第三章　随机变量与分布函数

§ 3.1　随机变量及其分布

一、随机变量的概念

先观察一个随机试验：盒子中有n个白球和1个黑球. 每次从中取出一个球, 不再放回, 直到取出黑球为止. 该随机试验有$n+1$个样本点，其样本空间为

$$\Omega=\{(\text{黑}),(\text{白},\text{黑}),(\text{白},\text{白},\text{黑}),\cdots,(\text{白},\text{白},\cdots,\text{白},\text{黑})\}$$

这些样本点分别记为ω_1，$\omega_2,\cdots$，ω_{n+1}.

显然, 每个样本点ω_k可以用所需要的取球次数来表示, 如果用X表示所需的取球次数，那么X具有以下特点：

(1) X是样本点的函数，即$X=X(\omega)$. 由于样本点ω的出现是随机的，因而$X(\omega)$的取值也是随机的.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,n+1\}$.

(3) $\{\omega: X(\omega)=k\}$表示样本点ω_k, 更一般的, 对任给实数x，$\{\omega: X(\omega)\le x\}$都是随机事件.

例如：

$\{\omega: X(\omega)\le 0\}$是不可能事件

$\{\omega: X(\omega)\le 5\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$

——取到的球数不超过5个.

显然X是样本空间到实数空间的映射,是试验结果的"数量化"，借助于X，可以很方便的描述事件.

随机变量的概念.

说明：

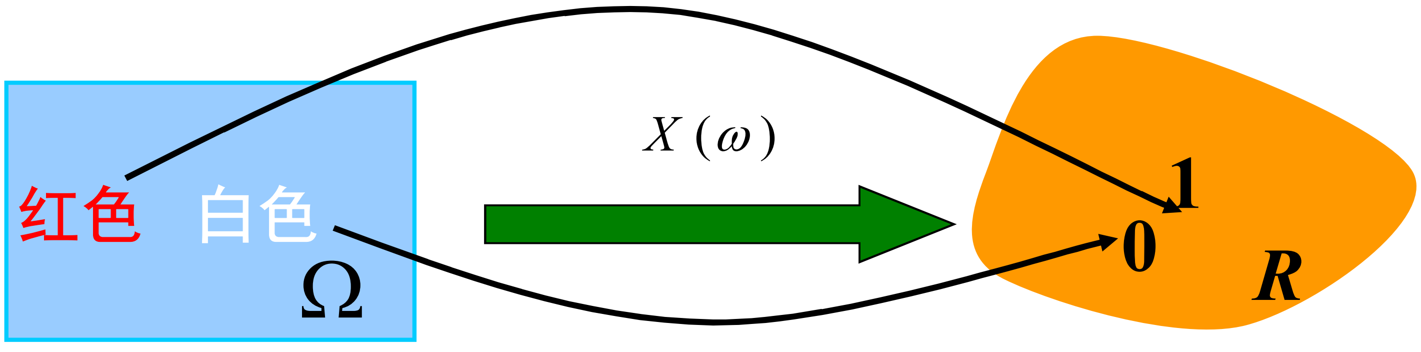
1 有些试验结果本身与数值有关．例如：每天从某火车站下火车的人数；昆虫的产卵数等．

2 在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但可以引进一个变量来表示它的各种结果．

例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球,观察摸出球的颜色.

$$\Omega = \{红色、白色\} \quad \rightarrow \quad 非数量$$

可采用下列方法将Ω数量化.



即有 $$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 红色, \\ 0, & \omega = 白色. \end{cases}$$

这样便将非数量的$\Omega = \{红色，白色\}$数量化了.

例2 盒子中有个n白球和1个黑球。每次从中取出球一个球，不再放回，直到取出黑球为止，考虑所需的取球次数.

解：用X表示所需的取球次数. 特点：

(1) X的取值由试验结果而定----随机而定.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots, n+1\}$是有限集合.

(3) $\{X=k\}$是事件, 显然：$X=k \Leftrightarrow$ 第k次才取到黑球.

根据乘法原理

$$P\{X=k\}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n+1}$$

且 $$\sum_{k=1}^{n+1} P\{X=k\}=1.$$

例3 上例中，每次取出个球后，若不是黑球. 则将其放回，直到取得黑球为止. 考虑所需要的取球次数.

解： 用X表示所需的取球次数. X特点：

(1) X的取值由试验结果而定----随机而定.

(2) X的所有可能取值为$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$是可数集合.

(3) $\{X=k\}$是事件，显然

$$X=k \Leftrightarrow \text{第}k\text{ 次才取到黑球.}$$

根据乘法原理

$$P\{X=k\}=(\frac{n}{n+1})^{k-1}\times\frac{1}{n+1}, \qquad k=1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=1.$$

例4 在区间$[0,1)$内随机抛掷一个质点，考虑质点所在位置的坐标.

