计算方法第二次程序作业报告

PB19071405 王昊元

2022 年 05 月 08 日

1 问题描述

分别使用向前 Euler 方法、向后 Euler 方法，和中心差方法，求解初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -100y, x \in [0, 0.2], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

分别使用步长 $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}$，计算到 $x = 0.2$.

1. 画出数值解和准确解随 $x \in [0, 0.2]$ 的变化规律，并利用数值结果进行稳定性描述。要求：分别对每一个数值方法，在一张图上画出准确解和不同网格的数值解，准确解使用曲线，数值解可以给出离散点的点图或者连接点的折线图。
2. 对向后 Euler 方法，给出 $x = 0.2$ 的误差表，并分析其精度。

2 数值计算方法

2.1 向前 Euler 方法

用向前差商近似 $y'(x)$，作 $y(x)$ 的在 $x = x_n$ 处的一阶向前差商，有

$$f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

于是

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

得到计算 $y(x_{n+1})$ 近似值 y_{n+1} 的*向前 Euler 公式*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

2.2 向后 Euler 方法

作出 $y(x)$ 的在 $x = x_{n+1}$ 处的一阶向后差商，有

$$f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) = y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

于是

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

得到计算 $y(x_{n+1})$ 近似值 y_{n+1} 的*向后 Euler 公式*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

2.3 中心差方法

作出 $y(x)$ 的在 $x = x_n$ 处的中心差商

$$f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h}$$

于是得到计算 $y(x_{n+1})$ 近似值 y_{n+1} 的*中心差商格式*:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

从公式中我们可以看出，需要知道 y_{n-1}, y_n 的值才能计算 y_{n+1} 的值，所以我们需要先通过其他公式算出 y_1，然后才能使用中心差方法，即起步运算。这里起步运算采用向前 Euler 公式计算。

3 结果及分析

1. 每种数值计算方法的数值解及稳定性分析如下：

   (a) 向前 Euler 方法

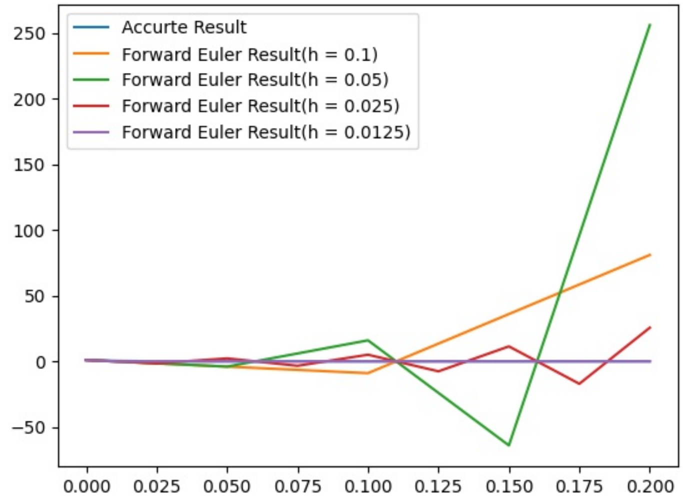

图 1: 向前 Euler 方法数值解及准确解

从图 1中可以看到，当 $h = 0.1, 0.05, 0.025$ 时，数值计算结果在准确值上下波动，而且误差越来越大，表现出不稳定；而当 $h = 0.0125$ 时数值结果几乎与准确结果重合（因作图时先作的蓝色准确解曲线，所以图中不太能看到蓝色曲线），为避免由于作图原因导致误判（如误差小但不稳定的情况），图 2为 $h = 0.0125$ 的向前 Euler 方法数值计算结果。

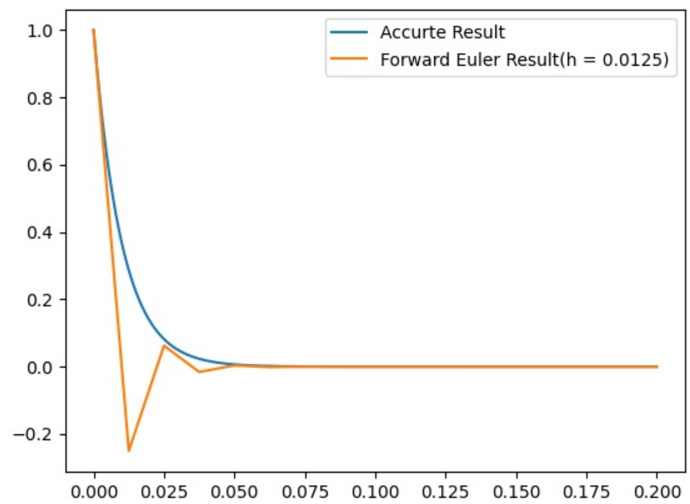

图 2: $h = 0.0125$ 的向前 Euler 方法

可以看到，当 $h = 0.0125$ 时，向前 Euler 方法确实是稳定的。

向前 Euler 方法的稳定性条件为 $h \leq -\frac{2}{\lambda}$，对于该问题 $\lambda = -100$，有在 $h \leq 0.02$ 时向前 Euler 方法稳定，与从图中的分析结果相符。

