $Y = g(X)$:

$$\Omega \xrightarrow{X} R^1 \xrightarrow{y=g(x)} R^1.$$ 要求：

函数$y = g(x)$是一维波雷尔函数.

(定义—1维博雷尔集合的原像仍然是1维博雷尔集合).

(2)′ $Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$:

$$\Omega \xrightarrow{X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)} R^n \xrightarrow{y=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)} R^1.$$ 要求：

函数$y = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$n$维波雷尔函数.

(定义—1维博雷尔集合的原像是n维博雷尔集合).

(3)′ $Y = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$:

$$\Omega \xrightarrow{X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)} R^n \xrightarrow{y=(g_1,g_2,\cdots,g_m)} R^m.$$ 要求：

每个函数$g_i = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$n$维波雷尔函数.

二　离散型随机变量函数的分布

设X是离散型随机变量，其分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	$\cdots\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots\cdots$

则$Y=g(X)$也是离散型，其分布列为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots\cdots$

注意：当某些$g(x_i)$相等时，应把它们适当合并.

例如:

X	-1	0	1	2
P	$1/5$	$3/10$	$2/5$	$1/10$

则$Y = X^2 + 1$的分布列

Y	1	2	5
P	$3/10$	$3/5$	$1/10$

【离散卷积公式】 如果X与Y相互独立，且它们只取非负整数值. 设

$$P\{X=i\}=a_i,\ \ P\{Y=j\}=b_j \quad i,j=0,1,2,\cdots$$

则$Z = X + Y$的分布列为

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}, \qquad k=0,1,2,\cdots.$$

即

$$c_k=P\{Z=k\}=a_0 b_k+a_1 b_{k-1}+\cdots+a_k b_0$$

例如： 设 $X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，二者相互独立．可证明：$X+Y\sim B(n+m,p)$.

三　连续型随机变量函数的分布

设X是连续型随机变量，已知其分布函数$F(x)$或密度函数$f(x)$，要求$Y=g(X)$的分布函数$G(y)$或密度函数$q(y)$. 一般可用下式求解.

一 般 方 法

先求Y的分布函数

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{g(X)<y\}=\int_{g(x)<y} f(x)\mathrm{d}x$$

求导得到Y的密度函数

$$q(y)=G'(y)$$

上述积分计算的难易程度取决于被积函数$f(x)$的表达式和积分区域$\{x:g(x)<y\}$的形，要具体问题具体分析.

公 式 法

当函数$y=g(x)$是单调函数时，根据一般方法可得到Y的密度函数求解公式. 即下面的定理3.3.1.

定理3.3.1　若X是连续型随机变量，取值范围为区间(a, b)（可以有限或无限），其密度函数为$f(x)$，设$Y=g(X)$，则有下列结论：

（1）若$y=g(x)$在(a, b)上严格单调，其反函数$x=g^{-1}(y)=h(y)$有连续的导函数．则$Y=g(X)$是连续型随机变量，其密度函数为

$$q(y)=f\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right|.$$

（2）若$y=g(x)$在(a, b)的不相重叠的区间$I_1, I_2, \cdots$逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(y), h_2(y), \cdots$，而且$h_1'(y)$，$h_2'(y), \cdots$为连续函数，则$Y=g(X)$是连续型，密度函数为

$$q(y)=f\left[h_1(y)\right]\left|h_1'(y)\right|+f\left[h_2(y)\right]\left|h_2'(y)\right|+\cdots$$

证明 (1) 当$y=g(x)$是严格单调函数时, 若是严格单调上升，则

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{g(X)<y\}=\int_{g(x)<y} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x<g^{-1}(y)=h(y)} f(x)\mathrm{d}x=F(g^{-1}(y))=F(h(y))$$

若是严格严调下降，则

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{g(X)<y\}=\int_{g(x)<y} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x>g^{-1}(y)} f(x)\mathrm{d}x=1-F(g^{-1}(y))=1-F(h(y))$$