解：用X表示质点所在位置的坐标. 特点：

(1) X的取值由试验结果而定----随机而定;

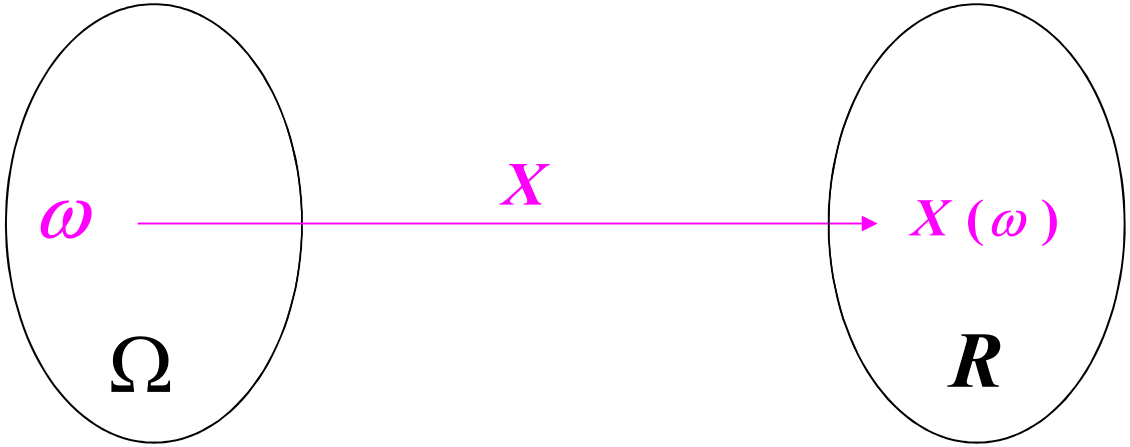
(2) X的所有可能取值为区间$[0,1)$;

(3) 对$\forall x \in [0,1)$, $\{X < x\}$是随机事件，

$$P\{X < x\} = \frac{L[0,x)}{L[0,1)} = x$$

更一般的 $$P\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1,. \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

上述三个例子都是建立了样本空间到实数空间的映射.



样本空间: $\Omega \xrightarrow{X} \boldsymbol{R}$ 实数空间

样本点: $\omega \xrightarrow{X} \boldsymbol{X(\omega)}$ 实数(点)

事 件: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{X} \left\{ \boldsymbol{X(\omega)} : \omega \in \boldsymbol{A} \right\}$ 实数子集

我们感兴趣的是$X(\omega)$落在某区间$(-\infty, x)$内或者等于某个值$\{x\}$的概率. 这要求$\{\omega : X(\omega) < x\}$有概率，也就是要求集合$\{\omega : X(\omega) < x\}$是事件. 即对$\forall x \in R$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathbb{F}$$

它等价于

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathbb{F}$$

其中B是直线上的任一博雷尔点集(这是由于任一博雷尔点集可由形如的区间经并、交等运算得来).

例如： $$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x+\frac{1}{n}) - (-\infty, x),$$

$$[x, y) = (-\infty, y) - (-\infty, x), \quad [x, y] = [x, y) + \{y\},$$

$$(x, y) = [x, y) - \{x\}, \quad (x, y] = [x, y) + \{y\} - \{x\}.$$

定义3.1.1 设$X(\omega)$是定义在概率空间$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$上的单值实函数，如果对于直线上任一博雷尔点集$B$，有

$$\{\omega: X(\omega)\in B\}\in\mathbb{F}$$

则称$X(\omega)$为随机变量，而称$P\{\omega: X(\omega)\in B\}$为随机变量$X(\omega)$的概率分布．取$B=(-\infty,x)$，则$P(X(\omega)<x)$有定义．称

$$F(x)=P\{X(\omega)<x\},\qquad -\infty<x<\infty.$$

为随机变量$X(\omega)$的分布函数．简记为$X(\omega)\sim F(x)$或$X\sim F(x)$.

注：(1) 任何随机变量都存在分布函数；

(2) 由于映射X不一定是一一映射，形如

$\{\omega : X(\omega) \in B\}$事件的全体不一定等于$\mathbb{F}$.

例如：$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 定义

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{若}\,\omega\,\text{是偶数} \\ 1, & \text{若}\,\omega\,\text{是奇数} \end{cases}$$

则 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \overset{\text{全体}}{=\!=\!=\!=\!=} \Omega$，$\phi$，$\{1,3,5\}$，$\{2,4,6\}$.

例如：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　　定义

$$X(\omega)=\begin{cases}0, & 若\omega是偶数\\ 1, & 若\omega是奇数\end{cases}$$

则　$\{\omega: X(\omega)\in B\} \overset{全体}{=\!=\!=\!=\!=} \Omega$，$\phi$，$\{1,3,5\}$，$\{2,4,6\}$.

