1 解线性方程组的直接方法

1.1 Gauss 消元法

基本思想是用初等变换把原方程组 $Ax = b$ 化为与其等价的三角方程组. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

记 $A^{(1)} = A$, 第 k 次消元前得到的等价方程组为

$$A^{(k)}x = b^{(k)}$$

其中 $A^{(k)}$ 具有以下形式

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

当 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 可继续进行第 k 列的消元. 完成 $n-1$ 次消元后可得到三角方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

其求解过程为

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}, \\ x_k = (b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j)/a_{kk}^{(k)}, \quad k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1. \end{cases}$$

这种 Gauss 顺序消元法 (不进行行交换) 要求 $a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n$(或 A 的各阶顺序主子式均不为 0). 但只要 A 是可逆的, 线性方程组的解就是存在的. 若 $a_{11}^{(1)} = 0$, 由于 A 为非奇异矩阵, 总可在第一列中找到一个不为 0 的元素, 从而进行行交换将其移动到第一行第一列. 进行第一次消元后 $A^{(2)}$ 右下角的 $n-1$ 阶矩阵也是非奇异的, 所以可以重复这一过程进行 Gauss 消去法.

P95, 3(2) 用 Gauss 消元法计算行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix}10 & -2 & -1\\ -2 & 10 & -1\\ -1 & -2 & 5\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}10 & -2 & -1\\ 0 & 48/5 & -6/5\\ 0 & -11/5 & 49/10\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}10 & -2 & -1\\ 0 & 48/5 & -6/5\\ 0 & 0 & 37/8\end{vmatrix} = 444$$

1.1.1 全主元素消去法

由上可知, 在消元过程可能出现 $a_{kk}^{(k)} = 0$ 的情况以及当 $a_{kk}^{(k)}$ 非常小用其作除数也会导致严重的误差. 所以每一步消元之前都选取系数矩阵 (或消元后的低阶矩阵) 中绝对值最大的元素作为主元素, 可以使 Gauss 消去法具有较好的数值稳定性. 使用列交换要注意交换未知数的次序.

1.1.2 列主元素消去法

列主元素消去法仅按列选取主元素, 然后通过行变换使之变到主元位置上再进行消元计算, 与全主元素消去法相比在计算时间上有优势.

1.1.3 Gauss-Jordan 消元法

按列选取主元素, 在消元过程中将 A 化为单位矩阵.

P95, 4(1) 用 Gauss-Jordan 消元法求解方程组

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 7\\ 3\end{pmatrix}$$

解:

增广矩阵

$$\begin{pmatrix}5 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & 7\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & \frac{14}{5}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{6}{17} & -\frac{11}{17}\\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & \frac{36}{5}\\ 0 & 0 & \frac{26}{17} & \frac{26}{17}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{6}{17} & -\frac{11}{17}\\ 0 & 1 & \frac{2}{17} & \frac{36}{17}\\ 0 & 0 & \frac{26}{17} & \frac{26}{17}\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & \frac{26}{17} & \frac{26}{17}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

所以解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 1)^T$.

1.2 LU 分解

Theorem 1.1 *(矩阵的 LU 分解)* *设 A 为 n 阶矩阵, 如果 A 的顺序主子式 $D_i \neq 0, (i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 则 A 可分解为一个单位下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积, 且这种分解是唯一的.*

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

实现了矩阵 A 的 LU 分解, 原问题就等价于求解两个三角方程组.

对于 $A = LU$, 当 L 为单位下三角矩阵, U 为上三角矩阵时称这种分解为 Doolittle 分解. 当 L 为下三角矩阵, U 为单位上三角矩阵时称这种分解为 Crout 分解.

Doolittle 分解按照先计算 U 的第 i 行, 再计算 L 的第 i 列的顺序计算.

Crout 分解按照先计算 L 的第 i 列, 再计算 U 的第 i 行的顺序计算.

LDL^T 分解: 设 A 为对称矩阵, 且 A 的各阶顺序主子式均不为 0, 则 A 可唯一分解为 Doolittle 分解形式. 提出矩阵 U 的对角线元素

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{u_{n-1,n}}{u_{n-1,n-1}} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = DU_0$$

所以 $A = LU = LDU_0$, 又 $A = A^T = U_0^T(DL^T)$, 由分解的唯一性 $U_0^T = L$, 由此得到对称矩阵 A 的分解式 $A = LDL^T$.

