§2.5 区间估计

一、区间估计的概念

点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$，而区间估计则要由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ的可靠程度. 假设$X_1,\cdots,X_n$是总体X的样本, 区间估计的方法是给出两个统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$, $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$, 使区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$以一定的可靠程度覆盖$\theta$.

定义2.5.1 设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，对给定

的值α $(0<\alpha<1)$，如果有两个统计量

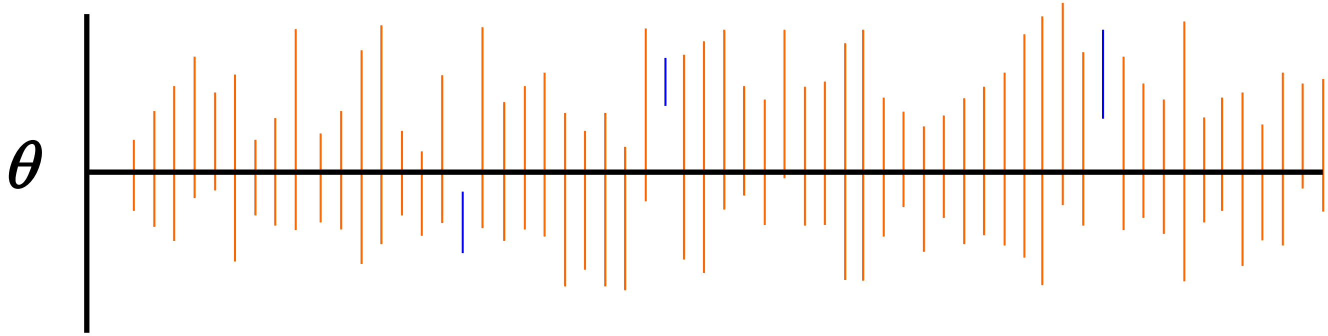
$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n),\quad \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n),$$

使得

$$P\{\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2\}=1-\alpha,\ \forall\theta\in\Theta. \qquad (6.2.1)$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$是$\theta$的双侧置信区间;称$1-\alpha$为置信度;$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$称为双侧置信下限和双侧置信上限.

若反复抽样多次(每次的样本容量都为n)，每次抽样确定一个区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$，这些区间或者包含$\theta$的真值，或者不包含$\theta$的真值.(见下图).



根据伯努里大数定律，在这些区间中，包含θ真值的约占$\mathbf{100(1-\alpha)\%}$. 如反复抽样1000次, 当$\alpha = \mathbf{0.05}$, 即置信水平为**95%**时, 1000个区间中不包含θ的真值的约为50个； 当$\alpha = \mathbf{0.01}$, 即置信水平为**99%**时, 1000个区间中不包含θ的真值的约为10个.

显然置信区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$可用来表示估计的"精度", 区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的长度越小，估计的精度越高.

一般数来, 置信区间变大, 则置信度会提高, 即降低估计的精度会提高置信度. 反之, 提高精度将降低置信度. 处理的一般方法是：先保证置信度达到指定的要求，再使得精度尽可能的高.

上述置信区间中置信限都是双侧的, 但对于有些实际问题，人们关心的只是参数在一个方向的界限.

例如：对于设备、元件的使用寿命来说, 平均寿命过长没什么问题，过短就有问题了.

这时，可将置信上限取为$+\infty$，而只着眼于置信下限，这样求得的置信区间叫单侧置信区间.

定义2.5.2　若将定义6.2.1中的(6.2.1)式改为

$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta\} = 1-\alpha\ ,\ \forall\theta \in \Theta.$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_1, +\infty)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 称$\hat{\theta}_1$为$\theta$的单侧置信下限.

若将(6.2.1)式改为

$$P\{\theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha\ ,\ \forall\theta \in \Theta.$$

则称随机区间$(-\infty, \hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间. 称$\hat{\theta}_2$为$\theta$的单侧置信上限.

二、区间估计的求解

我们一般从参数的一个具有良好性质的点估计出发，将其拓展为所求的置信区间.

例1　设$X_1,\cdots,X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的一组样本，假定σ^2已知，试求参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解：　$\bar{X}$是μ的最小方差无偏估计，考虑将随机区间$[\bar{X}-c,\bar{X}+d]$作为μ的置信区间. 即要求c,d满足

$$P\{\bar{X}-c \le \mu \le \bar{X}+d\} = 1-\alpha.$$

且区间长度$c+d$尽可能小.

由于$\bar{X}$是随机变量，将事件 $\{\bar{X}-c\le\mu\le\bar{X}+d\}$

转化成关于$\bar{X}$的事件

$$\{\bar{X}-c\le\mu\le\bar{X}+d\}=\{-d\le\bar{X}-\mu\le c\}$$

$$=\{-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

根据定理5.3.1知

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

所以

$$P\{-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\le U\le\frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\}=1-\alpha.$$

满足上式的参数c,d不唯一，为了使得$c+d$最小，这等价于$\dfrac{c+d}{\sigma/\sqrt{n}}$达到最小. 根据标准正态分布的密度函数图象，取$\dfrac{c}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{d}{\sigma/\sqrt{n}}=u_{\alpha/2}$时，即

$$c=d=u_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

时，$c+d$达到最小. 从而所求的置信区间为

$$[\bar{X}-u_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \bar{X}+u_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}].$$

根据求解过程，给出求解置信区间的一般步骤

（1）找出一个未知参数θ的一个良好点估计.

