复变函数笔记

南京工程学院

Serein

2023 年 2 月 17 日

目录

第一章 复数与复变函数 **1**

1.1 复数的概念及基本知识 . . . 2

1.2 复变函数 . . . 4

第二章 解析函数 **5**

2.1 解析函数的概念 . . . 6

2.2 函数解析的充要条件 . . . 6

2.3 初等函数 . . . 6

第三章 复变函数的积分 **9**

3.1 复变函数积分的性质及计算方法 . . . 10

3.2 复变函数积分的基本定理 . . . 11

3.3 解析函数与调和函数 . . . 13

第四章 级数 **15**

4.1 复数项级数与幂级数 . . . 16

4.2 泰勒级数 . . . 16

4.3 敛散性的判断 . . . 17

4.4 洛朗级数 . . . 19

第五章 留数 **23**

5.1 孤立奇点 . . . 24

5.2 留数概念与计算 . . . 26

5.3 留数定理及其应用 . . . 27

第一章　复数与复变函数

1.1　复数的概念及基本知识

概念

复数：$z = x + \mathrm{i}y$

实部：$x = \mathrm{Re}\,(z)$

虚部：$y = \mathrm{Im}\,(z)$

注意：两个复数相等当且仅当他们实部与虚部分别相等；两个复数只要不同时为实数就不能比较大小

代数运算

交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$，$z_1 z_2 = z_2 z_1$

结合律：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$，$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3$

分配律：$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

性质

$$\overline{\overline{z}} = z, \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$z\overline{z} = [\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2$$

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

复平面

模

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$$

$$|x| \leqslant |z|\,, |y| \leqslant |z|\,, |z| \leqslant |x| + |y|$$

$$|z| = |\overline{z}|\,, z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right|$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,, |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$

辐角

$$\tan\left(\mathrm{Arg}z\right) = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

在 $(-\pi, \pi]$ 内的辐角称为**辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值**，记作 $\arg\,(z)$，且其唯一，我们有

$$\mathrm{Arg}z = \mathrm{arg}z + 2k\pi\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x},x>0,(\mathrm{I,IV})\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi,x<0,y\geqslant 0,(\mathrm{II})\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi,x<0,y>0,(\mathrm{III})\\ \dfrac{\pi}{2},x=0,y>0\\ -\dfrac{\pi}{2},x=0,y<0\end{cases}$$

三角表示

$$z=r\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right),|z|=r,\arg z=\theta$$

指数表示

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

性质

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|\,,\mathrm{Arg}\left(z_1z_2\right)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$$

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

$$z^mz^n=z^{m+n},(z^m)^n=z^{mn},(z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n$$

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$$

$$z^n=r^n\left(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\right)$$

$$\left(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$\sqrt[n]{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

例 1.1.1. 在复数范围内求解

(1)$z^2+2z+3=0$

(2)$z^3+8=0$

解

(1)

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$$

(2) 由于 $-8=8\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)$

$$z=\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$z_2=2\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)=-2$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

1.2　复变函数

定理 1.2.1. 函数 $f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+\mathrm{i}v\left(x,y\right)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是 $u=u\left(x,y\right)$ 和 $v=v\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 连续

例 1.2.2.

$$\lim_{z\to1}\frac{z\overline{z}+z-\overline{z}-1}{z^2-1}=\lim_{z\to1}\frac{\left(z-1\right)\left(\overline{z}+1\right)}{\left(z+1\right)\left(z-1\right)}=\lim_{z\to1}\frac{\overline{z}+1}{z+1}=1$$

例 1.2.3.

$$\lim_{z\to-1}\frac{\left|z^2\right|+2\mathrm{Re}\left(z\right)+1}{z^2-1}=\lim_{z\to-1}\frac{z\overline{z}+z+\overline{z}+1}{z^2-1}=\lim_{z\to-1}\frac{\left(z+1\right)\left(\overline{z}+1\right)}{\left(z+1\right)\left(z-1\right)}=\lim_{z\to-1}\frac{\overline{z}+1}{z-1}=0$$

例 1.2.4. 函数 $\omega=3z$ 和 $\omega=z^3$ 分别将 z 平面上的区域

$$\begin{cases}|z|<1\\ |\mathrm{arg}z|<\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

映射成 ω 平面上的何种区域

解

$$\omega=3z\Rightarrow\begin{cases}|\omega|<3\\ |\mathrm{arg}z|<\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\omega=z^3\Rightarrow\begin{cases}|\omega|<1^3=1\\ |\mathrm{arg}z|<\dfrac{\pi}{6}\times3=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

第二章　解析函数

2.1　解析函数的概念

定理 2.1.1. 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内可导，则$f(z)$ 在 z_0 **解析**；如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则$f(z)$ 在 D **内解析**，$f(z)$ 为 D 内的**解析函数**

2.2　函数解析的充要条件

定理 2.2.1. 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在 D 内，$w=f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可导的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，并且在该点满足**柯西-黎曼方程（*C-R* 方程）**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 2.2.2. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微，并且满足 C-R 方程

提示：求函数 $f(z)$ 的导数，有两种情况：

(1) 若表达式为关于 z 的式子，则直接求导即可

(2) 若表达式为关于 x 与 y 的式子，则

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

强调：$f(z)=\bar{z}$ 在复平面内处处不可导，处处不解析

2.3　初等函数

指数函数

$$\exp(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y),T=2k\pi\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^z)=y+2k\pi$$

$$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2},(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$$

