第五章　极限定理

极限理论是概率论的重要组成部分，内容非常丰富. 本章我们恒假定X和$\{X_n\}_1^\infty$是定义在同一概率空间$(\Omega,\mathbb{F},P)$上的随机变量，并将讨论$\{X_n\}_1^\infty$与X之间的各种收敛性：一类是随机变量序列的收敛性，另一类是分布函数序列的收敛性.

$$X_n \xrightarrow{P} C \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} C$$

r阶收敛　　概率收敛　　分布收敛　　特征函数收敛

$$X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow f_n(t) \to f(t)$$

$$\Uparrow$$

概率1收敛　$X_n \xrightarrow{a.s.} X$

第一节　依概率收敛与大数定律

一　问题的提出

从第一章我们知道：虽然随机事件在某次试验中是否发生带有偶然性，但在大量的重复试验中却呈现明显的规律性——频率的稳定性. 如果以μ_n记n次贝努利试验中事件A出现的次数，则μ_n/n是事件A出现的频率，频率的稳定性就是指当n增大时μ_n/n与$P(A)$(某个固定的常数)越来越靠近. 这说明了频率所具有的极限性质, 这类极限问题, 我们还没有给出理论上的的刻画. 历史上，雅·贝努利第一个对这种极限进行了研究.

下面先讨论频率μ_n/n的性质：

μ_n是随机变量，它服从二项分布$B(n,p)$.

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}，\quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

因而μ_n/n也是随机变量，且

$$P(\mu_n/n = k/n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}，\quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

由此可见：从理论上讲，频率μ_n/n全部可能的取值为

$$0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1.$$

仅从取值本身看，没有什么极限性质，但从上面我们知道，μ_n/n取这些值的概率有很大的不同．因为

$$E(\mu_n/n) = p,\quad D(\mu_n/n) = pq/n,$$

所以当$n \to +\infty$时，频率的数学期望保持不变，而方差趋于0. 我们知道方差为零的随机变量是常数，于是我们自然预期频率将趋于常数p（即A发生的概率），那么如何描述随机变量的极限？

如何描述 $\dfrac{\mu_n}{n} \longrightarrow p$

数　　列 $x_n \longrightarrow a$

数列极限的描述：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数N，当$n > N$时，总有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$\frac{\mu_n}{n}$与x_n的区别：

（1） $\{x_n\}_1^{\infty}$是数列：给定n，x_n是确定的实数。

$\left\{\frac{\mu_n}{n}\right\}_1^{\infty}$是随机变量序列：给定$n$， $\frac{\mu_n}{n}$不是确定的实数，

取值为$0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$

（2） $\forall\varepsilon>0$， 存在N， 当 $n>N$时， $|x_n-a|<\varepsilon$一定成立.

$\forall\varepsilon>0$， $\left|\frac{\mu_1}{1}-p\right|<\varepsilon,\cdots\cdots,\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon,\cdots\cdots$是事件序列：

无论N多么大， 当$n>N$时，事件$\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon$ 都可能不发生。

我们可以研究数列$P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)$的性质：

$$P\left(\left|\frac{\mu_1}{1}-p\right|<\varepsilon\right),P\left(\left|\frac{\mu_2}{2}-p\right|<\varepsilon\right),\cdots\cdots,P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right),\cdots$$

一种提法是：当n足够大时，频率μ_n/n与概率p有较大偏差的可能性(概率)很小. 用数学语言来讲，就是要证明：对于任意$\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0,$$

或者与它等价的式子成立，即

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

这类极限定理——大数定律.

另一种提法是：博雷尔（近200年后）建立了

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)=p\right\}=1$$

注：给定$\omega\in\Omega$，$\{\frac{\mu_n}{n}(\omega)\}_1^{\infty}$是数列，有三种情况

（1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)$存在，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)=p$;

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)$存在，但$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)\neq p$;

（3） $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n}(\omega)$不存在.

这种提法开创了另外一种形式的极限定理——强大数定律的研究.

本节只研究第一种形式的大数定律，关于强大数定律在后面研究.

