第二次习题课讲义

一.知识点梳理及扩充

第6章:数值积分和数值微分

1. **插值型数值积分**

   对于 Riemann 可积的函数，其积分值可以用小矩形面积和来逼近。基于这样的思想，对于积分值

   $$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

   我们可以选取合适的求积节点 $\{x_i\}$ 和相应的求积系数 $\{\alpha_i\}$ 来构造其数值逼近值

   $$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

   代数精度：如果上述求积公式对于一个不超过 m 次的多项式是准确的,而对于 $m+1$ 次以上的多项式是不准确的,则称该求积公式的代数精度为 m .

   对给定的被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的点列 $\{(x_i,f(x_i)),i=0,1,\cdots,n\}$ 作 Langrange 插值多项式 $L_n(x)$ ，以 $\int_a^b L_n(x)dx$ 近似 $\int_a^b f(x)dx$ ，即取

   $$\alpha_i=\int_a^b l_i(x)dx$$

   其中 $l_i(x)$ 是Langrange插值基函数。

   插值型数值积分误差为

   $$E_n(f)=I(f)-I_n(f)=\int_a^b\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)dx$$

   n 阶插值型求积公式至少有 n 阶代数精度。

特别的，取等距节点，即把积分区间 n 等分，所得到的插值型求积公式称为Newton-Cotes公式，当n为奇数时，该积分公式有n阶代数精度，当n为偶数时，该积分公式有 $n+1$ 阶代数精度。例如具有一阶代数精度的梯形公式 $T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，具有三阶代数精度的Simpson公式 $S(f)=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$。

由于 Runge 现象，求积节点越多并不意味着求积公式性能越好，随着求积节点的增多，有可能导致求积系数出现负数，另一方面，被积函数所用的插值多项式次数越高，对函数的光滑性要求也越高。因此类似于样条插值的处理思想，利用积分的区间可加性，先将积分区间划分成若干个小区间，在各个小区间上再用低阶的求积公式，由此得到复化求积公式，例如复化梯形公式 $T_n(f)$ 和复化 Simpson公式 $S_n(f)$。

Romberg 积分

外推法：由较低精度的计算结果通过线性组合得到精度较高的计算结果的方法。外推算法在不增加计算量的前提下提高了误差的精度。例如复化 Simpson 公式可以简单地由复化梯形公式的线性组合得到:

$$S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

2. Gauss 积分:将求积节点也视为待定参数

定理6.2：具有 n 个节点的数值积分公式的代数精度不超过 $2n-1$ 阶。

定理6.3：对 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$，若取Legendre多项式 $L_n(x)$ 的 n 个零点 $\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}\}$ 为数值积分节点，则其数值积分公式 $I_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}f(x_i^{(n)})$ 具有 $2n-1$ 阶代数精度。

对于一般区间的积分 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$，只需作线性变量代换，即可得到 Gauss 积分公式:

$$G_n(f)=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i^{(n)})$$

3. 插值型数值微分

用插值函数 $L(x)$ 的导数近似函数 $f(x)$ 的导数，例如

$$f'(x_j)\approx L_n'(x_j)=\sum_{i=0}^{n}l_i'(x_j)f(x_i),\ \ j=0,1,\cdots,n$$

误差项

$$R(x_j)=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x_j-x_i)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

截断误差亦可用Taylor 公式直接计算。

本章主要讨论如下的常微分方程的初值问题的数值求解方法

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

1. 单步法

由拉格朗日中值定理，存在 $0 < \theta < 1$，使得

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(x_n + \theta h)$$

于是，由 $y'(x) = f(x,y)$ 得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h))$$

记 $K^* = f(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h))$,则称 K^* 为区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的平均斜率。

我们知道，若单纯的取 $f(x_n, y(x_n))$ 或 $f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ 作为 K^* 的近似值相应的得到向前 *Euler* 公式和向后 *Euler* 公式都只有一阶精度，而取它们的平均值得到的改进 *Euler* 方法具有二阶精度，这启发我们可以增加若干中间逼近值，然后取它们的加权平均(亦或凸组合)来提高精度，由此产生了一大类高阶方法: **Runge-Kutta** 方法,例如三阶 Kutta 格式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_{n+1}, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

