

# 复变函数笔记

南京工程学院

Serein

2023 年 12 月 12 日

# 目录

<b>第一章</b>	<b>复数与复变函数</b>	<b>1</b>
1.1	复数的概念及基本知识 . . . . .	2
1.2	复变函数 . . . . .	4
<b>第二章</b>	<b>解析函数</b>	<b>5</b>
2.1	解析函数的概念 . . . . .	6
2.2	函数解析的充要条件 . . . . .	6
2.3	初等函数 . . . . .	6
<b>第三章</b>	<b>复变函数的积分</b>	<b>9</b>
3.1	复变函数积分的性质及计算方法 . . . . .	10
3.2	复变函数积分的基本定理 . . . . .	11
3.3	解析函数与调和函数 . . . . .	13
<b>第四章</b>	<b>级数</b>	<b>15</b>
4.1	复数项级数与幂级数 . . . . .	16
4.2	泰勒级数 . . . . .	16
4.3	敛散性的判断 . . . . .	17
4.4	洛朗级数 . . . . .	19
<b>第五章</b>	<b>留数</b>	<b>23</b>
5.1	孤立奇点 . . . . .	24
5.2	留数概念与计算 . . . . .	26
5.3	留数定理及其应用 . . . . .	27

# 第一章 复数与复变函数

## 1.1 复数的概念及基本知识

### 概念

复数:  $z = x + iy$

实部:  $x = \operatorname{Re}(z)$

虚部:  $y = \operatorname{Im}(z)$

注意: 两个复数相等当且仅当他们实部与虚部分别相等; 两个复数只要不同时为实数就不能比较大小

### 代数运算

交换律:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$

结合律:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3, (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3$

分配律:  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

### 性质

$$\bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

### 复平面

#### 模

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$|x| \leq |z|, |y| \leq |z|, |z| \leq |x| + |y|$$

$$|z| = |\bar{z}|, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

#### 辐角

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在  $(-\pi, \pi]$  内的辐角称为**辐角**  $\operatorname{Arg} z$  的**主值**, 记作  $\arg(z)$ , 且其唯一, 我们有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, x > 0, (\text{I, IV}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y \geq 0, (\text{II}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0, (\text{III}) \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

三角表示

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), |z| = r, \arg z = \theta$$

指数表示

$$z = re^{i\theta}$$

性质

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z^m z^n = z^{m+n}, (z^m)^n = z^{mn}, (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$$

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

例 1.1.1. 在复数范围内求解

$$(1) z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$(2) z^3 + 8 = 0$$

解

(1)

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

(2) 由于  $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$z = \sqrt[3]{-8} = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$z_3 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

## 1.2 复变函数

**定理 1.2.1.** 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在点  $z_0 = x_0 + iy_0$  连续的充要条件是  $u = u(x, y)$  和  $v = v(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续

**例 1.2.2.**

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z}+1}{z+1} = 1$$

**例 1.2.3.**

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{|z^2| + 2\operatorname{Re}(z) + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z\bar{z} + z + \bar{z} + 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\bar{z}+1}{z-1} = 0$$

**例 1.2.4.** 函数  $\omega = 3z$  和  $\omega = z^3$  分别将  $z$  平面上的区域

$$\begin{cases} |z| < 1 \\ |\arg z| < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

映射成  $\omega$  平面上的何种区域

**解**

$$\omega = 3z \Rightarrow \begin{cases} |\omega| < 3 \\ |\arg \omega| < \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\omega = z^3 \Rightarrow \begin{cases} |\omega| < 1^3 = 1 \\ |\arg \omega| < \frac{\pi}{6} \times 3 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## 第二章 解析函数

## 2.1 解析函数的概念

**定理 2.1.1.** 如果函数  $f(z)$  在  $z_0$  及  $z_0$  的某个邻域内可导, 则  $f(z)$  在  $z_0$  解析; 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内每一点都解析, 则  $f(z)$  在  $D$  内解析,  $f(z)$  为  $D$  内的解析函数

