§5.3　抽 样 分 布

在实际应用中，当我们从总体中抽取一个样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$后，并不能直接应用它去对进行统计推断，这是因为样本虽然是从总体中获取的代表，含有总体性质的信息，但仍较分散。为了进行统计推断，需要把分散的信息集中起来，针对不同的研究目的，构造不同的样本函数，这种函数在统计学中称为统计量.

定义1　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是从总体X中抽取的容量为n的一个样本，如果由此样本构造一个函数$T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$不依赖于任何未知参数，则称函数

$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为一个统计量. 当获得样本的一组具体观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$后，称$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为该统计统计量的一个观测值.

例1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是从某总体X中抽取的一个样本，判断下列各量是否为统计量.

(1) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, (2) $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,

(3) $\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2$, (4) $\frac{X_i-E(X)}{D(X)}$.

解：(1)(2)是统计量， (3)(4)不是统计量.
因为(3)(4)依赖总体分布的未知参数.

一　常用的统计量

对于一维总体*X*，常用的统计量有

(1)样本均值　$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;

(2)样本方差　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$;

(3)样本标准差　$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$;

(4)样本*k*阶矩　$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$;

(5)样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$;

此外，有顺序统计量、样本峰度和样本偏度等统计量. 对于二维总体(X,Y)，常用的统计量有

(6)样本协方差

$$S_{XY}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y});$$

(7)样本相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}};$$

当样本取得观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$后，代入即可得到这些统计量的观测值.

寻找抽样分布一般有两种方法：

(1)求出分布函数的精确表达式；

(2)求其渐近分布.

只有在少数情况下，才能得到统计量的精确分布.

下面介绍数理统计中的三大分布.

二　数理统计的三大分布

(一) χ^2分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且都服从$N(0,1)$，则称随机变量

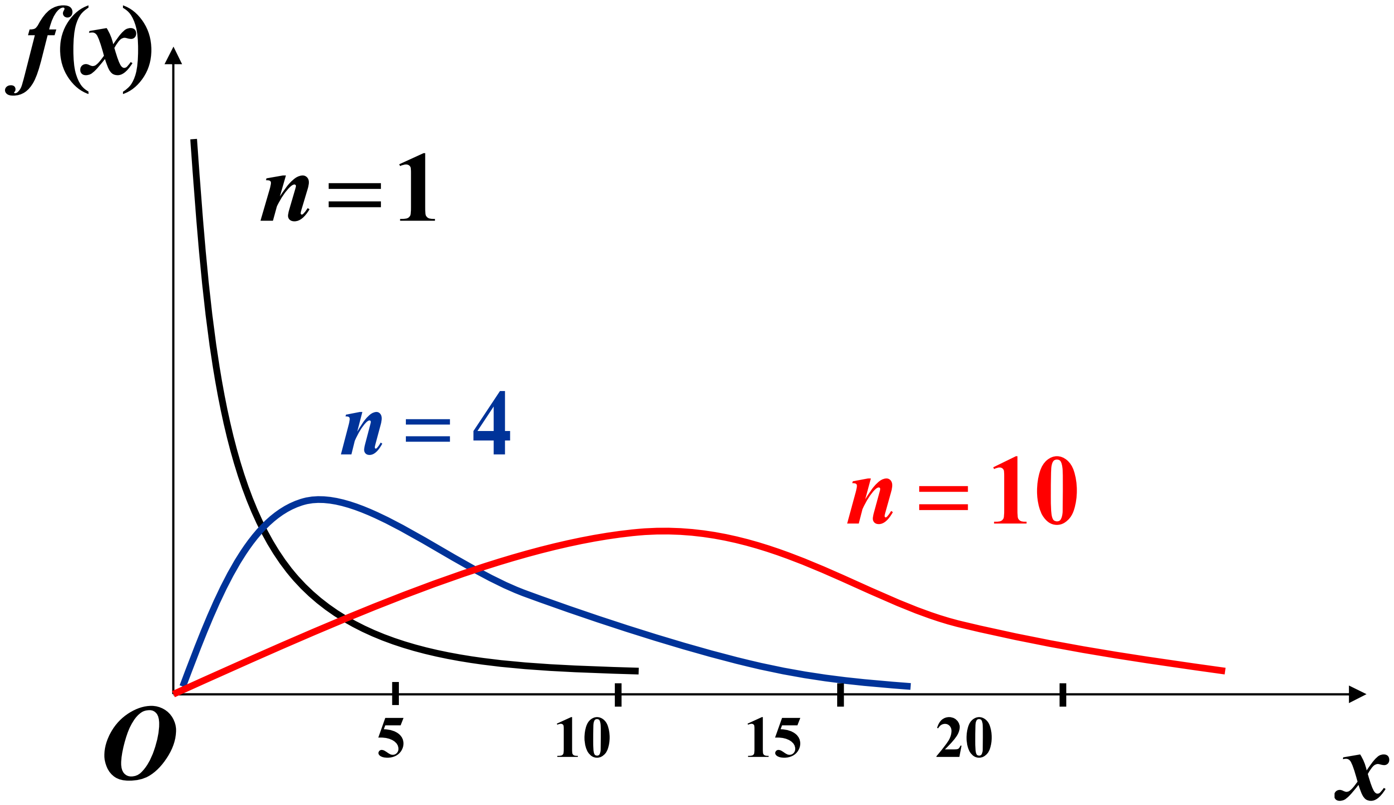
$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布称为自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2(n)$.

