第五节 特征函数

1 特征函数的定义

2 特征函数的性质 重点

3 逆转公式和唯一性定理 难点

4 分布函数的再生性

5 多元特征函数

一、定义

数字特征只反映了概率分布的某些特征，一般并不能通过它们来完全确定分布函数, 本节将要引入的特征函数，既能完全决定分布函数而又具有良好的分析性质，特征函数是研究极限定理的重要工具，首先引入复随机变量的概念.

定义4.5.1 如果X与Y都是概率空间$(\Omega,\mathbb{F},P)$上的实值随机变量，则称$\xi = X + iY$为概率空间$(\Omega,\mathbb{F},P)$上复随机变量. 特别地，对于任意实数t,

$$e^{itX} = \cos tX + i\sin tX$$

是一个复随机变量.

可以把复随机变量$\xi = X + iY$作为随机向量(X, Y)来处理. 例如：如果X与Y的数学期望存在，我们可以将$E\xi$定义为

$$E\xi = EX + iEY$$

又如果$\xi_1 = X_1 + iY_1$与$\xi_2 = X_2 + iY_2$相互独立

$\longleftrightarrow (X_1, Y_1)$与$(X_2, Y_2)$相互独立.

对复随机变量也可以建立类似于实随机变量的一系列结果. 例如：若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$相互独立, 则

$$E(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n .$$

又，若$g(x)$是一维博雷尔可测函数, $Y=g(X)$,
根据$E\xi$的定义及欧拉公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得

$$
\begin{aligned}
Ee^{itY} &= Ee^{itg(X)} = E\left[\cos tg(X)+i\sin tg(X)\right] \\
&= E\left[\cos tg(X)\right]+iE\left[\sin tg(X)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\cos tg(x)\mathrm{d}F_X(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tg(x)\mathrm{d}F_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{itg(x)}\mathrm{d}F_X(x)
\end{aligned}
$$

下面引入随机变量的特征函数的概念.

定义4.5.2 如果随机变量X的分布函数为$F_X(x)$,称

$$f_X(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\mathrm{d}F_X(x)$$

为X的特征函数(**characteristic function**),亦称为$F_X(x)$的特征函数.

特征函数就是X的函数(是复值随机变量)的期望,特征函数是一个实变量的复值函数,由于$\left|e^{itx}\right|=1$, 所以对一切实数 t 都有意义,也即任何分布函数的特征函数都存在.

$$\text{特征函数的计算}\begin{cases}\text{离散型}\\\text{连续型}\end{cases}$$

对于离散型随机变量，若其分布列为

X	x_1	x_2	……	x_n	……
P	p_1	p_2	……	p_n	……

则其特征函数为

$$f(t)=\sum_j p_j e^{itx_j}.$$

对于连续型随机变量，若密度函数为$p(x)$，则其特征函数为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\mathrm{d}x.$$

这时，特征函数就是密度函数$p(x)$的傅里叶变换．有时我们可以分别对特征函数的实部和虚部进行计算，此时有

$$f(t) = E\cos tX + iE\sin tX.$$

一些常见分布的特征函数.

【例1】 退化分布$I_c(x)$的特征函数为

$$f(t) = e^{ict}.$$

【例2】 二项分布$B(n, p)$的特征函数为

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{ikt} = (pe^{it} + q)^n.$$

【例3】 泊松分布$P(\lambda)$的特征函数为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

【例4】 指数分布$\exp(\lambda)$的特征函数为

$$f(t)=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\cos tx\,\mathrm{d}x+i\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin tx\,\mathrm{d}x$$

$$=J_1(t)+iJ_2(t)$$

利用分部积分得

$$J_1(t)=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\cos tx\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{t}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\mathrm{d}\sin tx$$

$$=\left.\frac{\lambda e^{-\lambda x}\sin tx}{t}\right|_0^{+\infty}-\frac{\lambda}{t}\int_0^{+\infty}\sin tx\,\mathrm{d}e^{-\lambda x}$$

$$=\frac{\lambda^2}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin tx dx=\frac{\lambda}{t}J_2(t)$$