二、 分布函数的性质　事件概率的计算

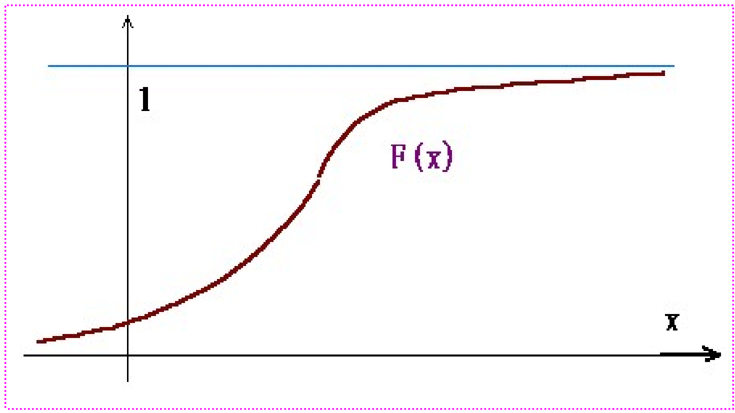
由于分布函数是事件的概率，根据概率的性质得到

定理3.2.1 分布函数$F(x)$具有下列性质：

（1） 单调性：若$a<b$，则 $F(a)\le F(b)$;

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,　　$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$;

（3） 左连续性：　$F(x-0)=F(x)$.



证明 （1） $F(b)-F(a)=P\{a \le X < b\} \ge 0;$

（2） $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{-\infty < X < -n\} = \phi, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\{-\infty < X < n\} = \Omega.$

上述两端求概率，并利用概率的连续性得

$$\lim_{n\to+\infty} P\{-\infty < X < -n\} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\{-\infty < X < n\} = 1.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} F(-n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} F(n) = 1.$$

由于 $[x] \le x < [x]+1,$ 再由 $F(x)$ 的单调性知

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n) = 1.$$

通常记作 $F(-\infty)=0, \qquad F(+\infty)=1.$

（3）由于$F(x)$是单调函数，只须证明对于单调上升的数列 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots, x_n \to x$ 成立

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$$

即可.
$$F(x) - F(x_0) = P\{x_0 \le X < x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[F(x_n) - F(x_{n-1})\right] = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) - F(x_0)$$

所以
$$F(x-0) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x).$$

或
$$F(x) = P\{X < x\} = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X < x - \frac{1}{n}\right\}\right]$$

$$\overset{\text{概率的下连续性}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{n\to+\infty} P\{X < x_n\} = \lim_{n\to+\infty} F(x_n).$$

利用分布函数可计算下列事件的概率 — 求“函数值”

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

$$P(X = a) = F(a+0) - F(a),$$

$$P(a \le X \le b) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(a < X < b) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(a < X \le b) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$P(X \ge b) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

随机变量的分类

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{离散型}\\ \text{非离散型}\begin{cases}\text{连续型}\\ \text{奇异型}\end{cases}\end{cases}$$

$$\{\omega : X(\omega)=a\}\text{简记为}\{X=a\}$$

$$\{X=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{a\le X<a+\frac{1}{n}\right\}$$

$$P\{X=a\}\xlongequal{\text{概率的上连续性}}\lim_{n\to+\infty}P\left\{a\le X<a+\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[F(a+\frac{1}{n})-F(a)\right]=F(a+0)-F(a)$$

离散型　可能取值的个数为有限个或可列个的随机变量.

连续型　可能取值充满某个（有限，无限）区间，并且其分布函数可表为某非负函数的积分的随机变量.

三、 离散型随机变量

——求概率变为求若干个“数的和”

设$X(\omega)$是概率空间$(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$上的随机变量．若集合

$$\{X(\omega):\omega\in\Omega\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

是有限集或可列集，则称是离散型随机变量．由于

$$\{\omega:X(\omega)<x\}=\sum_{x_i<x}\{\omega:X(\omega)=x_i\}$$

故只要给出了事件$\{\omega: X(\omega)=x_i\}$的概率$p(x_i)$，就可算出事件$\{\omega: X(\omega)<x\}$的概率. 称

X	x_1	x_2	……	x_n	……
P	p_1	p_2	……	p_n	……

为离散型随机变量X的概率分布列——直观. 其中

（1）$p_k \geq 0$，（2）$\sum_k p_k = 1$.

事实上：$\{\omega: X(\omega)=x_1\},\{\omega: X(\omega)=x_2\},\cdots\cdots$ 都是随机事件，它们构成了对 Ω 的一个分割.

离散型随机变量的分布函数$F(x)$的特点：$F(x)$ 是一个跳跃函数，它在x_k处的跳跃度是p_k.

