§3.4　随机变量的独立性

第一章我们讨论了事件的独立性，并给出了试验独立性的概念，下面利用事件独立性的概念引入随机变量独立性的概念.

定义1 若二维随机变量(X,Y)满足：对任意的实数x, y. 事件$\{X \le x\}$与事件$\{Y \le y\}$相互独立，则称随机变量X与Y相互独立. 即

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

$$\Longleftrightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y). \bigstar$$

通常把上式作为随机变量独立性的定义.

若对任意的区间A, B.事件$\{X \in A\}$与$\{Y \in B\}$相互独立.则称随机变量X与Y相互独立.

上述等价于对任意的实数x, y.事件$\{X \in (-\infty, x]\}$与$\{Y \in (-\infty, y]\}$相互独立.即

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

若X,Y相互独立，则对任意的$a<b,\ c<d$，事件

$\{a<X\le b\}$与$\{c<Y\le d\}$相互独立.

证明：若X,Y相互独立，则

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

因而

$$P\left\{a<X\le b,\ c<Y\le d\right\}$$
$$=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$$
$$=F_X(b)F_Y(d)-F_X(a)F_Y(d)-F_X(b)F_Y(c)+F_X(a)F_Y(c)$$
$$=\left[F_X(b)-F_X(a)\right]\left[F_Y(d)-F_Y(c)\right]$$
$$=P\left\{a<X\le b\right\}P\left\{c<Y\le d\right\}$$

离散型　X与Y独立$\longleftrightarrow$对一切$i\,,j$有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

即　$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$

连续型　X与Y独立$\longleftrightarrow$对任意$x\,,y$有

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad (a.e.)$$

$$\longleftrightarrow \quad f_X(x) = f_{X|Y}(x|y), \qquad (f_Y(y) > 0).$$

$$\longleftrightarrow \quad f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x), \qquad (f_X(x) > 0).$$

若随机变量X,Y相互独立，则边缘分布完全确定(X,Y)的联合分布.

【例 1】 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求α与β应满足的条件;

(2) 若X与Y相互独立，求α与β的值.

解：将(X,Y)的分布律改写为

解：将(X,Y)的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\}$
1	$1/6$	$1/9$	$1/18$	$1/3$
2	$1/3$	α	β	$1/3+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\}$	$1/2$	$1/9+\alpha$	$1/18+\beta$	$2/3+\alpha+\beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad 2/3+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$且$\alpha+\beta=1/3$.

(2) 因为X与Y相互独立，所以有

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},\qquad (i=1,2;\quad j=1,2,3)$$

特别有

$$p_{12}=p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 2}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\Rightarrow\alpha=\frac{2}{9},$$

$$p_{13}=p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 3}\Rightarrow\frac{1}{18}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{18}+\beta\right)\Rightarrow\beta=\frac{1}{9}.$$

【例2】已知(X, Y)的联合密度函数为

(1) $$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

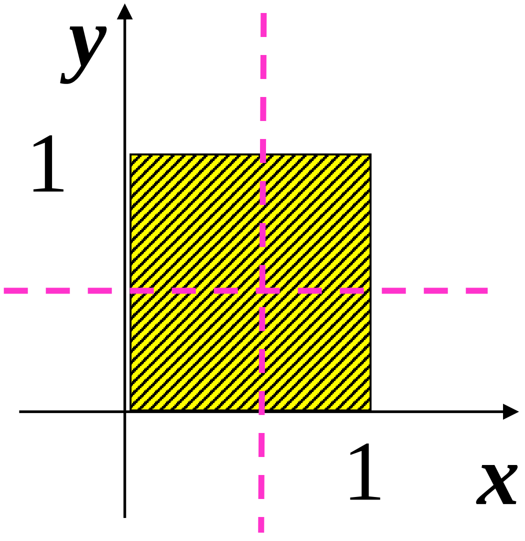
(2) $$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

讨论X,Y是否独立？

解：(1)易求得边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



显然

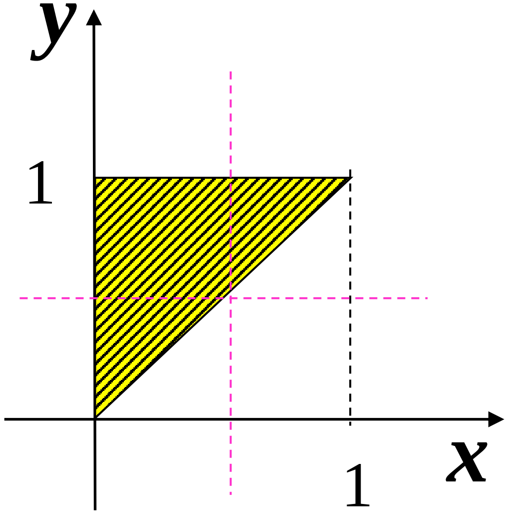
$$f_1(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

故X,Y相互独立.

