第四章　数字特征与特征函数

我们知道：任何随机变量都有分布函数, 目前为止，分布函数是我们研究随机变量和随机向量的惟一工具.　但在实际应用中, 分布函数往往不容易得到，此外，很多时候也没必要知道分布函数的表达式.　为了进一步认识随机变量的性质，本章引进两个基本概念 — 数字特征与特征函数. 数字特征一般比较容易求解，而且大都具有明确的概率意义.　特征函数与分布函数一一对应，具有良好的分析性质，在极限定理（第五章）的研究中起重要作用.

第一节　数学期望

一、平均值与加权平均值

数学期望是随机变量的一个最基本的数字特征, 如果随机变量X表示学习成绩，那么我们除了关心X的分布律外，显然关心平均成绩的大小．如果随机变量X表示一天中**110**台所接到的报警次数，我们同样关心一天中的平均报警次数，这样的例子是很多的．随机变量的平均值如何求？

例子　设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击**90**次, 射中次数记录如下(命中的环数是随机变量)：

命中环数x_k	0	2	5	7	8	10
命中次数n_k	5	15	10	10	30	20
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{20}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解: $\text{平均射中环数} = \dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$= \frac{0\times5+2\times15+5\times10+7\times10+8\times30+10\times20}{90}$$

$$= 0\times\frac{5}{90}+2\times\frac{15}{90}+5\times\frac{10}{90}+7\times\frac{10}{90}+8\times\frac{30}{90}+10\times\frac{20}{90}$$

$$= \sum_{k=0}^{5} x_k \cdot (n_k/n) = 6.56.$$

设射手命中的环数为随机变量X. 则

$$\text{平均射中环数} = \sum_{k=0}^{5} x_k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}} \rightarrow \text{频率随机波动}$$

"平均射中环数"的稳定值 = ?

以频率为权的加权平均

$$\sum_{k=0}^{5} x_k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} x_k \cdot p_k$$

以概率为权的加权平均

随机波动 → 稳定值

$$\text{平均射中环数的稳定值} = \sum_{k=0}^{5} x_k \cdot p_k$$

二、 离散型场合

将上述公式推广到更一般的离散型随机变量，我们引进如下定义.

定义4.1.1 设X是一离散型随机变量, 其概率分布为

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	$\cdots\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots\cdots$

如果级数$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i<+\infty$，则称级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$为随机变量$X$的数学期望,记为$EX$；如果级数$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i=+\infty$，则称随机变量$X$的数学期望不存在.

注：(1)要求级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，是为了保证级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$的和不随$x_i$位置的变化而改变.

(2)一般利用逐项求导或逐项积分求级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$的和. 例如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2$$

例如：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1})\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln 2$$

显然数学期望由概率分布列唯一确定，因此也称为某概率分布的数学期望.

一些重要分布的数学期望：

【两点分布】

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=q.$$

$$E(X)=p$$

【二项分布】

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\cdots,n.$$

$$EX=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

【泊松分布】

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

【几何分布】

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, \qquad k=1,2,\cdots.$$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'_q=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'_q$$

$$=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}.$$

【超几何分布】

【帕斯卡分布】

? —后面利用数学期望的性质求解.

离散型随机变量数学期望不存在的例子

随机变量X的概率分布为

$$P\left\{X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right\}=\frac{1}{2^k},\qquad k=1,2,\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}<+\infty,\ \text{但}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$$

因此X的数学期望不存在.

三、应用举例

【例1】（一种验血新技术）假定有N个人需要验血，可有两种验血方式：(1) 每个人的血分别化验，这时需要化验N次；(2) 把k个人的血混在一起进行化验, 如果结果显阴性，那么对这k 个人只做一次化验就可以了；如果结果显阳性, 那么必须对这k 个人再逐个进行化验, 这时对这个人共需要$k+1$次化验. 假定对所有的人来说，化验是阳性的概率都是p，而且他们的反应是独立的. 设每个k 人小组的检查次数是X. 则

$$P\{X=1\}=q^k,\qquad P\{X=k+1\}=1-q^k.$$

N个人需要的化验次数的期望值是

$$\frac{N}{k}\left[1\cdot q^k+(k+1)\cdot(1-q^k)\right]=N(1-q^k+\frac{1}{k}).$$

当$q^k-\frac{1}{k}>0$时，就能减少化验次数.

例如当$p=0.1$，取$k=4$，则$q^k-\frac{1}{k}=0.4$. 即方法2平均能减少40%的工作量. p越小, 这种方法减少的工作量越大.

例子 彩票、投资的决策、保险等. 公平的原则是:

支出（固定） = 期望收益（随机）.

彩票或赌博(书本P188—190)等通常:

支出（固定） < 期望收益（随机）.

