Chương 2

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

Tập hợp và ánh xạ là các khái niệm có tính cơ bản và nền tảng của toán học hiện đại. Toán học hiện đại sử dụng tập hợp và ánh xạ như những khái niệm cơ sở để định nghĩa các khái niệm toán học mới trong quá trình phát triển của nó. Khoa học máy tính và công nghệ thông tin sử dụng tập hợp để mô hình hóa và biểu diễn các đối tượng thông tin, dữ liệu trong khi ánh xạ là công cụ mô hình hóa các thao tác xử lý dữ liệu nói chung và giải thuật tính toán nói riêng.

Phần 2.1, 2.2 và 2.3 của chương này tương ứng trình bày khái niệm tập hợp, các phép toán đại số tập hợp và các tính chất của các phép toán đại số tập hợp như là nền tảng của lý thuyết tập hợp và là cơ sở để tập hợp được ứng dụng vào thực tế. Phần 2.4 định nghĩa khái niệm ánh xạ một cách hình thức. Phần 2.5 và 2.6 trình bày một số ánh xạ đặc biệt như đơn ánh, toàn ánh, song ánh, ánh xạ ngược và ánh xạ hợp. Phần 2.7 giới thiệu khái niệm độ tăng của hàm số, một khái niệm có nhiều ứng dụng trong lý thuyết phân tích độ phức tạp của giải thuật.

2.1 Khái niệm tập hợp

Tập hợp (set) là một khái niệm *cơ bản* (basic) của toán học, không được định nghĩa một cách hình thức dựa trên các khái niệm toán học khác. Những vật, những đối tượng toán học, v.v, được tụ tập theo một tính chất chung nào đó tạo thành những tập hợp. Ví dụ, tập hợp các nguyên âm trong tiếng Anh, tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số nguyên, v.v.

Lý thuyết tập hợp là nền tảng của toán học hiện đại, được nhà toán học Georg Cantor nghiên cứu đặt nên móng đầu tiên vào những năm 1871-1883.

Các đối tượng thuộc (trong) tập hợp A được gọi là các phần tử của A. Nếu x là một phần tử của tập hợp A, ta viết $x \in A$. Ngược lại, nếu x không phải là một phần tử của A, ta viết $x \notin A$. Một tập hợp không có phần tử nào được gọi là *tập hợp rỗng* (empty set), ký hiệu $\varnothing$. Ví dụ, tập hợp các nghiệm số thực của phương trình $x^2+1 = 0$ là $\varnothing$. Một tập hợp U bao gồm tất cả các phần tử đang xét (trong một vấn đề nào đó) gọi là *tập hợp vũ trụ* (universal set). Ví dụ, trong khi xem xét dân số thế giới, thì tập hợp tất cả các người đang sống trên hành tinh là một tập hợp vũ trụ. Trong số học thì tập hợp vũ trụ là tất cả các số nguyên.

Một tập hợp A có n phần tử $a_1, a_2,\ldots, a_n$ được ký hiệu là $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$. Một tập hợp A bao gồm những phần tử x trong vũ trụ U có tính chất $p(x)$ được ký hiệu là $A = \{x\in \mathrm{U} \mid p(x)\}$. Ví dụ, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$ là tập hợp tất cả các số nguyên $\mathbb{Z}$ sao cho bình phương của chúng không lớn hơn 4. Nghĩa là $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Cho A là một tập hợp. Nếu A có đúng n phần tử, với n là số nguyên không âm, thì ta nói A là một *tập hợp hữu hạn* (finite set) và n là *bản số* (cardinality) của A. Bản số của A được ký hiệu $|A|$. Ví dụ A là tập số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10, thì $|A| = 5$.

Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó không phải là hữu hạn. Ví dụ, tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là một tập hợp vô hạn.

Hai *tập hợp A và B được gọi là bằng nhau*, ký hiệu $A = B$, nếu và chỉ nếu chúng có cùng các phần tử. Ví dụ, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq 2x \leq 6\}$ và $B = \{2, 3\}$, thì $A = B$.

Định nghĩa 2.1.1 Giả sử A và B là hai tập hợp, tập hợp A được gọi là tập hợp con của tập hợp B, ký hiệu $A \subset B$, nếu mọi phần tử $x\in A$ thì $x \in B$.

Ký hiệu $A \subset B$ còn được đọc là "A chứa trong B" hoặc "B chứa A" hoặc "A là một bộ phận của B". Ta còn có thể ký hiệu $B \supset A$ để thay cho $A \subset B$, phủ định của $A \subset B$

được viết là $A \not\subset B$. Lưu ý rằng, mọi tập hợp đều là tập con của chính nó, tập hợp $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp.

Định lý 2.1.1 Cho ba tập hợp A, B và C, khi đó ta có:

1. Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$
2. $A = B$ nếu và chỉ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Chứng minh $\forall x \in A$, do $A \subset B$ nên $x \in B$, lại do $B \subset C$ nên $x \in C$. Vì vậy $A \subset C$. Như thế mệnh đề 1 của định lý được chứng minh. Vì $A = B$ nên mọi phần tử trong A cũng là phần tử trong B và ngược lại nên $A \subset B$ và $B \subset A$. Mặt khác nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì mọi phần tử thuộc A cũng thuộc B và ngược lại nên $A = B$. Vậy, mệnh đề 2 của định lý được chứng minh.