## 2.2 函数解析的充要条件

**定理 2.2.1.** 设函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  定义在  $D$  内,  $w = f(z) = u + iv$  在  $D$  内一点  $z = x + iy$  可导的充要条件是  $u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 并且在该点满足柯西-黎曼方程 ( $C-R$  方程)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**定理 2.2.2.** 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $D$  内解析的充要条件是  $u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在  $D$  内可微, 并且满足  $C-R$  方程

**提示:** 求函数  $f(z)$  的导数, 有两种情况:

- (1) 若表达式为关于  $z$  的式子, 则直接求导即可
- (2) 若表达式为关于  $x$  与  $y$  的式子, 则

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

**强调:**  $f(z) = \bar{z}$  在复平面内处处不可导, 处处不解析

## 2.3 初等函数

指数函数

$$\exp(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y), T = 2k\pi i$$

$$\operatorname{Arg}(e^z) = y + 2k\pi$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, (e^z)' = e^z$$

对数函数

$$w = u + iv = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$\operatorname{Ln} z$  的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$$



需要注意以下几点

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2\operatorname{Ln} z, \operatorname{Ln} z^n \neq n\operatorname{Ln} z, \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} \neq \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

$\ln z$  以及  $\operatorname{Ln} z$  各分支在除原点和负实轴的复平面内解析

### 幂函数

$$w = z^a = e^{a\operatorname{Ln} z} = e^{a\ln z} e^{2k\pi ai}$$

当  $a$  为整数时

$$w = e^{a\ln z}$$

### 三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(1)  $\sin z$  与  $\cos z$ ,  $T = 2\pi$

(2)  $\sin z$  为奇函数,  $\cos z$  为偶函数

(3)  $\sin z$  与  $\cos z$ , 对应的实三角函数恒等式、三角函数诱导公式等仍然成立

(4)  $\sin z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\cos z = 0 \Rightarrow z = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(5)  $\sin z$  与  $\cos z$  在复平面内处处可微, 且  $(\sin z)' = \cos z$ ,  $(\cos z)' = -\sin z$

(6)  $|\sin z|$  与  $|\cos z|$  无界

**例 2.3.1.** 指出函数

$$\omega = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$$

的解析性区域, 并在该区域内求出其导数

**解**

当  $z^2 + 2z + 5 = 0$  时

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20 - 4i}}{2} = -1 \pm 2i$$

因此

$$\omega = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$$

解析性区域为除  $z = -1 \pm 2i$  的复平面

$$\omega' = -\frac{1}{(z^2 + 2z + 5)^2} (2z + 2) = -\frac{2z + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}, z \neq -1 \pm 2i$$

## 例 2.3.2. 求函数

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i$$

与

$$f(z) = |z^2|z$$

在何处可导, 以及其解析性区域

解

(1)

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i, u(x, y) = x^3 - y^3, v(x, y) = 2x^2y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4xy^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^2y$$

令

$$\begin{cases} 3x^2 = 4x^2y \\ -3y^2 = -4xy^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4} \\ y_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

因此

$$f(z) = x^3 - y^3 + 2x^2y^2i$$

在  $z=0$  与  $z=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$  处可导, 在复平面内处处不解析

(2) 令  $z = x + yi$ , 则  $|z^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2$  因此

$$f(z) = (x^2 + y^2)(x + iy) = x^3 + x^2yi + xy^2 + y^3i = x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)i$$

$$u(x, y) = x^3 + xy^2, v(x, y) = x^2y + y^3$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

