001511 计算方法 B

2021~2022 学年第 1 学期期末考试试卷

2022 年 1 月

注意事项：

（1）答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。

（2）本试卷共 8 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

（3）除特殊说明，计算过程和结果不进行近似。

1、（9 分）使用 Doolittle 分解算法分解如下矩阵

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

即求解单位下三角矩阵L和上三角形矩阵U，使得$A=LU$。

答：

$$\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{4}{7} & 1 & 0\\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{23} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ 0 & \frac{23}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & \frac{132}{23}\end{pmatrix}$$

2、（9 分）设$f(x)=\mathrm{c}x^n+x(c\neq 0)$，$x_0<x_1<\cdots<x_n(n>2)$为一组相异节点，试证明：

（1）$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=1$；

（2）$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]=\mathrm{c}\sum_{k=0}^{n-1}x_k$。

答：

略。

3、（10 分）按下列数据，用最小二乘法做出形如$f(x)=ae^{b\sqrt{x}}$的拟合函数。（注意：计算过程保留 4 位小数）

i	1	2	3	4
x_i	1	4	9	25
y_i	2.00	4.00	6.00	8.00

答：

$y(x)=1.7939e^{0.3285\sqrt{x}}$。

4、（12 分）考虑如下矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

（1）写出使用规范运算的反幂法计算A的特征值时的迭代格式；

（2）取初始值$X^{(0)}=(1,1)^T$，计算矩阵A按模最小的特征值及其对应的特征向量。（注意：迭代收敛要求精确到小数点后 2 位，总迭代次数不超过 8 次。）

答：

（1）略；

（2）按模最小的特征值$\lambda=1.70$，相应特征向量为$X=(1.00,-0.30)^T$。

5、（15 分）考虑线性方程组$AX=B$，其中，

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & a\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ a & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}。$$

（1）分别写出相应的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵；

（2）求 Jacobi 迭代收敛时，实数a的所有取值范围；

（3）求 Gauss-Seidel 迭代收敛时，实数a的所有取值范围。

答：

Jacobi 迭代的迭代矩阵为：$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2a\\ 0 & 0 & 0\\ -2a & 0 & 0\end{pmatrix}$，收敛要求$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$；

Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵为：$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2a\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4a^2\end{pmatrix}$，收敛要求$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$。

6、（15 分）设有$[-1,2]$上的数值积分公式

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx \approx S\big(f(x)\big)=Af(-1)+Bf(2)+\mathrm{C}f(1)+Df'(1)$$

（1）试确定常数A,B,C,D，使其达到最高阶代数精度；此时的代数精度是多少？

（2）假设$f(x)$充分可微，试求此数值积分公式的积分误差。

答：

（1）$A=\frac{9}{16},B=\frac{3}{4},C=\frac{27}{16},D=-\frac{9}{8}$，具有 3 阶精度；

（2）误差为$-\frac{21}{160}f^{(4)}(\eta)$，$-1\le\eta\le 2$。

7、（15 分）对于常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}y'(x)=f(x,y)，x\in[a,b]\\ y(a)=y_0,\end{cases}$$

其中$f(x,y)$足够光滑。若取$h=\frac{b-a}{m}$，$x_n=a+nh,n=0,1\dots,m$，m为正整数。试证明对任意参数$t\in(0,1)$，如下形式的龙格-库塔格式是二阶的，并求其局部截断误差的表达式。

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(K_2+K_3)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+th,y_n+thK_1)\\ K_3=f(x_n+(1-t)h,y_n+(1-t)hK_1)\end{cases}$$

答：

略。

8、（15 分）记$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，$F(X)=\big(f_1(X),f_2(X),f_3(X)\big)^T$，考虑非线性方程组

$$\begin{cases}f_1(X)={x_1}^2+e^{x_2}-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x_3\right)=0\\ f_2(X)={x_1}^3+{x_2}^3-x_3+3=0\\ f_3(X)=4x_1+{x_2}^2-\ln(x_3+2)=0\end{cases}$$

（1）写出求解非线性方程组$F(X)=0$的 Newton 迭代格式；

（2）取初始向量$X^{(0)}=(1,1,1)^T$，求出$F(X)$在$X^{(0)}$处的 Jacobi 矩阵，并计算$X^{(1)}$，即经过一次 Newton 迭代后的X。（注意：计算过程保留 4 位小数）

答：

（1）$X^{(k+!)}=X^{(k)}-J^{-1}\big(X^{(k)}\big)F\big(X^{(k)}\big)$；

（2）$J(X)=\begin{pmatrix} 2x_1 & e^{x_2} & \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x_3\right) \\ 3{x_1}^2 & 3{x_2}^2 & -1 \\ 4 & 2x_2 & -\frac{1}{x_3+2} \end{pmatrix}$，$J\left(X^{(0)}\right)=\begin{pmatrix} 2.0000 & 2.7183 & 1.5708 \\ 3.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ 4.0000 & 2.0000 & -0.3333 \end{pmatrix}$，$X^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.4171 \\ 0.1806 \\ 0.7931 \end{pmatrix}$。

本解答由 PB19020649 李治平提供。