# 1 插值

第一章介绍的多项式插值包含

$$\begin{cases} \text{Lagrange 插值} \\ \text{Newton 插值} \\ \text{Hermite 插值} \\ \text{分段插值} \\ \text{三次样条} \end{cases}$$

**Theorem 1.1** *(多项式插值定理) 若 $x_0, \cdots, x_n$ 是不同的实数，则对任意数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，存在唯一的次数至多是 $n$ 次的多项式 $p_n(x)$ 使得*

$$p_n(x_i) = y_i \quad (0 \le i \le n)$$

## 1.1 Lagrange 插值

Lagrange 插值把多项式 $p_n(x)$ 表示成如下形式：

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x),$$

其中 $l_k(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，形如

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)},$$

满足

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

(p45 习题 1 第 1 题, 3(2))

## 1.2 Newton 插值

### 1.2.1 差商

(广义) 差商的定义: 设 $f$ 充分光滑且 $x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_k$

$$f[x_0, x_1] \triangleq \begin{cases} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, & x_0 < x_1 \\ f'(x_0), & x_0 = x_1 \end{cases}$$

$k$ 阶差商:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \triangleq \begin{cases} \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & x_0 < x_k, \\ \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), & x_0 = x_k. \end{cases}$$

差商的一些性质:

(1) k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 可表示为函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_k^{'}(x_j)} \tag{1}$$

其中 $\omega_k(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$, 从而

$$\omega_k^{'}(x_j)=(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k),$$

即 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 恰为在点 $\{x_i\}_{i=0}^k$ 插值于 $f$ 的 $k$ 次多项式的 $x^k$ 项的系数.

(2) 差商的大小与结点的顺序无关.

(3) 若 $f(x)$ 在包含 $x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+k}$ 的区间 $[a,b]$ 上 $k$ 次连续可微, 则

$$f[x_j,\cdots,x_{j+k}]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},\quad a<\xi<b.$$

(习题 1 第 9 题)

#### 1.2.2

当 $n=0$ 时，可以选择一个常值函数 $p_0$ 使得 $p_0(x_0)=y_0$. 假设已经得到一个次数不超过 $k-1$ 次的多项式 $p_{k-1}$ 使得 $p_{k-1}(x_i)=y_i,\quad 0\le i\le k-1$. 尝试构造以下形式的 $p_k(x)$

$$p_k(x)=p_{k-1}(x)+c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

显然 $p_k(x)$ 至多 $k$ 次且满足上述插值条件. 根据条件 $p_k(x_k)=y_k$ 来确定 $c$.

由差商的定义

$$\begin{gathered}
f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0],\\
f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]
\end{gathered}$$

把以上各式由后向前逐次代入可得

$$\begin{aligned}
f(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\
&(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+\\
&(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+\\
&(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n].
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
N_n(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\
&(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+\\
&(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]
\end{aligned} \tag{2}$$

为 $n$ 次牛顿插值多项式, 其展开与 $f$ 的 Lagrange 插值多项式为同一多项式. 插值余项

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

添加新的插值点，牛顿型插值的优点是已经算出的系数将保持不变.( p45 习题 1 第 6,7 题)

### 1.3 $n$ 次多项式的插值误差

设 $[a,b]$ 是包含插值结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的区间, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 $n$ 次插值多项式, 则对任意的 $x \in [a,b]$, 存在 $\xi$, $a<\xi<b$, 使得

$$f(x)-p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

证明很重要见课本.(习题 1 第 5 题)

通过适当的选取插值结点, 误差项可以被优化.

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式 (第一类) 递归定义如下:

$$\begin{cases} T_0(x)=1 \quad T_1(x)=x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad (n\geq 1) \end{cases} \tag{3}$$

**Theorem 1.2** *(切比雪夫多项式定理) 对区间 $[-1,1]$ 中的 $x$, 切比雪夫多项式有闭型表达式*

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \quad n\geq 0$$

切比雪夫多项式有很多性质, 例如

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1\leq x\leq 1)$$
$$T_n(\cos\frac{j\pi}{n}) = (-1)^j \quad (0\leq j\leq n)$$
$$T_n(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi) = 0 \quad (1\leq j\leq n)$$

记首一多项式空间

$$\mathcal{Q}_n = \{p_n(x): \quad p_n(x)\in\mathcal{P}_n, \text{且} p_n(x) \text{的首项} x^n \text{的系数为 } 1\}$$

最小零偏差多项式是指求 $p_n(x)\in\mathcal{Q}_n$, 使得

$$\sup_{a\leq x\leq b}|p_n(x)| = \inf_{q_n\in\mathcal{Q}_n}\sup_{a\leq x\leq b}|q_n(x)|$$