为了研究μ_n的极限性质，可以讨论它的分布函数$P\{\mu_n < x\}$的变化情况. 因$E\mu_n = np, D\mu_n = npq$，所以当$n \to +\infty$时，对于固定的$x$而言，它将趋于0, 因而没什么意义. 同样，研究$\mu_n / n$的分布函数$P(\mu_n / n < x)$的变化情况，对于固定的$x$而言，若$x < p$,

$$P\left\{\frac{\mu_n}{n}<x\right\}=P\left\{\frac{\mu_n}{n}-p<x-p\right\}\le P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>p-x\right\}$$

它将趋于**0**，若$x>p$,

$$P\left\{\frac{\mu_n}{n}<x\right\}=P\left\{\frac{\mu_n}{n}-p<x-p\right\}\ge P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<x-p\right\}$$

它将趋于**1**，同样没什么意义. 为此我们通常研究"标准化"的随机变量$Y_n=\dfrac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}$的分布函数$P\{Y_n<x\}$的极限性质. 由$Y_n$的分布函数不难得到$\mu_n$的分布函数.

已经证明上述分布函数的极限分布是$N(0,1)$，即

$$\lim_{n\to+\infty} P\{Y_n < x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

这个结果最早由法国数学家(De Moivre)1718年建立，他对$p=1/2$证明了上述结论. 后来, Lplace于1812年推广到的一般情况，这是另一类极限定理——中心极限定理.

这类极限定理的研究也顺便解决了n较大场合时的二项分布的计算问题——后面研究该类问题.

对于中心极限定理，我们总是对独立随机变量序列$\{X_n\}_1^\infty$进行讨论，假定EX_n及DX_n存在，令

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} EX_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}}$$

我们的目的是寻找使

$$\lim_{n\to+\infty} P\{Y_n < x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

成立的条件．上式成立称$\{X_n\}_1^\infty$服从中心极限定理.

这类极限定理的研究也顺便解决了n 较大场合时的二项分布的计算问题——后面研究该类问题.

本节主要研究第一种类型的极限问题. 以下假定X和$\{X_n\}_1^{\infty}$是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$上的随机变量.

二　依概率收敛

定义5.1.1　如果对于任意的$\varepsilon > 0$成立

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0,$$

则称随机变量序列$\{X_n\}_1^{\infty}$依概率收敛(Convergence)于随机变量X，记为$X_n \xrightarrow{P} X$. (概率收敛就是实变函数的测度收敛).

研究概率收敛需要估计概率$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$，我们有下面的定理.

定理5.1.1（Chebyshev不等式） 设$g(x)$是定义在$(0, +\infty)$上的单调不减的正值函数，如果对随机变量X，有$Eg(|X|) < +\infty$，则对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Eg(|X|)}{g(\varepsilon)}$$

——建立了概率与矩的不等式关系.

证明

$$\begin{aligned} Eg(|X|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(|x|)\mathrm{d}F(x) \\ &\geq \int_{|x|\geq\varepsilon} g(|x|)\mathrm{d}F(x) \geq g(\varepsilon)\int_{|x|\geq\varepsilon} \mathrm{d}F(x) \\ &= g(\varepsilon)P\{|X| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

即得所证.

上式中取$g(x)=x^r\,(r>0)$，那么就有

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$$

特别若取$g(x)=x^2$，并用$X-EX$代替X得

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X-EX|^2}{\varepsilon^2}=\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

三　大数定律

经过长期的研究，人们发现μ_n可以表示成独立变量之和，事实上，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次试验出现}A,\\ 0, & \text{第}i\text{次试验不出现}A.\end{cases}$$

则 $$\mu_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

这里$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的. 为了叙述方便, 我们引入下列定义.

定义5.1.2 若$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是随机变量序列, 令

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

如果存在常数序列$\{a_n\}_1^{\infty}$，使得对任意的$\varepsilon > 0$，恒有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|Y_n - a_n| < \varepsilon\} = 1,$$

或等价式子

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|Y_n - a_n\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

即 $$Y_n - a_n \xrightarrow{P} 0,$$

则称随机变量序列$\{X_n\}_1^{\infty}$服从大数定律。

（一般取 $a_n = EY_n$ ）

——这表明：随着n的增大，$X_1, X_2, \cdots, X_n$平均值的随机性越来越弱.