Với một tập hợp A bất kỳ, tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp A, được gọi là *tập hợp lũy thừa* (power set) của A, ký hiệu là $\mathsf{P}(A)$ hoặc $2^{|A|}$. Nói cách khác $\mathsf{P}(A)$ là tập hợp gồm các phần tử là những tập hợp con của tập hợp A. Ví dụ, $A = \{a, b, c\}$, thì $\mathsf{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Giả sử k là một số nguyên dương và $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hợp khác rỗng, tập hợp *tích Descartes* (Descartes product) của $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ký hiệu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, là một tập hợp gồm các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sao cho $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$. Nói cách khác $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$. Ví dụ, $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, thì $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

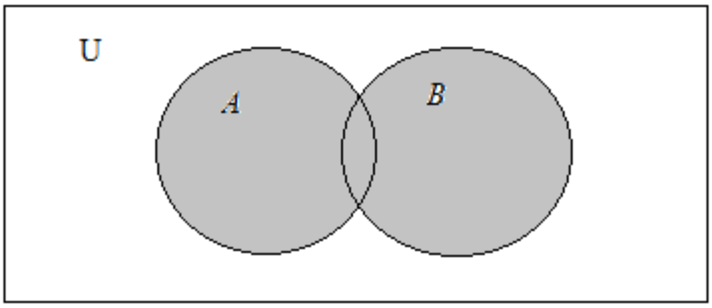
2.2 Các phép toán đại số tập hợp

Trên cơ sở các khái niệm về tập hợp đã được giới thiệu, các phép toán trên các tập hợp, như là một đại số tập hợp, sau đây là cơ sở để ứng dụng lý thuyết tập hợp vào khoa học và thực tiễn nói chung và khoa học máy tính nói riêng.

Định nghĩa 2.2.1 Giả sử A và B là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ U, *phép toán hợp* (union operation) của A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A hay thuộc B. Nghĩa là

$A \cup B = \{x \in \mathsf{U} \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Hình 2.2.1 thể hiện kết quả của phép toán hợp của hai tập hợp A và B bằng một biểu đồ (gọi là biểu đồ Venn).



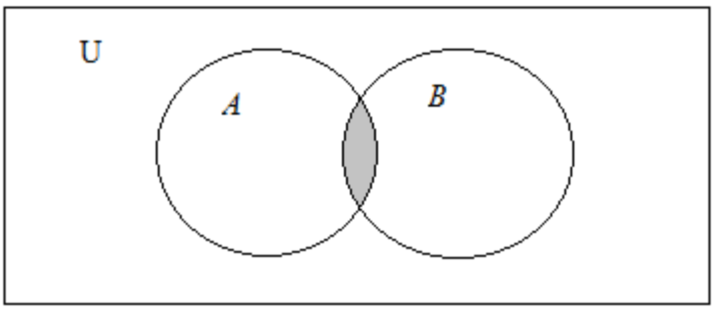
Hình 2.2.1: Hợp của hai tập hợp *A* và *B*

Ví dụ 2.2.1 Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

Định nghĩa 2.2.2 Giả sử A và B là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ U, *phép toán giao* (intersection operation) của A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A và thuộc B. Nghĩa là

$A \cap B = \{x \in \mathsf{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Hình 2.2.2 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán giao của hai tập hợp A và B.



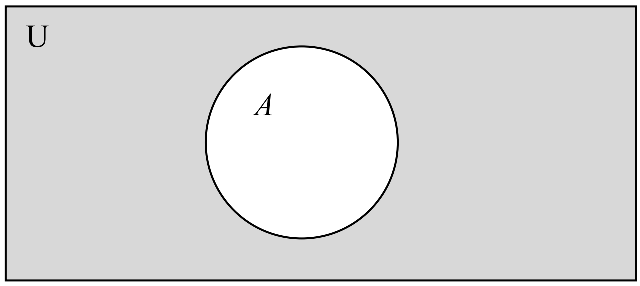
Hình 2.2.2: Giao của hai tập hợp *A* và *B*

Ví dụ 2.2.2 Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A \cap B = \{1, 2\}$.

Định nghĩa 2.2.3 Giả sử A là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ U, *phần bù* (complement) của A đối với U, ký hiệu $\overline{A}$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc U và không thuộc A. Nghĩa là

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Hình 2.2.3 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán lấy phần bù của tập hợp A trong tập hợp vũ trụ U.



Hình 2.2.3: Phần bù của tập hợp *A* trong vũ trụ U

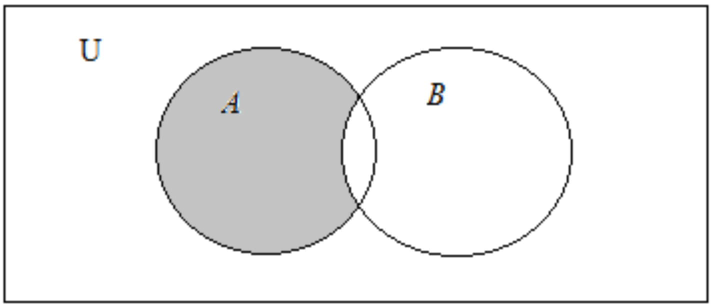
Ví dụ 2.2.3 Với tập vũ trụ U = $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn, thì $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ là tập hợp các số tự nhiên lẻ.

Dễ thấy, giao, hợp, trừ của hai tập hợp, phần bù của một tập hợp trên vũ trụ U cũng là một tập hợp trên U. Nói cách khác, đại số tập hợp trên vũ trụ U là *đóng* (closure) trong U.

Định nghĩa 2.2.4 Giả sử A và B là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ U, *phép toán trừ* (difference operation) của A và B, ký hiệu $A - B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A và không thuộc B. Nghĩa là

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Hình 2.2.4 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán giao của hai tập hợp *A* và *B*.



Hình 2.2.4: Hiệu của hai tập hợp *A* và *B*

Ví dụ 2.2.4 Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A - B = \{5\}$.

Từ định nghĩa của phép trừ, chúng ta dễ thấy rằng $A - B = A \cap \overline{B}$. Nói cách khác, phép trừ của các tập hợp được suy dẫn từ phép giao và phép lấy phần bù. Tập đầy đủ các phép toán trên tập hợp chỉ gồm phép hợp, giao và phần bù. Vì vậy, các tính chất cơ bản của các phép toán đại số tập hợp sau đây không đề cập đến tính chất của phép trừ.