无论哪种情况，求导得到Y的密度函数为

$$q(y)=f\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right|.$$

(2) 当$y=g(x)$是分段严格单调函数时，对给定实数y，记$I_i=(a_i,b_i)$

$$E_i(y)=\{x: x\in I_i\text{且}g(x)<y\}$$

$$=\begin{cases}(a_i,h_i(y)), & \text{当}y=g(x)\text{在}I_i\text{上单调上升,}\\ (h_i(y),b_i), & \text{当}y=g(x)\text{在}I_i\text{上单调下降.}\end{cases}$$

则

$$G(y)=P\{Y<y\}=P\{g(X)<y\}$$

$$=\left\{X\in\sum_i E_i(y)\right\}=\sum_i\int_{E_i(y)}f(x)dx$$

无论$E_i(y)$是哪种情况，对y求导得到Y的密度函数为

$$q(y)=f\left[h_1(y)\right]\left|h_1'(y)\right|+f\left[h_2(y)\right]\left|h_2'(y)\right|+\cdots$$

【例1】X是连续型随机变量，其分布函数为$F(x)$，密度函数为$f(x)$, 而$Y=aX+b$, $a\neq 0$. 求Y的密度函数$q(y)$.

解：$G(y)=P\{Y<y\}=P\{aX+b<y\}$

$$=\begin{cases} P\left\{X<\dfrac{y-b}{a}\right\}=F(\dfrac{y-b}{a}), & 若a>0, \\ P\left\{X>\dfrac{y-b}{a}\right\}=1-F(\dfrac{y-b}{a}), & 若a<0. \end{cases}$$

因此

$$q(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}f(\dfrac{y-b}{a}), & 若a>0, \\ -\dfrac{1}{a}f(\dfrac{y-b}{a}), & 若a<0. \end{cases}$$

可统一写成 $q(y)=\frac{1}{|a|}f(\frac{y-b}{a}).$

特别：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$

【例2】若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$Y=e^X$的密度函数$q(y).$

解：函数$y=e^x$在$(-\infty,+\infty)$上是严格单调增函数，其反函数$x=\ln y(y>0)$的导数为$(\ln y)'=y^{-1}$,根据公式得$Y=e^X$的密度函数为

$$q(y)=f\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}},y>0.$$

由于$\ln Y=X$服从正态分布，故称Y所服从的分布为对数正态分布.

【例3】若$X \sim N(0,1)$，求$Y=X^2$的密度函数$q(y)$.

解：函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$上单调下降，在$(0,+\infty)$上单调上升. 其反函数分别为$x=-\sqrt{y}$； $x=\sqrt{y}$，反函数的导数分别为 $(-\sqrt{y})'=-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$， $(\sqrt{y})'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

根据公式得$Y=X^2$的密度函数为

$$q(y)=f(-\sqrt{y})\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+f(\sqrt{y})\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}},\quad y>0.$$

此分布是$\chi^2(1)$，是$\chi^2(n)$的特例.

【$\chi^2(n)$分布】若X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0.$$

则称X服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2(n)$.

可以证明：

若$X_1\sim N(0,1),\cdots\cdots$，$X_n\sim N(0,1)$，且它们相互独立，那么

$$Y=X_1^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$$

【例4】若$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\varphi = \mathrm{tg}\,\theta$，试求$\varphi$的密度函数$q(y)$.

解：函数$y = \mathrm{tg}x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调上升，其反函数为$x = \mathrm{tg}^{-1}y$. 因为

$$(\mathrm{tg}^{-1}y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

根据公式得φ的密度函数为

$$q(y)=f\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in R.$$

由上式定义的分布称为柯西分布.

【例5】若$X \sim U(-1,1)$, 试求$Y=X^2+1$的密度函数$q(y)$.