上述格式是从增加 导数值 的中间逼近来着手的，当然我们也可以增加 函数值 的中间逼近来提高精度，例如可以给出如下三阶 Runge-Kutta 方法，它是向前 Euler 公式的凸组合(要求 $f(x,y) = F(y)$,即与 x 无关):

$$\begin{cases} y^{(1)} = y_n + hF(y_n) \\ y^{(2)} = \frac{3}{4}y_n + \frac{1}{4}(y^{(1)} + hF(y^{(1)})) \\ y^{n+1} = \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(y^{(2)} + hF(y^{(2)})) \end{cases}$$

2. 线性多步法

对 $y'(x) = f(x,y)$ 两边在区间 $[x_{n-p}, x_{n+1}]$ 上积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

用数值积分来近似 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$，积分节点选 $\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}\}$ 得到显式公式，若选 $\{x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}\}$ 则得到隐式公式，统一形式如下:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \beta_{n-i}y_{n-i} + \sum_{j=-1}^{k} \alpha_{n-j}f(x_{n-j}, y_{n-j}), k = max(p,q)$$

补充定理: 对于线性 k 步法

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f(x_{n+i},y_{n+i}),\alpha_k\neq 0,\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0$$

定义

$$\begin{cases}C_0=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i,\ \ C_1=\sum_{i=0}^{k}(i\alpha_i-\beta_i),\\ C_j=\frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{k}i^{j-1}(i\alpha_i-j\beta_i),\ \ j=2,3,\cdots,p+1\end{cases}$$

若有

$$C_0=C_1=\cdots=C_p=0,\ \ C_{p+1}\neq 0,$$

则该格式的局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x)+O(h^{p+2})$ **，并且称它是** p **阶相容的。若其还满足根条件(零稳定)：多项式** $\rho(\xi)=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\xi^i$ **每个根的模不超过1，且模为1的根是单根，则该格式** p **阶收敛。**

从上述定理我们可以明确给出任意要求的X步X阶格式。

3. **绝对稳定性**

如果一个格式应用到下面的测试方程上，

$$\begin{cases}y'(x)=\lambda y,\ \ x\in[a,b],\ \ Re\lambda<0\\ y(a)=y_0\end{cases}$$

误差 $\rho_n=y(x_n)-y_n$ **逐次衰减，即有** $\frac{|\rho_{n+1}|}{|\rho_n|}<1$ **，并且总存在左半复平面上的区域使** $\hat{h}=\lambda h$ **在其中使前式成立，则称这个格式是绝对稳定的。这个区域称为绝对稳定域.当绝对稳定域是整个左半复平面时，则称这个格式是A稳定的，或称无条件绝对稳定.**

第3章：非线性方程求解

1. **不动点迭代方法基本理论**

将方程 $f(x)=0$ **转化为等价形式** $x=\varphi(x)$ **，构造迭代格式**

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,\cdots$$

初始值 x_0 **可由观察法或二分法得到。当迭代函数** φ **满足** **定理3.1** **时该格式收敛于** x^* **.**

补充定理（收敛阶） **设迭代函数** $\varphi(x)$ **满足:**

(1) $x^*=\varphi(x^*)$ **，且在** x^* **附近有** p **阶导数；**

(2) $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$；

(3) $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

那么，该迭代格式是 p **阶收敛的。**

由上述定理知，当 $\varphi'(x^*)\neq 0$ **时该格式只有线性收敛速度，因此考虑其加速技巧，例如具有平方收敛速度的** *Aitken-steffensen* **加速方法：**

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k) \\ z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, k = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

2. Newton 型方法(切线法)

Newton 迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \cdots$$

在出现 $p(p \geq 2)$ 重根时 Newton 迭代法退化至只有线性收敛速度，为了恢复其平方收敛速度，有两种常见的改进方法，一种是 p 已知时我们可以根据上面的收敛阶定理改进，取下面的迭代格式：

$$x_{k+1} = x_k - p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \cdots$$

另一种则是引进辅助函数 $u(x) = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 降重为单根再利用 Newton 迭代法求解：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}, k = 0, 1, \cdots$$

