第四节　强大数定律

一　以概率1收敛

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列事件，则$\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$表示事件序列$A_k, A_{k+1}, \cdots$中至少发生一个，而$\bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$则表示$A_k, A_{k+1}, \cdots\cdots$同时发生．记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$为事件序列$\{A_n\}$的上限事件，它表示$A_n$发

生无穷多次，因为$\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \omega$属于无穷多个$A_n$.

称$\varliminf_{n\to\infty} A_n$为事件序列$\{A_n\}$的下限事件, 它表示$A_n$至多只有有限个不发生, 因为$\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Leftrightarrow$存在$N$,使$\omega \in \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$, 因此若$\omega$发生, 则$A_N, A_{N+1}, \cdots$同时发生, 这时至多只有前面$N-1$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_{N-1}$可能不发生(也可能有些发生). 显然

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \supset \varliminf_{n\to\infty} A_n .$$

特别当$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$时，记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

并称它为事件序列$\{A_n\}$的极限事件.

含义：至多有限个A_n不发生$\Leftrightarrow$ A_n发生无穷多次

$\xleftrightarrow{\text{对立}}$至多有限个$A_n$发生. 即

利用德摩根定理，有

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}, \qquad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}.$$

因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n} = \overline{(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n} = \overline{(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n)}.$$

含义：

$\varliminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$表示$\{\overline{A_n}\}$至多只有有限个不发生，即$\{A_n\}$至多只有有限个发生$\xleftrightarrow{\text{对立}}$$\{A_n\}$发生无穷多次$(\varlimsup_{n\to\infty} A_n)$.

$\varlimsup_{n\to\infty} \overline{A_n}$表示$\{\overline{A_n}\}$发生无穷多次$\xleftrightarrow{\text{对立}}$$\{\overline{A_n}\}$至多只有有限个发生$\longleftrightarrow$$\{A_n\}$至多只有有限个不发生$(\varliminf_{n\to\infty} A_n)$.

引理5.4.1 （博雷尔－康特立引理）

(1)若随机事件序列$\{A_n\}$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

则

$$P(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) = 0,\quad P(\varliminf_{n\to\infty} \overline{A_n}) = 1.$$

(2) 若$\{A_n\}$是相互独立的随机事件序列，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

的充要条件是

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1 \text{或} P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 0.$$

证明 (1) $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \le P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)$

$$\le \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0 (k \to \infty),$$

$$P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1.$$

即$\{A_n\}$发生无穷多次的概率为 0.

（2）必要性　　注意到$\{A_n\}$的独立性，有

$$P(\varliminf_{n\to\infty}\overline{A_n})=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\overline{A_n})\le\sum_{k=1}^{\infty}P(\bigcap_{n=k}^{\infty}\overline{A_n})$$

而

$$P(\bigcap_{n=k}^{N}\overline{A_n})=\prod_{n=k}^{N}P(\overline{A_n})=\prod_{n=k}^{N}[1-P(A_n)]$$

$$\le\prod_{n=k}^{N}e^{-P(A_n)}=e^{-\sum_{n=k}^{N}P(A_n)}\to 0(N\to\infty),$$

（这里利用了$x\ge 0$时, $e^{-x}\ge 1-x$）

$$P(\bigcap_{n=k}^{\infty}\overline{A_n})=0.$$

因而

$$P(\varliminf_{n\to\infty}\overline{A_n})=0,$$

$$P(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)=1-P(\varliminf_{n\to\infty}\overline{A_n})=1.$$

充分性 反证法 若$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$，根据(1)有

$$P(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)=0$$

这与$P(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)=1$相矛盾．引理得证.

由 引 理 知

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \longrightarrow P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 \text{或} P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \longleftarrow P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) > 0 \text{或} P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) < 1;$$

$\{A_n\}$独立时:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \longleftrightarrow P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0 \text{或} P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \longleftrightarrow P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1 \text{或} P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 0.$$

这说明：当$\{A_n\}$独立时,

要么$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$，要么$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1$.

现在讨论随机变量序列的依概率1收敛性.

设$X_n(n=1,2,\cdots)$与X是随机变量，则

$$\left\{\omega: \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\right\}$$

$$=\left\{\omega: \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|<\frac{1}{m}\right)\right\}.$$

这是因为对固定的ω，就是数列$\left\{X_n(\omega)\right\}_1^{\infty}$，因此 $\omega\in\left\{\omega: \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\right\}$的充要条件是：对任一正整数$m$，存在一个正整数$N$，当$n>N$时，均有$\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|<\frac{1}{m}$；即对任一正整数$m$，$\omega$属于

$\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|<1/m$的下限事件, 即为上式的右端. 从这个表达式可以看出

$$\left\{\omega: \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\right\}$$

是事件，从而$P\left\{\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\right\}=1$有明确的意义，称$\left\{X_n(\omega)\right\}_1^\infty$以概率1收敛于$X(\omega)$. 记为

$$X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega).$$

下面的两个式子都表达了$\left\{X_n(\omega)\right\}_1^\infty$以概率1收敛于$X(\omega)$.

$$P\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|<\frac{1}{m}\right)\right\}=1,$$

$$P\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|\geq\frac{1}{m}\right)\right\}=0.$$

定理5.4.1 $X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega)$ 的充要条件是:

对任意正数$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k\to+\infty}P\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|\geq\varepsilon\right)\right\}=0,$$

也即

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|\geq\varepsilon\right)\right\}=0.$$

证明 由于$\bigcup_{n=k}^{\infty}(\left|X_n(\omega)-X(\omega)\right|\geq\varepsilon),\ (k=1,2,\cdots)$

是下降的事件序列，根据概率的上连续性知，对

任意正数$\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k \to +\infty} P\left\{ \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\left| X_n(\omega) - X(\omega) \right| \geq \varepsilon \right) \right\} = 0,$$

等价于对任意正数$\varepsilon > 0$，有

$$P\left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\left| X_n(\omega) - X(\omega) \right| \geq \varepsilon \right) \right\} = 0,$$

上述又等价于：对任意的自然数m，有

$$P\left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\left| X_n(\omega) - X(\omega) \right| \geq \frac{1}{m} \right) \right\} = 0.$$

亦即

$$P\left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\left| X_n(\omega) - X(\omega) \right| \geq \frac{1}{m} \right) \right\} = 0.$$ 得证.

