

复变函数笔记

南京工程学院

Serein

2023 年 2 月 22 日

目录

第一章	复数与复变函数	1
1.1	复数的概念及基本知识	2
1.2	复变函数	4
第二章	解析函数	5
2.1	解析函数的概念	6
2.2	函数解析的充要条件	6
2.3	初等函数	6
第三章	复变函数的积分	9
3.1	复变函数积分的性质及计算方法	10
3.2	复变函数积分的基本定理	11
3.3	解析函数与调和函数	13
第四章	级数	15
4.1	复数项级数与幂级数	16
4.2	泰勒级数	16
4.3	敛散性的判断	17
4.4	洛朗级数	19
第五章	留数	23
5.1	孤立奇点	24
5.2	留数概念与计算	26
5.3	留数定理及其应用	27

第一章 复数与复变函数

1.1 复数的概念及基本知识

概念

复数: $z = x + iy$

实部: $x = \operatorname{Re}(z)$

虚部: $y = \operatorname{Im}(z)$

注意: 两个复数相等当且仅当他们实部与虚部分别相等; 两个复数只要不同时为实数就不能比较大小

代数运算

交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$

结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3, (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3$

分配律: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

性质

$$\bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

复平面

模

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$$

$$|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, |z| \leqslant |x| + |y|$$

$$|z| = |\bar{z}|, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$

辐角

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在 $(-\pi, \pi]$ 内的辐角称为**辐角** $\operatorname{Arg} z$ 的**主值**, 记作 $\arg(z)$, 且其唯一, 我们有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, x > 0, (\text{I, IV}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y \geq 0, (\text{II}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0, (\text{III}) \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

三角表示

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), |z| = r, \arg z = \theta$$

指数表示

$$z = re^{i\theta}$$

性质

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z^m z^n = z^{m+n}, (z^m)^n = z^{mn}, (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$$

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

例 1.1.1. 在复数范围内求解

$$(1) z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$(2) z^3 + 8 = 0$$

解

(1)

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

(2) 由于 $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$z = \sqrt[3]{-8} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

1.2 复变函数

定理 1.2.1. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的充要条件是 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

例 1.2.2.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z}+1}{z+1} = 1$$

例 1.2.3.

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{|z^2| + 2\operatorname{Re}(z) + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z\bar{z} + z + \bar{z} + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\bar{z}+1}{z-1} = 0$$

例 1.2.4. 函数 $\omega = 3z$ 和 $\omega = z^3$ 分别将 z 平面上的区域

$$\begin{cases} |z| < 1 \\ |\arg z| < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

映射成 ω 平面上的何种区域

解

$$\omega = 3z \Rightarrow \begin{cases} |\omega| < 3 \\ |\arg \omega| < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\omega = z^3 \Rightarrow \begin{cases} |\omega| < 1^3 = 1 \\ |\arg \omega| < \frac{\pi}{6} \times 3 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

第二章 解析函数

2.1 解析函数的概念

定理 2.1.1. 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 解析; 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析, 则 $f(z)$ 在 D 内解析, $f(z)$ 为 D 内的解析函数

2.2 函数解析的充要条件

定理 2.2.1. 设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在 D 内, $w = f(z) = u + iv$ 在 D 内一点 $z = x + iy$ 可导的充要条件是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 并且在该点满足柯西-黎曼方程 ($C-R$ 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 2.2.2. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内可微, 并且满足 $C-R$ 方程

提示: 求函数 $f(z)$ 的导数, 有两种情况:

- (1) 若表达式为关于 z 的式子, 则直接求导即可
- (2) 若表达式为关于 x 与 y 的式子, 则

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

强调: $f(z) = \bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析

2.3 初等函数

指数函数

$$\exp(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y), T = 2k\pi i$$

$$\operatorname{Arg}(e^z) = y + 2k\pi$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, (e^z)' = e^z$$

对数函数

$$w = u + iv = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$\operatorname{Ln} z$ 的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$$