四、 连续型场合

连续型随机变量X可以用：以概率$f(x_i)(x_i-x_{i-1})$取值为x_i的离散型随机变量近似，而其数学期望为

$$\sum_i x_i f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

它是积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$的渐进和式．因而有如下定义．

定义4.1.2 设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，当$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x<+\infty$时，称$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$为$X$的数学期望(或均值),记为$EX$；即

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x.$$

同离散一样，数学期望只与分布有关.

【正态分布】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sigma z+\mu}{=\!=\!=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \mu.$$

【指数分布】 $X \sim \exp(\lambda)$.

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} t e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.$$

【均匀分布】　$X \sim U[a,b]$.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}.$$

【柯西分布】　柯西分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=+\infty$$

因而柯西分布不存在数学期望.

五、一般场合

定义4.1.3 若X的分布函数为$F(x)$，则定义

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x)$$

为X的数学期望(或均值)，记为EX.

这里要求积分绝对收敛，否则称数学期望不存在.

当$F(x)$是跳跃函数或绝对连续函数时，即为离散型或连续型场合下的数学期望公式.

关于Riemman – Stieltjes积分.

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$$

很容易推广到$(-\infty, +\infty)$上，性质类似于定积分.

六、随机变量函数的数学期望

定理4.1.1 若$g(x)$是一元博雷尔函数，而$Y=g(X)$，则

$$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\mathrm{d}F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F_X(x)$$

即这两个积分中，若有一个存在，则另一个也存在，而且二者相等.

定理表明： 可由X的分布直接求$Y=g(X)$的数学期望，而不必利用Y的分布求.

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_i g(x_i)p_i, & X\text{离散型},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x, & X\text{连续型}.\end{cases}$$

【例2】（报童问题）设某报童每日的潜在卖报数量（顾客的需求量）z服从参数为λ的泊松分布．如果每卖出一份报可得报酬a，卖不掉而退回每份损失b. 如某日该报童批进n份报纸，试求其收益的期望值．并求最优的批进数量.

解：记X为报童每日实际卖出的报纸数量，则

$$X=\begin{cases} z, & z<n \\ n, & z\geq n \end{cases}$$

其概率分布为 $P\{X=k\}=\begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & k<n \\ \displaystyle\sum_{i=n}^{\infty}\dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, & k=n \end{cases}$

这里的X服从截尾泊松分布.

记报童的收益为Y，则Y与X的关系为：

$$Y = g(X) = \begin{cases} aX - b(n - X), & X < n \\ an, & X = n \end{cases}$$

因此收益Y的数学期望为

$$EY = Eg(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left[ak - b(n-k) \right] + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \right) an$$

$$= na - n(a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + (a+b)\lambda \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

当a,b,λ给定后，求n使得EY达到极大即可.

(最优化问题)

【例3】（最优存货量）某商场每销售一单位的某种商品可盈利3百元，但若销不出去而造成积压，则每单位商品因支付保管费而产生1百元的损失．假定该商品的需求量X服从$U[200,400]$，为保证收益的期望值最大，试求该商场的最优存货量n.

解：记商场的收益为Y，则Y与X的关系为

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3X-(n-X), & X<n \\ 3n, & X \geq n \end{cases}$$

因此收益Y的数学期望为

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{200}\left[\int_{200}^{n}(4x-n)\mathrm{d}x + \int_{n}^{400} 3n\mathrm{d}x\right]$$

$$= (-2n^2 + 1400n - 2\cdot 200^2)/200.$$

上式是n 的函数，求导并令导数为零，得 $n=350$. 故该商场的最优存货量是350单位.

七、随机向量函数的数学期望

若随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 而$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n元博雷尔函数. 则

$$Eg(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

特别地

$$EX_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\mathrm{d}F_1(x_1)$$

其中$F_1(x_1)$是X_1的分布函数.

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$
$$=\begin{cases}\sum_j\sum_i g(x_i,y_j)p_{ij}, & (X,Y)\text{是离散型},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{是连续型}.\end{cases}$$

定义4.1.4　随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望为

$$(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)$$

其中

$$EX_i=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_i\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_i\mathrm{d}F_i(x_i)$$

这里$F_i(x_i)$是X_i的分布函数.

八、数学期望的性质

性质1　若$a \le X \le b$，则 $a \le EX \le b$. 特别地 $Ec = c$, 这里a,b,c是常数.

性质2　线性性：对任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$及b有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i + b.$$

证明：性质2

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i + b) \mathrm{d}F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i + b$$

性质2对计算数学期望很重要.