Newton下山法：一般来说，Newton 法的收敛性很依赖于初值 x_0 的选取，如果 x_0 偏离 x^* 较远，则 Newton 法可能收敛缓慢甚至发散。为此，可在 Newton 迭代公式中增加一个阻尼参数 α_k，改为

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \cdots$$

其中选取合适 α_k 保证 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$。α_k 的选取通常采用简单后退准则，记 m_k 是使下面不等式成立的最小非负整数 m：

$$|f(x_k - \frac{1}{2^m}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)})| < |f(x_k)|$$

然后令$\alpha_k = \frac{1}{2^{m_k}}$ 即可。

弦截法(割线法)：Newton 迭代公式中涉及到 $f'(x_k)$，若 $f(x)$ 比较复杂，每次迭代计算 $f'(x_k)$ 就可能十分麻烦，尤其它做分母，当 $|f'(x_k)|$ 很小时，计算需十分精确，否则会产生较大的误差。鉴于此，为避开计算导数，可以改用差商代替导数，即取

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

得到离散 Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), k = 1, 2, \cdots$$

当然代价是它的收敛阶只有1.618。

二. 习题解答

1. 第四、五次书面作业

P138 习题6 10(2)

用具有3阶代数精度的$Gauss-Legendre$积分公式计算数值积分 $\int_{-3}^{1}(x^5+x)\,dx$

分析:

勒让德多项式：$L_0(x)=1$，$L_1(x)=x$，$L_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，$L_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$。

取n个点的$Gauss$公式具有2n-1阶代数精度，因此取n=2，取$L_2(x)$的零点$\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\}$，权重可以对应算出为$\{1,1\}$。

$$I_2(f)=f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

首先进行变量代换，$x=-1+2t$，$g(t)=f(-1+2t)$

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(-1+2t)\,2\,dt=2\int_{-1}^{1}g(t)\,dt\\&\approx 2\left(g(-\frac{\sqrt{3}}{3})+g(\frac{\sqrt{3}}{3})\right)=2f(-1-\frac{2\sqrt{3}}{3})+2f(-1+\frac{2\sqrt{3}}{3})\end{aligned}$$

取$f(x)=x^k+x$，$k=0,1,\cdots$用上式计算可以得到下表，

k	精确值	$Gauss$积分结果
0	0	0
1	-8	-8
2	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$
3	-24	-24
4	$\frac{224}{5}\approx 44.8$	$\frac{352}{9}\approx 39.1$
5	$\frac{-376}{3}\approx -125.3$	$\frac{-872}{9}\approx -96.8$

再次验证了格式只有3阶代数精度，其中k=5是题目要求我们计算的。

P138 习题6 15

构造如下形式的数值微分公式(使其达到最高阶精度)，并说明格式精度。

$$f'(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(2h)$$
$$f''(0) \approx d_1 f(-h) + d_2 f(0) + d_3 f(2h)$$

解:

(1) 泰勒展开

$$f(-h) = f(0) - f'(0)h + f''(0)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(0)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$f(2h) = f(0) + f'(0)(2h) + f''(0)\frac{(2h)^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{(2h)^3}{3!} + \cdots$$

因此

$$\begin{aligned} f'(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(2h) =& (c_1 + c_2 + c_3) f(0) + (-c_1 + 2c_3) h f'(0) \\ &+ (\frac{c_1}{2} + 2c_3) h^2 f''(0) + (-\frac{c_1}{6} + \frac{4c_3}{3}) h^3 f^{(3)}(0) + \cdots \end{aligned}$$

取前三个系数，得到方程组

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ (-c_1 + 2c_3)h &= 1 \\ (\frac{c_1}{2} + 2c_3)h^2 &= 0 \end{aligned}$$

解得$c_1 = \frac{-2}{3h}, c_2 = \frac{1}{2h}, c_3 = \frac{1}{6h}$。

代入下一个系数$(-\frac{c_1}{6} + \frac{4c_3}{3})h^3 = \frac{h^2}{3}$，因此前面泰勒展开可以保留相应的$Lagrange$余项，最终得到误差$\frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi)$
。