P95, 7(2) 使用 Doolittle 分解, Crout 分解, LDL^T 分解求解线性方程组 $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解:

Doolittle 分解:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{8}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & -3 & -8 \\ & & \frac{40}{3} \end{pmatrix} = LU \end{aligned}$$

解 $Ly = b$ 可得 $y = (-3, 16, -\frac{80}{3})^T$, 进而解 $Ux = y$ 可得 $x = (3, 0, -2)^T$.

Crout 分解:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ & 1 & u_{23}\\ & & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & & \\ 2 & -3 & \\ 3 & -8 & \frac{40}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ & 1 & \frac{8}{3}\\ & & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解 $Ly = b$ 可得 $y = (-3, -\frac{16}{3}, -2)^T$, 进而解 $Ux = y$ 可得 $x = (3, 0, -2)^T$.

LDL^T 分解:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{8}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & -3 & \\ & & \frac{40}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ & 1 & \frac{8}{3}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

求解

$$\begin{cases}Lz = b\\ Dy = z\\ L^T x = y\end{cases}$$

分别求得 $z = (-3, 16, -80/3)^T, y = (-3, -16/3, 2)^T, x = (3, 0, -2)^T$.

2 求解线性方程组的迭代法

2.1 矩阵的范数

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 记方阵 A 的范数为 $\|A\|$, 矩阵范数需满足以下三条性质:

(1)(非负性) $\|A\| \geq 0$, 当且仅当 $A = 0$ 时, $\|A\| = 0$;

(2)(齐次性) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda A\| = \lambda \|A\|$;

(3)(三角不等式) 对于任意两个同阶矩阵 A, B 有

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

常用的矩阵范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\} \quad \text{(列和范数)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\} \quad \text{(行和范数)}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

其中 $\lambda_1 = \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$, λ_i 是 A^TA 的特征值. 如果 A 是对称矩阵, 设 A 的特征值为 $\{t_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 则有

$$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n}\{|t_i|\}$$

P108,2(2)

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解:

$\|B\|_1 = 9, \|B\|_\infty = 9$, 利用矩阵的对称性 $\|B\|_2 = \rho(B) = 8$.

2.2

对于 $Ax = b$ 我们构造等价的方程组, 拆分 $A = N - P$, 设 N 可逆, 得到同解方程组

$$X = N^{-1}PX + N^{-1}b$$

设 $M = N^{-1}P, g = N^{-1}b$, 则 $X = MX + g$, 以此构造迭代关系式

$$X^{(k)} = MX^{(k-1)} + g$$

任取初始向量 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$, 代入上列迭代式中, 得到迭代序列 $\{X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots\}$. 称 M 为迭代矩阵.

迭代法收敛的充分必要条件是迭代矩阵 M 的谱半径 $\rho(M) < 1$. 矩阵 M 的谱半径是指 M 的所有特征根中的按模最大值.

若 $\|M\|_p$ 为矩阵 M 的范数, 则总有 $\|M\|_p \geq \rho(M)$. 因此, 若 $\|M\|_p < 1$ 则 M 必为收敛矩阵. 但是当 $\|M\|_p > 1$ 并不能判断迭代序列发散.

线性方程组的迭代收敛与否完全取决于迭代矩阵的性质, 与迭代初始值的选取无关. 当迭代矩阵的谱半径越小时, 迭代收敛的速度越快.

2.3 Jacobi 迭代

对于 n 元线性方程组 $AX = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

设 $\{a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 其对应的 Jacobi 迭代分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Jacobi 迭代的矩阵形式:

设 D 为矩阵 A 对角线元素构成的对角矩阵, 取 $N = D, A = D + A - D$, 设 D 可逆得到等价方程组

$$X = D^{-1}(D - A)X + D^{-1}b$$

相应的迭代形式:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)X^{(k)} + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)X^{(k)} + D^{-1}b$$

迭代矩阵 $M = I - D^{-1}A$

2.4 Gauss-Seidel 迭代

在 Jacobi 迭代的基础上, 总是使用最新计算出来的分量

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵

设 $A=D+L+U$, 用矩阵表示 Gauss-Seidel 迭代形式为

$$X^{(k+1)}=D^{-1}(b-LX^{(k+1)}-UX^{(k)}),$$

即取 $N=D+L$,

$$X^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}UX^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

迭代矩阵 $M=-(D+L)^{-1}U$.

