Chapter 1&2 函数的插值与逼近

给定函数$f(x)$在离散点上的信息$\{(x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n\}$，和函数空间$\Phi$,
构造函数$\phi(x) \in \Phi$，满足关系式。

函数插值：

$$\phi(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, n$$

- Lagrange 插值构造
- Newton 插值构造
- 插值多项式的误差和分析
- （广义）差商的定义和性质，构造差商表
- Hermite 插值构造（给定 $f(x_i), f'(x_i), \cdots$）
    - 若给定为 $f(x_i), f''(x_i)$, 无法构造广义差商表
- Runge 现象 -> 分片插值 -> 三次样条函数的构造思路

最小二乘逼近

$$\min_{\phi \in \Phi} \sum_{\mathrm{i}} \left(\phi(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

- $\phi(x) = a_0\phi_0(x) + \cdots a_m\phi_m(x)$, 定义

  $$Q(a_0, \dots, a_m) = \sum_i \left(a_0\phi_0(x_i) + \cdots + a_m\phi_m(x) - f(x_i)\right)^2$$

  利用$\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$，构建线性方程组，进行求解。

  当给定的$\phi(\mathrm{x})$不是关于基函数的线性组合，则需要做变形，考虑

  $$\min_{\phi \in \Phi} \sum_{\mathrm{i}} \left(\tilde{\phi}(x_i) - \tilde{f}(x_i)\right)^2$$

    - $\phi(x) = a\, b^x$，定义映射 $\tilde{\phi}(x) = \ln\phi(x) = \ln a + x\ln b$
    - $\phi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1\, x + \cdots a_p x^p}$，定义映射 $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\phi(x)} = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_p x^p$
    - $\phi(x) = \frac{a_0 + a_1\, x + \cdots + a_p x^p}{b_0 + b_1\, x + \cdots + b_q x^q}$，考虑

      $\min \sum_{\mathrm{i}} \left(a_0 + a_1\, x_i + \cdots + a_p x_i^p - f(x_i)\,(b_0 + b_1\, x_i + \cdots + b_q x_i^q)\right)^2$

- 矛盾方程: 求解法方程 $A^T A\, \vec{x} = A^T \vec{y}$

Chapter3 非线性方程求解

- 二分法
- 不动点迭代：$f(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = \phi(x), \quad x_{k+1} = \phi(x_k)$

  满足：*1.* $x \in [a, b]$, $\phi(x) \in [a, b]$

  2. 存在$0 < L < 1$，使得$|\phi'(x)| \le L, \forall x \in [a, b]$

- 牛顿法/切线法:用切线近似曲线
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
单根：2 阶收敛；重根：1 阶收敛
- 弦截法：用割线近似曲线
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$
- 牛顿法求解方程组

Chapter4 线性方程组的直接法

- Gauss 消元法：选主元
- 直接分解法：A = LU，L 为下三角矩阵，U 为上三角矩阵
Doolittle 分解 / Crout 分解 / LDL^T 分解

Chapter5 线性方程组的迭代方法

$$Ax = b \iff x = N^{-1}(N-A)x + N^{-1}b,$$
迭代格式：$x_{k+1} = N^{-1}(N-A)x_k + N^{-1}b,$
迭代收敛：矩阵$M = N^{-1}(N-A)$ 谱半径或者某一范数<1
- Jacobi 迭代： $N = D$
- Gauss-Seidel 迭代： $N = L + D$ （迭代格式可写成等价形式）
- 松弛迭代

Chapter 6 数值积分和数值微分

<u>数值积分</u>
- 基于插值的数值积分 (n+1 个点)
$$\int_a^b f(x)dx = I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \qquad \alpha_i = \int_a^b l_i(x)dx$$
该方法至少有 n 阶代数精度，不超过 2n+1 阶代数精度
- k 阶代数精度
$$I[x^m] = I_n[x^m], m = 0, \dots, k, \qquad I[x^{k+1}] \neq I_n[x^{k+1}],$$
- Newton-Cotes 数值积分
均匀剖分，$h = \frac{b-a}{n}$，$x_i = a + i * h,$
具有 n 阶（n 为奇数）或 n+1 阶（n 为偶数）代数精度
n=1: 梯形积分公式
n=2: 辛普森积分公式

复化积分公式： 分片定义数值积分

- Gauss-Legendre 数值积分
  使用 Legendre 多项式零点，具有 2n+1 阶代数精度

<u>数值微分</u>

- 基于插值的数值微分方法
$$f'(\hat{x}) \approx D_n[f] = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_i), \quad \beta_i = l'_i(\hat{x})$$
- 截断误差：在 $\hat{x}$ 处进行 Taylor 展开
$$R(\hat{x}) = f'(\hat{x}) - \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_i) = O(h^k) \quad \text{具有}k\text{阶精度}$$

Chapter 7 常微分方程数值解

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- Euler 公式
  基于数值微分：$f(x_n, y_n) = D_m[y_n] = \sum \beta_i y_i$
  基于数值积分：$y_{n+1} - y_n = I_m[f] = \sum \alpha_i f(x_i, y_i)$
- 多步法：
  Step1: 在给定区间 $[x_{n-p}, x_{n+1}]$ 上积分
$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-p}) = \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$
  Step 2: 利用给定点 $\{x_{n-q}, \dots, x_n\}$或$\{x_{n-q+1}, \dots, x_{n+1}\}$近似积分
- Runge-Kutta 方法
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + \cdots c_s h_s) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_j = f\left(x_n + a_j h, y_n + h\left(b_{j,1} k_1 + \cdots b_{j,j-1} k_{j-1}\right)\right), \quad j = 2, \dots, s \end{cases}$$
- 局部截断误差
  格式为 $y_{n+1} = L(x_{n-p}, \cdots, x_n, y_{n-p}, \cdots, y_n)$ 带入准确解进行 Taylor 展开
$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - L(x_{n-p}, \cdots, x_n, y(x_{n-p}), \cdots, y(x_n)) = O(h^{k+1})$$
  格式具有 k 阶精度
- 整体截断误差

Chapter8 矩阵的特征值和特征向量

方法	格式	计算量
幂法	$x^{(k+1)} = A\,x^{(k)}$	模最大特征值
幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)}/\|\|x^{(k)}\|\|_\infty \\ x^{(k+1)} = A\,y^{(k)} \end{cases}$	
反幂法	$A\,x^{(k+1)} = x^{(k)}$	模最小特征值
反幂法的规范运算	$\begin{cases} y^{(k)} = x^{(k)}/\|\|x^{(k)}\|\|_\infty \\ A\,x^{(k+1)} = y^{(k)} \end{cases}$	
位移幂法	$x^{(k+1)} = (A-\mu I)\ x^{(k)}$	离μ最远特征值
位移反幂法	$(A-\mu I)\ x^{(k+1)} = x^{(k)}$	离μ最近特征值

幂法的规范运算：根据序列的收敛性，判断特征值的性质

Jacobi 方法:

n 阶实对称矩阵A的所有特征值。

每步选取 p 和 q，使得$|a_{pq}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}|$

定义矩阵$Q(p,q,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & cos\theta & & sin\theta & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -sin\theta & & cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

使得$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}} AQ$对应的$b_{pq} = b_{qp} = 0$