其密度函数为

$$f_{\chi^2}(x,n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中　$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \qquad r > 0.$



χ^2分布的概率密度函数

χ^2分布的特点：

1. 分布的变量值始终为正；

2. 分布的形状取决于自由度n的大小，通常为不对称的正偏分布，但随着n的增大逐渐趋于对称；

χ^2分布的性质：

性质1 $E(\chi^2(n)) = n$，$D(\chi^2(n)) = 2n$;

证明： $X_i \sim N(0,1)$, $EX_i^2 = DX_i = 1$,

$D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = 3 - 1 = 2$, 故

$$E(\chi^2) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n.$$

$$D(\chi^2) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$$

性质2 χ^2分布的**可加性**：

设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$,并且相互独立，则

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$

(此性质可以推广到多个随机变量的情形)

设$\chi_i^2 \sim \chi^2(n_i)$，并且$\chi_i^2 (i = 1, \cdots, m)$相互独立, 则

$$\sum_{i=1}^{m} \chi_i^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m).$$

证明：利用卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

即可证明. 亦可利用特征函数证明.

性质3　设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则对任意x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

证明　由假设$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，其中$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立且每个$X_i\sim N(0,1)$，因而$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$独立同分布，且

$$E(X_i^2)=1,\qquad D(X_i^2)=2.\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由中心极限定理得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}\le x\}=\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

即χ^2分布的极限分布是正态分布，当n很大时

$$\chi^2(n) \overset{\text{近似}}{\sim} N(n,2n).$$

(二) t分布

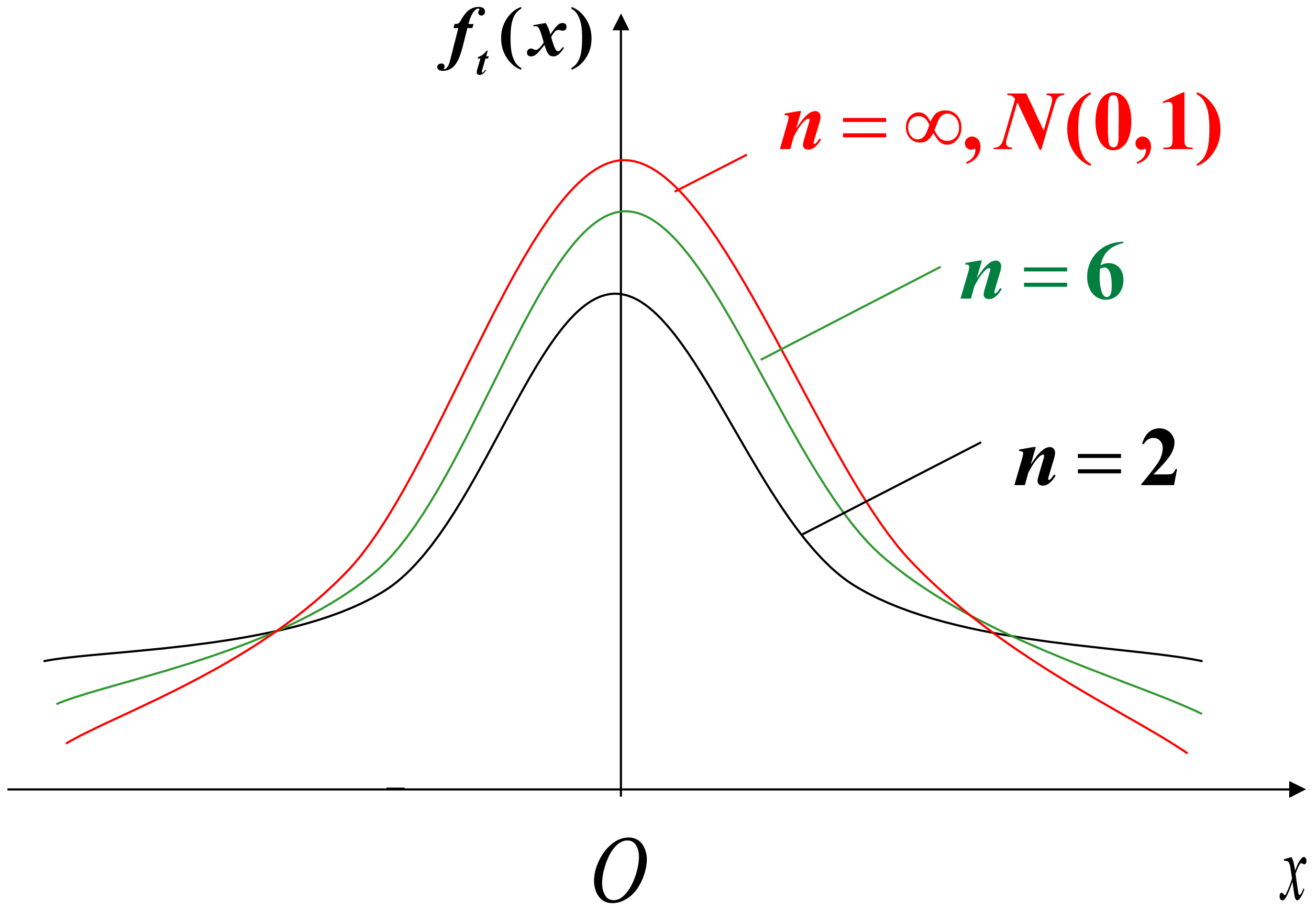
设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$，且X与Y独立，则随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

所服从的分布称为自由度为n的t分布，记为$t(n)$.