例1中，我们选取$\bar{X}$.

（2）构造函数$H(\hat{\theta},\theta)$，使得$H(\hat{\theta},\theta)$的分布是完全已知的，而且与θ无关，通常称这种函数为枢轴变量.

例1中，我们选取 $H(\bar{X},\mu)=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

（3）适当选取两个常数c_1与c_2，使得对给定的α，有

$$P\{\, c_1 \le H(\hat{\theta},\theta) \le c_2\} = 1-\alpha.$$

例1中，我们选取 $c_1 = -u_{\alpha/2}$， $c_2 = u_{\alpha/2}$.

（4）将不等式 $c_1 \le H(\hat{\theta},\theta) \le c_2$ 等价变形为

$$\{\, \hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}$$

即有 $$P\{\, \hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$$

故$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$即为参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

例1中，我们得到的区间为

$$[\bar{X} - u_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \bar{X} + u_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}].$$

以上求解区间估计的方法称为枢轴变量法. 这种方法的关键是第(2)和(3). 这里要求枢轴变量的分布不能含有未知参数. 例如：$N(0,1)$分布, $\chi^2(n)$ t分布,(n)分布，$F(m,n)$分布.

关于常数c_1与c_2的选取，通常用以下方法：

(1)当$H(\hat{\theta},\theta)$为对称分布，如$N(0,1),t(n)$时, 可选取 c 使得

$$P\{-c \le H \le c\} = P\{|H| \le c\} = 1-\alpha.$$

其中c为H的上$\alpha/2$分位数, 此时 $c_1 = -c$， $c_2 = c$.

(2) 当$H(\hat{\theta},\theta)$为非对称分布，如$\chi^2(n), F(m,n)$分布时，可选取 c_1，c_2 使得

$$P\{H < c_1\} = P\{H > c_2\} = \alpha/2.$$

其中c_1为H的上$(1-\alpha/2)$分位数，c_2为H的上$\alpha/2$分位数.

下面利用枢轴变量法求解几类总体参数的区间估计.

- 正态总体
  - 一个正态总体
  - 二个正态总体
- 非正态总体
  - 比率p
  - 大样本总体

一、单个正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的情形

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本,$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和方差,置信度为 $1-\alpha$.

1. 均值μ 的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ 的无偏估计, 由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

有$P\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$

即$P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$

置信区间为： $\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right].$

(2) σ^2未知时

$\bar{X}$是μ 的无偏估计，由 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

有$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$

置信区间为： $\left[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right].$

思 考 题:

一、求 (1)σ^2已知， (2)σ^2未知， 两种情况下均值μ 的置信度为$1-\alpha$的置信下限.

给出单侧置信区间.

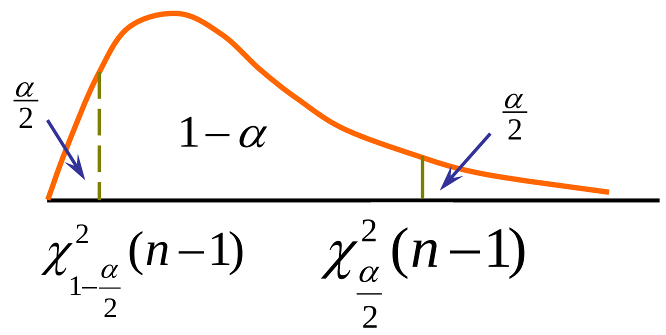
$$P\{\hat{\theta}_1 \le \theta\} = 1-\alpha$$

二、求 (1)σ^2已知， (2)σ^2未知， 两种情况下均值μ 的置信度为$1-\alpha$的置信上限.

给出单侧置信区间.

$$P\{\theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$$

2. 方差σ^2的置信区间



设μ未知

由 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

有$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

即$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha.$

置信区间为: $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right].$

思考题

方差σ^2的置信度$1-\alpha$的置信上限?

练习题：

设$X_1,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一组样本，参数μ,σ^2未知。试问$a,b(0<a<b)$满足什么条件，才能使σ^2的95%置信度区间$\left[\frac{(n-1)S^2}{b},\frac{(n-1)S^2}{a}\right]$长度最短.

附注：$\chi^2(n)$其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x/2}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

例2　设某种植物的高度$X(cm)$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 随机选取36棵,其平均高度为15cm. 就以下两种情形,求μ的95%双侧置信区间.

$$(1)\sigma^2=16; \qquad (2)\sigma^2\text{未知}, \ S^2=16.$$

解: (1) $n=36, \bar{X}=15, \sigma=4$

由$P\left\{\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95.$

得
$$\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=13.693,$$

$$\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=16.307.$$

μ的置信区间为$[13.693,16.307]$.