需要注意以下几点

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2\operatorname{Ln} z, \operatorname{Ln} z^n \neq n\operatorname{Ln} z, \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} \neq \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

$\ln z$ 以及 $\operatorname{Ln} z$ 各分支在除原点和负实轴的复平面内解析

幂函数

$$w = z^a = e^{a\operatorname{Ln} z} = e^{a\ln z} e^{2k\pi ai}$$

当 a 为整数时

$$w = e^{a\ln z}$$

三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(1) $\sin z$ 与 $\cos z$, $T = 2\pi$

(2) $\sin z$ 为奇函数, $\cos z$ 为偶函数

(3) $\sin z$ 与 $\cos z$, 对应的实三角函数恒等式、三角函数诱导公式等仍然成立

(4) $\sin z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos z = 0 \Rightarrow z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(5) $\sin z$ 与 $\cos z$ 在复平面内处处可微, 且 $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

(6) $|\sin z|$ 与 $|\cos z|$ 无界

例 2.3.1. 指出函数

$$\omega = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$$

的解析性区域, 并在该区域内求出其导数

解

当 $z^2 + 2z + 5 = 0$ 时

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20 - 4i}}{2} = -1 \pm 2i$$

因此

$$\omega = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$$

解析性区域为除 $z = -1 \pm 2i$ 的复平面

$$\omega' = -\frac{1}{(z^2 + 2z + 5)^2} (2z + 2) = -\frac{2z + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}, z \neq -1 \pm 2i$$

例 2.3.2. 求函数

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i$$

与

$$f(z) = |z^2|z$$

在何处可导, 以及其解析性区域

解

(1)

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i, u(x, y) = x^3 - y^3, v(x, y) = 2x^2y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4xy^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2y$$

令

$$\begin{cases} 3x^2 = 4x^2y \\ -3y^2 = -4xy^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4} \\ y_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

因此

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i$$

在 $z=0$ 与 $z=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$ 处可导, 在复平面内处处不解析

(2) 令 $z = x + yi$, 则 $|z^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2$ 因此

$$f(z) = (x^2 + y^2)(x + iy) = x^3 + x^2yi + xy^2 + y^3i = x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)i$$

$$u(x, y) = x^3 + xy^2, v(x, y) = x^2y + y^3$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

要使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

成立, 则当且仅当 $x = y = 0$ 时成立

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导, 在复平面内处处不解析

第三章 复变函数的积分

3.1 复变函数积分的性质及计算方法

计算复变函数积分类似于实数域内第二类曲线积分, 当被积函数内出现积分路径, 可以将积分路径带入计算

例 3.1.1. 设 C 是从 $2 \rightarrow 0$ 的上半圆周: $|z - 1| = 1$, 求

$$\int_C (1 + |z - 1|) dz$$

解

$$\begin{aligned} \int_C (1 + |z - 1|) dz &= \int_C dz + \int_C |z - 1| dz \\ &= \int_C dz + \int_C dz \\ &= 2 \int_C dz \\ &= 2 \int_2^0 d(x + iy) \\ &= -4 \end{aligned}$$

例 3.1.2. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3 + 4i$ 的直线段

解

得参数方程

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}, x: 0 \rightarrow 3$$

$$z = x + iy = \left(x + \frac{4}{3}x\right)i$$

则

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_0^3 \left(x + \frac{4}{3}xi\right) d\left(x + \frac{4}{3}xi\right) \\ &= \int_0^3 \left(1 + \frac{4}{3}i\right)^2 x dx \\ &= \frac{9}{2} \times \left(1 + \frac{4}{3}i\right)^2 \\ &= -\frac{7}{2} + 12i \end{aligned}$$

重点

对包含 z_0 的任意一条正向简单闭曲线 C , 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

3.2 复变函数积分的基本定理

柯西-古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析, 则函数沿 D 内的任意一条简单闭曲线 C 的积分值为零, 即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

原函数与不定积分

与实数域计算方法类似, 类似于牛顿-莱布尼茨公式

例 3.2.1.

$$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} \Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2} (e^{6\pi i} - e^{-2\pi i}) = \frac{1-1}{2} = 0$$