2.3 Tính chất của các phép toán tập hợp

Các phép toán đại số tập hợp có các tính chất cơ bản, còn gọi là luật, tương tự như các phép toán đại số mệnh đề. Cụ thể các tính chất cơ bản của các phép toán tập hợp được phát biểu bằng định lý sau.

Định lý 2.3.1 Giả sử *A*, *B*, *C* là các tập con bất kỳ của U, khi đó ta có

1. Luật đồng nhất:

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap U = A$$

2. Luật thống trị:

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

3. Luật lũy đẳng:

   $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

4. Luật bù: $(\overline{\overline{A}}) = A$

5. Luật giao hoàn:

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

6. Luật kết hợp:

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

7. Luật phân bố:

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8. Luật De Morgan:

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Chứng minh Ở đây, chúng ta chỉ giới thiệu chứng minh luật De Mogan. Việc chứng minh các luật còn lại xem như là các bài tập. Giả sử $x \in \overline{A \cup B}$, thì $x \in$ U và $x \notin A \cup B \Rightarrow (x \in$ U và $x \notin A) \wedge (x \in$ U và $x \notin B) \Rightarrow x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}$, nên $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Vậy $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Ngược lại, giả sử $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, thì $x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B} \Rightarrow (x \in$ U và $x \notin A) \wedge (x \in$ U và $x \notin B) \Rightarrow x \in$ U và $x \notin A \cup B$, nên $x \in \overline{A \cup B}$. Vậy $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Từ đó, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.4 Khái niệm ánh xạ

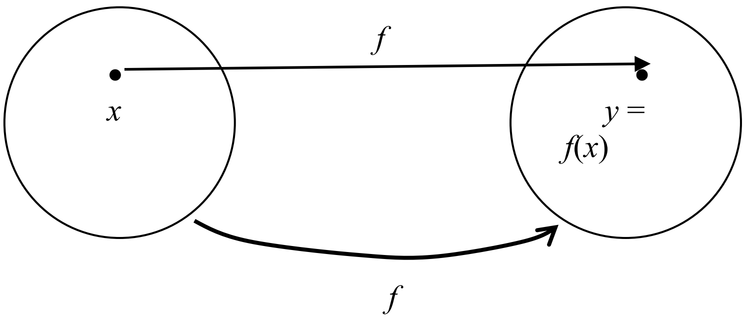
Cùng với tập hợp, ánh xạ là một trong những khái niệm có tính nền tảng của toán học hiện đại được ứng dụng rộng rãi trong hầu hết các lĩnh vực khoa học và công nghệ.

Trong ngành Công nghệ Thông tin, ánh xạ là mô hình toán học của các giải thuật là cơ sở để tạo nên các chương trình máy tính.

Định nghĩa 2.4.1 Giả sử A và B là hai tập hợp khác rỗng, một *ánh xạ* (function) từ A vào B là một qui tắc cho tương ứng với mỗi phần tử x của A một phần tử duy nhất y của B, ký hiệu là $f(x)$ và gọi là ảnh của x bởi f. Ta viết

$$\begin{aligned} f:\ & A \to B \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Tập hợp A gọi là nguồn hay miền xác định, tập hợp B gọi là đích hay là miền giá trị của ánh xạ f. Chúng ta cũng gọi ánh xạ từ *A vào B* là ánh xạ từ *A đến B*. Hình 2.4.1 là sơ đồ biểu diễn ánh xạ f từ tập hợp A vào tập hợp B.



Hình 2.4.1: Ánh xạ *f* từ tập hợp *A* vào tập hợp *B*

Ví dụ 2.4.1

1. Giả sử $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, tương ứng

$1 \mapsto c$

$2 \mapsto a$

xác định một ánh xạ từ A vào B.

2. Giả sử $A = B = \{1, 2, 3\}$, tương ứng

$1 \mapsto 3$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 1$

xác định một ánh xạ từ A vào A.

3. Xét tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên và tập $\mathbb{Z}_m$ các số nguyên không âm nhỏ hơn một số nguyên dương đã cho m. Với mọi $x \in \mathbb{N}$, ta chia x cho m và được số dư $y \in Z_m$, ký hiệu là $x\ mod\ m$, thì tương ứng

   $x \mapsto x\ mod\ m$

   xác định một ánh xạ f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}_m$ (nghĩa là $f(x) = x\ mod\ m$)
4. Xét tập A bất kỳ, thì tương ứng

   $x \mapsto x$

   xác định một ánh xạ từ A vào A, gọi là ánh xạ đồng nhất trên A, ký hiệu là 1_A
5. Xét tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Với mỗi số thực x ta xác định số nguyên y lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x, ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$. thì tương ứng

   $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

   xác định một ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.
6. Xét tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp số các nguyên $\mathbb{Z}$. Với mỗi số thực x ta xác định số nguyên y nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng x, ký hiệu là $\lceil x \rceil$. thì tương ứng

   $x \mapsto \lceil x \rceil$

   xác định một ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Chúng ta dễ thấy rằng, khái niệm ánh xạ là khái niệm mở rộng của khái niệm hàm số. Các hàm số là những ánh xạ mà nguồn và đích là các tập hợp con của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$. Ví dụ, hàm số $y = f(x) = x^2$ là ánh xạ từ tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ đến tập hợp các số thực không âm $\mathbb{R}^*$.

Định nghĩa 2.4.2 Hai ánh xạ f và g từ A vào B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Cũng như hàm số, mỗi ánh xạ xác định một đồ thị tương ứng. Khái niệm đồ thị của ánh xạ được mở rộng từ khái niệm đồ thị của hàm như sau.

Định nghĩa 2.4.3 Giả sử f: $A \to B$ là một ánh xạ, tập hợp con Γ của $A \times B$ bao gồm các cặp $(x, f(x))$ với $x \in A$ được gọi là *đồ thị* (graph) của ánh xạ f.