其密度函数为

$$f_t(x;n)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$



t分布的密度函数：　低峰、厚尾

t分布的性质：

1. 密度函数$f(x,n)$是偶函数，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x,n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x).$$

此说明：t分布的极限分布是标准正态分布.

2. $t(1)$是标准柯西分布，它的均值不存在，

当$n\geq 2$时，t分布的数学期望 $E(T)=0,$

当$n\geq 3$时，t分布的方差 $D(T)=\dfrac{n}{n-2}.$

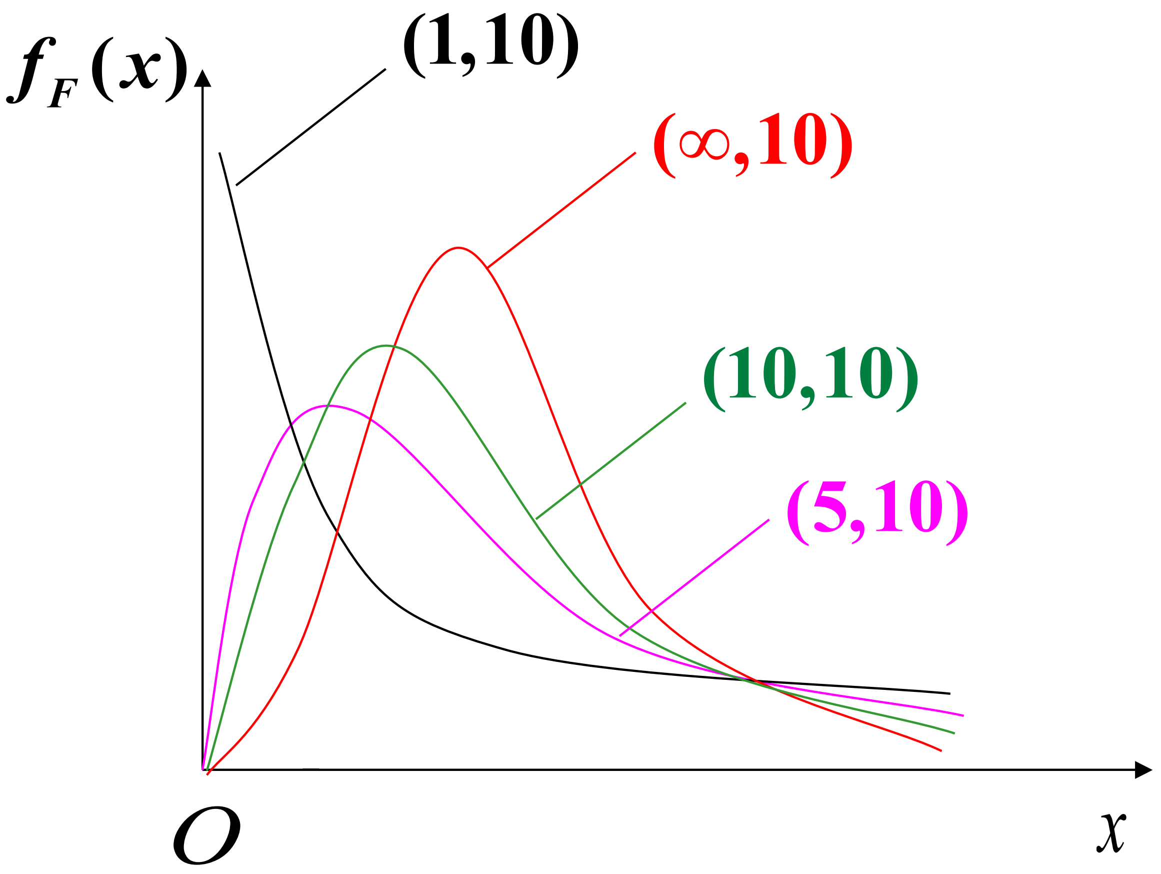
(三) F分布

设随机变量$X\sim\chi^2(m)$, $Y\sim\chi^2(n)$，且X与Y独立，则随机变量

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

的分布称为自由度为m与n的F分布, 记为$F\sim F(m,\ n)$, 其中m为分子自由度，n为分母自由度. 其密度函数为

$$f(x,m,n)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left[(m+n)/2\right]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



F分布概率密度函数

首先，求出$Z=X/Y$的密度函数，再求$F=nZ/m$的密度函数.

$$p_Z(z)=\int_0^{+\infty} y p_1(zy) p_2(y) dy$$

$$=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{\frac{m+n}{2}}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}(1+z)} dy$$

做变换令$u=y(1+z)/2$，　于是

$$p_Z(z)=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} u^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-u} du$$

$$=\frac{\Gamma\left[(m+n)/2\right]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}}, z>0.$$

求$F=nZ/m$的密度函数.

$$f_F(x)=f_Z\left(\frac{m}{n}x\right)\cdot\frac{m}{n}$$

$$=\frac{\Gamma\left[(m+n)/2\right]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{m}{n}$$

$$=\frac{\Gamma\left[(m+n)/2\right]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

这就是自由度为m与n的F分布的密度函数.