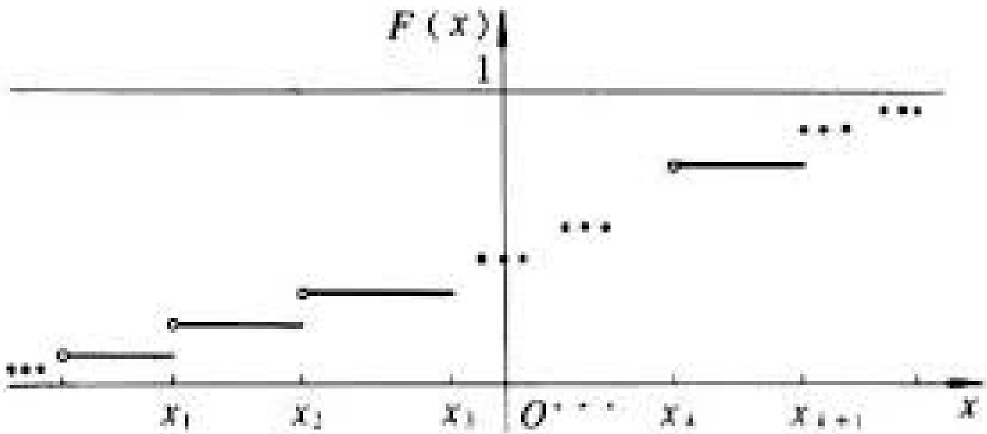


图 2 离散型随机变量的分布函数

几种离散型随机变量

【退化分布】 $P\{X=c\}=1,$ 分布函数为

$$I_c(x)=\begin{cases}0 & x\le c\\ 1 & x>c\end{cases}$$

【两点分布】

$$P\{X=1\}=p, \qquad P\{X=0\}=1-p=q.$$

【二项分布】 记作 $X \sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$k=0,1,2,\cdots,n$$

当n较大，p较小，np大小适中时：

$$b(k;n,p)\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

【超几何分布】

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\qquad 0\le k\le n\le N,\ \ k\le M.$$

当 $N>>n$时，$$\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

【泊松分布】 记作 $X \sim P(\lambda)$.

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

【几何分布】 记作 $X \sim G(p)$,

$$P\{X=k\}=g(k;p)=q^{k-1}p, \quad k=1,2,\cdots$$

性质：无记忆性.

定理3.2.2 在伯努利试验中，设事件A发生的概率为p，X表示等待事件首次出现时的时间. 则

$$P\{X=m+k \mid X>m\}=\frac{P\{X=m+k\}}{P\{X>m\}}=\frac{q^{m+k-1}p}{q^m}$$

$$=q^{k-1}p=g(k;p)=P\{X=k\}.$$

对于取正整数值的（离散型）随机变量，只有几何分布具有上述性质．即：若Y是取正整数值的随机变量，如果$P\left\{Y=k+1 \middle| Y>k\right\}$与$k$无关. 那么$Y$服从几何分布．（练习）

【帕斯卡分布】在伯努利试验中，设事件A发生的概率为p，记X为伯努利试验中事件A第r次发生时的试验次数,则X是随机变量

$$P\left\{X=k\right\}=f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^{r}q^{k-r}, \quad k=r,r+1,\cdots$$

$f(k;r,p)$称为帕斯卡分布.

【帕斯卡分布与几何分布】 记X_i表示事件A第$i-1$次出现后到事件A第i 次出现时之间的试验次数. 则显然有

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_r, \qquad X_i \sim G(p),$$

$$(Y = k) = \bigcup_{k_1+\cdots+k_r=k} (X_1 = k_1, \cdots, X_r = k_r),$$

这相当于相同的k个球放入r个不同的盒子且无空盒出现. 共有分法——C_{k-1}^{r-1}. 而

$$P(X_1 = k_1, \cdots, X_r = k_r) = \prod_{j=1}^{r} P(X_j = k_j) = \prod_{j=1}^{r} pq^{k_j-1} = p^r q^{k-r}$$

故 $$P(Y = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}.$$

四、连续型随机变量

——求概率变为“求积分”.

定义3.1.2 若随机变量X的取值范围是区间(a,b)或$(-\infty,+\infty)$，而且其分布函数是绝对连续函数. 即存在可积函数$f(x)$，使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x\in R.$$

此时，几乎对所有的$x\in R$，成立 $f(x)=F'(x)$.

称X是连续型随机变量，称$f(x)$为的分布密度函数.

它满足

$$f(x)\geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

由于$F(x)$是连续函数，所以

$$P\{X=c\}=F(c+0)-F(c)=0$$

因而X落在区间$[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$的概率是一样的．难得到．

$$P\{X\in I\}=\int_I f(x)dx$$

其中 I 是某个区间或若干个区间的并(可以是任意的博雷尔集合)．

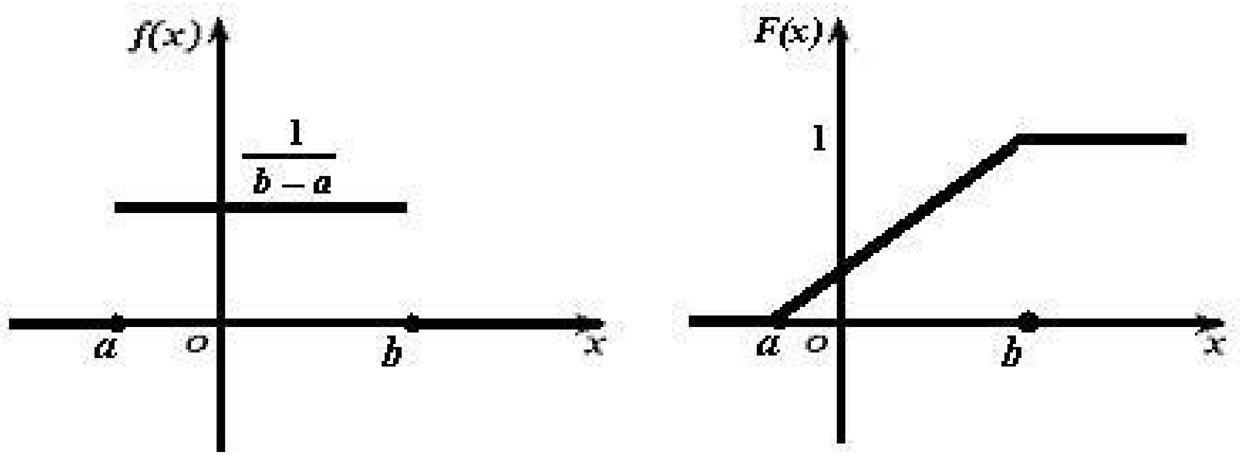
几种连续型随机变量

【均匀分布】如果连续型随机变量X具有下列密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a\text{或}x>b\end{cases}$$