Ví dụ 2.4.2 Ánh xạ f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ trong ví dụ 2.4.1 có đồ thị là $\Gamma = \{(x, x \bmod m) \mid x \in \mathbb{N}\}$, trong đó $x \bmod m \in Z_m$ là số dư của phép chia x cho m.

Định nghĩa 2.4.4 Giả sử f là ánh xạ từ A vào B và E, F tương ứng là tập hợp con của A và B.

1. Ảnh của E được xác định bởi f là tập hợp $f(E) = \{y \in B \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ (hay đơn giản hơn có thể viết $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$)
2. Tạo ảnh (ảnh ngược) của F được xác định bởi f là tập hợp $f^{-1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}$.

Đặc biệt, khi $F = \{y\}$, thì chúng ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(F) = f(\{y\})$. Ngoài ra, nếu $f^{-1}(y)=\{x\}$, thì x là phần tử duy nhất có ảnh là y (nói cách khác y có một tạo ảnh duy nhất là x).

Ví dụ 2.4.3 Xét ánh xạ f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$ với $f(x) = x^2$. Cho $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, thì $f(E) = \{0, 1, 4\}$. Cho $F = \{4, 9\}$, thì $f^{-1}(F) = \{-2, -3, 2, 3\}$, $f^{-1}(4)=\{-2, 2\}$.

Định lý 2.4.1 Giả sử f là một ánh xạ từ A vào B và E, F tương ứng là tập hợp con của A và B. Khi đó ta có:

1. $E \subset f^{-1}(f(E))$
2. $F \supset f(f^{-1}(F))$

Chứng minh Từ Định nghĩa 2.4.4, ta có $f(E) = \{y \in B \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ nên $f^{-1}(f(E)) = \{x \in A \mid f(x) \in f(E)\}$. Vì vậy, nếu $x \in E$ thì $x \in A$ và $f(x) \in f(E)$ nên $x \in \{x \in A \mid f(x) \in f(E)\} = f^{-1}(f(E))$. Suy ra $E \subset f^{-1}(f(E))$, Vì vậy, phần 1 của định lý được chứng minh.
Từ định nghĩa 2.4.4, ta có $f(f^{-1}(F)) = \{y = f(x) \mid x \in f^{-1}(F)\} = \{y = f(x) \mid x \in A$ mà $f(x) \in F\} \subset F$. Vì vậy, phần 2 của định lý được chứng minh.

Định lý 2.4.2 Giả sử f là một ánh xạ từ A vào B và E_1, E_2 là các tập con của A, F_1 và F_2 là các tập con tùy ý của B. Ta có:

1. $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$
2. $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$
3. $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$
4. $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$.

Chứng minh $f(E_1 \cup E_2) = \{f(x) | x \in E_1 \cup E_2\} = \{f(x) | x \in E_1 \vee x \in E_2\} = \{f(x) | x \in E_1\} \cup \{f(x) | x \in E_2\} = f(E_1) \cup f(E_2)$. Như vậy, hệ thức thứ 1 của định lý được chứng minh. Các hệ thức còn lại chứng minh tương tự.

Lưu ý rằng trong hệ thức thứ 2, $f(E_1 \cap E_2)$ là tập hợp con thực sự của $f(E_1) \cap f(E_2)$. Thậy vậy, chúng ta xem ánh xạ f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = |x|$. Lấy $E_1 = \mathbb{Z}^+$ và $E_2 = \mathbb{Z}^-$, tương ứng là các tập hợp các số nguyên dương và nguyên âm. Ta có $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, nên $f(E_1 \cap E_2) = \emptyset$, nhưng $f(E_1) = f(E_2) = \mathbb{Z}^+$ nên $f(E_1) \cap f(E_2) = \mathbb{Z}^+ \neq \emptyset$.

2.5 Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Một cách không hình thức, một ánh xạ mà mỗi phần tử của miền giá trị tương ứng với nhiều nhất một phần tử của miền xác định gọi là đơn ánh. Một ánh xạ mà ảnh của miền xác định là miền giá trị gọi là toàn ánh. Khi một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toán ánh thì ánh xạ được gọi là song ánh. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh là các trường hợp đặc biệt của ánh xạ và có nhiều ứng dụng trong toán học và thực tế. Các khái niệm hình thức của đơn ánh, toàn ánh và song ánh được định nghĩa lần lượt dưới đây.

Định nghĩa 2.5.1 Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *đơn ánh* (injunction) nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Một đơn ánh còn được gọi là ánh xạ *một đối một* (one-to-one). Ngoài ra, từ tính tương đương logic của các mệnh đề $p \to q$ và $\neg q \to \neg p$, chúng ta có thể suy ra rằng f: $A \to B$ là đơn ánh nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$.

Ví dụ 2.5.1

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ với $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$, và $f(d) = 3$ một là đơn ánh.
2. Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $x \mapsto x^3$ là một đơn ánh, thật vậy, với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $(x_1)^3 \neq (x_2)^3$ hay $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Ánh xạ $f(x) = x^2$ từ tập hợp các số ngyên đến tập hợp các số ngyên không phải là đơn ánh vì $f(-1) = f(1) = 1$. Tuy nhiên ánh xạ $f(x) = x^2$ từ tập hợp các số nguyên không âm đến tập hợp các số nguyên không âm là đơn ánh.

Định nghĩa 2.5.2 Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *toàn ánh* (surjection) nếu $f(A) = B$, nói cách khác nếu với mọi $y \in B$ có ít nhất một $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Một toàn ánh f: $A \to B$ còn được gọi là một ánh xạ từ *A lên* (onto) *B*.

Ví dụ 2.5.2

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3\}$ được xác định bởi $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$ và $f(d) = 3$ là một toàn ánh.
2. Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2$ không phải là toàn ánh. Vì thực $y = -1$ không có số thực x sao cho $f(x) = x^2 = y = -1$.