解：X的取值范围是$(-1,1)$，因而$Y=X^2+1$的取值范围是$(1,2)$，函数$y=x^2+1$在$(-1,0)$上单调下降, 在$(0,1)$上单调上升.其反函数分别为

$$x=h_1(y)=-\sqrt{y-1},\quad y\in(1,2),$$

$$x=h_2(y)=\sqrt{y-1},\qquad y\in(1,2),$$

$$h_1'(y)=-\frac{1}{2\sqrt{y-1}};\qquad h_2'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y-1}}.$$

根据公式得$Y=X^2+1$的密度函数为

$$q(y)=f\left[h_1(y)\right]\left|h_1'(y)\right|+f\left[h_2(y)\right]\left|h_2'(y)\right|$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in (1,2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【例6】若$X \sim U(-1,2)$, 试求$Y = X^2+1$的密度函数$q(y)$.

解：X的取值范围是$(-1,2)$，因而$Y = X^2+1$的取值范围是$(1,5)$，函数$y = x^2+1$在$(-1,0)$上单调下降, 在$(0,2)$上单调上升.其反函数分别为

$$x = h_1(y) = -\sqrt{y-1}, \quad y \in (1,2),$$

$$x = h_2(y) = \sqrt{y-1}, \quad y \in (1,5),$$

$$h_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y-1}}; \quad h_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}.$$

根据公式得$Y=X^2+1$的密度函数为

$$q(y)=f\left[h_1(y)\right]\left|h_1'(y)\right|+f\left[h_2(y)\right]\left|h_2'(y)\right|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(y-1)^{-1/2}, & y\in(1,2),\\ \dfrac{1}{6}(y-1)^{-1/2}, & y\in(2,5),\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

【例7】随机变量的存在性定理——满足分布函数三条性质的任意一元函数必是某个随机变量的分布函数.

（书本P165）

【例8】——均匀分布可生成任意的分布.

设随机变量X的分布函数为$F(x)$，对任意的$0 \le y \le 1$,
定义

$$F^{-1}(y) = \inf\left\{x : F(x) > y\right\}$$

作为$F(x)$的反函数.

(1) 若$F(x)$是连续函数，那么$\theta = F(X) \sim U\left[0,1\right]$,

(2) 若$\theta \sim U\left[0,1\right]$，那么$X = F^{-1}(\theta) \sim F(x)$,

证明：(1) 对于$0 \le x \le 1$,

$$P\left\{\theta < x\right\} = P\left\{F(X) < x\right\}$$

$$= P\left\{X < F^{-1}(x)\right\} = F(F^{-1}(x)) = x.$$

(2) $P\left\{X < x\right\} = P\left\{F^{-1}(\theta) < x\right\} = P\left\{\theta < F(x)\right\} = F(x).$

四　随机向量函数的分布

设连续型随机量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的密度函数为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 则

$$G(y)=P\{Y<y\}$$

$$=\int\cdots\int_{g(x_1,x_2,\cdots,x_n)<y} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

上述积分计算的难易程度取决于被积函数$f(x)$的表达式和积分区域的形状.

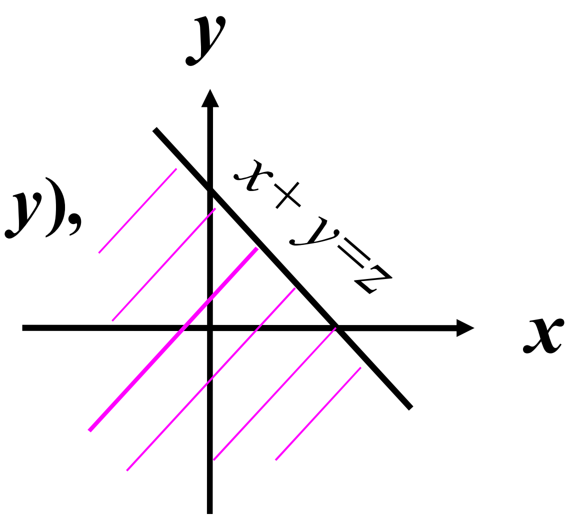
本节只讨论随机向量(X,Y)的一些特殊函数的分布

和的分布　　商的分布

$$Z=X+Y \qquad Z=\frac{X}{Y}$$

$Z=\max(X,Y), Z=\min(X,Y)$,(略—数理统计部分).