习题: P108,3. 已知方程组

$$\begin{pmatrix}10 & -1 & & \\ -1 & 10 & -1 & \\ & -1 & 10 & -1 \\ & & -1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

(1) 写出解方程组的 Jacobi 迭代计算式, 并以 $X^{(0)}=(0,0,0,0)^T$ 为初值, 迭代计算 $X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)}$.

(2) 写出解方程组的 Gauss-Seidel 迭代计算式, 并以 $X^{(0)}=(0,0,0,0)^T$ 为初值, 迭代计算 $X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)}$.

(3) 分别写出 Jacobi 迭代, Gauss-Seidel 迭代的矩阵, 并讨论其迭代收敛性.

解:

(1) 由 $AX=(D+A-D)X=b$ 得到的等价方程组：$DX=(D-A)X+b$

Jacobi 迭代格式：

$$X^{(k+1)}=D^{-1}(D-A)X^{(k)}+D^{-1}b$$

$$\begin{cases}x_1^{k+1}=0.1x_2^k+0.1\\x_2^{k+1}=0.1x_1^k+0.1x_3^k\\x_3^{k+1}=0.1x_2^k+0.1x_4^k+0.1\\x_4^{k+1}=0.1x_3^k+0.2\end{cases}$$

计算得

$$X^0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ X^1=\begin{pmatrix}0.1\\0\\0.1\\0.2\end{pmatrix}\ X^2=\begin{pmatrix}0.1\\0.02\\0.12\\0.21\end{pmatrix}\ X^3=\begin{pmatrix}0.102\\0.022\\0.123\\0.212\end{pmatrix}$$

(2) 由 $AX=(D+L+U)X=b$ 得到的等价方程组：$(D+L)X=-UX+b$

Gauss-Seidel 迭代格式：

$$X^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}UX^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

$$\begin{cases}x_1^{k+1}=0.1x_2^k+0.1\\x_2^{k+1}=0.1x_1^{k+1}+0.1x_3^k\\x_3^{k+1}=0.1x_2^{k+1}+0.1x_4^k+0.1\\x_4^{k+1}=0.1x_3^{k+1}+0.2\end{cases}$$

、

计算得

$$X^0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ X^1=\begin{pmatrix}0.1\\0.01\\0.101\\0.2101\end{pmatrix}\ X^2=\begin{pmatrix}0.101\\0.0202\\0.12303\\0.212303\end{pmatrix}\ X^3=\begin{pmatrix}0.10202\\0.022505\\0.123481\\0.212348\end{pmatrix}$$

(3)Jacobi 迭代矩阵：

$$R=\begin{pmatrix}0&0.1&0&0\\0.1&0&0.1&0\\0&0.1&0&0.1\\0&0&0.1&0\end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵：

$$S=\begin{pmatrix}0&0.1&0&0\\0&0.01&0.1&0\\0&0.001&0.01&0.1\\0&0.0001&0.001&0.01\end{pmatrix}$$

$||R||_1=0.2<1\Longrightarrow$ Jacobi 迭代收敛

$||S||_1=0.1111<1\Longrightarrow$ Gauss-Seidel 迭代收敛

习题: P108, 6. 方程组 $\begin{cases} x_1 + tx_2 = b_1, \\ tx_1 + 2x_2 = b_2. \end{cases}$

(1) 写出解方程组的 Jacobi 迭代的迭代矩阵, 并讨论迭代收敛条件.

(2) 写出解方程组的 Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵, 并讨论迭代收敛条件.

解:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix}$, Jacobi 迭代矩阵

$$M = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ -\frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

令 $|\lambda I - M| = 0$ 可得 M 的特征根 $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}t$, 令 $|\lambda| < 1$ 解得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

(2) Gauss-Seidel 迭代矩阵 $M = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ t/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & t^2/2 \end{pmatrix}$ 令 $|\lambda I - M| = 0$ 可得 M 的特征根 $\lambda = 0, \frac{t^2}{2}$, 所以令 $\rho(M) = \frac{t^2}{2} < 1$ 可得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

2.5 松弛迭代

设 $A = D + L + U$, 用矩阵表示 Gauss-Seidel 迭代形式为

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(b - LX^{(k+1)} - UX^{(k)}),$$

用 Gauss-Seidel 迭代定义辅助量, 分量形式如下

$$\widetilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

再把 $x_i^{(k+1)}$ 取为 $x_i^{(k)}$ 和 $\widetilde{x}_i^{(k+1)}$ 的某个加权平均值, 即

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\widetilde{x}_i^{(k+1)} \\ &= x_i^{(k)} + \omega(\widetilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \end{aligned}$$

当 $\omega = 1$ 时为一般的 Gauss-Seidel 迭代.