注：当$a_n \equiv a$时， $Y_n - a_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow{P} a.$

定理5.1.1（**Chebyshev大数定律1866年**）设随机变量序列$\{X_k\}_1^{\infty}$两两不相关, 每一个随机变量都有有限的方差, 并且它们有公共的上界

$$DX_1 \le C,\ \ DX_2 \le C,\ \ \cdots,\ \ DX_n \le C,\cdots$$

则随机变量序列$\{X_k\}_1^{\infty}$服从大数定律，即对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

证明 $\{X_k\}_1^{\infty}$由于两两不相关，故

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \le \frac{C}{n}.$$

再由切比雪夫不等式得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

所以

$$1\geq P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

于是当$n\to\infty$，即得所证结论.

可将定理中的两两不相关减弱为：当$|i-j|\to+\infty$时，相关系数趋于零(相关性越来越弱)，则大数定律仍然成立(伯恩斯坦定理).

马尔可夫注意到上述定理的证明中只需要

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)\to 0$$

定理5.1.2 （Mapkob大数定律）设随机变量序列 $\{X_k\}_1^\infty$ 满足

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)\to 0.$$

则随机变量序列 $\{X_k\}_1^\infty$ 服从大数定律，即对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

定理5.1.3（伯努利大数定律） 设μ_n是n次贝努利试验中事件A出现的次数，而p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

证明 定义随机变量X_i如前所述, 则

$$EX_i = p,\ DX_i = pq \le \frac{1}{4},$$

而

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{\mu_n}{n} - p,$$

故由切比雪夫大数定律得证.

定理5.1.4（泊松大数定律） 如果在一个独立试验中, 事件A 在第k次试验中出现的概率等于p_k，以μ_n记在前n次试验中事件出现的次数, 对任意的$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

证明　记X_k表示第k次试验中事件A出现的次数，则

$$EX_k = p_k, \quad DX_k = p_k(1 - p_k) \le \frac{1}{4},$$

故由切比雪夫大数定律得证.

从理论角度讲：大数定律是一类数学定理，有一定的假设和条件，其结论也由通常的数学方法证明. 其特色在于它研究了平均值的变化规律，建立了概率接近与 **1**和**0**的规律，对我们从偶然性中去认识必然性大有启迪和帮助，进而也奠定了概率论在数学学科中的重要地位.

从应用角度来看：保险业，尤其是精算学研究中的很多理论和方法都大量应用大数定律，因而概率论是一门理论和应用性都很强的数学学科.

四　棣莫弗-拉普拉斯极限定理

大数定律断言$P\{|\mu_n/n-p|\geq\varepsilon\}$当 $n\to\infty$ 时趋于0，也即μ_n/n接近于p，而棣莫弗—拉普拉斯极限定理则给出了μ_n的渐进分布的更精确表述. 棣莫弗－拉普拉斯极限定理给出了两个结果：

第一个结果给出了$P\{\mu_n=k\}$的渐进表达式, 这类结果称为局部极限定理；第二个结果给出了标准化随机变量$\dfrac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}$的渐进分布，称为积分极限定理. 它是一般的中心极限定理的特例.

定理5.1.5（棣莫弗－拉普拉斯） 设μ_n是n次贝努利试验中事件A出现的次数，而p是事件A在每次试验中发生的概率,$0<p<1$，则对任意有限区间$[a,b]$:

(1) 当$a \le x_k \equiv \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} \le b$及$n \to \infty$时，一致地有

$$P\{\mu_n = k\} \div \left(\frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}\right) \longrightarrow 1,$$

(2)当$n \to \infty$时，一致地有

$$P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \longrightarrow \int_a^b \varphi(x)dx.$$

其中，$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，　$(-\infty, +\infty)$.