**Theorem 1.3** *(首一多项式定理) 多项式*

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x), \quad n=1,2,\cdots$$

*是 $[-1,1]$ 上的 $n$ 次最小零偏差多项式. 又 $|T_n(x)|\leq 1$, 所以对任意 $q_n\in\mathcal{Q}_n$*

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

**Theorem 1.4** *(切比雪夫结点插值误差定理) 若结点 $x_i$ 是切比雪夫多项式 $T_{n+1}$ 的根, 则对 $|x|\leq 1$, $n$ 次多项式插值误差公式变为*

$$|f(x)-p(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)}\max_{|t|\leq 1}|f^{n+1}(t)|$$

## 1.4 Hermite 插值

一般的 Hermite 插值问题问题为: 对于给定的结点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ 和大于 1 的正整数 $m_0, m_1, \cdots, m_k$, 求次数不超过 $N = m_0 + m_1 + \cdots + m_k - 1$ 的多项式 $p(x)$, 使它在每个结点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, k)$ 处，分别满足

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, \cdots, m_i - 1. \tag{4}$$

可以证明这样的多项式 $p(x)$ 是唯一存在的 (Hermite 插值定理).

(1) 牛顿差商方法求解 (习题 1 第 15 题).

(2)Lagrange 型构造基函数方法 (习题 1 第 12 题).

**Theorem 1.5** *设 $f(x)$ 在包含结点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的最小区间 $[a, b]$ 上有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 阶连续导数, 则对 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^N(\xi)}{N!}(x - x_0)^{m_0} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

一般的插值函数值和一阶导数值的 Hermite 插值误差的证明见参考答案 PDF.

## 1.5

对于等距插值，增加较多的插值节点会带来较大的误差 (龙格现象). 考虑当插值结点无限增加，是否有插值误差 $R_n(f; x) \longrightarrow 0$, 这就是插值过程的收敛性问题.

通过选取特殊的插值结点和插值条件，可使插值过程收敛.

**Example 1.1** *(Hermite-Fejér 插值) 设 $x_i = \cos \frac{2i-1}{2n}\pi, i = 1, 2, \cdots, n$ 为 $n$ 次 Chebyshev 多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 的零点. 对于给定的区间 [-1,1] 上的连续函数 $f(x)$, 构造 $2n-1$ 次多项式 $H_{2n-1}(x)$, 使其满足插值条件*

$$H_{2n-1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n-1}(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

*可以证明*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - H_{2n-1}(x)| = 0.$$

## 1.6 分段插值和三次样条插值

### 1.6.1 分段线性插值

满足插值条件 $p(x_i) = y_i$ 并且在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上为线性函数的插值函数 $p(x)$ 形如

$$p(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}, \quad x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

插值误差: 当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时,

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_i)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

因而

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{M_2}{2}\frac{1}{4}(x_{i+1}-x_i)^2 = \frac{M_2}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$$

其中

$$M_2 = \max_{a\le x\le b}|f^{''}(x)|$$

(习题 1 第 8 题) 已知 $sinx$ 的表值有五位小数的近似值, 表值的舍入误差为 $5\times 10^{-6}$.

### 1.6.2 三次样条插值

**Definition 1.1** 给定区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和这些点上的函数值 $\{f(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n\}$, 若 $S(x)$ 满足:

*(1)*$\{S(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n\}$;

*(2)*$S(x)$ 在每一个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上至多是一个三次多项式;

*(3)*$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数,

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 关于剖分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的三次样条插值函数, $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 为样条结点.

$S(x)$ 在 $n$ 个子区间上为三次多项式，共有 $4n$ 个未知数即需要 $4n$ 个条件. 插值条件 $\{S(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n\}$ 和 $S(x_i+0)=S(x_i-0)$ 相当于每个子区间两端满足插值条件，共提供 $2n$ 个条件.

$$\begin{aligned} S^{'}(x_i+0) &= S^{'}(x_i-0) \\ S^{''}(x_i+0) &= S^{''}(x_i-0),\ i=1,\cdots,n-1 \end{aligned}$$

又提供 $2n-2$ 个条件. 还需附加两个边界条件, 就可唯一确定三次样条函数.