和的分布



设随机向量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$, $Z=X+Y$. 则

$$G(z)=P\{Z<z\}=\iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t-x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

因此Z的密度函数为

$$q(z)=G'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

同样可求得

$$q(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

特别当X,Y相互独立时，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

代入上式得Z的密度函数为

$$q(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

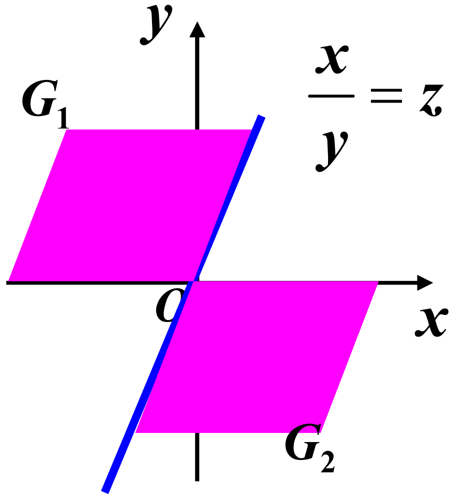
上式称为(连续)卷积公式.

商的分布

设随机向量$Z=(X,Y)$的密度函数为$f(x,y)$,

$Z=X/Y$. 则

设随机向量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$, $Z=X/Y$. 则



$$G(z)=P\{Z<z\}=\iint\limits_{x/y<z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

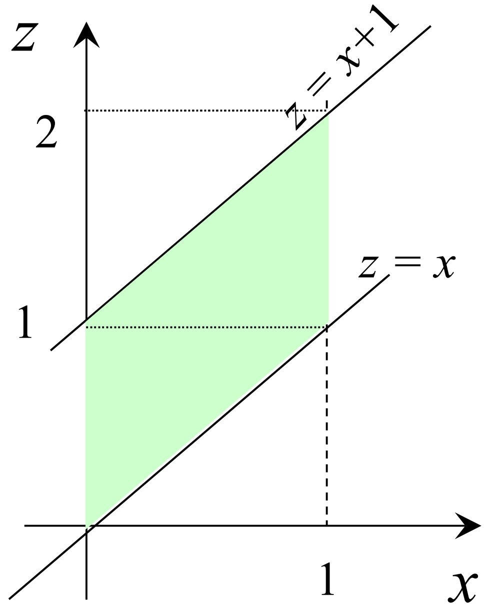
$$=\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

因此Y的密度函数为

$$q(z)=\int_0^{\infty} yf(yz,y)\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f(yz,y)\mathrm{d}y.$$

【例9】 已知(X,Y)的联合密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

设 $Z=X+Y$, 试求 $f_Z(z)$.