证明 要利用斯特林（Stirling）公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n}, \quad (0 < \theta_n < \frac{1}{12n}).$$

和展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (\text{略}).$$

其中，$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty, +\infty).$

我们这里只给出定理的内容，对积分极限定理将在§3加以证明.

五、棣莫弗-拉普拉斯极限定理的一些应用

由于$\dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\dfrac{n}{pq}}(\dfrac{\mu_n}{n} - p)$，棣莫弗－拉普拉斯极限定理研究了$\dfrac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$的极限分布，可以想象$n \to \infty$时，$\dfrac{\mu_n}{n} - p$应该概率收敛到$\mathbf{0}$. 而这正是伯努利大数定律所给出的结论.

1　推导伯努利大数定律

给定$\varepsilon > 0$，对任意的$\delta > 0$，可选取正数l_0，使得

$$\int_{-l_0}^{l_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1 - 0.5\delta.$$

选定l_0后，可选取N_1，使得当$n \geq N_1$时

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} > l_0$$

因而当$n \geq N_1$时

$$\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = \left\{\left|\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

$$\supseteq \left\{\left|\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < l_0\right\}$$

所以

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq P\left\{\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|<l_0\right\}$$

根据棣莫弗－拉普拉斯积分极限定理知：存在N_2，当$n\geq N_2$时

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|<l_0\right\}\geq\int_{-l_0}^{l_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-0.5\delta\geq 1-\delta.$$

令$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n\geq N$时，有

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq P\left\{\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|<l_0\right\}\geq 1-\delta.$$

这就证明了伯努利大数定律.

2　用频率估计概率时的计算问题

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1.$$

这个关系式可用来解决很多计算问题．记

$$\beta=P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1.$$

上式中的四个量中，已知其中任意3个, 可求另外的一个量.

【例1】蒲丰试验中投掷硬币4040次. 出现正面2048次，试计算当重复蒲丰试验时，正面出现的频率与概率之差的偏离程度不大于蒲丰试验中所发生的偏差的概率.

解：蒲丰实验的频率与概率的偏差为

$$\varepsilon = \left| \frac{2048}{4040} - \frac{1}{2} \right| = 0.00693$$

所求概率为

$$\beta = P\left\{ \left| \frac{\mu_{4040}}{4040} - \frac{1}{2} \right| < 0.00693 \right\} = 2\Phi(0.00693\sqrt{\frac{4040}{0.5^2}}) - 1$$

$$= 2\Phi(0.8810) - 1 = 2 \times 0.8109 - 1 = 0.622.$$

【例2】 某品牌往常的市场占有率为15%，今公司决定再做一次抽样调查，要求误差小于1%的概率达到95%，问至少要抽多少户？

解： 抽样调查是贝努利概型，本题中

$$p = 0.15, \quad , \quad \varepsilon = 0.01, \quad \beta = 0.95.$$

要使得 $\beta = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq}) - 1 \geq 0.95,$

则 $\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq}) \geq \dfrac{0.95+1}{2} = 0.975.$

查表得 $\varepsilon\sqrt{n/pq} \geq 1.96.$

因此 $n \geq (\dfrac{1.96}{\varepsilon})^2 pq = (\dfrac{1.96}{0.01})^2 \times 0.15 \times 0.85 = 4898.04.$

【例3】在上例的市场占有率抽样调查中, 若预算只允许调查2000户，可信度仍要求为95%，这时的抽样误差达到多少？

解：根据上题的求解得

$$\varepsilon = 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.15 \times 0.85}{2000}} = 0.01565.$$

3 局部极限定理在二项分布计算中的应用

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_k).$$

4 积分极限定理在二项分布计算中的应用

$$P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \Phi(b) - \Phi(a).$$

有下列近似计算公式

$$P\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} = P\{k_1 - 0.5 < \mu_n < k_2 + 0.5\}$$

$$\approx \Phi(\frac{k_2 - np + 0.5}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - np - 0.5}{\sqrt{npq}}).$$

例如：保险公司盈利的概率，车间用电配额的大小，航空公司超售机票的数量，这些问题都可归为贝努利概型，因而可利用上式来计算概率问题.