Định nghĩa 2.5.3 Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *song ánh* (*bijection*) nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, nói cách khác nếu với $y \in B$ có một và chỉ một $x \in A$ sao cho $f(x) = y$.

Ví dụ 2.5.3

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3, 4\}$ được xác định bởi $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 4$ và $f(d) = 1$ là một song ánh.
2. Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = x^3 + 1$ là một song ánh. Vì với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$ thì $x_1^3 + 1 \neq x_2^3 + 1$ hay $f(x_1) \neq f(x_2)$ nên f là đơn ánh. Mặt khác, với mọi $y \in \mathbb{R}$ ta có $x = \sqrt[3]{y-1} \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y$ nên f là toàn ánh. Từ đó ánh xạ f là một song ánh.

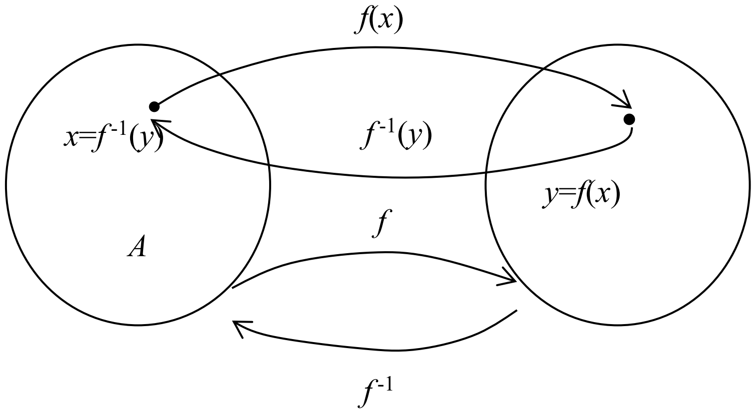
2.6 Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp

Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp là các khái niệm mở rộng tương ứng của khái niệm hàm số ngược và hàm số hợp. Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp lần lượt được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.6.1 Giả sử f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B, ánh xạ ngược của f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi $y \in B$ với một phần tử duy nhất $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Ánh xạ ngược của f được ký hiệu là f^{-1}.

Từ định nghĩa ta suy ra $f^{-1}(y) = x$ khi và chỉ khi $f(x) = y$. Do đó $f(f^{-1}(y)) = y$, với mọi $y \in B$ và $f^{-1}(f(x)) = x$ với mọi $x \in A$. Rõ ràng ánh xạ ngược f^{-1} của f cũng là song ánh. Thật vậy, $\forall y_1, y_2 \in B$ nếu $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ thì $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$ hay $y_1 = y_2$ nên f^{-1} là đơn ánh. Hơn nữa, từ hệ thức $f^{-1}(f(x)) = x$ với mọi $x \in A$, ta suy ra $f^{-1}(f(A)) = A$. Do f là toàn ánh nên $f(A) = B$, từ đó $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B)$ hay $A = f^{-1}(B)$, vì vậy f^{-1} là toàn ánh. Như thế f^{-1} vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh nên f^{-1} là song ánh.

Hình 2.6.1 biểu diễn ánh xạ ngược f^{-1} từ tập hợp B đến tập hợp A của ánh xạ f từ tập hợp A đến tập hợp B.



Hình 2.6.1: Ánh xạ ngược f^{-1} của ánh xạ f

Ví dụ 2.6.1

1. Xét song ánh từ $\{a, b, c\}$ đến $\{1, 2, 3\}$ sao cho $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, và $f(c) = 1$. Ánh xạ ngược f^{-1} từ $\{1, 2, 3\}$ đến $\{a, b, c\}$ là $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ và $f^{-1}(3) = b$.
2. Xét ánh xạ $f(x) = x^3+1$ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$. Theo Ví dụ 2.5.3 f là một song ánh. Dễ dàng xác định được ánh xạ ngược của f là $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

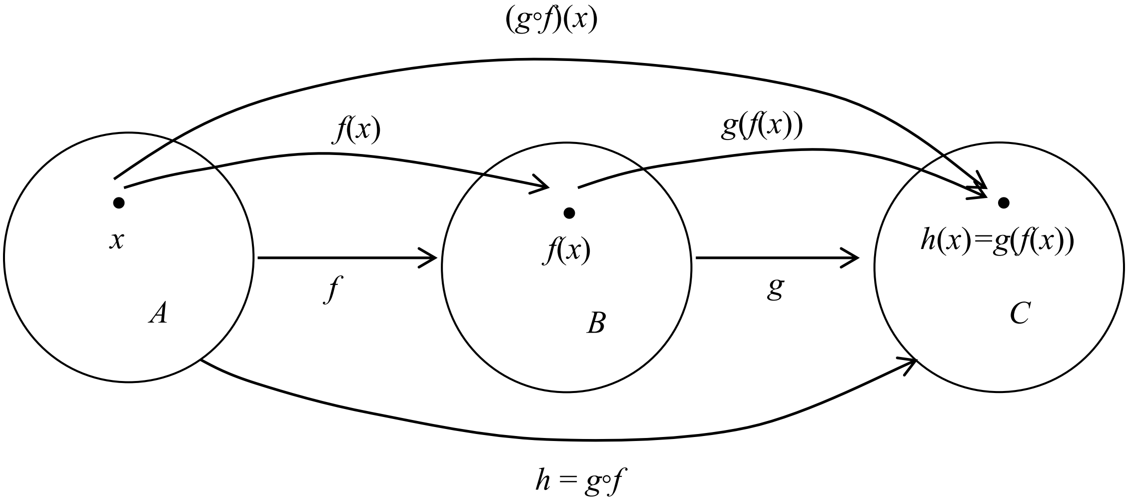
Định nghĩa 2.6.2 Cho hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$. Ánh xạ

h: $A \to C$

$x \mapsto h(x) = g(f(x))$

được gọi là ánh xạ hợp (tích) của f và g, ký hiệu là $g \circ f$.