【超几何分布】有N件产品，其中次品有M件，从中取出n 件，用X表示取出的次品数，则

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\qquad 0\le k\le n\le N,\quad k\le M.$$

对于一个不放回的抽样，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次抽得次品}\\ 0, & \text{第}i\text{次抽得正品}\end{cases}$$

则 $P\{X_i=1\}=\frac{M}{N}$，$P\{X_i=0\}=1-\frac{M}{N}$. 而

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

表示n次不放回抽样中的次品数，故有

$$EX=EX_1+EX_2+\cdots EX_n=\frac{nM}{N}$$

【帕斯卡分布】在伯努利试验中，设事件A发生的概率为p，以Y表示事件A第r次出现时的试验次数. 则Y是随机变量，其概率分布为

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r},\ k=r,r+1,r+2,\cdots$$

这个分布称为帕斯卡分布.

记X_i表示事件A第$r-1$次出现后到事件A第r次出现时之间的试验次数，则$X_i \sim G(p)$，并且

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_r$$

因而

$$EY=EX_1+EX_2+\cdots+EX_r=\frac{r}{p}.$$

【例4】把数字$1,2,\cdots,n$任意地排成一列, 如果数字k恰好出现在第k个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数X的数学期望.

解：令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{数字}k\text{恰好出现在第}k\text{个位置上},\\ 0, & \text{否则}\end{cases}.$$

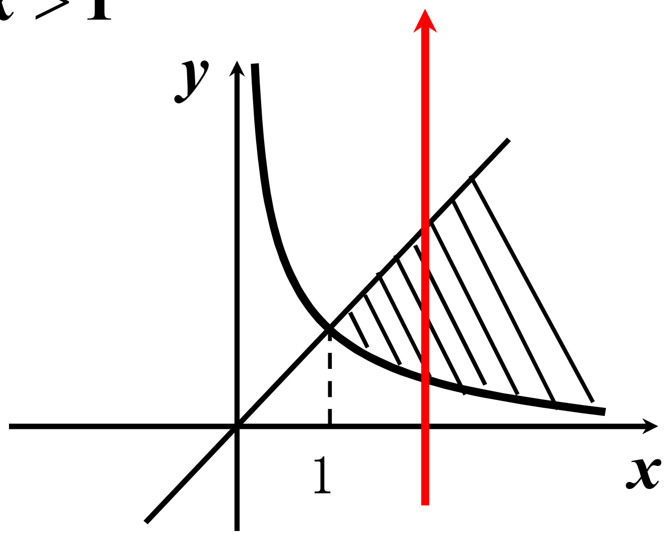
则 $$X=\sum_{k=1}^{n}X_k,$$

$$E(X_k)=P(X_k=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

故 $$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

【例5】 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,\ x>1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$



试求$E(\dfrac{1}{XY})$，$E(Y)$.

解 $$E(\frac{1}{XY})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

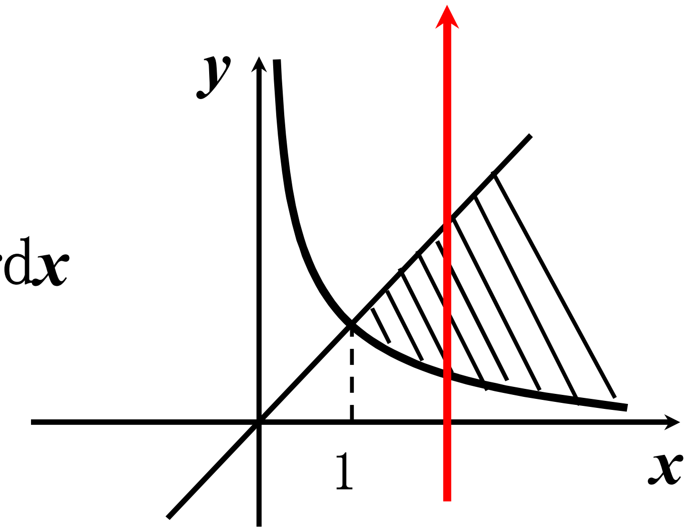
$$=\int_{1}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}(\frac{1}{x^2}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{4}\int_{1}^{+\infty}(\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}\cdot(\frac{1}{5}-1)=\frac{3}{5}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y}\mathrm{d}y=3\cdot\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{3}$$



【例6】甲、乙两人进行象棋比赛, 甲每局胜的概率为p，乙每局胜的概率为$q = 1 - p$.

（1）比赛规则Ⅰ：当某人比对方多胜两局时比赛结束，多胜两局者为最终获胜者．求规则Ⅰ下，甲最终获胜的概率.

（2）比赛规则Ⅱ：当某人连续胜两局时比赛结束, 连胜续两局者为最终获胜者．求规则Ⅱ下，甲最终获胜的概率.

（3）如果$p < q$，问甲应该选那种规则, 才能有更大的获胜概率.

（4）试求两种规则下的平均比赛局数.