要使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

成立, 则当且仅当  $x = y = 0$  时成立

因此  $f(z)$  在  $z=0$  处可导, 在复平面内处处不解析

## 第三章 复变函数的积分

### 3.1 复变函数积分的性质及计算方法

计算复变函数积分类似于实数域内第二类曲线积分, 当被积函数内出现积分路径, 可以将积分路径带入计算

例 3.1.1. 设  $C$  是从  $2 \rightarrow 0$  的上半圆周:  $|z - 1| = 1$ , 求

$$\int_C (1 + |z - 1|) dz$$

解

$$\begin{aligned} \int_C (1 + |z - 1|) dz &= \int_C dz + \int_C |z - 1| dz \\ &= \int_C dz + \int_C dz \\ &= 2 \int_C dz \\ &= 2 \int_2^0 d(x + iy) \\ &= -4 \end{aligned}$$

例 3.1.2. 计算  $\int_C z dz$ , 其中  $C$  为从原点到  $3 + 4i$  的直线段

解

得参数方程

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}, x: 0 \rightarrow 3$$

$$z = x + iy = \left(x + \frac{4}{3}x\right)i$$

则

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_0^3 \left(x + \frac{4}{3}xi\right) d\left(x + \frac{4}{3}xi\right) \\ &= \int_0^3 \left(1 + \frac{4}{3}i\right)^2 x dx \\ &= \frac{9}{2} \times \left(1 + \frac{4}{3}i\right)^2 \\ &= -\frac{7}{2} + 12i \end{aligned}$$

重点

对包含  $z_0$  的任意一条正向简单闭曲线  $C$ , 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

## 3.2 复变函数积分的基本定理

### 柯西-古萨基本定理

如果函数  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内处处解析, 则函数沿  $D$  内的任意一条简单闭曲线  $C$  的积分值为零, 即

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

### 原函数与不定积分

与实数域计算方法类似, 类似于牛顿-莱布尼茨公式

例 3.2.1.

$$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} \Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2} (e^{6\pi i} - e^{-2\pi i}) = \frac{1-1}{2} = 0$$

### 复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_{C_1} f(z) dz \\ \oint_C f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz \end{aligned}$$

例 3.2.2. 计算

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - z} dz$$

其中  $\Gamma$  为包含圆周  $|z| = 1$  在内的任意一条正向简单闭曲线

解

以 0 与 1 为中心, 在  $\Gamma$  内作正向圆周  $C_1$  与  $C_2$ , 且两者互不相交, 互不包含, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - z} dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{z^2 - z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z^2 - z} dz \\ &= \oint_{C_1} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz + \oint_{C_2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= 0 - 2\pi i + 2\pi i - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

### 复变函数积分的基本公式

定理 3.2.3. 如果函数  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于  $D$ ,  $z_0$  为  $C$  内的任意一点, 则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

## 例 3.2.4. 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin 2z}{z} dz$$

沿圆周正向

解

由于  $\sin 2z$  在  $|z|=4$  内解析, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{\sin 2z}{z} dz = \sin 2z|_{z=0} = 0$$

## 例 3.2.5. 计算

$$\oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz$$

沿圆周正向

方法一: 利用柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz &= \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{(z-2)(z+2)} dz \\ &= \oint_{|z+2|=1} \frac{\frac{z}{z-2}}{z+2} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z}{z-2} \Big|_{z=-2} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-2}{-4} \\ &= \pi i \end{aligned}$$

方法二: 利用复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{z^2-4} dz &= \oint_{|z+2|=1} \frac{z}{(z-2)(z+2)} dz \\ &= \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{z-2} dz + \frac{1}{2} \oint_{|z+2|=1} \frac{1}{z+2} dz \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times 2\pi i \\ &= \pi i \end{aligned}$$

解析函数的高阶导数公式

## 定理 3.2.6.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz = 2\pi i \cdot \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

例 3.2.7.