其中a,b是有限数，则称X是$[a,b]$上的均匀分布. 记作$X\sim U[a,b]$. 其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>1\end{cases}$$



特点：若$X \sim U[a,b]$，则X取值落在$U[a,b]$中的某一区域内的概率与这一区域的长度(测度)成正比，而与区域的位置无关.

误差是服从均匀分布的一个例子. 此外，均匀分布的重要性在于：借助于均匀分布可以生成任意的分布，而在计算机上很容易生成均匀分布.

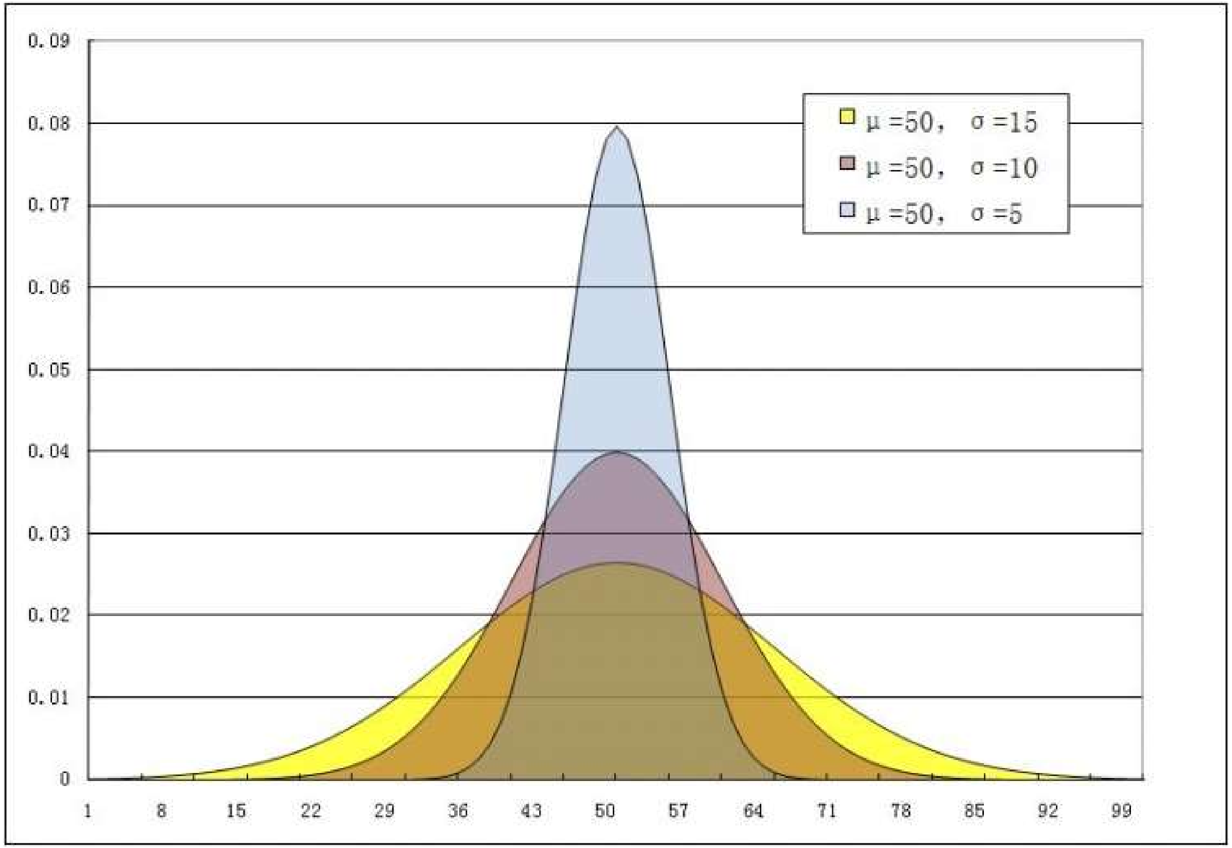
【正态分布】 如果连续型随机变量X具有下列密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