(2) 同理，有

$$\begin{aligned} f''(0) \approx d_1 f(-h) + d_2 f(0) + d_3 f(2h) =& (d_1 + d_2 + d_3) f(0) + (-d_1 + 2d_2) h f'(0) \\ &+ (\frac{d_1}{2} + 2d_3) h^2 f''(0) + (-\frac{d_1}{6} + \frac{4d_3}{3}) h^3 f^{(3)}(0) + \cdots \end{aligned}$$

取前三个系数，得到方程组

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &= 0 \\ (-d_1 + 2d_2)h &= 0 \\ (\frac{d_1}{2} + 2d_3)h^2 &= 1 \end{aligned}$$

解得$d_1 = \frac{2}{3h^2}, d_2 = \frac{-1}{h^2}, d_3 = \frac{1}{3h^2}$。

代入下一个系数$(-\frac{d_1}{6} + \frac{4d_3}{3})h^3 = \frac{h}{3}$，误差$\frac{h}{3} f^{(3)}(\xi)$。

(方法二：以 $-h, 0, 2h$ 作为插值节点构造二次插值多项式，再对插值多项式进行求导作为原函数导数的近似值，局部截断误差仍用Taylor展开得到。)

补充题1

取权函数$w(x) = |x|$，有如下形式的数值积分公式

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)|x|\,dx \approx I_2(f) = Af(x_1) + Bf(x_2)$$

(1) 确定A, B, x_1, x_2使其达到最高阶代数精度，并说明代数精度。

(2) 假设$f(x)$充分可微，求此数值积分公式的误差。

解:

(1)

待定系数法，取$f = 1, x, x^2, x^3$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1 = A + B$$
$$\int_{-1}^{1} |x|x\,dx = 0 = Ax_1 + Bx_2$$
$$\int_{-1}^{1} |x|x^2\,dx = \frac{1}{2} = Ax_1^2 + Bx_2^2$$
$$\int_{-1}^{1} |x|x^3\,dx = 0 = Ax_1^3 + Bx_2^3$$

尝试求解上述非线性的方程组，由

$$(Ax_1 + Bx_2)(x_1 + x_2) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + (A + B)x_1x_2$$
$$0 = \frac{1}{2} + x_1x_2$$

推出$x_1x_2 = -\frac{1}{2}$，再由

$$(Ax_1^2 + Bx_2^2)(x_1 + x_2) = Ax_1^3 + Bx_2^3 + (Ax_1 + Bx_2)x_1x_2$$
$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0$$

推出$x_1 + x_2 = 0$，因此解得$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，进而系数$A = B = \frac{1}{2}$。

$$I_2(f) = \frac{1}{2}f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

取$f(x) = x^4$代入得

$$\int_{-1}^{1} x^4|x|\,dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

因此代数精度为3。

(2) 从$Hermite$多项式的角度，

记$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，对$f(x)$在这两个点用$Hermite$插值得到多项式$g(x)$，$g(x_i)=f(x_i)$，从而存在误差

$$f(x)-g(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

有$g(x)\in P^3$数值积分精确成立，因此

$$\begin{aligned}
E&=\int_{-1}^{1}f(x)w(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n-1}A_if(x_i)\\
&=\left(\int_{-1}^{1}f(x)w(x)\,dx-\int_{-1}^{1}g(x)w(x)\,dx\right)+\left(\int_{-1}^{1}g(x)w(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n-1}A_ig(x_i)\right)+\left(\sum_{i=0}^{n-1}A_ig(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1}A_if(x_i)\right)\\
&=\int_{-1}^{1}f(x)w(x)\,dx-\int_{-1}^{1}g(x)w(x)\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2w(x)\,dx\\
&=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1}(x^2-x_0^2)^2w(x)\,dx(\text{积分中值定理})\\
&=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\times\frac{1}{12}=\frac{1}{288}f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

补充题2

利用格式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 解初值问题

$$\begin{cases}y'+y=0\\y(0)=1\end{cases}$$

证明其近似解为$y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n$，并证明当 $h\to 0$ 时，数值解收敛到原初值问题的准确解 $y=e^{-x}$.