Hình 2.6.2 biểu diễn ánh xạ hợp $g \circ f$ từ tập hợp A đến tập hợp C của hai ánh xạ f (từ A đến B) và g (từ B đến C).



Hình 2.6.2: Ánh xạ hợp $g \circ f$ của hai ánh xạ f và g

Ví dụ 2.6.2

1. Giả sử f là ánh xạ từ tập hợp $\{a, b, c\}$ vào chính nó với $f(a) = b$, $f(b) = c$ và $f(c) = a$ và g là ánh xạ từ $\{a, b, c\}$ vào $\{1, 2, 3\}$ sao cho $g(a) = 3$, $g(b) = 2$ và $g(c) = 1$. Khi đó hàm hợp $g \circ f$ được xác định $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = 2$, $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(c) = 1$ và $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(a) = 3$.
2. Giả sử $f(x) = 3x + 2$ và $g(x) = 2x + 3$ là hai ánh xạ từ tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ đến tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Thì $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$.

Định lý 2.6.1 Cho các ánh xạ $f: A \to B$, $g: B \to C$ và $h: C \to D$. Khi đó ta có

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Chứng minh: Rõ ràng các ánh xạ $h \circ (g \circ f)$ và $(h \circ g) \circ f$ cùng có miền xác định và miền giá trị. Ta có $\forall x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h \circ [(g \circ f)(x)]$

$$= h \circ [g(f(x))]$$

$$= (h \circ g)(f(x))$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x)$$

Vậy $h\circ (g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

Định lý 2.6.2 Giả sử f: $A \to B$ là một song anh, gọi 1_A và 1_B tương ứng là các ánh xạ đồng nhất trên A và B thì ta có

1. $f\circ f^{-1} = 1_B$
2. $f^{-1}\circ f = 1_A$

Chứng minh Rõ ràng $f\circ f^{-1}$ có miền xác định và giá trị là B. $\forall y \in B$, $(f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)$ $= y = 1_B(y)$. Nghĩa là $f\circ f^{-1} = 1_B$. Chứng minh tương tự cho $f^{-1}\circ f = 1_A$.

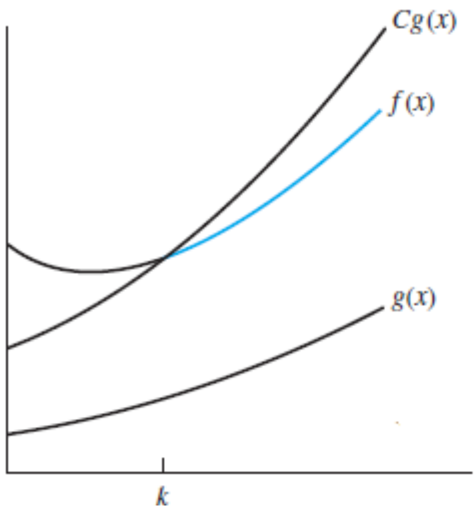
2.7 Độ tăng của hàm số

Các hàm số, như đã chỉ ra ở trên, là các ánh xạ đặc biệt, trong đó miền xác định và miền giá trị là các tập hợp số, có nhiều ứng dụng trong khoa học tính toán nói chung và khoa học máy tính nói riêng. Đặc biệt, các hàm số với miền xác định là các tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên có nhiều ứng dụng trong việc biểu diễn độ phức tạp về thời gian của giải thuật. Một trong những khái niệm cơ bản làm cơ sở cho việc biểu diễn độ phức tạp về thời gian của các giải thuật là *độ tăng* (growth) của hàm số. Độ tăng của hàm số cho biết độ lớn của hàm số ứng với giá trị tương ứng của đối số. Độ tăng của một hàm số có thể được biểu diễn bởi một hàm số có độ lớn xấp xỉ với hàm số đó khi giá trị của đối số đủ lớn. Trong lý thuyết phân tích và thiết kế giải thuật, độ phức tạp về thời gian của một giải thuật được biểu diễn theo độ tăng của các hàm số phụ thuộc vào số thao tác được thực hiện trong giải thuật. Độ tăng của hàm số được định nghĩa dựa trên các ký hiệu O, Ω và Θ cho phép ước lượng độ lớn của hàm số theo các hàm số xấp xỉ khác nhau tuy thuộc vào các ứng dụng cụ thể.

Định nghĩa 2.7.1 Giả sử f và g là hai hàm số với đối số x là các số thực. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $O(g(x))$, và ký hiệu $f(x) = O(g(x))$, nếu có hằng số dương C và số thực k sao cho $|f(x)| \le C|g(x)|$ với mọi $x \ge k$.

Khi $f(x)$ là $O(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* không quá $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* (order) không quá $g(x)$. Với $x \ge k$ đủ lớn thì $C|g(x)|$ không nhỏ hơn $|f(x)|$.

Hình 2.7.1 biểu diễn $f(x)$ là $O(g(x))$, quan hệ này thể hiện đồ thị của hàm số $|f(x)|$ luôn ở phía dưới hàm số $C|g(x)|$ khi giá trị của đối số x đủ lớn.