(b) 向后 Euler 方法

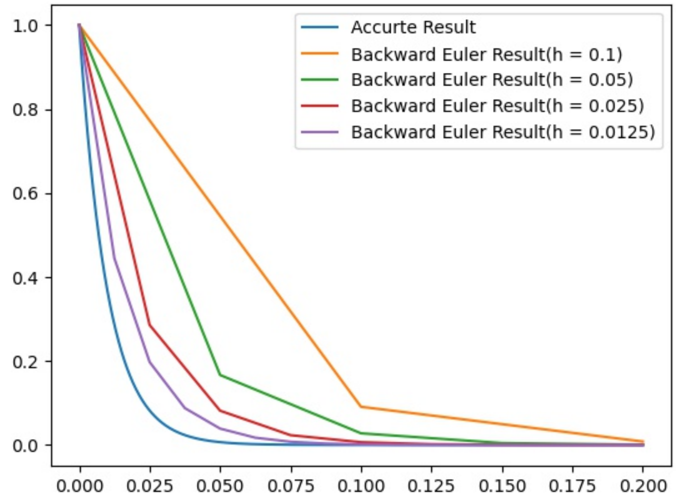

图 3: 向后 Euler 方法数值解及准确解

从图 3中可以看到，不论 h 取何值，数值计算结果的变化趋势与准确结果一致，且变化速度的变化趋势也一致，表现出在 h 取任何值时向后 Euler 方法都是稳定的。

向后 Euler 方法的稳定性条件为 $\lambda < 0$，在本题中满足，故对于任意步长向后 Euler 方法搜时稳定的。

此外，可以看到，当步长越来越小时，数值计算误差越来越小。

(c) 中心差方法

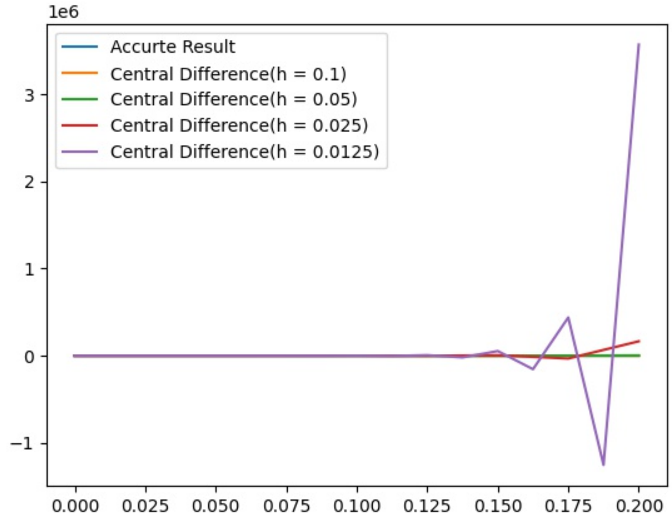

图 4: 中心差方法数值解及准确解

从图 4中，可以看到，当 $h = 0.05, 0.025, 0.0125$ 时，数值计算结果在准确值上下波动，而且误差越来越大，表现出不稳定；当 $h = 0.1$ 时，数值计算结果的图像与准确解图像几乎重合，为消除作图纵轴值域太大导致误差在视觉上减小的影响，图 5为 $h = 0.1$ 的中心差方法数值计算结果。

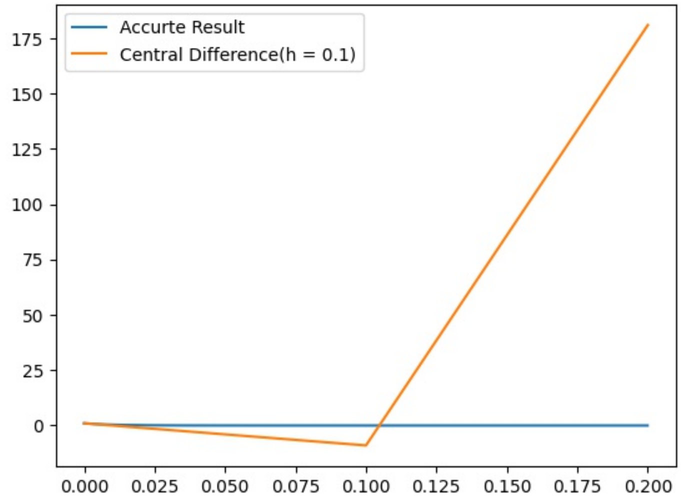

图 5: $h = 0.1$ 的中心差方法

从图 5可以看出，当 $h = 0.1$ 时，中心差方法计算结果同样在准确解上下波动，误差同样在增大，表现为不稳定。

中心差方法时无条件不稳定的，与以上的分析一致。

2. 对于向后 Euler 方法在 $x = 0.2$ 的误差精度表如下：

表 1: 向后 Euler 方法在 $x = 0.2$ 的误差精度表

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
error	8.26446075e-03	7.71602877e-04	4.44053694e-05	2.31575887e-06
order		3.42099026	4.11905248	4.26117719

4 结论

主要且细节的分析在第 3部分已经做过详细分析，这里就简单总结一下。

1. 在实际计算中，我们希望某一步产生的扰动值在后面的计算中能够被控制，甚至逐步衰减，也就是我们希望所使用的数值计算方法是稳定的。对于本次程序作业所涉及的三种数值计算方法，
   - 向前 Euler 方法是条件稳定的，稳定性条件是 $h \le -\frac{2}{\lambda}$

- 向后 Euler 方法在 $\lambda < 0$ 的情况下是恒稳定（无条件稳定）的
- 中心差方法是无条件不稳定的

2. 对于稳定的数值计算方法，步长越小，截断误差越小；但同时使得计算量增加，导致舍入误差增大。不过由于目前大多数计算机有足够多的有效数字，在通常情况下舍入误差不会占主导地位。