同样有

$$J_2(t)=\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin tx\mathrm{d}x=-\frac{\lambda}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}\cos tx$$

$$=-\frac{\lambda e^{-\lambda x}\cos tx}{t}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{\lambda}{t}\int_0^{+\infty}\cos tx\mathrm{d}e^{-\lambda x}$$

$$=\frac{\lambda}{t}-\frac{\lambda^2}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\cos tx\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{t}-\frac{\lambda}{t}J_1(t)$$

解此方程组$J_1(t)=\dfrac{\lambda}{t}J_2(t)$，$J_2(t)=\dfrac{\lambda}{t}-\dfrac{\lambda}{t}J_1(t)$ 得

$$J_1(t)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2},\quad J_2(t)=\frac{\lambda t}{\lambda^2+t^2}$$

因而

$$f(t)=J_1(t)+iJ_2(t)=\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}.$$

【例5】 Γ分布$\Gamma(r,\lambda)$的特征函数为

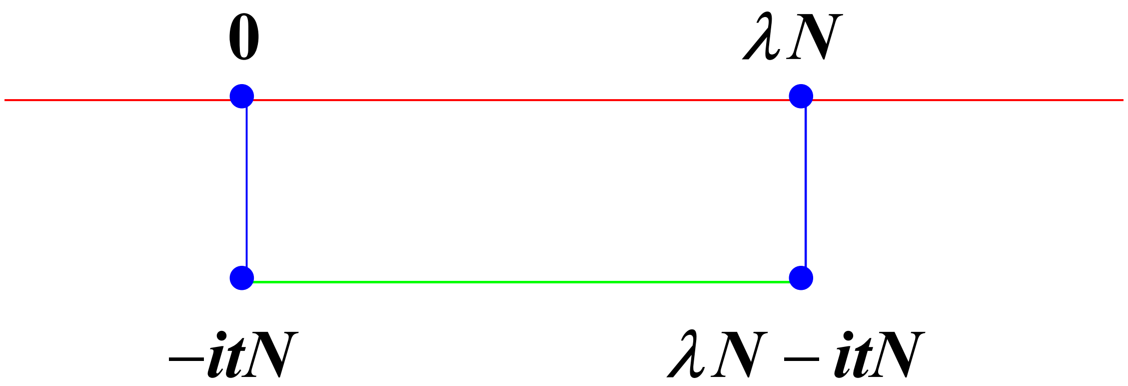
$$f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$$

证明：$f(t)=\int_0^{+\infty}e^{itx}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x}}{r\Gamma(r)}\mathrm{d}(\lambda x)^r$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^N\frac{e^{-\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x}}{r\Gamma(r)}\mathrm{d}(\lambda x)^r$$

$$\int_0^N \frac{e^{-\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x}}{r\Gamma(r)}\mathrm{d}(\lambda x)^r \xrightarrow{z=\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x}$$

$$=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}\int_0^{\lambda N-itN}\frac{e^{-z}}{r\Gamma(r)}\mathrm{d}z^r=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}\int_0^{\lambda N-itN}\frac{z^{r-1}e^{-z}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}z$$



积分$\int_0^{\lambda N-itN}\frac{z^{r-1}e^{-z}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}z$是解析函数从$0$到$\lambda N-itN$的

积分(与路径无关)，因此

$$\int_0^{\lambda N - itN} \frac{z^{r-1}e^{-z}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}z = \left(\int_0^{\lambda N} + \int_{\lambda N}^{\lambda N - itN}\right)\frac{z^{r-1}e^{-z}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}z$$