Hình 2.7.1: f(x) là O(g(x))

Ví dụ 2.7.1

1. Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1$ có độ tăng không quá hàm số $g(x) = x^2$. Thật vậy, khi $x \geq 1$ thì $x \leq x^2$ và $1 \leq x^2$. Suy ra, $0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$ với mọi $x \geq 1$. Vì vậy, nếu chọn $C = 4$ và $k = 1$, thì theo Định nghĩa 2.7.1 ta có $f(x) = x^2 + 2x + 1 = O(x^2)$.
2. Với n là số nguyên dương thì $1 + 2 + \ldots + n \leq n + n + \ldots + n = n^2, \forall n \geq 1$. Từ đó ta suy ra $1 + 2 + \ldots + n = O(n^2)$. Ngoài ra, vì $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times n \leq n \times n \times n \times \ldots \times n = n^n$, $\forall n \geq 1$ nên $n! = O(n^n)$. Ta cũng suy ra $\log_2 n! \leq \log_2 n^n = n \log_2 n$, nên $\log_2 n! = O(n\log_2 n)$.
3. Xét hàm số $f(n) = n^2$ với đối số n nguyên không âm. Có thể thấy $f(n) \neq O(n)$. Thật vậy, giả sử $n^2 = O(n)$, thì có số dương $C > 0$ và số thực k sao cho $n^2 \leq Cn$, $\forall n \geq k$. Từ đó $n \leq C$, $\forall n \geq k$, điều này là vô lý, vì không phải mọi số nguyên không âm $n \geq k$ đều nhỏ hơn hoặc bằng hằng số C. Vậy, $f(n) = n^2 \neq O(n)$.

Định lý 2.7.1 Giả sử $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$, thì $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(max(|g_1(x)|,|g_2(x)|))$.

Chứng minh Từ định nghĩa 2.7.1 ta có các hằng số C_1, C_2 dương và k_1, k_2 sao cho $|f_1(x)| \leq C_1|g_1(x)|$ khi $x \geq k_1$ và $|f_2(x)| \leq C_2|g_2(x)|$ khi $x \geq k_2$. Đặt $C = C_1 + C_2$ và $g(x) = max(|g_1(x)|, |g_2(x)|)$ và $k = max(k_1, k_2)$. Thì với mọi $x \geq k$ ta có

$$
\begin{aligned}
|(f_1 + f_2)(x)| &= |f_1(x) + f_2(x)| \\
&\le |f_1(x)| + |f_2(x)| \\
&\le C_1|g_1(x)| + C_2|g_2(x)| \\
&\le C_1|g(x)| + C_2|g(x)| \\
&= (C_1 + C_2)|g(x)| \\
&= C|g(x)|,
\end{aligned}
$$

Vì vậy $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(max(|g_1(x)|,|g_2(x)|))$.

Định lý 2.7.2 Giả sử $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì $(f_1f_2)(x)$ là $O(g_1(x)g_2(x))$.

Chứng minh Từ định nghĩa 2.7.1 ta có các hằng số C_1, C_2 dương và k_1, k_2 sao cho $|f_1(x)| \le C_1|g_1(x)|$ khi $x \ge k_1$ và $|f_2(x)| \le C_2|g_2(x)|$ khi $x \ge k_2$. Đặt $C = C_1C_2$ và $k = max(k_1, k_2)$. Thì với mọi $x \ge k$ ta có

$$
\begin{aligned}
|(f_1f_2)(x)| &= |f_1(x)f_2(x)| \\
&= |f_1(x)||f_2(x)| \\
&\le C_1|g_1(x)|C_2|g_2(x)| \\
&= C_1C_2|g_1(x)g_2(x)| \\
&= C|g_1(x)g_2(x)|
\end{aligned}
$$

Vì vậy $(f_1f_2)(x)$ là $O(g_1(x)g_2(x))$.

Ví dụ 2.7.2

1. Xét hàm $f(n) = 3n\log_2(n!) + (n^2 + 3)\log_2 n$, với đối số n nguyên dương. Dễ thấy $3n = O(n)$ và $(n^2 + 3) = O(n^2)$, từ ví dụ 2.7.1 ta có $\log_2(n!) = O(n\log_2 n)$. Từ đó theo định lý 2.7.2 ta có $3n\log(n!) = O(n^2\log_2 n)$ và $(n^2 + 3)\log_2 n = O(n^2\log_2 n)$. Vì vậy theo định lý 2.7.1 ta được $f(n) = 3n\log_2(n!) + (n^2 + 3)\log_2 n = O(max(n^2\log_2 n, n^2\log_2 n) = O(n^2\log_2 n)$.
2. Xét hàm số $f(x) = (x + 1)\log_2(x^2 + 1) + 3x^2$ với x là các số dương. Rõ ràng $(x + 1) = O(x)$ và $3x^2 = O(x^2)$. Ta có $\log_2(x^2 + 1) \le \log_2(2x^2) = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2\log_2 x \le 3\log_2 x$, với mọi $x \ge 2$ nên $\log_2(x^2 + 1) = O(\log_2 x)$. Theo định lý 2.7.2 ta có $(x+1)\log_2(x^2 + 1) = O(x\log_2 x)$. Theo định lý 2.7.1 và do $x\log_2 x \le x^2$, với mọi $x \ge 2$ nên ta có $f(x) = (x + 1)\log_2(x^2 + 1) + 3x^2 = O(max(x\log_2 x, x^2) = O(x^2)$.

Định nghĩa 2.7.2 Giả sử f và g là hai hàm số. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $\Omega(g(x))$, và ký hiệu $f(x) = \Omega(g(x))$, nếu có hằng số dương C và số thực k sao cho $|f(x)| \geq C|g(x)|$ với mọi $x \geq k$.

Khi $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* ít nhất là $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* ít nhất là $g(x)$.

Ví dụ 2.7.2

1. Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1 \geq x^2$ có độ tăng ít nhất là x^2. Thật vậy, $x^2 + 2x + 1 \geq x^2$ với mọi $x \geq 1$, nên nếu chọn $C = 1$ và $k = 1$, thì theo Định nghĩa 2.7.2 ta có $f(x) = x^2 + 2x + 1 = \Omega(x^2)$.
2. Xét hàm số $f(n) = n^2$ với đối số n nguyên không âm. Dễ thấy $f(n) = \Omega(n)$. Thật vậy $n^2 \geq n$ với mọi $n \geq 1$. Vì vậy từ Định nghĩa 2.7.2 ta có $f(n) = \Omega(n)$.

Định nghĩa 2.7.3 Giả sử f và g là hai hàm số. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $\Theta(g(x))$, và ký hiệu $f(x) = \Theta(g(x))$, nếu $f(x) = O(g(x))$ và $f(x) = O(g(x))$.