3 矩阵的特征值和特征向量的计算

3.1 幂法

表 1:

方法	格式	计算量
幂法	$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$	按模最大特征根
幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)}/\|x^{(k)}\|_\infty \\ x^{(k+1)} = Ay^{(k)} \end{cases}$	
反幂法	$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$	按模最小特征根
反幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)}/\|x^{(k)}\|_\infty \\ Ax^{(k+1)} = y^{(k)} \end{cases}$	
位移幂法	$x^{(k+1)} = (A-\mu I)x^{(k)}$	离 μ 最远的特征根
位移反幂法	$(A-\mu I)x^{(k+1)} = x^{(k)}$	离 μ 最近的特征根

幂法在规范运算中迭代序列的几种情况:

(1) 如果 $\{X^{(k)}\}$ 收敛, 则 A 的特征值按模最大分量的值仅有一个, 且为正数.

(2) 如果 $\{X^{(2k)}\},\{X^{(2k+1)}\}$ 分别收敛于互为相反号的向量, 则按模最大的特征值也仅有一个, 且为负数.

(3) 如果 $\{X^{(2k)}\},\{X^{(2k+1)}\}$ 分别收敛于两个不同的向量 (与 (2) 不同), 则按模最大的特征值有两个, 是互为反号的一对实根. 这时, 对充分大的 k, 再做一次非规范运算

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)}$$

则 $\lambda_1 = \sqrt{x_i^{(k+1)}/y_i^{(k-1)}}, \lambda_2 = -\lambda_1$. 特征向量

$$\begin{cases} V_1 = X^{(k+1)} + \lambda_1 X^{(k)} \\ V_2 = X^{(k+1)} - \lambda_1 X^{(k)} \end{cases}$$

例 8.4 用规范运算计算矩阵 A 的按模最大的特征值和它的特征向量.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 16 & -2 & -2 \\ 16 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

表 8.4

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$
0	0.5	0.5	1	0.5	0.5	1
1	2.5	5	5.5	0.454545	0.909091	1
2	1.909089	3.454538	3.553628	0.537222	0.972116	1
3	2.176772	4.65132	4.679104	0.465201	0.994091	1
4	2.176772	3.455134	3.461124	0.539392	0.998269	1
5	2.159299	4.633734	4.635485	0.465721	0.999627	1
6	1.862661	3.452282	3.452655	0.539487	0.999892	1
7	2.158056	4.632000	4.632116	0.465890	0.999975	1
8	1.863585	3.454290	3.454315	0.534950	0.999993	1
9	2.157985	4.631926	4.631926	0.465893	0.999999	1
10	1.863573	3.454290	3.454291	0.539495	1	1
11	2.157980	4.631920	4.631920	0.465893	1	1
12	1.863572	3.454288	3.454288			
13	7.454288	16	16			

$$\lambda_1 = \sqrt{x_2^{(13)}/y_2^{(11)}} = 4, \quad \lambda_2 = -4$$
$$v_1 = X^{(13)} + \lambda_1 X^{(12)} = (14.908576, 29.817152, 29.817152)$$
$$v_2 = X^{(13)} - \lambda_1 X^{(12)} = (0, 2.182848, 2.182848)$$

3.2 Jacobi 方法

计算 n 阶实对称矩阵的所有特征根. 每步选取 p, q, 使得 $|a_{pq}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}|$.

定义正交矩阵 $Q(p,q,\theta)$

$$Q(p,q,\theta)=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \cos\theta &&&& \sin\theta && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && -\sin\theta &&&& \cos\theta && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1\end{pmatrix}$$

使得 $B=Q^TAQ$ 对应的 $b_{pq}=b_{qp}=0$. 记 $B=A^{(1)}$, 对 $A^{(1)}$ 再施以类似的操作, 得到正交相似序列 $A^{(0)},A^{(1)},A^{(2)},\cdots$. 可以证明, 任给误差控制项 $\epsilon>0$, 必存在充分大的 k, 使得

$$\sum_{i\neq j}(a_{ij})^2<\epsilon$$

此时 $A^{(k)}$ 的对角线上的元素可视为 A 的特征值.