解: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

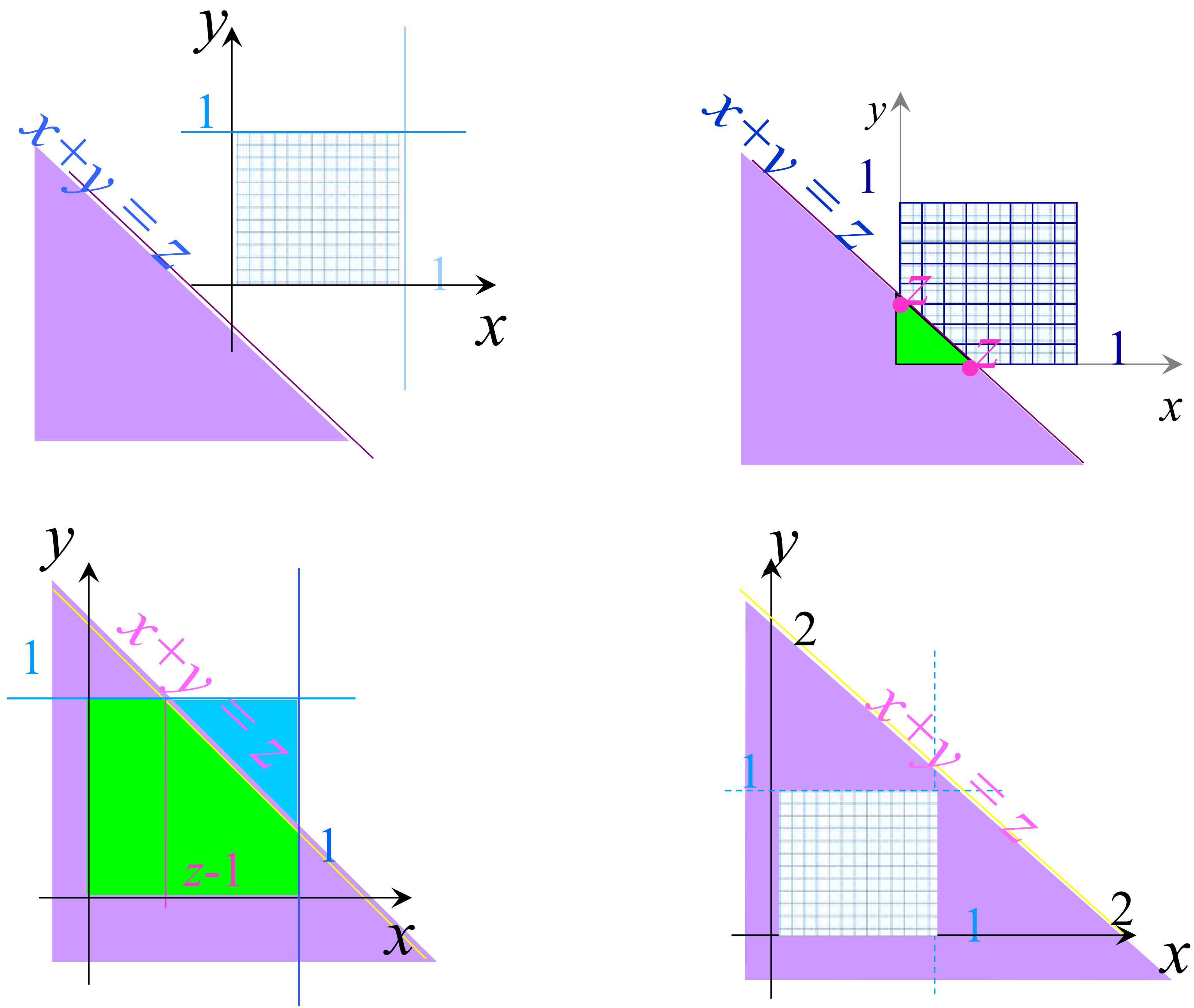
$$=\begin{cases}1, & 0<x<1, x<z<1+x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & z<0\text{或}z>2, \\ \int_0^z 1\mathrm{d}x, & 0<z<1, \\ \int_{z-1}^1 1\mathrm{d}x, & 1<z<2, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & z<0\text{或}z>2 \\ z, & 0<z<1 \\ 2-z, & 1<z<2 \end{cases}.$$

解法二　从分布函数出发

$$F_Z(z)=P(X+Y<z)=\iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



y
x
1
1
x+y = z
y
x
1
1
x+y = z
z
z
y
x
1
1
x+y = z
z-1
y
x
2
2
1
1
x+y = z

当$z<0$时，

$$F(z)=0, \qquad f_Z(z)=0.$$

当 $0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} 1\mathrm{d}y=\int_0^z (z-x)\mathrm{d}x=z^2/2,$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=z.$$

当$1\le z<2$时，

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{z-x} 1\mathrm{d}y$$

$$=z-1+\int_{z-1}^1 (z-x)\mathrm{d}x=2z-z^2/2-1.$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2-z.$$