复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_{C_1} f(z) dz \\ \oint_C f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz \end{aligned}$$

例 3.2.2. 计算

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - z} dz$$

其中 Γ 为包含圆周 $|z| = 1$ 在内的任意一条正向简单闭曲线

解

以 0 与 1 为中心, 在 Γ 内作正向圆周 C_1 与 C_2 , 且两者互不相交, 互不包含, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - z} dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{z^2 - z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z^2 - z} dz \\ &= \oint_{C_1} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz + \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= 0 - 2\pi i + 2\pi i - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

复变函数积分的基本公式

定理 3.2.3. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D , z_0 为 C 内的任意一点, 则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

例 3.2.4. 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin 2z}{z} dz$$

沿圆周正向

解

由于 $\sin 2z$ 在 $|z|=4$ 内解析, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin 2z}{z} dz = \sin 2z|_{z=0} = 0$$

例 3.2.5. 计算

$$\oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz$$

沿圆周正向

方法一: 利用柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz &= \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{(z-2)(z+2)} dz \\ &= \oint_{|z+2|=1} \frac{\frac{z}{z-2}}{z+2} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z}{z-2} \Big|_{z=-2} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-2}{-4} \\ &= \pi i \end{aligned}$$

方法二: 利用复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz &= \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{(z-2)(z+2)} dz \\ &= \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{z-2} dz + \frac{1}{2} \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{z+2} dz \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times 2\pi i \\ &= \pi i \end{aligned}$$

解析函数的高阶导数公式

定理 3.2.6.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz = 2\pi i \cdot \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

例 3.2.7.

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z^2 + 2z - 1}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{(3z^2 + 2z - 1)''|_{z=1}}{(3-1)!} = 6\pi i$$

3.3 解析函数与调和函数

调和函数

如果二元实函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

则称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 的调和函数

解析函数与调和函数的关系

定理 3.3.1. 任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部与虚部均为区域 D 内的调和函数, 且其虚部为实部的共轭调和函数; 我们把使得 $u + iv$ 在区域 D 内构成解析函数的调和函数 v 称为 u 的共轭调和函数

例 3.3.2. 证明 $u(x, y) = 2(x-1)y$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x, y)$ 和由他们构成的解析函数 $f(z) = u + iv$

解

(1) 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

则

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

因此 $u(x, y) = 2(x-1)y$ 为调和函数

(2) 由于满足 $C-R$ 方程, 因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

则

$$v = y^2 + g(x)$$

又由于

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2 - 2x$$

且

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y^2 + g(x))'_x = g'(x)$$

因此有

$$g(x) = -x^2 + 2x + C$$

因此

$$f(z) = 2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x + C)$$

同时也可带入

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

得到

$$f(z) = i(-z^2 + 2z + C)$$

第四章 级数

4.1 复数项级数与幂级数

定义 4.1.1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 则复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 发散, 则复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 条件收敛

定理 4.1.2. 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda \neq 0$, 则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$, 则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$

收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

4.2 泰勒级数

定理 4.2.1. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为区域 D 内一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 则当 $|z - z_0| \leq d$ 时, $f(z)$ 可以展开成幂级数, 且其唯一

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

重要的泰勒展开式

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, R = +\infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, |z| < 1$$

收敛半径的求法

对于收敛半径的求解, 一般可利用上述求收敛半径的公式求解; 若求函数在 z_0 处的泰勒展开式的收敛半径, 则先找出该函数的奇点, 求奇点与 z_0 的最小距离, 该距离即为收敛半径

例 4.2.2. 求

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

在 $z=1$ 处的泰勒展开式的收敛半径

解

令 $1+z^2=0$, 得 $z=\pm i$, 又 $(0, \pm i)$ 到 $(1, 0)$ 距离为 $\sqrt{2}$, 因此收敛半径 $R=\sqrt{2}$

例 4.2.3. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n z^n$$

的收敛半径

解

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-3)^n}{(-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$$