F分布的性质：

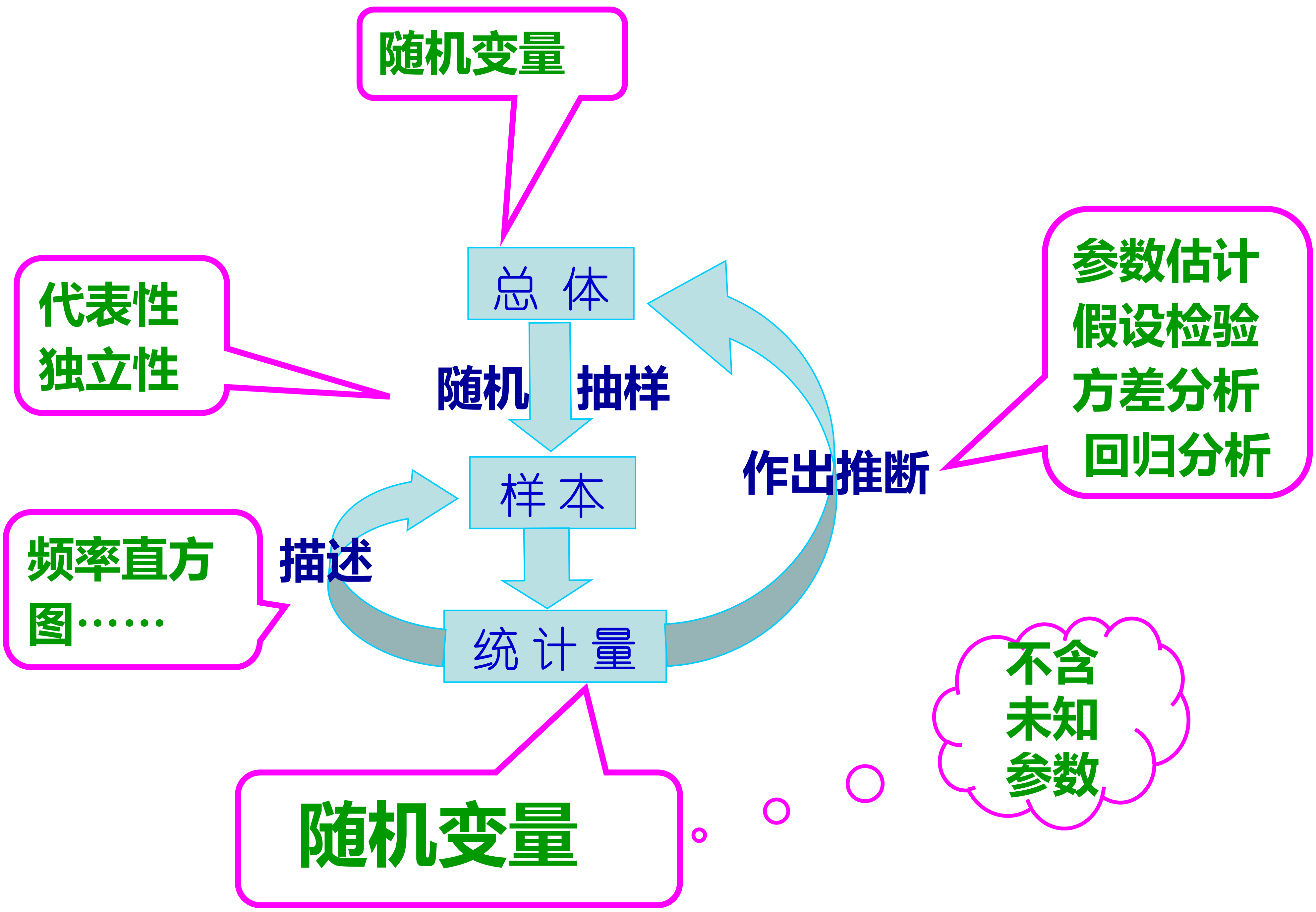
性质1　若$X \sim F(m,n)$，则$1/X \sim F(n,m)$;

性质2　若$X \sim t(n)$，则 $X^2 \sim F(1,n)$;

性质3　$E(F)=\dfrac{n}{n-2} \quad (n>2)$,

$$D(F)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad (n>4).$$

$F-$分布是为纪念英国著名统计学家费歇（R.A. Fisher,1890－1962）而命名的．它是数理统计的重要分布之一.


随机变量
代表性
独立性
总 体
随机
抽样
样 本
描述
作出推断
参数估计
假设检验
方差分析
回归分析
频率直方
图……
统 计 量
随机变量
不含
未知
参数

三　分位数(点)

定义　设X的分布函数为$F(x)$，　满足等式

$$P(X > x_\alpha) = 1 - F(x_\alpha) = \alpha,$$

的实数x_α，称为随机变量X的上α分位数．其中$0 < \alpha < 1.$

注：若$F(x)$不是严格递增的连续函数时，为保证x_α的存在性和唯一性，定义改为

$$x_\alpha = \inf\{x : 1 - F(x) \le \alpha\}.$$

标准正态分布，$\chi^2(n)$，$t(n)$，$F(m, n)$的上α分位数分别记为u_α，$\chi^2_\alpha(n)$，$t_\alpha(n)$，$F_\alpha(m, n)$如下图所示：

附表2-1

标准正态分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

1.645

附表2-2

标准正态分布表

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9853
2.2	0.9861	0.9864	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9698	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

1.96

附表4-1

χ^2分布表

n	$\alpha = 0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.7[illegible]	[illegible]	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.2[illegible]	[illegible]	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.6[illegible]	[illegible]	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.891
14	17.117	20.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267

17.535

附表4-2 χ^2分布表

n	α=0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
1	–	–	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	[illegible]	[illegible]	3.455
7	0.989	1.239	1.690	[illegible]	[illegible]	4.255
8	1.344	1.646	2.180	[illegible]	[illegible]	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912