证明：问题中 $f(x,y)=-y$，带入数值格式得到递推关系：

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n$$

由于 $y_0=1$，由上述递推关系迭代得到

$$y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n$$

对任意给定x，$h=\frac{x}{n}$，$h\to 0\Leftrightarrow n\to+\infty$，利用重要极限$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 得到 $y_n\to e^{-x},n\to+\infty$.

补充题3

构造如下形式的公式，确定系数$b_{-1},b_0,b_1,c_{-1},c_0$，使其达到最高阶精度，并写出局部截断误差。

$$y_{n+1}=c_0y_n+c_1y_{n-1}+h\left[b_{-1}f(x_{n+1},y_{n+1})+b_0f(x_n,y_n)+b_1f(x_{n-1},y_{n-1})\right]$$

解:

在x_n处泰勒展开，$h=x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} =& y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\
=& y(x_n+h) - c_0 y(x_n) - c_1 y(x_n - h) - h[b_{-1} f(x_n+h, y_{n+1}) + b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_n - h, y_{n-1})] \\
=& y(x_n+h) - c_0 y(x_n) - c_1 y(x_n - h) - h[b_{-1} y'(x_n+h) + b_0 y'(x_n) + b_1 y'(x_n - h)] \\
=& \left\{ y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_n) + \cdots \right\} - c_0 y(x_n) \\
& - c_1 \left\{ y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) - \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_n) + \cdots \right\} \\
& - hb_{-1} \left\{ y'(0) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x_n) + \cdots \right\} - hb_0 y'(x_n) \\
& - hb_1 \left\{ y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(5)}(x_n) + \cdots \right\}
\end{aligned}
$$

整理即

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} =& (1 - c_0 - c_1) y(x_n) + (1 + c_1 - b_{-1} - b_0 - b_1) h y'(x_n) + (\frac{1}{2} - \frac{c_1}{2} - b_{-1} + b_1) h^2 y''(x_n) \\
& + (\frac{1}{3!} + \frac{c_1}{3!} - \frac{b_{-1}}{2} - \frac{b_1}{2}) h^3 y^{(3)}(x_n) + (\frac{1}{4!} - \frac{c_1}{4!} - \frac{b_{-1}}{3!} + \frac{b_1}{3!}) h^4 y^{(4)}(x_n) \\
& + (\frac{1}{5!} + \frac{c_1}{5!} - \frac{b_{-1}}{4!} - \frac{b_1}{4!}) h^5 y^{(5)}(x_n) + \cdots
\end{aligned}
$$

用前几个系数为0列方程，解出系数

$$
\begin{aligned}
1 - c_0 - c_1 &= 0 \\
1 + c_1 - b_{-1} - b_0 - b_1 &= 0 \\
\frac{1}{2} - \frac{c_1}{2} - b_{-1} + b_1 &= 0 \\
\frac{1}{3!} + \frac{c_1}{3!} - \frac{b_{-1}}{2} - \frac{b_1}{2} &= 0 \\
\frac{1}{4!} - \frac{c_1}{4!} - \frac{b_{-1}}{3!} + \frac{b_1}{3!} &= 0
\end{aligned}
$$

解得：$c_0 = 0, c_1 = 1, b_{-1} = \frac{1}{3}, b_0 = \frac{4}{3}, b_1 = \frac{1}{3}$。

$$
y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[\frac{1}{3} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{4}{3} f(x_n, y_n) + \frac{1}{3} f(x_{n-1}, y_{n-1})\right]
$$

尝试下一项的系数

$$
(\frac{1}{5!} + \frac{c_1}{5!} - \frac{b_{-1}}{4!} - \frac{b_1}{4!}) h^5 = -\frac{1}{90} h^5
$$

可以推出$T_{n+1} = -\frac{1}{90} h^5 y^{(5)}(\xi)$。

(可以用线性 k 步法的补充定理验证结果的正确性)