4.3 敛散性的判断

等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

当 $|q| < 1$ 时, 收敛

当 $|q| \geq 1$ 时, 发散

调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散

p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当 $p \leq 1$ 时, 发散

当 $p > 1$ 时, 收敛

定理 4.3.1. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

有如下审敛法

比较审敛法

$$u_n \leq v_n$$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$

简言之：大收则小收，小发则大发

比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

$$(1) \text{ 若 } 0 < l < +\infty, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 同敛散}$$

$$(2) \text{ 若 } l = 0, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$(3) \text{ 若 } l = +\infty, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

比值审敛法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

(1) 若 $0 < \rho < 1$, 则级数收敛

(2) 若 $\rho > 1$, 则级数发散

(3) 若 $\rho = 1$, 则级数敛散性不确定

根值审敛法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

(1) 若 $\rho < 1$, 则级数收敛

(2) 若 $\rho > 1$, 则级数发散

(3) 若 $\rho = 1$, 则级数敛散性不确定

交错级数敛散性的判别

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

若同时满足以下两个条件, 则收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, u_n \geq u_{n+1}$$

拓展: 若用比值或根值审敛法判别, 则当判定出 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

4.4 洛朗级数

例 4.4.1. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

在解析区域 $1 < |z-1| < +\infty$ 内展开成洛朗级数

解

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$$

由于 $1 < |z-1| < +\infty$, 则 $|z-1| < 1$, 因此有

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n$$

例 4.4.2. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在解析区域

$$(1) |z| < 1$$

$$(2) 1 < |z| < 2$$

$$(3) 2 < |z| < +\infty$$

内展开成洛朗级数

解

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

(1) 在 $|z| < 1$ 内

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n$$

(2) 在 $1 < |z| < 2$ 内, $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, 则

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

且 $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 则

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(3) 在 $2 < |z| < +\infty$ 内, $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ 则

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

例 4.4.3. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$$

分别在圆环域

(1) $0 < |z| < 1$

(2) $0 < |z-1| < 1$

内展开成洛朗级数

解

(1) 在 $0 < |z| < 1$ 内, 有

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

则

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-2}$$

(2) 在 $0 < |z - 1| < 1$ 内,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^{n-2}$$

结论

根据洛朗级数相关性质, 有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

例 4.4.4. 求

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z)^2} dz$$

解

函数

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$$

在 $0 < |z| < 1$ 内处处解析, 且 $|z| = \frac{1}{2}$ 在此圆环内, 又由于

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-2}$$

因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z)^2} dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i$$

第五章 留数

5.1 孤立奇点

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处不解析, 则 z_0 为 $f(z)$ 的奇点

定义 5.1.1. 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处不解析, 但在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内处处解析, 则 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点

定义 5.1.2. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内, 函数 $f(z)$ 展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

(1) 展开式中不含 $(z - z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为可去奇点

(2) 展开式中只有有限个 $(z - z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为极点, 且若最高负幂次项次数为 $-m$, 则其为 m 级极点

(3) 展开式中有无穷个 $(z - z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为本性奇点

引申

(1) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在 $\Rightarrow z_0$ 为可去奇点

(2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow z_0$ 为极点

(3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在且不为 $\infty \Rightarrow z_0$ 为本性奇点

例 5.1.3. 求函数

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}$$

的极点, 并指出是几级极点

解

$z = \pm i$ 为一级极点, $z = -1$ 为二级极点

说明

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内满足

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点

例 5.1.4. 求下列函数的极点, 并指出是几级极点

$$(1) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

解

(1)

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z^2} \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

因此 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的一级极点

另解

由于对于分母 $z = 0$ 为 z^2 的二级零点, 对于分子 $z = 0$ 为 $e^z - 1$ 的一级零点, 这是由于

$$(e^z - 1)|_{z=0} = 0, (e^z - 1)'|_{z=0} = 1$$

因此 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的一级极点 ($2 - 1 = 1$)

(2) 由于

$$\sin(k\pi) = 0, [\sin(z)]'|_{k\pi} = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$$