当 $z \geq 2$ 时，

$$F_Z(z) = 1, \qquad f_Z(z) = 0.$$

所以 $$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z > 2, \\ z, & 0 < z < 1, \\ 2 - z, & 1 < z < 2. \end{cases}$$

练习题

已知(X,Y)的联合密度函数为

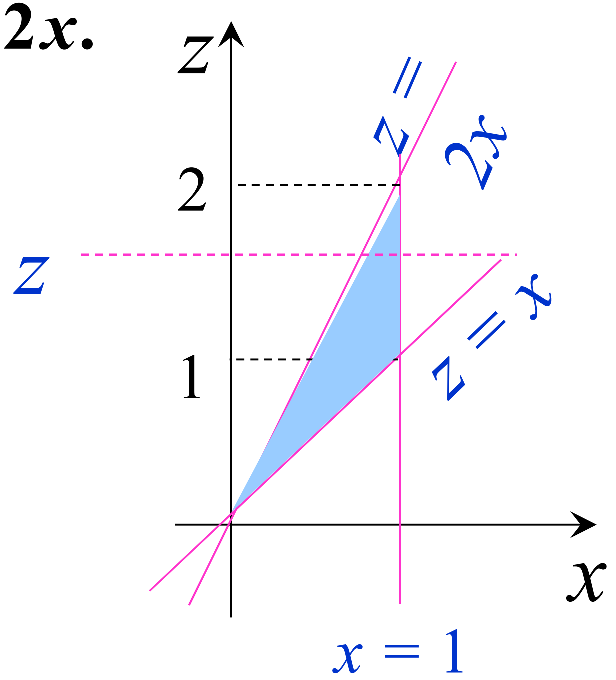
$$f(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1,\ 0 < y < x. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 $Z = X + Y$. 试求 $f_Z(z)$.

练习题解答

公式法 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, x<z<2x.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



当 $0\le z<1$时,

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{z} 3x\mathrm{d}x=\frac{9}{8}z^2.$$

当 $1\le z<2$时,

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{1} 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4}),$$

其他 $f_Z(z)=0.$

【例10】设两个独立的随机变量X与Y都服从标准正态分布，求$Z=X+Y$的概率密度.

解：由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$, 得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{z}{2})^2}\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即

$$Z \sim N(0,2).$$

更一般的情况

设X,Y相互独立, 且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

【例11】 设$X\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$，$Y\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$. 且$X,Y$相互独立，$X,Y$的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}(\beta y)^{\alpha_2-1}e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\alpha_1>0,\beta>0$，$\alpha_2>0,\beta>0$.

试证明：$X+Y\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

证明： $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

当$z<0$时， 易知 $f_Z(z)=0.$

当$z>0$时， $Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}[\beta(z-x)]^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\mathrm{e}^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=zt}{=\!=}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{x=zt}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{贝塔函数的性质}}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\beta z}.$$

【例】 设X,Y分别表示两只不同型号的灯泡的寿命,X,Y相互独立,它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他. \end{cases} \quad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度函数.

解：(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

当$z>0$时,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\,dy=\int_0^{+\infty}2ye^{-yz}e^{-2y}\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{(2+z)^2},$$

当$z \le 0$时， $f_Z(z) = 0.$

故 $$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

3. $M = \max(X, Y)$及$N = \min(X, Y)$的分布

设X, Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

$$= \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{(2+z)^2},$$

当$z \le 0$时， $f_Z(z) = 0.$

故 $$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

3. $M = \max(X, Y)$及$N = \min(X, Y)$的分布

设X, Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

则有

$$F_{\max}(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} = F(z,\ z).$$

$$= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z) = P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

