

南京工程学院 2019-2020 复变函数期末试题

一、单项选择题：本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分。

1. 设复数 z 满足 $\arg(z+2) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(z-2) = \frac{5\pi}{6}$, 那么 $z =$
 A. $-1 + \sqrt{3}i$ B. $-\sqrt{3} + i$ C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
2. 函数 $f(z) = z^2 \operatorname{Im}(z)$ 在 $z=0$ 处的导数为
 A. 0 B. 1 C. -1 D. 不存在
3. 设 C 是正向圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 则 $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz =$
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$ B. $\sqrt{2}\pi i$ C. 0 D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$
4. 设函数 $\frac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, 那么幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 $R =$
 A. $+\infty$ B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. π
5. i^i 的主值为
 A. 0 B. 1 C. $e^{\frac{\pi}{2}}$ D. $e^{-\frac{\pi}{2}}$
6. $z=0$ 是函数 $\frac{1-e^z}{z^4 \sin z}$ 的
 A. 5 级极点 B. 4 级极点 C. 可去奇点 D. 3 级极点

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

1. $(-1+i)^8 =$ _____。
2. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\bar{z} + 3z - \bar{z} - 3}{z^2 - 1} =$ _____。
3. 设 $f(z) = x^3 + y^3 + ix^2y^2$, 则 $f'\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) =$ _____。
4. 设 C 为正向圆周 $|z-4|=1$, 则 $\oint_C \frac{z^2 - 3z + 2}{(z-4)^2} dz =$ _____。
5. 设 $\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, $|z| > 1$, 则 $c_{-6} =$ _____。
6. 设 $f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z)}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z), 0] =$ _____。

三、计算题：本题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分。

1. 若复数 z 满足方程

$$z + |\bar{z}| = 2 + i$$

求复数 z

2. 设函数

$$f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$$

试判断 $f(z)$ 在何处可导, 何处解析, 并计算可导点处的导数

3. 将函数

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

在 $z=1$ 处展开成泰勒级数, 并指出其收敛区域

4. 设

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)^3}$$

试在 $|z-i| > 1$ 内将 $f(z)$ 展开成洛朗级数

5. 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 计算积分

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z-2)^2} dz$$

四、应用题: 本题共 1 小题, 每小题 12 分, 共 12 分。

1. 已知函数

$$v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, x > 0$$

解析, 求解析函数 $f(z) = u + iv$