因此 $z = k\pi$ 为 $\sin z$ 的一级零点, 即 $z = k\pi$ 为 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 的一级极点

结论

对于某函数 $f(z)$, 在 z_0 处, 其为分子的 a 级零点, 分母的 b 级零点, 且 $a < b$, 则 z_0 为 $f(z)$ 的 $b - a$ 级极点

在计算几级极点时, 需要将分子分母都因式分解, 约去公因式, 计算 z_0 为分子、分母的几级零点

计算某函数某一点为其几级零点时, 首先因式分解到最简为几个整式相乘的形式, 计算 z_0 为各部分的几级零点, 最后相加得 z_0 为该函数的几级零点

例 5.1.5. 求函数

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$$

的极点, 并指出是几级极点

解

对于分子, 令 $p(z) = z - \sin z$,

$$p(0) = 0, p'(0) = 0, p''(0) = 0, p'''(0) = 1$$

显然 $z = 0$ 为 $p(z)$ 的三级零点, 又 $z = 0$ 为 z^6 的六级极点

因此 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的三级极点

5.2 留数概念与计算

$f(z)$ 在 z_0 处的留数为

$$\begin{aligned} & \text{Res}[f(z), z_0], \text{Res}[f(z_0)] \\ \text{Res}[f(z), z_0] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = c_{-1} \end{aligned}$$

(1) 若 z_0 为可去奇点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = 0$$

(2) 若 z_0 为本性奇点, 则展开洛朗级数, 取 c_{-1}

(3) 若 z_0 为极点, 有以下规则:

规则 1: 若 z_0 为一级极点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

规则 2: 若 z_0 为 m 级极点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

规则 3: 设

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析, 如果 $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, 则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 且

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

拓展: 若极点 z_0 的级数不为 m , 当它的实际级数要比 m 低时, 把 m 作为极点 z_0 的级数来计算留数, 并不会影响计算结果

例 5.2.1.

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[\frac{z - \sin z}{z^6}, 0\right] &= \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} \left(z^6 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6}\right) \\ &= \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 0} (-\cos) \\ &= -\frac{1}{5!} \end{aligned}$$

函数在无穷远点的留数

规则 4:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

5.3 留数定理及其应用

定理 5.3.1. 设 $f(z)$ 在以简单闭曲线 C 为边界的闭区域 $\overline{D} = D + C$ 内除 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ 外解析, 其中 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ 为 $f(z)$ 在 D 内的孤立奇点, 则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

定理 5.3.2. 如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \infty$, 则 $f(z)$ 在各奇点的留数总和为零, 即

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

留数定理的应用

(1) 计算沿封闭曲线的积分 (重点)

例 5.3.3. 计算积分

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1} dz$$

其中 C 为正向圆周 $|z| = 2$

解

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$$

在圆 $|z| = 2$ 内有两个一级极点, 为 $z = \pm 1$ 且有

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \frac{e}{2}, \operatorname{Res}[f(z), -1] = \frac{e^{-1}}{2}$$

因此

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1]] = 2\pi i \left(\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i \left(e + \frac{1}{e} \right)$$

(2) 在定积分计算中的应用 (几乎不考)

[A] 形如

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

的积分, 利用 $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 做代换

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z} \end{cases}$$

从而化为

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

再依据 $|z| = 1$ 中的孤立奇点, 通过留数定理计算

[B] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

的积分, 且满足

- (1) $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为互质多项式
- (2) 分母次数至少比分子次数高两次
- (3) $Q(x)$ 在实轴上没有零点

我们记 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 设其在上半平面内的所有极点为 z_1, z_2, \dots, z_k , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z), z_k]$$

[C] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{i\alpha x} dx, \alpha > 0$$

的积分, 且满足

- (1) $R(x)$ 为互质多项式
- (2) 分母次数至少比分子次数高一次
- (3) $R(x)$ 在实轴上没有零点

我们记 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 设其在上半平面内的所有极点为 z_1, z_2, \dots, z_k , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z) \cdot e^{i\alpha z}, z_k]$$