§1.4　几何概型

引例1　某汽车站每隔15分钟有一辆汽车到站, 乘客到达车站的时刻是随机的，求一个乘客候车时间不超过5分钟的概率.

引例2　如果在一个5万平方公里的海域里有表面达40平方公里的大陆架蕴藏着石油, 假设在这海域里随意任取一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

引例3　在**400ml**的自来水中有一个大肠杆菌，今从中随机取出**2ml**水，放在显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率是多少？

定义

若随机试验满足以下条件，则称其为几何概型.

1 有无限个样本点，且样本空间是几何空间中的一个有限区域.

2 样本点落在有限区域的概率与区域的度量大小(长度, 面积, 体积)成正比,而与区域的位置形状无关.

概率计算公式:

$$P(A) = \frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}} = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{几何概率}$$

求几何概率的关键是对样本空间和所求事件用图形描述清楚，然后计算出相应的度量.

几何概型的概率的性质

（1）非负性　　对任何事件A,　有　$P(A) \geq 0$.

（2）规范性　　$P(\Omega) = 1$.

（3）可列可加性　若$A_1, A_2, \cdots$两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

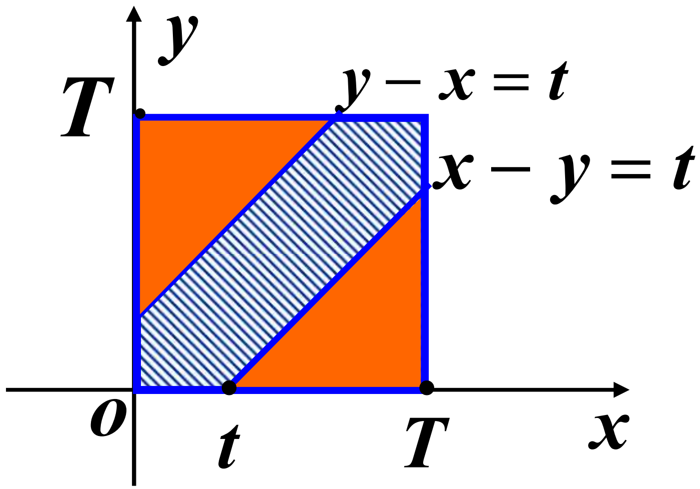
前两个性质与古典概型类似，最后一个性质要比古典概型的性质强（以后证明）.

例1（会面问题）甲、乙两人相约在 0 到T这段时间内，在预定地点会面. 先到的人等候另一个人，经过时间$t(t<T)$后离去. 设每人在0 到T这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两人到达的时刻互不影响. 求甲、乙两人能会面的概率.

解：设 x, y 分别为甲,乙两人到达的时刻，则

$$0 \le x \le T, \quad 0 \le y \le T.$$

两人会面的充要条件为 $|x-y| \le t$,



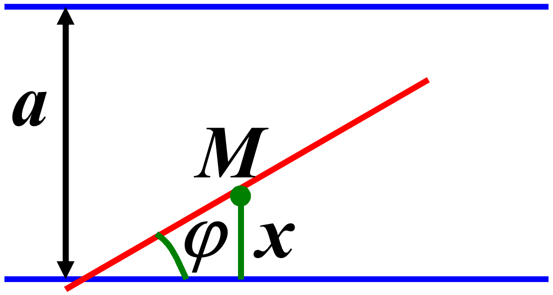
若以x, y表示平面上点的坐标，则所求的概率为

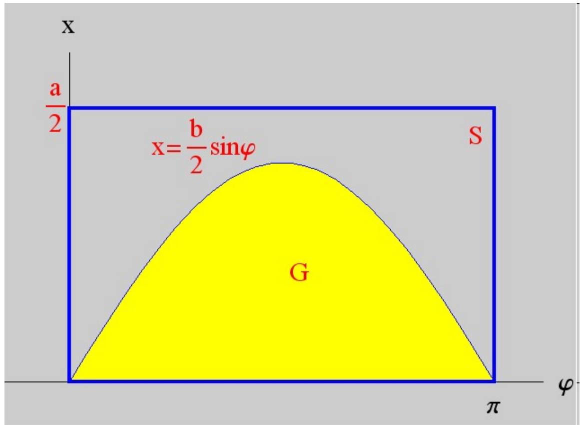
$$p=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

蒲丰投针试验

例2　1777年, 法国科学家蒲丰(Buffon)提出了投针试验问题. 平面上画有等距离为$a(>0)$的一些平行直线，现向此平面任意投掷一根长为$b(<a)$的针, 试求针与任一平行直线相交的概率.