再若X,Y是连续型随机变量，密度函数分别为 $f_X(x), f_Y(y)$. 则

$$f_{\max}(z) = f_X(z)F_Y(z) + f_Y(z)F_X(z),$$

$$f_{\min}(z) = f_X(z)[1 - F_Y(z)] + f_Y(z)[1 - F_X(z)].$$

推　　广

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_{X_i}(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$.则

$$M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

$$N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且具有相同的分布函数$F(x)$. 则

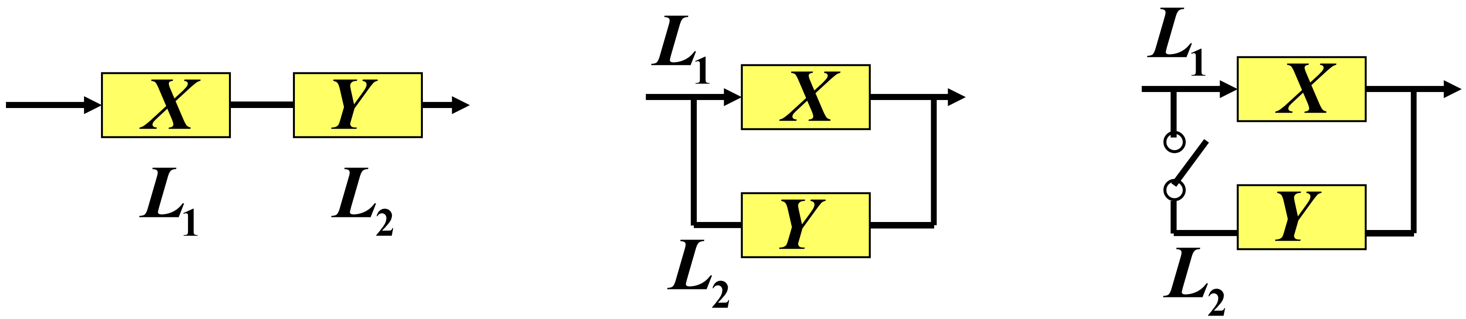
$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\quad F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

再若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是连续型，密度函数为$f(x)$，则

$$f_{\max}(z) = nf(z)[F(z)]^{n-1},$$

$$f_{\min}(z) = nf(z)[1 - F(z)]^{n-1}.$$

例6：设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联接而成，连接的方式分别为 (i)串联，(ii)并联，(iii)备用(当系统L_1损坏时, 系统L_2开始工作). 如图所示.



设L_1, L_2的寿命分别为X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解: (i)串联情况 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$f_Y(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

得

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(ii) 并联情况 $Z = \max(X, Y)$.

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha z})(1 - \mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

五　随机向量的变换

若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的密度函数为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求$Y_1=g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\ldots,\ Y_m=g_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布．此时有

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_m)=P\left\{Y_1<y_1,Y_2<y_2,\cdots,Y_m<y_m\right\}$$
$$=\underset{g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)<y_i}{\int\cdots\int} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

上述积分一般不容易计算.本节只讨论$m=n$的情形.（$m<n$时，可转化为 $m=n$，当$m>n$时，一般情况下，方程组 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_i$ 无解）.

如果$m=n$，而且$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$有一一对应的关系．则有

定理3.3.2 如果对于$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的每一组可能的取值, 方程组

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = g_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

存在唯一的解

$$\begin{cases} x_1 = h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = h_n(y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{cases}$$

其中每个$h_j(y_1, y_2, \cdots, y_n)$都有一阶连续偏导数, 那么随机向量$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是连续的，具有密度函数

$$q(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases} p(h_1, \cdots, h_n)|J|, & \text{当}(y_1, y_2, \cdots, y_n)\text{属于值域时}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中J是坐标变换的雅克比行列式.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

【例12】设随机向量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，而

$$X_1 = aX + bY, \quad Y_1 = cX + dY.$$

这里$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$

试求(X_1,Y_1)的密度函数$q(x_1,y_1)$.