解：（1）记A表示甲最终获胜，X表示比赛总局数.
显然在规则Ⅰ下，X一定是偶数，设局数为$2n+2$
$(n\geq 0)$. 若甲最终获胜，则最后两局一定是甲胜，
且在前面的第$2k+1$和第$2k+2$局中，甲与乙各胜一
局，共有2^n种不同的可能. 因而

$$P_1(A)=\sum_{n=0}^{\infty}P(A, X=2n+2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(pq)^n\cdot p^2=\frac{p^2}{1-2pq}.$$

（2）记A表示甲最终获胜，X表示比赛总局数.
在规则Ⅱ下：

若X是奇数，设局数为$2n+1(n\geq 1)$.若甲最终获胜，则最后一局甲赢，前面的奇数局甲输，偶数局甲赢.

若X是偶数，设局数为$2n+2(n\geq 0)$.若甲最终获胜，则最后二局甲赢，前面的奇数局甲赢，偶数局甲输.

X是偶数：$AA, ABAA, ABABAA, ABABABAA, \cdots$

X是奇数：$BAA, BABAA, BABABAA, BABABABAA, \cdots$

$$P_2(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A,\ X=2n+1)+\sum_{n=0}^{\infty}P(A,\ X=2n+2)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(pq)^n p+\sum_{n=1}^{\infty}(pq)^{n-1}p^2$$

$$=\frac{p^2q}{1-pq}+\frac{p^2}{1-pq}=\frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

(3) 当$p<q$时，$p<\frac{1}{2}$.

$$P_2(A)=\frac{p^2(1+q)}{1-pq}>\frac{p^2}{1-2pq}=P_1(A).$$

甲应该选规则Ⅱ.

(4) 无论甲还是乙获胜, 比赛都将结束, 在规则 Ⅰ 下，比赛局数X的分布为

$$P\left\{X=2n+2\right\}=2^n(pq)^n p^2+2^n(pq)^n q^2$$
$$=2^n(pq)^n\left[p^2+q^2\right],\quad n\geq 0.$$

$$EX=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)2^n(pq)^n\left[p^2+q^2\right]$$

$$=2(p^2+q^2)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2pq)^n\right]=\frac{2(p^2+q^2)}{(1-2pq)^2}=\frac{2}{1-2pq}.$$

在规则Ⅱ下，比赛局数X的分布为

$$P\{X=2n\}=(pq)^{n-1}p^2+(pq)^{n-1}q^2=(pq)^{n-1}\left[p^2+q^2\right],$$

$$P\{X=2n+1\}=(qp)^n p+(qp)^n q=(pq)^n, \qquad n\geq 1.$$

$$EX=\sum_{n=1}^{\infty}2n(pq)^{n-1}\left[p^2+q^2\right]+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(pq)^n$$

$$=2(p^2+q^2+pq)\sum_{n=1}^{\infty}n(pq)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(pq)^n$$

$$=\frac{2(1-pq)}{(1-pq)^2}+2pq\sum_{n=1}^{\infty}n(pq)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(pq)^n$$

$$=\frac{2(1-pq)}{(1-pq)^2}+\frac{pq}{1-pq}=\frac{2+pq}{1-pq}.$$

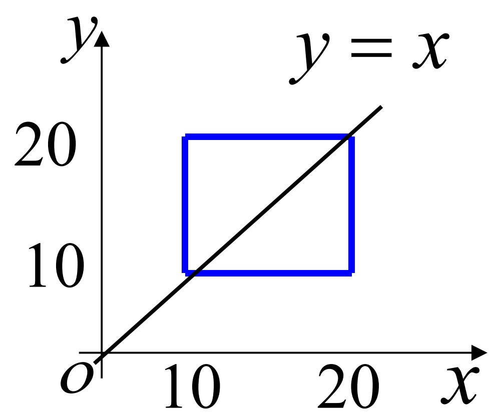
由于

$$\frac{2+pq}{1-pq}=\frac{2-pq-p^2q^2}{1-2pq+p^2q^2}<\frac{2}{1-2pq}.$$

因此平均比赛局数越大，对弱者越不利.

练习题

某商店经销某种商品，每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量，且都在区间$[10, 20]$上均匀分布．商店每售出一单位商品可获利1000元；若需求量超过进货量，商店可从它处调剂供应，这时每单位商品可获利500元；试计算此商店经销该种商品每周所获得利润的数学期望．



练习题解答：

设Z表示该种商品每周所得的利润，则

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, \text{ 若} Y \le X, \\ 1000X + 500(Y - X), \quad \text{若} Y > X. \end{cases}$$

X和Y相互独立，因此(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/100, & 10 \le x, y \le 20, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{100}\left[\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{10}^{x} 1000y\mathrm{d}y + \int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{x}^{20} 500(x+y)\mathrm{d}y\right]$$

≈ 14166.7(元）

练习题:

设$(X,Y) \sim N(0,0,1,1,0)$, $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$.
求Z的数学期望.

练习题解答：

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$