引入记号 $\{M_i=S^{''}(x_i), m_i=S^{'}(x_i), i=0,1,\cdots,n\}$

$M$ **关系式**:

$S^{''}(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上为插值 $M_i,M_{i+1}$ 的线性函数. 将 $M_i,M_{i+1}$ 看做已知,对 $S^{''}(x)$ 积分两次,则 $S(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上还有两个未知数. 这两个未知数由区间两个端点的插值条件 $S(x_i)=y_i, S(x_{i+1})=y_{i+1}$ 解出. 利用还没用的条件内部结点一阶导连续 $S_i^{'}(x_i)=S_{i-1}^{'}(x_i)$ 列出关于 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 的 $n-1$ 个方程.

边界条件:

(1) 给定 $M_0,M_n$, 分别把第一个和最后一个方程含 $M_0,M_n$ 的项移到右端, 化为 $(n-1)\times(n-1)$ 的方程组.

(2) 给定 $S^{'}(x_0)=m_0, S^{'}(x_n)=m_n$ 的值，将这两个条件分别代入 $S^{'}(x)$ 在 $[x_0,x_1],[x_{n-1},x_n]$ 的表达式得到另外两个方程.

(3) 被插函数以 $x_n-x_0$ 为周期, 将 $S^{'}(x_0)=S^{'}(x_n)$ 加入方程组，利用 $M_0=M_n$ 化为 $n\times n$ 的方程组.

$m$ **关系式**:

假设已知 $S^{'}(x_i)=m_i, i=0,1,\cdots,n$, 在每一个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上利用 $y_i,y_{i+1},m_i,m_{i+1}$ 做三次 Hermite 插值. 再利用内部结点 $S^{''}(x_i+0)=S^{''}(x_i-0)$ 得到关于 $m_0,m_1,\cdots,m_n$ 的 $n-1$ 个方程. 附加的边界条件情况同 $M$ 关系式中类似.

(习题 1 第 16,17 题)

# 2 最小二乘拟合

离散的平方逼近——最小二乘拟合是指对于给定的一组离散数据点 $\{(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,m\}$, 拟合函数 $\phi(x)$ 所拟合的数据 $Z=(\phi(x_1),\phi(x_2),\cdots,\phi(x_m))$ 与观测数据 $Y=(y_1,y_2,\cdots y_m)$ 在平方度量

$$Q=||Z-Y||_2^2=\sum_{i=1}^{m}(\phi(x_i)-y_i)^2$$

的意义下误差最小.

## 2.1 线性最小二乘法

设 $\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数, 记 $\Phi_n=Span\{\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n\}$, 要求满足:

$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^n$ 线性无关, 并且对任意的函数 $\phi(x)\in\Phi_n$, 如果 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不少于 $n+1$ 个点处取零值，则 $\phi(x)\equiv 0$.

设 $\{(x_i,y_i):i=1,2,\cdots,N\}(N>n)$ 为给定数据且 $x_i\in[a,b]$ 互不相同. 考虑用 $\Phi_n$ 的函数对所给数据进行最小二乘拟合. 令

$$Q(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\phi_j(x_i))^2$$

问题归结于求二次函数 $Q$ 的极小值. 为此, 令 $\frac{\partial}{\partial a_k}Q(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0,k=0,1,\cdots,n$, 得

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\phi_j(x_i))\phi_k(x_i)=0,\quad k=0,1,n \tag{5}$$

此方程即为法方程. 记

$$\Psi_j=(\phi_j(x_1),\phi_j(x_2),\cdots,\phi_j(x_N))^T,\quad j=0,1,\cdots,n$$

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)^T$$

则法方程可以写为

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(\Psi_j,\Psi_k)=(Y,\Psi_k),\quad k=0,1,\cdots,n,$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathcal{R}^N$ 中的内积. 此方程组的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}(\Psi_0,\Psi_0) & (\Psi_0,\Psi_1) & \cdots & (\Psi_0,\Psi_n)\\ (\Psi_1,\Psi_0) & (\Psi_1,\Psi_1) & \cdots & (\Psi_1,\Psi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\Psi_n,\Psi_0) & (\Psi_n,\Psi_1) & \cdots & (\Psi_n,\Psi_n)\end{pmatrix}$$

可以证明此系数矩阵是可逆的. 记

$$A=(\Psi_0,\Psi_1,\cdots,\Psi_n),$$

则 $A$ 为一个 $N\times n$ 的矩阵. 最小二乘问题的法方程对应

$$A^TA\alpha=A^TY$$

其中 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n]^T$.