2. 第六、七次书面作业

补充题：证明 P149 Runge-Kutta 公式(7.16)为三阶精度。

证明：由 $y'(x) = f(x, y)$ 得到

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{d}{dx} f(x, y) = f_x + f_y f \\
y'''(x) &= \frac{d}{dx}(f_x + f_y f) = f_{xx} + f_{xy} f + f(f_{xy} + f_{yy} f) + f_y(f_x + f_y f) = 2f_{xy} f + f_y^2 f + f^2 f_{yy} + f_{xx} + f_x f_y
\end{aligned}
$$

作 $y(x+h)$ 在 x 点的 Taylor 展开

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + O(h^4) \\
&= y + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}(2f_{xy} f + f_y^2 f + f^2 f_{yy} + f_{xx} + f_x f_y) + O(h^4)
\end{aligned}
$$

为了方便，仍用原记号表示相应的准确值，$k_1 = f$，则由二元泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^i f(x_0,y_0)+O((h^2+k^2)^{\frac{n+1}{2}})$$

得到 k_2 在 (x_n,y_n) 处的Taylor 展开为:

$$k_2=f+\frac{h}{2}(f_x+ff_y)+\frac{h^2}{8}(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy})+O(h^3)$$

得到 k_3 在 (x_n,y_n) 处的Taylor 展开为:

$$\begin{aligned}k_3&=f+h(f_x+(2k_2-f)f_y)+\frac{h^2}{2}(f_{xx}+2(2k_2-f)f_{xy}+(2k_2-f)^2f_{yy})+O(h^3)\\&=f+h(f_x+(2[f+\frac{h}{2}(f_x+ff_y)]-f)f_y)+\frac{h^2}{2}(f_{xx}+2(2f-f)f_{xy}+(2f-f)^2f_{yy})+O(h^3)\\&=f+h(f_x+ff_y)+\frac{h^2}{2}(f_{xx}+2f_xf_y+2ff_{xy}+2ff_y^2+f^2f_{yy})+O(h^3)\end{aligned}$$

带入可得 $y_{n+1}-y_n-\frac{h}{6}(k_1+4k_2+k_3)=O(h^4)$，故该 Runge-Kutta 公式(7.16)为三阶精度。

P74 习题3 2

(1) 迭代格式

$$x_{k+1}=\left(\frac{5x_k^2+19x_k-42}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

令

$$\phi(x)=\left(\frac{5x^2+19x-42}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

在 $x=3$ 处

$$|\phi'(3)|<1$$

且当 $x\in[2.5,3.5]$ 时，

$$\phi(x)\in[2.5,3.5]$$

故该迭代格式收敛

(2) 迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{2x_k^3-5x_k^2-17x_k+42}{2}$$

令

$$\phi(x)=\frac{2x^3-5x^2-17x+42}{2}$$

在 $x=3$ 处

$$|\phi'(3)|>1$$

故该迭代格式不收敛

(3) 迭代格式

$$x_{k+1}=2x_k^3-5x_k^2-18x_k+42$$

令

$$\phi(x)=2x^3-5x^2-18x+42$$

在 $x=3$ 处

$$|\phi'(3)|>1$$

故该迭代格式不收敛

P74 习题3 5

因为计算 $\sqrt[n]{a}$ 可以通过求解 $x^n = a$ 得到。
因此令

$$f(x) = x^n - a$$

牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

取 $a = 9, n = 5, x_0 = 2$, 迭代得 $x_1 = 1.7125$,$x_2 \approx 1.5792908$,$x_3 \approx 1.5527830$,$x_4 \approx 1.5518467$
满足 $|x_4 - x_3| < 10^{-2}$，故计算得近似值为 1.5518467

P74 习题3 8

由题给出的方程组知

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$g(x,y) = x^3 - y$$

则 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

迭代格式为

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1}(x_k, y_k) \begin{pmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

计算得到结果：$x_0 = 0.8, y_0 = 0.6; x_1 = 0.8270492. y_1 = 0.5639344; x_2 = 0.8260323, y_2 = 0.5636237; x_3 = 0.8260313, y_3 = 0.5636242.$
此时满足要求误差控制, 解为

$$x^* = 0.82603, y^* = 0.56362$$