令$N \to +\infty$，容易验证上述的第一个积分趋于$\mathbf{1}$，而第二个积分

$$\left|\int_{\lambda N}^{\lambda N - itN} \frac{z^{r-1}e^{-z}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}z\right| = \left|i\int_0^{-tN} \frac{(\lambda N + iy)^{r-1}e^{-(\lambda N + iy)}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|-i\int_0^{tN} \frac{(\lambda N - iy)^{r-1}e^{-(\lambda N - iy)}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}y\right|$$

$$\le \int_0^{tN} \left|\frac{(\lambda N - iy)^{r-1}e^{-(\lambda N - iy)}}{\Gamma(r)}\right|\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{tN}\frac{(\lambda^2N^2+y^2)^{\frac{r-1}{2}}e^{-\lambda N}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}y$$

$$\le\frac{(\lambda^2N^2+t^2N^2)^{\frac{r-1}{2}}e^{-\lambda N}}{\Gamma(r)}\cdot|t|N$$

$$=\frac{(\lambda^2+t^2)^{\frac{r-1}{2}}|t|}{\Gamma(r)}\cdot N^r e^{-\lambda N}\to 0\qquad(N\to+\infty)$$

所以

$$f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$$

特别地，$\Gamma(1,\lambda)$即是$\exp(\lambda)$.

二、性质

特征函数的一些基本性质.

性质1 特征函数有如下性质:

$$f(0)=1,\qquad |f(t)|\le f(0),\qquad f(-t)=\overline{f(t)}$$

证明: $f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}1\mathrm{d}F(x)=1,$

$$|f(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\mathrm{d}F_X(x)\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{itx}\right|\mathrm{d}F(x)=1=f(0),$$

$$f(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\mathrm{d}F(x)=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\mathrm{d}F_X(x)}=\overline{f(t)}.$$

性质2 特征函数$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明:

$$\left|f(t+h)-f(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i(t+h)x}-e^{itx})\mathrm{d}F(x)\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{i(t+h)x}-e^{itx}\right|\mathrm{d}F(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{i(t+\frac{h}{2})x}\right|\cdot\left|e^{\frac{ihx}{2}}-e^{-\frac{ihx}{2}}\right|\mathrm{d}F(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)$$

$$= 2\left[\int_{|x|>A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\right]$$

$$\le 2\left[\int_{|x|>A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\frac{hA}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\right]$$

$$\le 2\left[F(-A)+1-F(A+0)\right]+A|h|$$

可选取足够大的A 使前一项任意小，选定A后再选充分小的$|h|$可使第二项也任意小, 从而证明了结论.

性质3 对于任意的正整数n及任意实数$t_1, t_2, \cdots, t_n$及复数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k \overline{\lambda_j} \geq 0$$

证明

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k \overline{\lambda_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k - t_j)\lambda_k \overline{\lambda}_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_k - t_j)x} \mathrm{d}F(x)\right\} \lambda_k \overline{\lambda}_j$$

厄米特矩阵 $(f(t_k - t_j))_{n\times n}$ 为半正定矩阵

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i(t_k - t_j)x} \lambda_k \overline{\lambda_j} \right\} \mathrm{d}F(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{it_k x} \lambda_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n} e^{-it_j x} \overline{\lambda_j} \right) \mathrm{d}F(x)$$

$$= E\left| \sum_{k=1}^{n} e^{it_k X} \lambda_k \right|^2 \geq 0$$

这个性质称为特征函数的非负(半正)定性. 是特征函数的最本质的性质之一.

波赫纳尔–辛钦定理　函数$f(t)$必为特征函数的充要条件是：$f(t)$非负定, 连续, 且$f(0)=1$.

(见教材P315)

性质4　两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积. ★

证明：　设X_1与X_2是两个相互独立的随机变量，$Y=X_1+X_2$，由X_1与X_2的独立性易得到复随机变量e^{itX_1}与e^{itX_2}也是独立的，因此

$$Ee^{itY}=Ee^{it(X_1+X_2)}=Ee^{itX_1}\cdot Ee^{itX_2}$$

或直接证明(证明两端的实、虚部分别相等).

性质4可推广到n个独立随机变量之和的场合.

因而特征函数对处理独立和的问题非常方便.

性质5　设随机变量X的n 阶矩存在，则它的特征函数可微分n 次，且当$k \le n$时

$$f^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k EX^k.$$

证明：　因为 $\left|\dfrac{d^k}{dt^k}(e^{itx})\right| = \left|\mathrm{i}^k x^k e^{itx}\right| \le \left|x^k\right|,$

由于X的n 阶矩存在，$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^n\right|\mathrm{d}F(x) < +\infty$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^k\right|\mathrm{d}F(x) < +\infty,$$

因而可以积分号下的微分运算

$$f^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^k}{dt^k}(e^{itx})\mathrm{d}F(x) = \mathrm{i}^k\int_{-\infty}^{+\infty}x^k e^{itx}\mathrm{d}F(x),$$

令 $t = 0$，即得所证.