Khi $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* là $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* là $g(x)$.

Ví dụ 2.7.3

1. Từ các ví dụ 2.7.1. và 2.7.2 chúng ta suy ra $f(x) = x^2 + 2x + 1 = \Theta(x^2)$.
2. Xét hàm số $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2}$ với đối số nguyên không âm, dễ thấy $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} \leq \sqrt{n^2 + n^2 + 2n^2} = \sqrt{4n^2} = 2n$, $\forall n \geq 1$ nên $f(n) = O(n)$. Mặt khác ta cũng có $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} \geq \sqrt{n^2} = n$, nên $f(n) = \Omega(n)$. Vì vậy $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} = \Theta(n)$.

Bài tập

1. Xét các tập hợp con tùy ý A, B, C, D của tập vũ trụ U. Hãy chứng minh các khẳng định sau:
   a. Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$ và $A \cup C \subset B \cup D$.
   b. Nếu $A \subset C$ và $B \subset C$ thì $A \cap B \subset C$ và $A \cup B \subset C$.
   c. $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap \overline{B} = \varnothing$.
2. Chứng minh rằng ta có A-(A-B) = B khi và chỉ khi $B \subset A$.
3. Biểu diễn hình học của tập hợp $A \times B$ trong các trường hợp:
   a. $A = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \le x \le 3$, $B = \mathbb{R}$
   b. $A = B = \mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên
4. Chứng minh rằng:
   a. $A \cup B = A$ khi và chỉ khi $B \subset A$.
   b. $A \cap B = A$ khi và chỉ khi $B \subset A$.
   c. $A \cup \varnothing = A$.
   d. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
5. Xét tập hợp $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ mà các phần tử A_1, A_2, …, A_n là những tập hợp. Chứng minh rằng có ít nhất một tập hợp A_i không chứa một tập hợp nào trong các tập hợp còn lại.
6. Với mỗi ánh xạ f: $A \to B$ sau đây, cho biết nó có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh hay không?. Tìm ảnh của miền xác định ứng với mỗi ánh xạ. Trong trường hợp nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.
   a. $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$
   b. $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+2x-3$
   c. $A = B$, $B = (0, +\infty)$, $f(x) = e^{x+1}$
7. Tập hợp $G = \{(x, x)\} |\ x < 0\} \cup \{(x, 0) |\ x \ge 0\}$ có phải là đồ thị của một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ không?. Biểu diễn hình học tập hợp đó.
8. Giả sử f: $X \to Y$ là một ánh xạ, A là một tập hợp con của X và B là một tập hợp con của Y. Chứng minh:

a. $f(X\text{-}A) \supset f(X) - f(A)$.

b. $f^{-1}(Y\text{-}B) = X\text{-} f^{-1}(B)$.

9. Giả sử n là một số tự nhiên cho trước, f là một ánh xạ từ tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ đến chính nó được xác định bởi

$$f(k) = \begin{cases} n - k, \ \forall k < n \\ n + k, \ \forall k \geq n \end{cases}$$

f có phải là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

10. Xét hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$

a. Chứng minh rằng nếu $g∘f$ đơn ánh thì f đơn ánh.

b. Chứng minh rằng nếu $g∘f$ toàn ánh thì g toàn ánh

c. Chứng minh rằng nếu f và g song ánh thì $g∘f$ là song ánh. Xác định ánh xạ ngược $(g∘f)^{-1}$ của ánh xạ $g∘f$.

11. Chứng minh rằng nếu có một song ánh từ X đến Y và có một song ánh từ X đến Z thì có một song ánh từ Y đến Z.

12. Kiểm tra xem các hàm số sau đây có là $O(x)$ hay không: $f(x) = 10$, $f(x) = 3x + 7$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = 5 \log_2 x$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ và $f(x) = \lceil x/2 \rceil$.

13. Kiểm tra xem các hàm số sau đây có là $O(x^2)$ hay không: $f(x) = 17x + 11$, $f(x) = x^2 + 1000$, $f(x) = x \log_2 x$, $f(x) = x^4/2$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = \lfloor x \rfloor.\lceil x \rceil$.

14. Chứng minh rằng đa thức bậc k, $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ là $\Theta(x^k)$.

15. Tìm số n nhỏ nhất để $f(x) = O(x^n)$ với mỗi hàm số $f(x)$ sau:

a. $f(x) = 2x^2 + x^3 \log_3 x$

b. $f(x) = 3x^5 + (\log_2 x)^4$

c. $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$

d. $f(x) = (x^3 + 5 \log_2 x)/(x^4 + 1)$

16. Chỉ ra rằng $f(x)$ là $O(x)$, thì $f(x)$ là $O(x^2)$.

17. Chỉ ra rằng x^3 is $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$.

18. Chỉ ra rằng 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$.

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(h(x))$ thì $f(x)$ là $O(h(x))$.

20. Giả sử k là một số nguyên dương, chứng minh rằng $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ là $O(n^{k+1})$.

21. Với mỗi hàm $f(n)$ sau đây hãy xác định hàm $g(n)$ có bậc nhỏ nhất sao cho $f(n)$ là $O(g(n))$:
    a. $n \log_2(n^2 + 1) + n^2 \log_2 n$
    b. $(n \log_2 n + 1)^2 + (\log_2 n + 1)(n^2 + 1)$.
22. Giả sử f và g là các hàm số với đối số n nguyên dương. Chứng minh rắng:
    a. Nếu $f(n) = O(g(n))$, thì $g(n) = \Omega(f(n))$.
    b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, trong đó $\alpha > 0$.
23. Chứng minh rằng $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ khi và chỉ khi $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$.
24. Chứng minh rằng nếu $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm số sao cho $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ và $g(x)$ là $\Theta(h(x))$ thì $f(x)$ là $\Theta(h(x))$.