解：以x表示针投到平面上时,针的中点M到最近的一条平行直线的距离. φ表示针与该平行直线的夹角. 那么针落在平面上的位置可由(x,φ)完全确定.





投针试验的所有可能结果与矩形区域

$$\Omega=\{(x,\varphi)\mid 0\le x\le \frac{a}{2}, 0\le\varphi\le\pi\}$$

中的所有点一一对应.

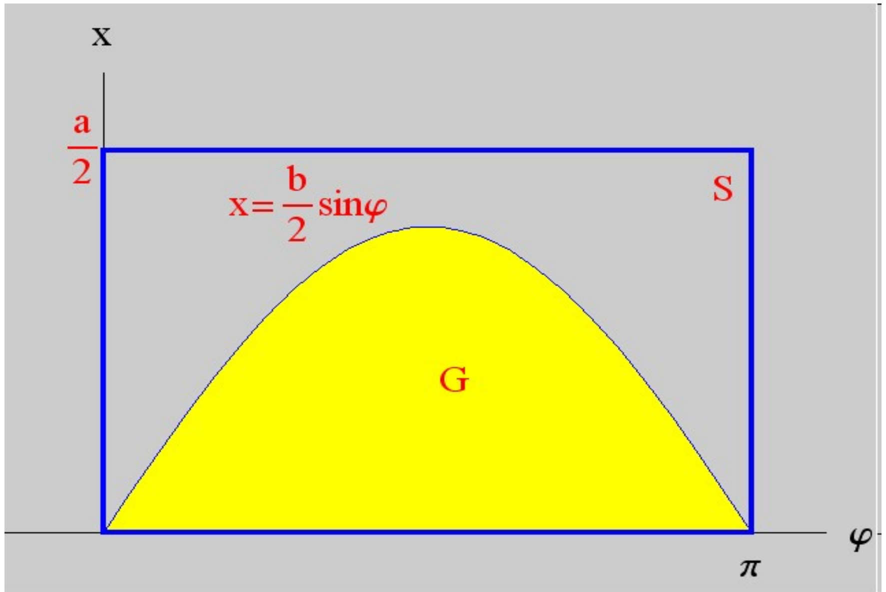
由投掷的任意性可知,这是一个几何概型问题.

所关心的事件

$$A=\{\text{针与某一平行直线相交}\}$$

发生的充分必要条件为Ω中的点满足

$$0 \le x \le \frac{b}{2}\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi.$$



$$P(A)=\frac{\mathrm{m}(G)}{\mathrm{m}(\Omega)}=\frac{G\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{b}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2b}{a\pi}.$$

蒲丰投针试验的应用及意义 $\qquad P(A)=\dfrac{2b}{a\pi}$

根据频率的稳定性，当投针试验次数n很大时，算出针与平行直线相交的次数m，则频率值 m/n即可作为$P(A)$的近似值，代入上式得

$$\frac{m}{n}\approx\frac{2b}{a\pi}, \qquad \Rightarrow \pi\approx\frac{2bn}{am}.$$

利用上式可计算圆周率 π 的近似值.

历史上一些学者的计算结果(直线距离a=1)

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.8333	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

这是一个颇为奇妙的方法：只要设计一个随机试验, 使一个事件的概率与某个未知数有关, 然后通过重复试验，以频率估计概率，即可求得未知数的近似解.

一般说来，试验次数越多，则求的近似解就越精确. 随着电子计算机的出现, 人们便可利用计算机来大量重复模拟所设计的随机试验，人们称之为随机模拟法，也称为蒙特卡罗（**Montecarlo**）法.

例如：可利用随机模拟法求定积分.

例3 在长度为a的线段内任取两点将其分为三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

解：这是一个几何概型问题.