3.247

附表3-1

t 分布表

n	α=0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	[illegible]	427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	[illegible]	980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	[illegible]	965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208

1.8125

附表3-2

t 分布表

n	α=0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.37[illegible]	[illegible]	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.36[illegible]	[illegible]	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.35[illegible]	[illegible]	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208

2.1315

附表5-1

F分布表

$\alpha = 0.025$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.50	4.82	4.65	4.53	[illegible]	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.59	3.89	3.84	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.23	4.20	[illegible]	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	[illegible]	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	[illegible]	[illegible]	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.32	2.25
18	5.95	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.20	2.13

4.90

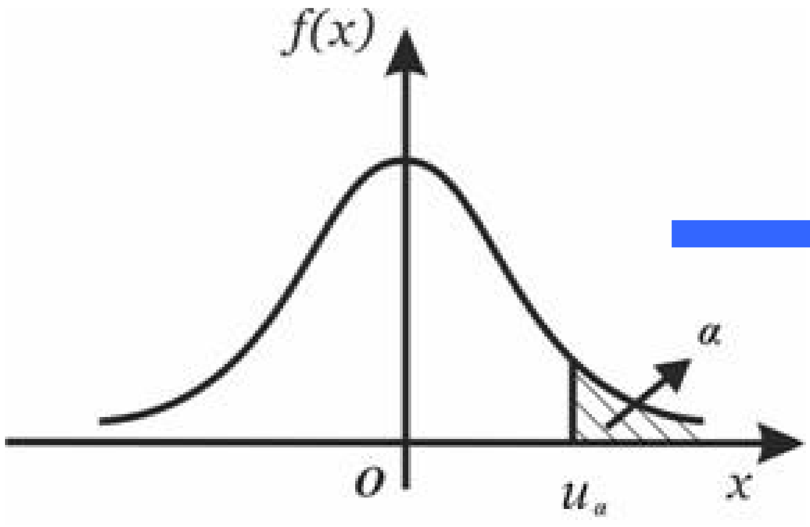
附表5-2

F分布表

$\alpha = 0.05$

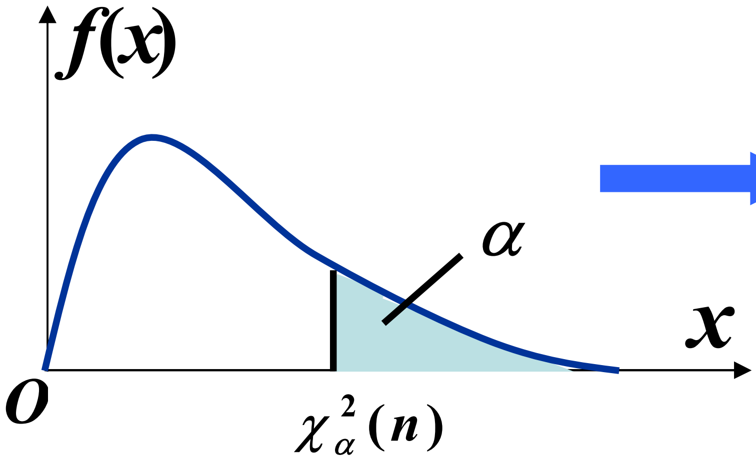
n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	24.05	241.9	245.9	248.0	249.1	250.1	151.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	2.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.12	4.26	3.81	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.51	5.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	5.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88

2.31



$$\left.\begin{aligned} u_{0.05} &= 1.645 \\ u_{0.025} &= 1.96 \\ u_{0.005} &= 2.575 \end{aligned}\right\} \boxed{常用数字}$$

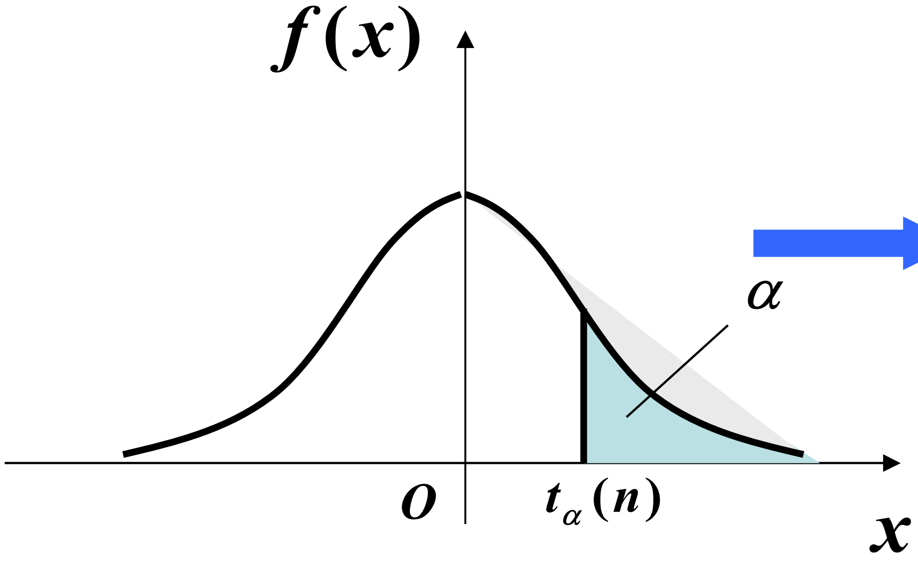
性质：$u_{1-\alpha} = -u_\alpha$



当$n<45$时，对某些特殊的α，可查表得到$\chi^2_\alpha(n)$.