其中σ,μ 均为常数, 且$\sigma > 0$, 相应的分布函数为

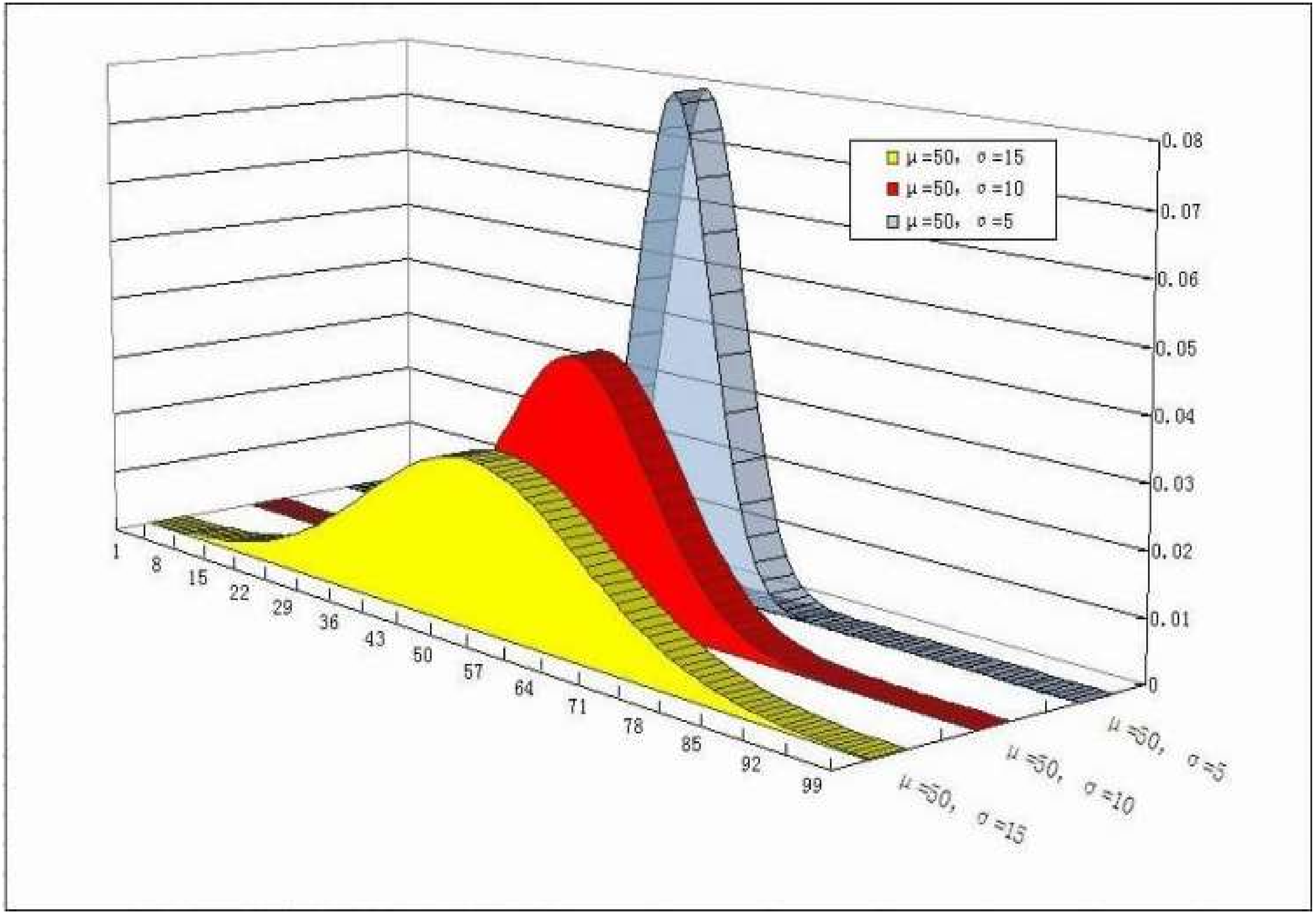
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

这种分布称为正态分布(normal distribution), 简记为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$.



$f(x)$ 的特点：

在$x=\mu$ 处达到极大值，关于$x=\mu$对称；σ 越小, 图形越高耸，分布就越集中于μ 的附近.


μ=50, σ=15
μ=50, σ=10
μ=50, σ=5
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
1
8
15
22
29
36
43
50
57
64
71
78
85
92
99
μ=50, σ=5
μ=50, σ=10
μ=50, σ=15

正态分布是概率论中最重要的分布．一方面，正态分布是最常见的分布，例如测量的误差；炮弹落点的分布, 人的生理特征的数据: 身高、体重等.

一般说来, 如果影响某一数量指标的随机因素很多，而每个因素所起的作用不太大，则这个指标服从正态分布(第五章 — 极限定理), 正态分布具有许多良好的性质, 许多分布可用正态分布来近似(二项分布, 泊松分布等), 此外一些分布(数理统计中的χ^2分布, $\boldsymbol{t}$分布，$\boldsymbol{F}$分布)可由正态分布来导出.

标准正态分布

当$\mu=0$, $\sigma=1$时，称为标准正态分布，记为$X \sim N(0,1)$，相应的分布密度函数及分布函数分别记为$\varphi(x)$及$\Phi(x)$.