(2)边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$



显然

$$f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y).$$

故X,Y不独立.

【例3】 设两个独立的随机变量X与Y的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

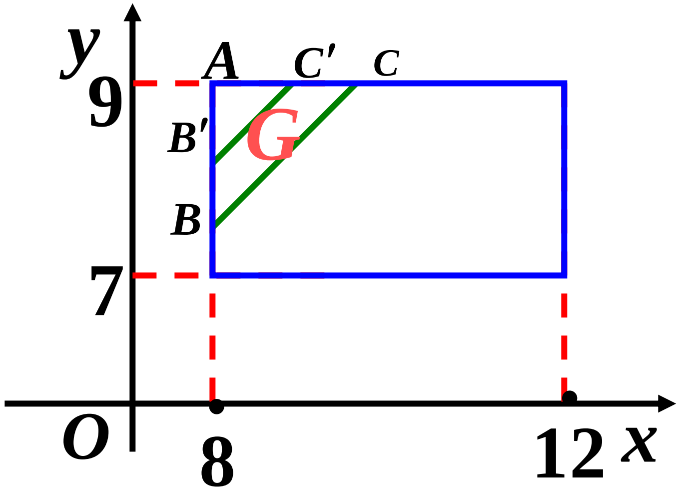
求随机变量(X,Y)的分布律.

解：因为X与Y相互独立，因此(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

练习题

　　一负责人到达办公室的时间均匀分布在8～12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7～9　时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.



练习题答案

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 1/8, & 8 < x < 12, 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$S_G = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{1}{6}.$$

$$P\{|X - Y| \le 1/12\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{48}.$$

定理：设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$X\text{与}Y\text{独立}\Longleftrightarrow \rho=0.$$

证明：$\Longrightarrow$ 对任何x,y有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

取 $x=\mu_1,y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}.$$

故 $\rho=0.$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

补 充

随机变量相互独立的概念可以推广到n维随机变量

若$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$

则称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立.

定理 若随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立. 则

则随机变量$f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$也相互独立.

证明　对任意的区间$A_1, A_2, \cdots, A_n$(一维博雷尔集合)有

$$P\left\{f_1(X_1) \in A_1, f_2(X_2) \in A_2, \cdots, f_n(X_n) \in A_n\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1), X_2 \in f_2^{-1}(A_2), \cdots, X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1)\right\} P\left\{X_2 \in f_2^{-1}(A_2)\right\} \cdots P\left\{X_n \in f_n^{-1}(A_n)\right\}$$

$$= P\left\{f_1(X_1) \in A_1\right\} P\left\{f_2(X_2) \in A_2\right\} \cdots P\left\{f_n(X_n) \in A_n\right\}$$

随机变量相互独立的概念可以推广到随机向量的独立性(维数可以不同).

练习题

给出n维随机向量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与m维随机向量$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$独立的定义.

随机向量的独立性

设$X=(X_1,\cdots,X_n)$是n维随机向量，$Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$是m维随机向量. 如果对任意的n维博雷尔集A及任意的m维博雷尔集B成立

$$P\left\{X\in A,Y\in B\right\}=P\left\{X\in A\right\}P\left\{Y\in B\right\}$$

则称随机向量X与Y相互独立.

上式成立的充分必要条件是

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\\&\qquad=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)\end{aligned}$$

若X与Y相互独立，则显然X的k 维边际子向量与Y的l 维向量相互独立. 特别地，X_i与Y_j相互独立.

例如随机向量$X=(X_1,X_2)$与随机向量$Y=(Y_1,Y_2)$独立. 则X_1与Y_2相互独立。

证明 $$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=F_X(x_1,x_2)F_Y(y_1,y_2)$$

$$F(x_1,+\infty,+\infty,y_2)=F_X(x_1,+\infty)F_Y(+\infty,y_2)$$

即 $$F_{(X_1,Y_2)}(x_1,y_2)=F_{X_1}(x_1)F_{Y_2}(y_2)$$

证毕.

若X与Y相互独立，则显然X的k 维边际子向量与Y的l 维向量相互独立. 特别地，X_i与Y_j相互独立.

例如随机向量$X=(X_1,X_2)$与随机向量$Y=(Y_1,Y_2)$独立.
则X_1与Y_2相互独立。

证明
$$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=F_X(x_1,x_2)F_Y(y_1,y_2)$$
$$F(x_1,+\infty,+\infty,y_2)=F_X(x_1,+\infty)F_Y(+\infty,y_2)$$
即
$$F_{(X_1,Y_2)}(x_1,y_2)=F_{X_1}(x_1)F_{Y_2}(y_2)$$
证毕.