根据定理5.4.1 易得到:以概率1收敛必概率收敛，即

推论5.4.1 若$X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega)$, 则

$$X_n(\omega)\xrightarrow{P}X(\omega).$$

下例说明一般不能由依概率收敛得到以概率1收敛, 所以以概率1收敛是比依概率收敛更强的一种收敛性.

【例1】 取$\Omega=\left(0,1\right]$，$\mathbb{F}$为$\left(0,1\right]$中的博雷尔点集全体构成的σ域，P为勒贝格测度, 记$A_1=\left(0,1\right]$, 然后把它二等分，记$A_2=(0,\frac{1}{2}]$, $A_3=(\frac{1}{2},1]$, 把A_1四等分，记四个区间分别为A_4,A_5,A_6,A_7, 继续做下

去, 得到一个区间序列$\{A_n\}$，定义$X_n(\omega)=I_{\{A_n\}}$, $\{X_n(\omega)\}$是随机变量序列, 它们都是0,1值的随机变量. 但对于任何一个$\omega\in(0,1]$，$X_n(\omega)$必有无穷多个取值为0, 也有无穷多个取值为1，因而$X_n(\omega)$的极限不存在. 但

$$P\{X_n(\omega)=0\}=\frac{2^m-1}{2^m},\quad P\{X_n(\omega)=1\}=\frac{1}{2^m}.$$

其中$2^m\le n<2^{m+1}$，当$n\to\infty$时，有$2^m\to\infty$, 因而$\forall\varepsilon>0$，有

$$P\{|X_n(\omega)|\ge\varepsilon\}\le P\{X_n(\omega)=1\}=\frac{1}{2^m}\to 0.$$

故 $X_n(\omega)\xrightarrow{P}0.$

不难验证，$\{X_n(\omega)\}$是r 阶收敛于**0**的，因此这也提供了r 阶收敛得不到概率**1**收敛的例子.

前面讨论的大数定律只要求以概率收敛，若把收敛性提高为以概率**1**收敛，这样得到的大数定律称为强大数定律(**strong law of large numbers**). 显然，若强大数定律成立，则通常的大数定律也成立，反之不然.

第一个强大数定律是由博雷尔**1909**年对伯努利试验场合建立的.

二　博雷尔强大数定律

定理5.4.2（博雷尔）设μ_n是n 次伯努利试验中事件A 出现的次数, 而p 是事件A 在每次试验中发生的概率，则

$$P\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}=p\right\}=1.$$

证明　根据定理5.4.1，只须证明对任意的$\varepsilon>0$, 成立

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\right\}=0.$$

记$A_n=\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}$，则上式可写成$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=0$，

根据博雷尔－康特立引理，只要能证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}$$

对任意的$\varepsilon>0$都收敛即可.

我们把μ_n表示成独立伯努利$0-1$变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$之和，这样

$$\frac{\mu_n}{n}-p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-p),$$

所以 $E\left|\dfrac{\mu_n}{n}-p\right|^4$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}E(X_i-p)(X_j-p)(X_k-p)(X_l-p).$$

注意到各X_i的独立性及$E(X_i-p)=0$，因此上面的和式中只有$E(X_i-p)^4$及$E(X_i-p)^2(X_j-p)^2$的项才不为0，显然

$$E(X_i-p)^4=pq(p^3+q^3),$$

$$E(X_i-p)^2(X_j-p)^2=p^2q^2,\ (i\neq j).$$

上述第一种形式的项有n 项，第二种形式的项有$C_4^2C_n^2=3n(n-1)$. 因此

$$E\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|^4=\frac{pq}{n^4}\left[n(p^3+q^3)+3pqn(n-1)\right]$$

$$=\frac{pq}{n^3}\left[(3n-6)pq+1\right]<\frac{1}{4n^2}$$

于是

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^4}E\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|^4\leq\frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}<\infty.$$

即对任意的$\varepsilon>0$级数都收敛，定理得证.

博雷尔强大数定律断言，随着试验次数的无限增加，频率将趋于概率，这正是我们希望得到的结论．伯努利大数定律只是断言不等式$\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon$成立的概率可以大于$1-\eta$，或$\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon$的概率小于$\eta$，但不论$\eta$多么小，事件序列

$$\left|\frac{\mu_{n+1}}{n+1}-p\right|\geq\varepsilon,\ \left|\frac{\mu_{n+2}}{n+2}-p\right|\geq\varepsilon,\ \cdots,\ \left|\frac{\mu_{2n}}{2n}-p\right|\geq\varepsilon,\cdots$$

中至少有一个发生是可能的，它是可列个事件之并，

但博雷尔强大数定律则断言$\left|\dfrac{\mu_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon$以概率**1**变得很小，而且保持很小．虽然从逻辑上讲，在投硬币时每次都出现正面是可能的，这时$\dfrac{\mu_n}{n}=1$不趋于p，博雷尔强大数定律断言这种情况出现的可能性为**0**.