注意到 $Q(\alpha)$ 也可写作

$$Q(\alpha) = ||A\alpha - Y||_2^2 \tag{6}$$

于是从线性代数的角度，最小二乘问题转化为: 已知矩阵 $A \in \mathcal{R}^{N\times n}$ 和向量 $Y \in \mathcal{R}^N$, 求向量 $\alpha \in \mathcal{R}^n$ 使得 $||A\alpha - Y||_2^2$ 最小. 对应课本定理 2.1. (习题 2 第 3 题, 8(1))

### 2.2 非线性拟合

通过对多项式拟合的考察可发现 $\phi(x)$ 是否是关于 $x$ 的线性函数并不重要, 只要 $\phi(x)$ 是关于未知参数 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 的线性函数, 则误差平方和 $Q$ 是关于 $\alpha$ 的线性方程组. 因此如果 $\phi(x)$ 关于 $\alpha$ 是非线性的, 可以先进行预处理, 使得新的拟合函数 $\tilde{\phi}$ 关于新的参数 $\tilde{\alpha}$ 是线性的. (习题 2 第 7 题)

不进行预处理, 也可以用最小二乘法求得拟合函数, 即处理一个非线性的问题. 预处理的目的是提高求解效率，但同时有可能降低求解精度. 预处理后求得的拟合函数其误差平方和并非最小，而是相当于定义了一个新的尺度来衡量 $Z = (\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_m))$ 与 $Y = (y_1, y_2, \cdots y_m)$ 的误差.

## 3

$n$ 维 Euclid 空间中给定两点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 使用以下度量来刻画它们之间的距离:

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

考虑函数空间 $C[a,b]$, 对于 $f, g \in C[a,b]$, 可定义关于权函数 $\rho(x)$ 的度量

$$||f - g||_2 = (\int_a^b \rho(x)(f-g)^2 dx)^{1/2}$$

设 $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n \in C[a,b]$, 且 $\Phi_n = Span\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$, 即

$$\Phi_n = \left\{ \phi : \phi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i(x), \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n \right\}$$

考虑如下问题:

对于给定的 $f \in C[a,b]$, 是否存在多项式 $\phi^*(x) \in \Phi_n$ 使得

$$||f - \phi^*||_2 = \inf_{\phi \in \Phi_n} ||f - \phi||_2.$$

如果 $\phi^*$ 存在, 则称 $\phi^*$ 为函数 $f(x)$ 在 $\Phi_n$ 中的最佳平方逼近函数.

**Definition 3.1** 称函数组 $\{\phi_i\}_{i=0}^n \subset C[a,b]$ 为**线性无关**的, 如果对任何实数 $\alpha_i, i = 0, 1, \cdots, n$, 只要 $\alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_n\phi_n(x) \equiv 0$, 则必有 $\alpha_i = 0, i = 0, 1, \cdots, n$.

对于任意给定的函数 $f \in C[a,b]$, 在 $\Phi_n$ 中存在唯一最佳平方逼近函数 $\phi^*$ 的充分必要条件是 $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ 线性无关.

对于任意给定的函数 $f,g\in C[a,b]$, 定义它们关于权函数 $\rho(x)$ 的内积为

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

**Definition 3.2** 函数空间 $C[a,b]$ 中的函数组 $\{\phi_i\}_{i=0}^{\omega}$($\omega$有限或$\infty$) 称为一个 **规范正交函数组**, 如果

$$(\phi_i,\phi_j)=\delta_{ij},\quad i,j=0,1,\cdots,\omega.$$

**Theorem 3.1** 设 $\{\phi_i\}_{i=0}^{n}$ 是规范正交函数组, $\Phi_n=Span\{\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n\}$, 则对于任意 $f\in C[a,b]$, 其在 $\Phi_n$ 中的最佳平方逼近函数 $\phi^*(x)$ 可写为

$$\phi^*(x)=c_0^*\phi_0(x)+c_1^*\phi_1(x)+\cdots+c_n^*\phi_n(x),$$

其中

$$c_i^*=(f,\phi_i)=\int_a^b \rho(x)f(x)\phi_i(x)dx$$

### 3.1 Fourier 级数

设 $\mathcal{T}$ 是所有三角多项式的集合，容易验证，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots$$

是 $\mathcal{T}$ 中在区间 $[-\pi,\pi]$ 上关于权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的规范正交函数系.

对于给定函数 $f\in C[a,b]$, 关于上述正交函数系的展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,\quad k=0,1,2,\cdots,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx,\quad k=1,2\cdots.$$

记 $s_n(f)(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的前 $2n+1$ 项部分和, 即

$$s_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

若 $f\in C_{2\pi}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}||f-s_n(f)||_2=0,$$

即其 Fourier 级数 $s_n(f)(x)$ 在平方度量下收敛到 $f(x)$. 代数多项式空间不适合表示周期现象, 但三角函数却非常适合.