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z^2 + 2z - 1}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{(3z^2 + 2z - 1)''|_{z=1}}{(3-1)!} = 6\pi i$$

### 3.3 解析函数与调和函数

#### 调和函数

如果二元实函数  $\varphi(x, y)$  在区域  $D$  内有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

则称  $\varphi(x, y)$  为区域  $D$  的调和函数

#### 解析函数与调和函数的关系

**定理 3.3.1.** 任何在区域  $D$  内解析的函数, 它的实部与虚部均为区域  $D$  内的调和函数, 且其虚部为实部的共轭调和函数; 我们把使得  $u + iv$  在区域  $D$  内构成解析函数的调和函数  $v$  称为  $u$  的共轭调和函数

**例 3.3.2.** 证明  $u(x, y) = 2(x-1)y$  为调和函数, 并求其共轭调和函数  $v(x, y)$  和由他们构成的解析函数  $f(z) = u + iv$

解

(1) 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

则

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

因此  $u(x, y) = 2(x-1)y$  为调和函数

(2) 由于满足  $C-R$  方程, 因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

则

$$v = y^2 + g(x)$$

又由于

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2 - 2x$$

且

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y^2 + g(x))'_x = g'(x)$$

因此有

$$g(x) = -x^2 + 2x + C$$

因此

$$f(z) = 2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x + C)$$

同时也可带入

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

得到

$$f(z) = i(-z^2 + 2z + C)$$



## 第四章 级数

## 4.1 复数项级数与幂级数

**定义 4.1.1.** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  收敛, 则复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  绝对收敛; 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  发散, 则复数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  条件收敛

**定理 4.1.2.** 对幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda \neq 0$ , 则收敛半径  $R = \frac{1}{\lambda}$

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$ , 则收敛半径  $R = \frac{1}{\lambda}$

收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

## 4.2 泰勒级数

**定理 4.2.1.** 设函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $z_0$  为区域  $D$  内一点,  $d$  为  $z_0$  到  $D$  的边界上各点的最短距离, 则当  $|z - z_0| \leq d$  时,  $f(z)$  可以展开成幂级数, 且其唯一

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

重要的泰勒展开式

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, R = +\infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, |z| < 1$$

收敛半径的求法

对于收敛半径的求解, 一般可利用上述求收敛半径的公式求解; 若求函数在  $z_0$  处的泰勒展开式的收敛半径, 则先找出该函数的奇点, 求奇点与  $z_0$  的最小距离, 该距离即为收敛半径

例 4.2.2. 求

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

在  $z=1$  处的泰勒展开式的收敛半径

解

令  $1+z^2=0$ , 得  $z=\pm i$ , 又  $(0, \pm i)$  到  $(1, 0)$  距离为  $\sqrt{2}$ , 因此收敛半径  $R=\sqrt{2}$

例 4.2.3. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n z^n$$

的收敛半径

解

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-3)^n}{(-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$$

## 4.3 敛散性的判断

等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

当  $|q| < 1$  时, 收敛

当  $|q| \geq 1$  时, 发散

调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散

$p$  级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当  $p \leq 1$  时, 发散

当  $p > 1$  时, 收敛

定理 4.3.1. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

有如下审敛法

### 比较审敛法

$$u_n \leq v_n$$

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}$$

简言之：大收则小收，小发则大发

### 比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

$$(1) \text{ 若 } 0 < l < +\infty, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 同敛散}$$

$$(2) \text{ 若 } l = 0, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}$$

$$(3) \text{ 若 } l = +\infty, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散}$$

### 比值审敛法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

(1) 若  $0 < \rho < 1$ , 则级数收敛

(2) 若  $\rho > 1$ , 则级数发散

(3) 若  $\rho = 1$ , 则级数敛散性不确定

### 根值审敛法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

(1) 若  $\rho < 1$ , 则级数收敛

(2) 若  $\rho > 1$ , 则级数发散

(3) 若  $\rho = 1$ , 则级数敛散性不确定

## 交错级数敛散性的判别

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

若同时满足以下两个条件, 则收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, u_n \geq u_{n+1}$$