原点矩可由特征函数(在0点)的导数求得，避免了用分布函数而进行的积分运算.

由定理得到：设随机变量X的n 阶矩存在，则有

$$f(t)=1+(\mathrm{i}t)EX+\frac{(\mathrm{i}t)^2}{2!}EX^2+\cdots+\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}EX^n+o(t^n)$$

性质6　设$Y=aX+b$，这里a,b为常数，则

$$f_Y(t)=e^{ibt}f_X(at).$$

证明： $f_Y(t)=Ee^{itY}=Ee^{it(aX+b)}$,

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(aX+b)}\mathrm{d}F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ibt}e^{i(at)X}\mathrm{d}F_X(x)$$

$$=e^{ibt}f_X(at).$$

【例6】 设 $X\sim U[a,b]$，试求X的特征函数.

解： 由于$X\sim U[a,b]$，不难证得

$$Y=\frac{2}{b-a}(X-\frac{a+b}{2})\sim U[-1,1],$$

易求得

$$f_Y(t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{itx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos tx\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{t}=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it}.$$

由于 $$X=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}Y,$$

所以 $$f_X(t)=e^{i\frac{a+b}{2}t}f_Y(\frac{b-a}{2}t)=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}.$$

【例7】 试求正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的特征函数.

解： 方法一 先讨论$N(0,1)$的场合：

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

因正态分布的一阶矩存在，可对上式求导得

$$f_1'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-x)\sin tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin tx\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cos tx\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-tf_1(t).$$

因此 $\ln f_1(t)=-\dfrac{t^2}{2}+c,$

由于 $f_1(0)=1$， $c=0$，所以

$$f_1(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

因此对一般的正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，利用性质6即得.

$$f(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

方法二　　利用围道积分求，先讨论$N(0,1)$的场合

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

积分$\int_{-N}^{N}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\mathrm{d}x$可视为解析函数$e^{-\frac{z^2}{2}}$从$-N-it$

到$N-it$的积分（与路径无关），因此

$$\int_{-N}^{N} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-N-it}^{N-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\left(\int_{-N-it}^{-N}+\int_{-N}^{N}+\int_{N}^{N-it}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z$$

令$N\to+\infty$，上述的第二个积分趋于$\sqrt{2\pi}$. 而第一积分

$$\left|\int_{-N-it}^{-N} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\right|=\left|i\int_{-t}^{0} e^{-\frac{(-N+iy)^2}{2}}\mathrm{d}y\right|\le\int_{-t}^{0}\left|e^{-\frac{(-N+iy)^2}{2}}\right|\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-t}^{0} e^{\frac{y^2-N^2}{2}}\mathrm{d}y\le\int_{-t}^{0} e^{\frac{t^2-N^2}{2}}\mathrm{d}y=te^{\frac{t^2-N^2}{2}}\xrightarrow{N\to+\infty}0.$$

同理可证第三个积分也趋于0. 因而有$f_1(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$，

$$f(t)=e^{i\mu t}f_1(\sigma t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}.$$

三、逆转公式与唯一性定理

现在来证明特征函数与分布函数是相互唯一确定的, 由分布函数决定特征函数是显然的，剩下来的是需要证明可由特征函数唯一决定分布函数.

先给出数学分析中的一个引理.

引理4.5.1　设$x_1 < x_2$,

$$g(T,x,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]\mathrm{d}t$$

则 $$\lim_{T\to\infty} g(T,x,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或}x>x_2,\\ 1/2, & x=x_1\text{或}x=x_2,\\ 1, & x_1<x<x_2.\end{cases}$$

证明： 狄利可雷积分如下

$$D(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin \alpha t}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}1/2, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ -1/2, & \alpha<0.\end{cases}$$

$$D(1)=1/2, \qquad D(-1)=-1/2.$$

而

$$\lim_{T\to\infty} g(T,x,x_1,x_2)=D(x-x_1)-D(x-x_2)$$

根据$x-x_1$及$x-x_2$的符号不难得所证结论.

