第三节　独立同分布场合的极限定理

一　独立和问题

在第一节中，我们讨论了伯努利试验场合下事件 A 出现次数μ_n的极限定理, 由于μ_n可以表示为n个独立随机变量之和(简称为“独立和”), 这里自然会提出这个问题：这些性质是否对一般的“独立和”成立?

独立和的问题经常出现，例如测量某一物体的某种尺寸(比如直径d)，通常是测量n 次，得到n 个观测值$X_1,X_2,\cdots,X_n$，然后采用平均值

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n},$$

作为直径d的数值. 我们知道，每个测量值X_i受到各种随机因素的影响，其数值带有随机性，因此X_i是随机变量，从而Y_n是随机变量之和的平均值，如果各次测量是独立的，那么便是独立和. 为了说明这种做法的合理性，就要研究Y_n的极限性质，但这里X_i不再服从两点分布.

本节主要研究独立独立同分布场合的极限定理，使用的工具是特征函数.

二　辛钦大数定律

在第一节中，我们利用切比雪夫不等式证明了大数定理, 那里需要假定方差的存在性，但是在独立同分布的场合, 我们并不需要这个假定，这就是有名的辛钦大数定律.

定理5.3.1（辛钦）设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立的随机变量序列，它们服从相同的分布, 且具有有限的数学期望$a = EX_n$，则对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

证明 由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$具有相同分布，故有同一特征函数, 设为$f(t)$，因为数学期望存在，故$f(t)$可展开成

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t) = 1 + \mathrm{i}at + o(t)$$

而$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$的特征函数为

$$\left[f(t/n)\right]^n = \left[1 + \mathrm{i}at/n + o(t/n)\right]^n.$$

对于固定的t,

$$\left[f(t/n)\right]^n \to e^{\mathrm{i}at}, \quad (n \to \infty).$$

极限函数$e^{\mathrm{i}at}$是连续函数，它是退化分布$I_a(x)$所对应

的特征函数，由逆极限定理知$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$的分布函数弱收敛于$I_a(x)$，再由定理5.2.7知依概率收敛于常数$a$.

显然，伯努利大数定律是辛钦大数定律的特殊情况.辛钦大数定律在理论和应用中十分重要. 矩估计的相合性，用蒙特卡罗方法计算定积分等等.

三　中心极限定理

定理5.3.2（林德贝格－莱维）设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立的随机变量序列，它们服从相同的分布，且 $EX_k = \mu$，$DX_k = \sigma^2 < \infty$. 则标准化随机变量和

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)$$

的极限分布是标准正态分布．即

$$\lim_{n\to+\infty} P\{Y_n < x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

证明　记$X_k - \mu$的特征函数为$g(t)$，则Y_n的特征函

数为$\left[g(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\right]^n$.由于$EX_k=\mu$，$DX_k=\sigma^2<\infty$. 故

$$g'(0)=0, \qquad g''(0)=-\sigma^2.$$

因此

$$g(t)=1-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+o(t^2).$$

所以

$$\left[g(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\right]^n=\left[1-\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^2+o(\frac{t^2}{n})\right]^n$$

$$=\left[1-\frac{1}{2n}t^2+o(\frac{t^2}{n})\right]^n\to e^{-t^2/2}.$$

由于$e^{-t^2/2}$是连续函数，它对应的分布函数为$N(0,1)$,
因此由逆极限定理知

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{Y_n < x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

定理证毕.

用该定理可推出棣莫弗－拉普拉斯积分极限定理.

林德贝格－莱维定理有广泛应用, 在实际工作中, 只要n足够大，便可以把独立同分布的随机变量之和当作正态分布来处理.

数理统计中的样本矩的极限分布，正态随机数的产生方法等都用到该定理.

*多元中心极限定理(书本P328)