拓展: 若用比值或根值审敛法判别, 则当判定出  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散

## 4.4 洛朗级数

例 4.4.1. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

在解析区域  $1 < |z-1| < +\infty$  内展开成洛朗级数

解

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$$

由于  $1 < |z-1| < +\infty$ , 则  $|z-1| < 1$ , 因此有

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1} \right)^n$$

例 4.4.2. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在解析区域

$$(1) |z| < 1$$

$$(2) 1 < |z| < 2$$

$$(3) 2 < |z| < +\infty$$

内展开成洛朗级数

解

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

(1) 在  $|z| < 1$  内

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^n$$

(2) 在  $1 < |z| < 2$  内,  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ , 则

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

且  $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 则

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(3) 在  $2 < |z| < +\infty$  内,  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ ,  $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$  则

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

因此

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

例 4.4.3. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$$

分别在圆环域

(1)  $0 < |z| < 1$

(2)  $0 < |z-1| < 1$

内展开成洛朗级数

解

(1) 在  $0 < |z| < 1$  内, 有

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

则

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-2}$$

(2) 在  $0 < |z - 1| < 1$  内,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^{n-2}$$

结论

根据洛朗级数相关性质, 有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

例 4.4.4. 求

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z)^2} dz$$

解

函数

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$$

在  $0 < |z| < 1$  内处处解析, 且  $|z| = \frac{1}{2}$  在此圆环内, 又由于

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-2}$$

因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z)^2} dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i$$





## 第五章 留数

## 5.1 孤立奇点

如果函数  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析, 则  $z_0$  为  $f(z)$  的奇点

**定义 5.1.1.** 如果函数  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析, 但在  $z_0$  的某个去心邻域  $0 < |z - z_0| < \delta$  内处处解析, 则  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点

**定义 5.1.2.** 设  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点, 在  $z_0$  的某个去心邻域  $0 < |z - z_0| < \delta$  内, 函数  $f(z)$  展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

(1) 展开式中不含  $(z - z_0)$  的负幂次项  $\Rightarrow z_0$  为可去奇点

(2) 展开式中只有有限个  $(z - z_0)$  的负幂次项  $\Rightarrow z_0$  为极点, 且若最高负幂次项次数为  $-m$ , 则其为  $m$  级极点

(3) 展开式中有无穷个  $(z - z_0)$  的负幂次项  $\Rightarrow z_0$  为本性奇点

### 引申

(1)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  存在  $\Rightarrow z_0$  为可去奇点

(2)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow z_0$  为极点

(3)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在且不为  $\infty \Rightarrow z_0$  为本性奇点

**例 5.1.3.** 求函数

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}$$

的极点, 并指出是几级极点

**解**

$z = \pm i$  为一级极点,  $z = -1$  为二级极点

### 说明

若解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  的某邻域内满足

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

则  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  级零点

例 5.1.4. 求下列函数的极点, 并指出是几级极点

$$(1) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

解

(1)

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z^2} \left( z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

因此  $z = 0$  为  $f(z)$  的一级极点

另解

由于对于分母  $z = 0$  为  $z^2$  的二级零点, 对于分子  $z = 0$  为  $e^z - 1$  的一级零点, 这是由于

$$(e^z - 1)|_{z=0} = 0, (e^z - 1)'|_{z=0} = 1$$

因此  $z = 0$  为  $f(z)$  的一级极点 ( $2 - 1 = 1$ )

(2) 由于

$$\sin(k\pi) = 0, [\sin(z)]'|_{k\pi} = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$$

因此  $z = k\pi$  为  $\sin z$  的一级零点, 即  $z = k\pi$  为  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  的一级极点

结论

对于某函数  $f(z)$ , 在  $z_0$  处, 其为分子的  $a$  级零点, 分母的  $b$  级零点, 且  $a < b$ , 则  $z_0$  为  $f(z)$  的  $b - a$  级极点

在计算几级极点时, 需要将分子分母都因式分解, 约去公因式, 计算  $z_0$  为分子、分母的几级零点

计算某函数某一点为其几级零点时, 首先因式分解到最简为几个整式相乘的形式, 计算  $z_0$  为各部分的几级零点, 最后相加得  $z_0$  为该函数的几级零点