定理4.5.1（**逆转公式**）设分布函数$F(x)$的特征函数为$f(t)$，则对任意$x_1, x_2 \in R$，都有

$$\frac{F(x_2)+F(x_2+0)}{2}-\frac{F(x_1)+F(x_1+0)}{2}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

特别当x_1, x_2都是$F(x)$的连续点时，左端为$F(x_2)-F(x_1)$.

证明　不妨设$x_1 < x_2$，记

$$I(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t$$

由于

$$\left|\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\right|=\frac{1}{|t|}\left|e^{it(x-\frac{x_2+x_1}{2})}\right|\cdot\left|e^{it\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{-it\frac{x_2-x_1}{2}}\right|$$

$$=\frac{2}{|t|}\left|\sin(t\frac{x_2-x_1}{2})\right|\leq\frac{2}{|t|}\left|t\frac{x_2-x_1}{2}\right|=x_2-x_1$$

因而被积函数有界, 从而$I(T)$有限，上述积分顺序可交换，故有

$$I(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-x_1)}-e^{it(x-x_2)}}{it}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)$$

由于$\lim\limits_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)$存在, 从而$\left|g(T,x,x_1,x_2)\right|$有界，由控制收敛定理得

$$\lim_{T\to\infty}I(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[D(x-x_1)-D(x-x_2)\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$
=\int_{(-\infty,x_1)} 0\mathrm{d}F(x)+\int_{\{x_1\}}\frac{1}{2}\mathrm{d}F(x)+\int_{(x_1,x_2)} 1\mathrm{d}F(x)
$$

$$
+\int_{\{x_2\}}\frac{1}{2}\mathrm{d}F(x)+\int_{(x_2,+\infty)} 0\mathrm{d}F(x)
$$

$$
=\frac{F(x_1+0)-F(x_1)}{2}+\left[F(x_2)-F(x_1+0)\right]
$$

$$
+\frac{F(x_2+0)-F(x_2)}{2}
$$

$$
=\frac{F(x_2)+F(x_2+0)}{2}-\frac{F(x_1)+F(x_1+0)}{2}.
$$

定理4.5.2（**唯一性定理**）分布函数由特征函数唯一决定.

证明　应用逆转公式, 在$F(x)$的每一个连续点x上，当 y 沿着$F(x)$的连续点趋于$-\infty$时，有

$$F(x)=\lim_{y\to-\infty}\left[F(x)-F(y)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}f(t)\mathrm{d}t$$

对$F(x)$的每一个不连续点x_0，当x_n沿着$F(x)$的连续点单调上升趋于x_0时, 有

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x_0-0)=F(x_0)$$

从而$F(x)$完全确定下来.

由唯一性定理可知特征函数也完整地描述了随机变量.

特别当$f(t)$绝对可积函数时, 有更强的结果.

定理4.5.3　若$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$，则相应的分布函数$F(x)$为连续型，且其密度函数为

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)\mathrm{d}t.$$

证明　任取$x \in R$，令$y_n \in C(F)$，且$y_n \downarrow x$，

根据逆转公式

$$0 \le F(y_n) - \frac{F(x) + F(x+0)}{2}$$

$$\leq \frac{y_n - x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t \to 0$$

而$F(y_n)\downarrow F(x+0)$，所以

$$F(x+0)-\frac{F(x)+F(x+0)}{2}=0$$

因而$F(x)=F(x+0)$，即$F(x)$处处连续.

对任意$x\in R$，$\Delta x\neq 0$，由逆转公式得

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+\Delta x)}}{it\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

上式右端的被积函数被$|f(t)|$所控制，同时当$\Delta x\to 0$时，被积函数趋于$e^{-itx}f(t)$，故由控制收敛定理即得所证.

四、分布函数的再生性

若两个独立的随机变量都服从某种分布，它们的和也服从这一分布，那么称该种分布具有再生性.