分别用x, y和$a-x-y$表示线段被分成的三段长度，则显然有

$$0<x<a, \qquad 0<y<a, \qquad 0<a-x-y<a.$$

所以样本空间为

$$\Omega=\left\{(x,y): 0<x<a,\ \ a,\ \ 0<y<a,\ \ 0<x+y<a\right\}$$

又根据构成三角形的条件：三角形任意两边之和大于第三边，得事件A所含样本点(x,y)必须满足

$$0 < a - x - y < x + y, \quad 0 < x < y + (a - x - y),$$

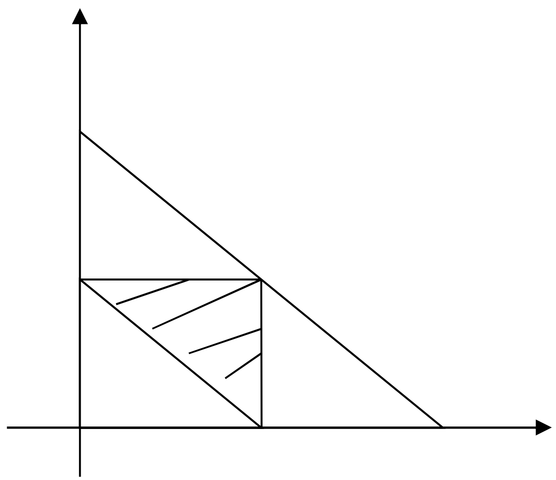
$$0 < y < x + (a - x - y).$$

整理得

$$\frac{a}{2} < x + y < a, \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad 0 < y < \frac{a}{2}.$$

所以事件A可用图示中阴影部分表示

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$



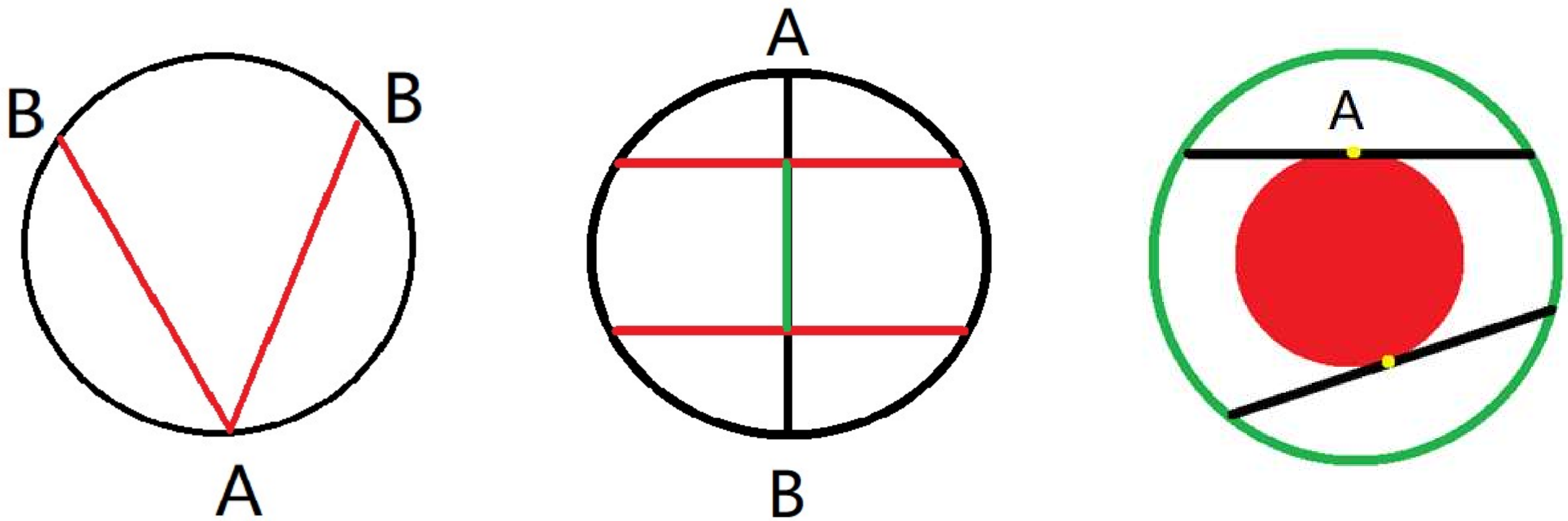
例4（贝特朗奇论）在一个半径为1的圆周上随机地任取一条弦，求其长度大于内接等边三角形边长($\sqrt{3}$)的概率，这个问题在历史上曾称为**Bertrand悖论**，因为问题有不同的答案．因此**Bertrand**悖论对几何概率提出了批评，这种善意的批评，推动了概率论的发展.

在这个问题中，随机性至少有三种理解：

（1）先在圆周上取定一点A，然后再在圆周上随机地取一个点B，连接A与B成为弦；

（2）取定一条直径，然后在该直径上随机地取一个点B，作一条过B与直径垂直的弦；

（**3**）以圆内的任何点作为中点的弦是唯一决定的，因此以这个对应，随机地取一条弦就等同于随机地在圆内取一点$\boldsymbol{B}$.



上述三种情况下，不难得概率分别为

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}.$$

（3）以圆内的任何点作为中点的弦是唯一决定的，因此以这个对应，随机地取一条弦就等同于随机地在圆内取一点B.

上述三种情况下，不难得概率分别为

$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}.$$