例 5.1.5. 求函数

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^6}$$

的极点, 并指出是几级极点

解

对于分子, 令  $p(z) = z - \sin z$ ,

$$p(0) = 0, p'(0) = 0, p''(0) = 0, p'''(0) = 1$$

显然  $z = 0$  为  $p(z)$  的三级零点, 又  $z = 0$  为  $z^6$  的六级极点

因此  $z = 0$  为  $f(z)$  的三级极点

## 5.2 留数概念与计算

$f(z)$  在  $z_0$  处的留数为

$$\begin{aligned} & \text{Res}[f(z), z_0], \text{Res}[f(z_0)] \\ \text{Res}[f(z), z_0] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = c_{-1} \end{aligned}$$

(1) 若  $z_0$  为可去奇点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = 0$$

(2) 若  $z_0$  为本性奇点, 则展开洛朗级数, 取  $c_{-1}$

(3) 若  $z_0$  为极点, 有以下规则:

**规则 1:** 若  $z_0$  为一级极点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

**规则 2:** 若  $z_0$  为  $m$  级极点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

**规则 3:** 设

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z)$  与  $Q(z)$  在  $z_0$  解析, 如果  $P(z_0) \neq 0$ ,  $Q(z_0) = 0$ ,  $Q'(z_0) \neq 0$ , 则  $z_0$  为  $f(z)$  的一级极点, 且

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

**拓展:** 若极点  $z_0$  的级数不为  $m$ , 当它的实际级数要比  $m$  低时, 把  $m$  作为极点  $z_0$  的级数来计算留数, 并不会影响计算结果

**例 5.2.1.**

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[\frac{z - \sin z}{z^6}, 0\right] &= \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} \left(z^6 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6}\right) \\ &= \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 0} (-\cos) \\ &= -\frac{1}{5!} \end{aligned}$$

函数在无穷远点的留数

**规则 4:**

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

## 5.3 留数定理及其应用

**定理 5.3.1.** 设  $f(z)$  在以简单闭曲线  $C$  为边界的闭区域  $\overline{D} = D + C$  内除  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  外解析, 其中  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  为  $f(z)$  在  $D$  内的孤立奇点, 则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]$$

**定理 5.3.2.** 如果函数  $f(z)$  在扩充复平面内只有有限个孤立奇点:  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \infty$ , 则  $f(z)$  在各奇点的留数总和为零, 即

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

### 留数定理的应用

(1) 计算沿封闭曲线的积分 (重点)

**例 5.3.3.** 计算积分

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1} dz$$

其中  $C$  为正向圆周  $|z| = 2$

解

$$f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$$

在圆  $|z| = 2$  内有两个一级极点, 为  $z = \pm 1$  且有

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \frac{e}{2}, \operatorname{Res}[f(z), -1] = \frac{e^{-1}}{2}$$

因此

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1]] = 2\pi i \left( \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i \left( e + \frac{1}{e} \right)$$

(2) 在定积分计算中的应用 (几乎不考)

[A] 形如

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

的积分, 利用  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 做代换

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z} \end{cases}$$

从而化为

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

再依据  $|z|=1$  中的孤立奇点, 通过留数定理计算

[B] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

的积分, 且满足

- (1)  $P(x)$  与  $Q(x)$  为互质多项式
- (2) 分母次数至少比分子次数高两次
- (3)  $Q(x)$  在实轴上没有零点

我们记  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , 设其在上半平面内的所有极点为  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z), z_k]$$

[C] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{i\alpha x} dx, \alpha > 0$$

的积分, 且满足

- (1)  $R(x)$  为互质多项式
- (2) 分母次数至少比分子次数高一次
- (3)  $R(x)$  在实轴上没有零点

我们记  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , 设其在上半平面内的所有极点为  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cdot e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}[R(z) \cdot e^{i\alpha z}, z_k]$$