性质：当$n \geq 45$时，$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$.

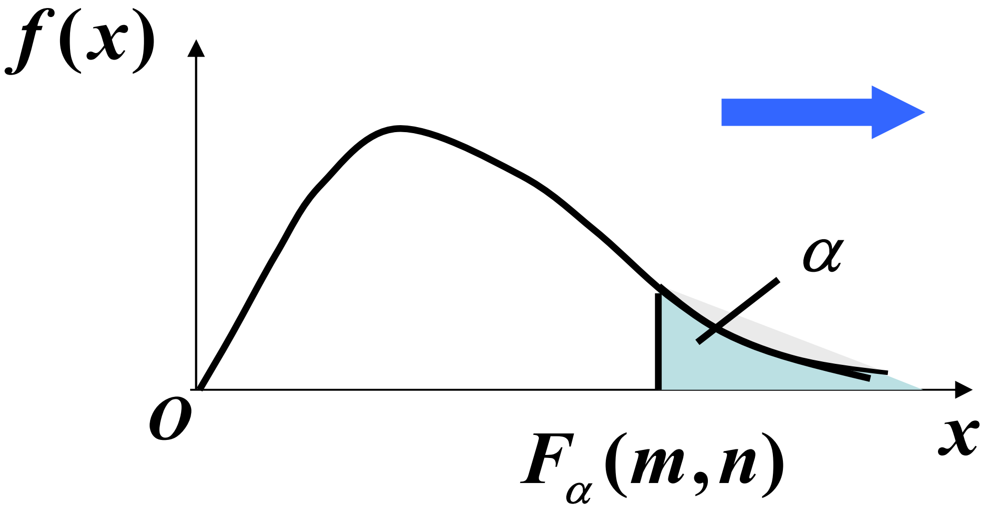
费歇证明：$\sqrt{2\chi^2(n)} \xrightarrow[n\geq 45]{近似} N(\sqrt{2n-1}, 1)$.



$n < 45$时， 查表得$t_\alpha(n)$.

$n > 45$时，$t_\alpha(n) \approx u_\alpha$.

性质：$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$



对某些n,α. 查表得$F_\alpha(m,n)$.

性质：$F_\alpha(m,n) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$.

用来求解α较大时的分位数.

证明：$F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

设$F\sim F(m,n)$，则$1/F\sim F(n,m)$

$$1-\alpha=P\{\frac{1}{F}>F_{1-\alpha}(n,m)\}=P\{F<\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\}$$

$$=1-P\{F\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\}$$

所以 $P\{F>\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\}=P\{F\geq\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\}=\alpha$

即 $F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

例： $F_{0.95}(12,9)=\dfrac{1}{F_{0.05}(9,12)}=\dfrac{1}{2.80}=0.357$

四　正态总体的抽样分布定理

正态总体是最常见的总体，本节介绍的几个抽样分布定理均对正态总体而言. 这里我们主要掌握定理的结论，对定理的证明不作要求.

定理1　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一组样本，则有下列结论:

$$(1)\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{或} U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1);$$

$$(2)\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3)\bar{X} \text{与} S^2 \text{独立，且} \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

证明： 记 $X=(X_1,\cdots,X_n)^T$，则有

$$E(X)=(\mu,\cdots,\mu)^T,\quad D(X)=\sigma^2 I$$

取一n阶正交矩阵A，其第1行的每个元素均为$1/\sqrt{n}$. 如

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & -\frac{2}{\sqrt{3\cdot 2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

令$Y=AX$，则由多维正态分布的性质知Y仍服从n维正态分布，其均值和方差分别为

$$EY=A\cdot EX=(\sqrt{n}\mu,0,\cdots,0)^T,$$

$$D(Y)=A\cdot D(X)\cdot A^T=A\cdot\sigma^2 I\cdot A^T=\sigma^2 AA^T=\sigma^2 I.$$

由此$Y=(Y_1,\cdots,Y_n)^T$的各分量相互独立，且都服从正态分布

$$Y_1\sim N(\sqrt{n}\mu,\sigma^2),\quad Y_2,\cdots,Y_n\sim N(0,\sigma^2)$$

由于$\bar{X}=Y_1\big/\sqrt{n}$，故$\bar{X}$与$Y_2,\cdots,Y_n$相互独立, 且

$$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}).$$

标准化得

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = Y^T Y = X^T A^T A X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

所以

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sqrt{n}\bar{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 .$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1).$$

由于$\bar{X}$与$Y_2, \cdots, Y_n$相互独立. 且

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1),$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1).$$

因而$\bar{X}$与S^2相互独立，再根据t分布的定义得

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} = \frac{\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ n-1}} \sim t(n-1).$$

定理2 设$X_1,X_2,\cdots,X_m$是来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$的一组样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是来自正态总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$的一组样本，且两组样本相互独立. 记$\bar{X},\bar{Y}$分别是两组的样本均值，$S_X^2$与$S_Y^2$分别是样本方差，则

(1) $$F=\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}=\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1),$$

(2) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1),$$

(3) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{1/m+1/n}} \sim t(m+n-2).$$

其中 $S_W^2=\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}$.