解：解方程组 $\begin{cases} x_1 = g_1(x,y) = ax + by \\ y_1 = g_2(x,y) = cx + dy \end{cases}$

得 $\begin{cases} x = \dfrac{d}{\Delta}x_1 - \dfrac{b}{\Delta}y_1 \\ y = -\dfrac{c}{\Delta}x_1 + \dfrac{a}{\Delta}y_1 \end{cases}$， $J = \begin{vmatrix} \dfrac{d}{\Delta} & -\dfrac{b}{\Delta} \\ -\dfrac{c}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{ad - bc}.$

因而

$$q(y_1,y_2)=\frac{p(\frac{d}{\Delta}y_1-\frac{b}{\Delta}y_2,-\frac{c}{\Delta}y_1+\frac{a}{\Delta}y_2)}{|ad-bc|}.$$

【例13】若$X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X，Y相互独立，试求$\xi=X+Y$与$\eta=\frac{X}{Y}\cdot\frac{n}{m}$的密度函数$q(u,v)$.

【例14】　$m < n$的情况，补充变量变为$m = n$的情况.（书本P172）

六　随机向量函数的独立性

定理3.3.3　若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的随机变量，则$f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$也是相互独立的，这里$f_1$，$f_2, \cdots, f_n$是任意的一元博雷尔函数.

证明　对任意的一维博雷尔集$A_1, A_2, \cdots, A_n$有

$$P\left\{f_1(X_1) \in A_1, f_2(X_2) \in A_2, \cdots, f_n(X_n) \in A_n\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1), X_2 \in f_2^{-1}(A_2), \cdots, X_n \in f_1^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1)\right\} P\left\{X_2 \in f_2^{-1}(A_2)\right\} \cdots P\left\{X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{f_1(X_1) \in A_1\right\} P\left\{f_2(X_2) \in A_2\right\} \cdots P\left\{f_n(X_n) \in A_n\right\}.$$

推广　若随机向量$X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$与随机向量$Y = (X_{k+1}, \cdots, X_n)$相互独立．则 $f(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 与 $g(X_{k+1}, \cdots, X_n)$相互独立.（多个向量的情况类似）.

特别地，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是n个相互独立的随机变量，则$f(X_1,X_2,\cdots,X_k)$与$g(X_{k+1},\cdots,X_n)$相互独立.（只要它们的自变量没有重合的即可．f,g,h的独立类似）.

下面举例说明X_1,X_2独立或不独立时，则 $f(X_1,X_2)$与$g(X_1,X_2)$可能相互独立也可能不独立.

【例14】在直角坐标平面上随机选取一点，分别以随机变量X与Y表示其横坐标和纵坐标，设X与Y相互独立，都服从$N(0,1)$，试求极坐标(ρ,θ)的分布.

解：易知$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases}$是$(0,+\infty)\times\left[0,2\pi\right)$与$R^2$(原点除外)之间的一一对应关系，变换的雅克比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{vmatrix}=r$$

由于(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$$

所以(ρ,θ)的密度为

$$q(r,t)=\frac{r}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2}),\quad r>0,\quad 0\le t<2\pi.$$

ρ与θ相互独立． $\rho \sim r\exp(-\frac{r^2}{2})$, $\theta \sim U\left[0,2\pi\right)$.

【例15】若(X,Y)服从二元正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

令

$$X_1=X\cos\alpha+Y\sin\alpha$$

$$Y_1=-X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

这里$0\le\alpha\le 2\pi$，试求的密度函数$q(x_1,y_1)$.

解　直接利用例8的结果.　其中$J=1$,

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\quad y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

因此

$$q(x_1,y_1) = p(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[Ay_1^2 - 2By_1y_2 + Cy_2^2\right]\right\}$$

其中

$$A = \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2^2}$$

$$B = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1{}^2} - \rho\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_2^2}$$

$$C = \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1{}^2} + 2\rho\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^2}$$

由密度函数表达式知，二元正态分布经坐标旋转而得的随机向量仍服从二元正态分布，进一步，若选取α使得

$$\mathbf{tg}2\alpha=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}.$$

则 $B=0$，因此X_1与Y_1相互独立，这说明二元正态分布经过适当的正交变换(坐标旋转)可化为两个独立的正态分布（下一章节还将深入讨论多元正态分布).