【例8】（二项分布的再生性）

设$X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$,二者相互独立, 则

$$Y = X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p).$$

证明 因为

$$f_{X_1}(t) = (pe^{it} + q)^{n_1}, \qquad f_{X_2}(t) = (pe^{it} + q)^{n_2}$$

由性质4知

$$f_Y(t) = (pe^{it} + q)^{n_1 + n_2}.$$

由唯一性定理知$Y=X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$. 上述性质简记作

$$B(n_1,p)*B(n_2,p)=B(n_1+n_2,p).$$

【例9】（正态分布的再生性）

$$f(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

$$N(\mu_1,\sigma_1^2)*N(\mu_2,\sigma_2^2)=N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

【例10】（泊松分布的再生性）

$$f(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

$$P(\lambda_1)*P(\lambda_2)=P(\lambda_1+\lambda_2).$$

【例11】（Γ分布的再生性）

$$f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r},$$

$$\Gamma(r_1,\lambda)*\Gamma(r_2,\lambda)=\Gamma(r_1+r_2,\lambda).$$

当$r_1=\frac{n_1}{2}$，$r_2=\frac{n_2}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$时为χ^2分布. 因此χ^2分布也具有再生性. 即

$$\chi^2_{n_1}*\chi^2_{n_2}=\chi^2_{n_1+n_2}.$$

分布函数的分解问题

若两个独立随机变量之和服从某一分布，问是否能断定这两个随机变量也分别服从这个分布?

这实际上是分布函数再生性问题的逆问题.

已经证明：对于正态分布和泊松分布，分解问题成立.

五、多元特征函数

若随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义它的(联合)特征函数为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=Ee^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

类似于一元特征函数的场合，可以建立元特征函数的相关理论与性质.

性质 1　$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$在R^n上一致连续，而且:

$$|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\le f(0,0,\cdots,0)=1,$$

$$f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}.$$

性质 2 若$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的特征函数，则$Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$的特征函数为

$$f_Y(t)=f(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt)$$

性质 3 如果矩$EX_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n}$存在，则

$$EX_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n}$$

$$=\mathbf{i}^{-\sum_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

性质 4 若$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的特征函数为$f(t_1,\cdots,t_n)$，则$k(k<n)$维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$的特征函数为

$$f_{1,2,\cdots,k}(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0).$$

这是前k个分量的k元边际分布函数对应的特征函数,其他的任意k个分量的k元边际分布函数对应的特征函数可类似得到.

逆转公式

如果$f(t_1,\cdots,t_n)$是随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的特征函数，而$F(x_1,\cdots,x_n)$是它的分布函数，则

$$P\{a_k \le X_k < b_k, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$= \lim_{\substack{T_j \to \infty \\ j=1,\cdots,n}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} \cdots \int_{-T_n}^{T_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k}$$

$$\cdot f(t_1, \cdots, t_n) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n$$

其中a_k和b_k都是任意实数，但满足唯一的要求：$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$落在平行体$a_k \le X_k < b_k, k = 1, 2, \cdots, n$的面上的概率为零.

唯一性定理

分布函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$由其特征函数唯一决定.

性质5 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的特征函数为$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，而X_j的特征函数为$f_{X_j}(t_j)$，则$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立的充要条件是

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(t_2)\cdots f_{X_n}(t_n).$$

也即$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$的变量可以分离

$$\longleftrightarrow F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

性质 6 若以 $f_1(t_1,\cdots,t_n)$，$f_2(u_1,\cdots,u_m)$ 及 $f(t_1,\cdots,t_n,u_1,\cdots,u_m)$ 分别记随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$(Y_1,\cdots,Y_m)$ 及 $(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 的特征函数，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 独立的充要条件是

互独立的充要条件是

$$
\begin{aligned}
&f(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)\\
&\qquad = f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)f_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\longleftrightarrow F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\\
= F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m)
\end{bmatrix}.
$$

连续性定理　若特征函数列$\{f_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)\}_1^{\infty}$收敛于一个连续函数$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,则函数$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是某分布函数所对应的特征函数.