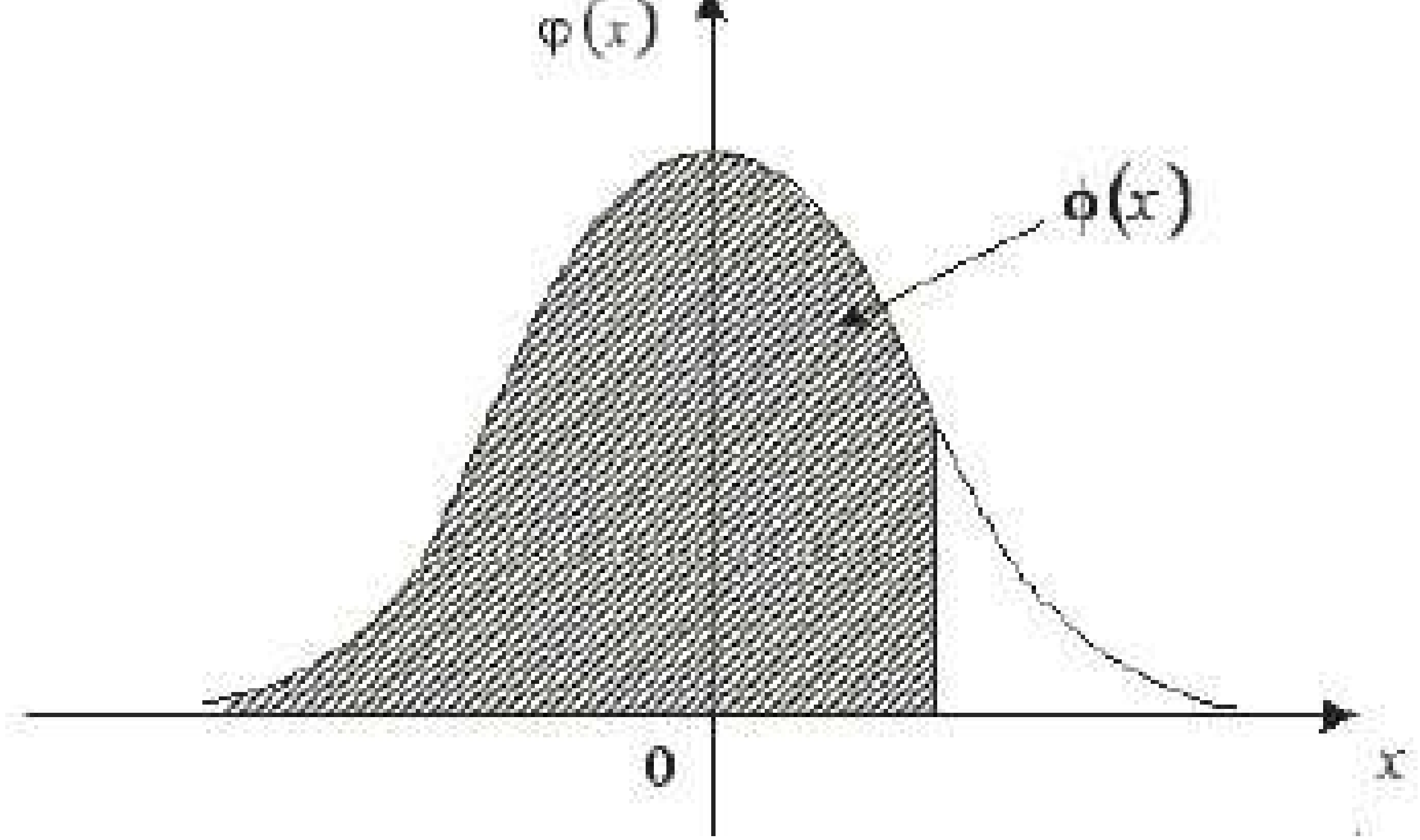
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\overset{t=\sqrt{2u}}{=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}=1.$$

因而$\varphi(x)$是分布密度函数（见后面Γ函数的知识）.


φ(x)
Φ(x)
0
x

正态分布概率的计算

标准正态分布

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\begin{cases}查表\Phi(x) & x>0\\ 1-\Phi(-x) & x<0\end{cases}$$

一般正态分布

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \overset{s=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

因而若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma)$$
$$= \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

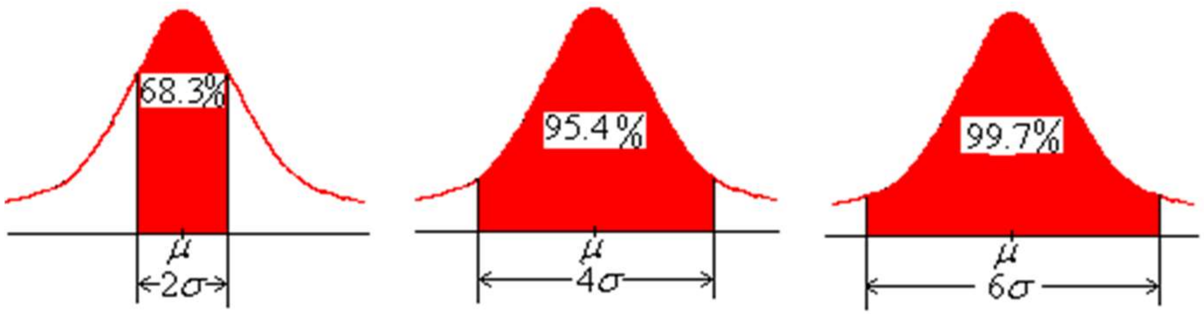
特别

$$P(|X-\mu| < \sigma) = 2\Phi(1) - 1 \approx 68.27\%$$
$$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 \approx 95.45\%$$
$$P(|X-\mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 \approx 99.73\%$$

质量管理中的

“3σ” 原则.