【例4】根据生命表知道，某年龄段保险者里，一年中每个人死亡的概率为0.005，现有10000个这类人参加人寿保险，试求在未来一年中在这些保险者里面.

(1) 有40个人死亡的概率；

(2) 死亡人数不超过70个人的概率.

解：(1) $np = 10000 \times 0.005 = 50,$

$$npq = 10000 \times 0.005 \times 0.995 = 49.75.$$

$$b(40;10000,0.005) \approx \frac{1}{\sqrt{49.75}}\varphi\left(\frac{40-50}{\sqrt{49.75}}\right)$$

$$= \frac{1}{7.05}\varphi(-1.418) = \frac{1}{7.05}\varphi(1.418) = 0.0207.$$

(2) $P\{\mu_n \le 70\} \approx \Phi\left(\frac{70-50+0.5}{\sqrt{49.75}}\right) - \Phi\left(\frac{0-50-0.5}{\sqrt{49.75}}\right).$

$$= \Phi(2.91) - \Phi(-7.16) = 0.998.$$

练习题

1. 设有一系列口袋，在第k 个口袋中放有1个白球和$k-1$个黑球. 今从前n个口袋中各取1球，以S_n表示所取出的n个球中的白球个数. 证明当$r > \frac{1}{2}$时，有

$$\frac{S_n - ES_n}{\ln^r n} \xrightarrow{P} 0.$$

2. 在上题中，有 $\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow{P} 1.$

练习题答案

证明 (1) 定义随机变量X_k，$k=1,2,\cdots$如下：

$$X_k=\begin{cases}1, & 第k个口袋取出白球,\\ 0, & 第k个口袋取出黑球.\end{cases}$$

则$\{X_k\}_1^\infty$是相互独立的贝努利随机变量序列，并且

$$P\{X_k=1\}=\frac{1}{k},\quad P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{k}.$$

因而

$$EX_k=\frac{1}{k},\quad DX_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}$$

由于$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$，所以

$$DS_n=\sum_{k=1}^{n}DX_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq C\ln n.$$

其中$C>0$是常数，根据切比雪夫不等式，对任给

$\varepsilon>0$，当$n\to+\infty$时有

$$P\left\{\left|\frac{S_n-ES_n}{\ln^r n}\right|\geq\varepsilon\right\}=P\left\{\left|S_n-ES_n\right|\geq\varepsilon\ln^r n\right\}$$

$$\leq\frac{DS_n}{\varepsilon^2\ln^{2r}n}\leq\frac{C}{\varepsilon^2\ln^{2r-1}n}\to 0$$

因而 $\dfrac{S_n-ES_n}{\ln^r n}\xrightarrow{P}0.$

（2） $$P\left\{\left|\frac{S_n}{\ln n}-1\right|\geq\varepsilon\right\}=P\left\{\left|S_n-\ln n\right|\geq\varepsilon\ln n\right\}$$

$$= P\left\{\left|(S_n - ES_n) + (ES_n - \ln n)\right| \ge \varepsilon \ln n\right\}$$

$$\le P\left\{\left|S_n - ES_n\right| \ge \varepsilon \ln n - (ES_n - \ln n)\right\}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(ES_n - \ln n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} 1/k - \ln n) = c > 0,$

从而当n 充分大时，对任给$\varepsilon > 0$，都有

$$\varepsilon \ln n - (ES_n - \ln n) > \frac{1}{2}\varepsilon \ln n.$$

因而

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{\ln n} - 1\right| \ge \varepsilon\right\} \le P\left\{\left|S_n - ES_n\right| \ge \varepsilon \ln n - (ES_n - \ln n)\right\}$$

$$\le P\left\{\left|S_n - ES_n\right| \ge \frac{1}{2}\varepsilon \ln n\right\} \le \frac{DS_n}{(\frac{1}{2}\varepsilon \ln n)^2} \le \frac{4C}{\varepsilon^2 \ln n} \to 0.$$