$(2)n=36, \bar{X}=15, S^2=16$

由 $P\left\{\bar{X}-t_{0.025}\dfrac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+t_{0.025}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-0.05.$

查表得：$t_{0.025}(35)=2.0301$

又 $\bar{X}-t_{0.025}\dfrac{S}{\sqrt{n}}=13.647,\ \bar{X}+t_{0.025}\dfrac{S}{\sqrt{n}}=16.353.$

μ 的置信区间为$[13.647, 16.353]$.

比较(1) (2)两种情形下μ的置信区间

区间短

σ^2已知,$\sigma^2=16$,置信区间:$[13.693, 16.307]$.

区间长

σ^2未知,$S^2=16$,置信区间:$[13.647, 16.353]$.

? 求置信度为99%时(1)(2)两种情况下μ的置信区间

例3 一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果, 这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外, 另一个重要特征是单个重量差异不大. 为了评估新苹果, 她随机挑选了25个测试重量(单位：克)，其样本方差为 $S^2 = 4.25$. 试求 σ^2 的置信度为95%的置信区间.

解: 置信度为95%时

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}(n-1)}\right\} = 1 - 0.05.$$

查表得: $\chi^2_{0.025}(24) = 39.4$, $\chi^2_{0.975}(24) = 12.4$.

代入数据得 σ^2 的置信区间为 $[2.59, 8.23]$.

二、两个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情形

设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$是来自$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是来自$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，$\bar{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\bar{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，$S_1^2$和$S_2^2$分别为第一，二个总体的样本方差，置信度为$1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2)$

有
$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1).$$

置信区间为 $\left[(\bar{X}-\bar{Y}) \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\right].$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2, \sigma^2$未知

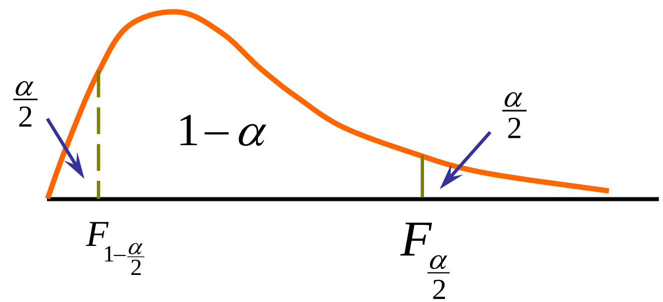
由于 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$

置信区间为

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}.$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$**的置信区间**



设μ_1,μ_2未知

由 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

有 $$P\left\{F_{1-\alpha/2}<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即 $$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}}\right\}=1-\alpha$$

置信区间为: $$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}}\right]$$

例4 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径(毫米)如下：

甲机床	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	
乙机床	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y，且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

(1) $\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$, 求$\mu_1 - \mu_2$置信度为0.90的置信区间；

(2) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(3) 若μ_1,μ_2未知，求σ_1^2/σ_2^2的置信度为0.90的置信区间.

解： $n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575.$

(1) 当$\sigma_1=0.18,\sigma_2=0.24$时,

$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}\right]$$

查表得：$u_{0.05}=1.645$，从而所求区间为

$$[-0.018,0.318].$$

(2) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知，$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

$$t_{0.05}(15)=1.7531, S_w=0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.486$$

从而所求区间为$[-0.044, 0.344]$.

(3) 当μ_1,μ_2未知时，σ_1^2/σ_2^2的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right]$$

由$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$\left[0.227, 2.965\right]$.

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限(置信度$1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	枢轴变量及其分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha}$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha}$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

三、非正态总体均值的区间估计

若总体X的分布未知，但样本容量很大，由中心极限定理，可近似地视 $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$

若σ^2已知，则μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间可取为

$$\left[\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

若σ^2未知，则μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间可取为

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

例4 设X服从参数为p的$0-1$分布, 样本为$X_1, X_2, \cdots, X_n (n>50)$. 求$p$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$,

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

$$P\left(-u_{\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \le u_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{n(\bar{X}-p)^2}{p(1-p)} \le u_{\alpha/2}^2$$

$$(n+u_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\bar{X}+u_{\alpha/2}^2)p + n\bar{X}^2 \le 0$$

令 $a=(n+u_{\alpha/2}^2)$，$b=-(2n\bar{X}+u_{\alpha/2}^2)$，$c=n\bar{X}^2$

解方程得

$$p_L=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad p_U=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以参数p的置信区间为$[p_L,p_U]$.

例如自一大批产品中抽取100个样品，其中有60个一级品，求这批产品的一级品率p的置信度为0.95的置信区间.

$$n=100,\ \bar{X}=0.6,\ \alpha=0.05,\ u_{0.025}=1.96.$$

$$a=100+1.96^2=103.84$$

$$b=-(2\times100\times0.6+1.96^2)=-123.84$$

p的置信区间为 $[p_L,p_U]=[0.50,0.69]$.