(4) 当$m=n$时

$$\frac{\sqrt{n}[(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)]}{S} \sim t(n-1).$$

其中

$$S^2=S_X^2+S_Y^2-2S_{XY}^2.$$

证明： (1) 由两样本独立可知

S_X^2与S_Y^2相互独立，且

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1), \qquad \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1).$$

由F的定义知

$$F = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

(2) 由$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{m})$，$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n})$，$\bar{X}$与$\bar{Y}$独立

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} = N(\mu_1 - \mu_2, (\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n))$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0,1).$$

(3) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，由(2)得

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/m+1/n}}\sim N(0,1).$$

再由定理1知：

$$\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1),\quad \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\text{独立}$$

$$\xrightarrow{\chi^2\text{分布可加性}}$$

$$\frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2}=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$$

又$\bar{X}-\bar{Y}$与S_w^2相互独立，根据t分布的定义即得所证.

(4) 当$m=n$时 令

$$Z_i = X_i - Y_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

则 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$独立同分布,

$$Z_i \sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2),$$

根据定理1得

$$\frac{\sqrt{n}\left[\bar{Z}-(\mu_1-\mu_2)\right]}{S_Z} \sim t(n-1).$$

由于 $\bar{Z}=\bar{X}-\bar{Y},$

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - Y_i) - (\bar{X} - \bar{Y})\right]^2$$

$$= S_X^2 + S_Y^2 - 2S_{XY}^2 = S^2.$$

所以

$$\frac{\sqrt{n}[(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)]}{S} \sim t(n-1).$$

四、例子

【例1】设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,16)$, $Y \sim N(0,9)$,$X_1, X_2, \cdots, X_9$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{16}$分别是取自X与Y的简单随机样本，求统计量

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{16}^2}}$$

所服从的分布.

解　因为$X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N(0, 9 \times 16)$,

所以　$$\frac{1}{12}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9) \sim N(0, 1).$$

由于　$\dfrac{Y_i}{3} \sim N(0,1)$,　$\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{16} Y_i^2 \sim \chi^2(16)$,

从而 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_{16}^2}}=\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)/12}{\sqrt{\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{16}Y_i^2\Big/16}}\sim t(16)$.

例2 设总体 $X\sim N(0,1)$, $X_1,\cdots,X_6$ 为总体 X 的样本, $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$. 试确定常数 c, 使 cY 服从 χ^2 分布.

解: $X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$, $X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$.

$$(X_1+X_2+X_3)\big/\sqrt{3},\ (X_4+X_5+X_6)\big/\sqrt{3}\sim N(0,1).$$

故 $\left[(X_1+X_2+X_3)\big/\sqrt{3}\right]^2+\left[(X_4+X_5+X_6)\big/\sqrt{3}\right]^2$

$=\dfrac{1}{3}Y\sim\chi^2(2)$. 因此 $c=1/3$.

从而 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_{16}^2}}=\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)/12}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{16}Y_i^2\Big/16}}\sim t(16)$.

例2 设总体 $X\sim N(0,1)$, $X_1,\cdots,X_6$ 为总体 X 的样本, $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$. 试确定常数 c, 使 cY 服从 χ^2 分布.

解: $X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$, $\quad X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$.

$$(X_1+X_2+X_3)\big/\sqrt{3},\ (X_4+X_5+X_6)\big/\sqrt{3}\sim N(0,1).$$

故 $\left[(X_1+X_2+X_3)\big/\sqrt{3}\right]^2+\left[(X_4+X_5+X_6)\big/\sqrt{3}\right]^2$

$=\dfrac{1}{3}Y\sim\chi^2(2)$. 因此 $c=1/3$.

例3：设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，从总体中抽取样本$X_1,X_2,\cdots X_{n+1}$,记

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$$

证明：$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}\sim t(n-1)$$

证明 $\bar{X}_n$与X_{n+1}相互独立，且

$$\bar{X}_n\sim N(\mu,\sigma^2/n)\ ,\quad X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$$

故 $$X_{n+1}-\bar{X}_n\sim N(0,(1+1/n)\sigma^2),$$

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma}\sim N(0,1).$$

再根据$X_{n+1}-\bar{X}_n$与S_n独立，及t分布的定义即得证.

练习题：

调节一个装瓶机使其对每个瓶子的灌装量均值为μ盎司，通过观察这台装瓶机对每个瓶子的灌装量服从标准差$\sigma = \mathbf{1.0}$盎司的正态分布. 随机抽取由这台机器灌装的**9**个瓶子形成一个样本，并测定每个瓶子的灌装量. 试确定样本均值偏离总体均值不超过**0.3**盎司的概率有多大？

练习题答案：

解：由题意知，$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，故$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{9})$

$$P(\left|\bar{X}-\mu\right| \leq 0.3) = P(\frac{-0.3}{1/3} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{1/3} \leq \frac{0.3}{1/3})$$

$$= \Phi(0.9) - \Phi(-0.9)$$

$$= 2\Phi(0.9) - 1$$

$$= 2 \times 0.8159 - 1 = 0.6318.$$

在练习题中，如果希望$\bar{Y}$与μ的偏差在0.3盎司之内的概率达到0.95，应当抽取多大的样本？

解： $\bar{Y} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$，$P(\left|\bar{Y}-\mu\right| \leq 0.3) = 0.95$

即 $$P\left(\frac{\left|\bar{Y}-\mu\right|}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{0.3}{1/\sqrt{n}}\right) \leq 0.95.$$

而 $P\left(\frac{\left|\bar{Y}-\mu\right|}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{0.3}{1/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(0.3\sqrt{n}) - 1.$ 所以

$$2\Phi(0.3\sqrt{n}) - 1 \geq 0.95, \quad \Phi(0.3\sqrt{n}) \geq 0.975$$

查表得： $0.3\sqrt{n} \geq 1.96,$ 即$n \geq 42.68.$

所以应当抽取容量至少为43的样本.