例：书本 $P_{135} - P_{137}$



【指数分布】如果连续型随机变量X具有下列密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0\end{cases}$$

这里参数$\lambda > 0$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0\end{cases}$$

这种分布称为指数分布．简记为$X \sim \exp(\lambda)$.

指数分布有重要应用，常用它作为各种寿命分布的近似，例如电子元器件的寿命, 某些动物的寿命，电话的通话时间, 随机服务系统的服务时间等.

性质：无记忆性(类似于几何分布).

设 $X \sim \exp(\lambda)$. 则$\forall s>0, t>0$

$$P\{X \geq s+t \mid X \geq s\}=\frac{P\{X \geq s+t\}}{P\{X \geq s\}}.$$

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\{X \geq t\}$$

练习题

证明:对于取非负值的随机变量，只有指数分布具有上述性质.

五、指数分布与泊松过程

在泊松过程中，第一个呼叫到来的时刻服从指数分布.

用$X(t)$表示参数为λt的泊松过程，以Y_1表示第一个呼叫到来的时刻. 则 $\{Y_1 \geq t\}$及$\{X(t)=0\}$都表示时间$[0,t)$内没有来到呼叫这一事件. 从而

$$P\{Y_1 \geq t\} = P\{X(t)=0\} = e^{-\lambda t},$$

$$P\{Y_1 < t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

这说明Y_1服从指数分布. 将这一结果推广到更一般的情况.

【埃尔朗分布】在泊松过程中，第r个呼叫到来的时刻服从埃尔朗分布.

用$X(t)$表示参数为λt 的泊松过程，以W_r表示第r 个呼叫到来的时刻．则事件$\{W_r < t\}$发生表示第r 个呼叫到来的时刻在时刻t 之前, 这等价于$[0,t)$时间内至少来到r个呼叫。即有

$$\{W_r < t\} = \{X(t) \geq r\},$$

记$F(t)$表示W_r的分布函数，则

$$F(t) = P\{W_r < t\} = P\{X(t) \geq r\}$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

因此

$$f(t) = F'(t) = -\left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda t)^k (-\lambda)}{k!} e^{-\lambda t} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k(\lambda t)^{k-1} \cdot \lambda e^{-\lambda t}}{k!} \right]$$

$$f(t)=F'(t)=-\left[\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^k(-\lambda)}{k!}e^{-\lambda t}+\sum_{k=0}^{r-1}\frac{k(\lambda t)^{k-1}\cdot\lambda e^{-\lambda t}}{k!}\right]$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}-\lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{r-1}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$=\frac{\lambda^r t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t}=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}t^{r-1}e^{-\lambda t}.$$

因对任意的 $r>0,\ \lambda>0.$

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx=1$$

所以对任意的正整数r 及实数$\lambda>0$

$$f(x)=\frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x},\quad x>0.$$

是一个密度函数.

当$r=1$时，埃尔朗分布就是指数分布．此外，若记Y_i表示从来到的第$i-1$个呼叫到第i个呼叫之间的时间间隔．则

$$W_r = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r ,$$

其中$Y_i \sim \exp(\lambda)$，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$相互独立．

可以据此推导出W_r的分布(本章第三节后)．这与由几何分布推导帕斯卡分布类似.

【Γ分布】 称密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

的分布为Γ分布，其中 $r>0$, $\lambda>0$为参数.

Γ分布在理论研究中非常重要，r 取正整数就是埃尔朗分布，$r=\frac{n}{2},\lambda=\frac{1}{2}$就是$\chi^2$分布(数理统计中).

$$
\text{随机变量}\begin{cases}
\text{离散型} & F_1(x) \\
\text{连续型} & F_2(x) \\
\text{奇异型} & F_3(x) \\
\text{混合型} & F(x)=c_1F_1(x)+c_2F_2(x)+c_3F_3(x) \\
 & \quad c_1+c_2+c_3=1, \quad c_i\geq 0.
\end{cases}
$$

Γ函数的知识回顾

定义 当 $r>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$ 存在，记作

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$$

称为(Gamma)Γ函数.

性质1 $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$, 其中 $r>0$.

称为递推公式. 用分部积分证明.

特别地 $\Gamma(n)=(n-1)!$, $\Gamma(1)=1$.

性质2 $\Gamma(1-r)\,\Gamma(r)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$,

称为余元公式. 其中 $0<r<1$.

特别地 $\Gamma(1/2)=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

性质3　　与贝塔函数的关系

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

其中$\alpha>0,\quad \beta>0,$

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

其他性质（略）.

斯特灵公式为：

$$n!=\sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\lambda_n}$$

其中：$\dfrac{1}{12n+1}<\lambda_n<\dfrac{1}{12n}.$