例4　(1) 设$X_1, X_2, \cdots, X_6$是来自正记总体$N(2,3)$的样本, 求b使$P\{\sum_{i=1}^{6}(V_i-2)^2 \le b\}=0.95$. (2)设两正态总体$X,Y$的方差分别为$\sigma_1^2=12, \sigma_2^2=18$, 在$X,Y$中分别取出样本容量为$n_1=61, n_2=31$的样本, 两样本独立, 样本方差为$S_1^2, S_2^2$, 求$P\{S_1^2/S_2^2>1.16\}$

解: (1) $\dfrac{X_i-2}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)\quad (i=1,\cdots,6)$且相互独立,

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{X_i-2}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(6)$$

$$0.95 = P\{\sum_{i=1}^{6}(X_i-2)^2 \le b\}$$

$$= P\{\sum_{i=1}^{6}(\frac{X_i - 2}{\sqrt{3}})^2 \le \frac{b}{3}\} = 1 - P\{\chi^2(6) \ge \frac{b}{3}\}$$

即$P\{\chi^2(6) > b/3\} = 0.05$. 查表知,

$$P\{\chi^2(6) > 12.592\} = 0.05, \quad b/3 = 12.592$$

$$\Rightarrow b = 37.776$$

(2) $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/12}{S_2^2/18} \sim F(61-1, 31-1) = F(60, 30)$$

$$P\{S_1^2 / S_2^2 > 1.16\} = P\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} > \frac{1.16}{12/18} = 1.74\}$$

查表知, $F_{0.05}(60, 30) = 1.74$

$$\Rightarrow \quad P\{S_1^2 / S_2^2 > 1.16\} = 0.05$$

本章总结:

1) **数理统计基本概念**:
- 总体与个体
- 样本 (**特征**: 独立同分布)
- 统计量 (**特征**: 无未知参数)
- 常见统计量:
  - 样本均值
  - 样本方差
  - ……

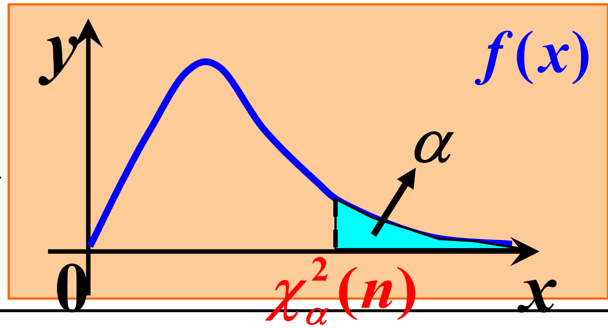
2) **抽样分布**:
- $\chi^2(n)$ 分布, $t(n)$ 分布, $F(m, n)$ 分布: **定义、性质、分位点**
- 正态总体的抽样分布:
  - $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$
  - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

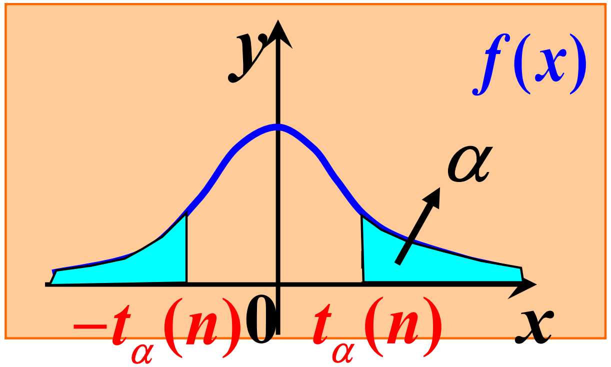
常见统计量及正态总体抽样分布

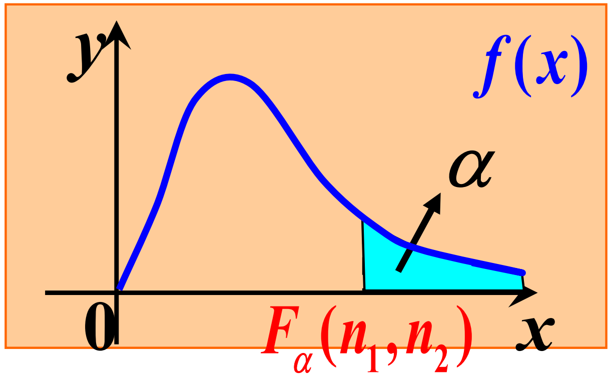
名称	定义	性质	正态抽样分布
样本均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$E(\overline{X})=E(X)$,	$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$;
样本方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ $=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$	$D(\overline{X})=D(X)/n$,	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$;
样本标准差	$S=\sqrt{S^2}$		$\overline{X}$与 S^2 独立;
样本原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$E(S^2)=D(X)$.	$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.
样本中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$		

三类常见的抽样分布

名称	定义	性质	概率密度图像
χ^2分布	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ $X_i \sim N(0,1)$且独立	期望(n)、 方差$(2n)$、 可加性	见下图1
t 分布	$X\Big/\sqrt{Y/n} \sim t(n)$ 其中$X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2(n)$ 且独立	极限为 N(0,1)、 对称性	见下图2
F 分布	$\dfrac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)$ 其中$X \sim \chi^2(m)$ $Y \sim \chi^2(n)$ 且独立	若 X $\sim F(m,n)$, 则 $1/X$ $\sim F(n,m)$.	见下图3







$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ $\quad$ $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = 1\big/F_\alpha(n_2,n_1)$