对数函数

$$w=u+\mathrm{i}v=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$$

$\mathrm{Ln}z$ 的主值为

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$$

$$\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi\mathrm{i}$$

需要注意以下几点

$$\mathrm{Ln}\left(z_1z_2\right)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$$

$$\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z\neq 2\mathrm{Ln}z,\mathrm{Ln}z^n\neq n\mathrm{Ln}z,\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}\neq\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$$

$$(\ln z)'=\frac{1}{z},(\mathrm{Ln}z)'=\frac{1}{z}$$

$\ln z$ 以及 $\mathrm{Ln}z$ 各分支在除原点和负实轴的复平面内解析

幂函数

$$w=z^a=\mathrm{e}^{a\mathrm{Ln}z}=\mathrm{e}^{a\ln z}\mathrm{e}^{2k\pi a\mathrm{i}}$$

当 a 为整数时

$$w=\mathrm{e}^{a\ln z}$$

三角函数

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$$

(1)$\sin z$ 与 $\cos z$，$T=2\pi$

(2)$\sin z$ 为奇函数，$\cos z$ 为偶函数

(3)$\sin z$ 与 $\cos z$，对应的实三角函数恒等式、三角函数诱导公式等仍然成立

(4)$\sin z=0\Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\cos z=0\Rightarrow z=k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(5)$\sin z$ 与 $\cos z$ 在复平面内处处可微，且 $(\sin z)'=\cos z$，$(\cos z)'=-\sin z$

(6)$|\sin z|$ 与 $|\cos z|$ 无界

例 2.3.1. 指出函数

$$\omega=\frac{1}{z^2+2z+5}$$

的解析性区域，并在该区域内求出其导数

解

当 $z^2+2z+5=0$ 时

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{20-4}\mathrm{i}}{2}=-1\pm2\mathrm{i}$$

因此

$$\omega=\frac{1}{z^2+2z+5}$$

解析性区域为除 $z=-1\pm2\mathrm{i}$ 的复平面

$$\omega'=-\frac{1}{\left(z^2+2z+5\right)^2}\left(2z+2\right)=-\frac{2z+2}{\left(z^2+2z+5\right)^2},z\neq-1\pm2\mathrm{i}$$

例 2.3.2. 求函数

$$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2\mathrm{i}$$

与

$$f(z)=\left|z^2\right|z$$

在何处可导，以及其解析性区域

解

(1)

$$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2\mathrm{i},u(x,y)=x^3-y^3,v(x,y)=2x^2y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y$$

令

$$\begin{cases}3x^2=4x^2y\\-3y^2=-4xy^2\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases} or \begin{cases}x_2=\frac{3}{4}\\y_2=\frac{3}{4}\end{cases}$$

因此

$$f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2\mathrm{i}$$

在 $z=0$ 与 $z=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}$ 处可导，在复平面内处处不解析

(2) 令 $z=x+y\mathrm{i}$，则 $\left|z^2\right|=\sqrt{\left(x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}=x^2+y^2$ 因此

$$f(z)=\left(x^2+y^2\right)(x+\mathrm{i}y)=x^3+x^2y\mathrm{i}+xy^2+y^3\mathrm{i}=x^3+xy^2+\left(x^2y+y^3\right)\mathrm{i}$$

$$u(x,y)=x^3+xy^2,v(x,y)=x^2y+y^3$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2$$

要使

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

成立，则当且仅当 $x=y=0$ 时成立

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导，在复平面内处处不解析

第三章　复变函数的积分

3.1　复变函数积分的性质及计算方法

计算复变函数积分类似于实数域内第二类曲线积分，当被积函数内出现积分路径，可以将积分路径带入计算

例 3.1.1. 设 C 是从 $2\to 0$ 的上半圆周：$|z-1|=1$，求

$$\int_C (1+|z-1|)\,\mathrm{d}z$$

解

$$\begin{aligned}\int_C (1+|z-1|)\,\mathrm{d}z &= \int_C \mathrm{d}z+\int_C |z-1|\,\mathrm{d}z\\ &= \int_C \mathrm{d}z+\int_C \mathrm{d}z\\ &= 2\int_C \mathrm{d}z\\ &= 2\int_2^0 \mathrm{d}\,(x+\mathrm{i}y)\\ &= -4\end{aligned}$$

例 3.1.2. 计算 $\oint_C z\mathrm{d}z$，其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段

解

得参数方程

$$\begin{cases} x=x\\ y=\dfrac{4}{3}x\end{cases},x:0\to 3$$

$$z=x+\mathrm{i}y=\left(x+\frac{4}{3}x\right)\mathrm{i}$$

则

$$\begin{aligned}\oint_C z\mathrm{d}z &= \int_0^3 \left(x+\frac{4}{3}x\mathrm{i}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{4}{3}x\mathrm{i}\right)\\ &= \int_0^3 \left(1+\frac{4}{3}\mathrm{i}\right)^2 x\mathrm{d}x\\ &= \frac{9}{2}\times\left(1+\frac{4}{3}\mathrm{i}\right)^2\\ &= -\frac{7}{2}+12\mathrm{i}\end{aligned}$$

重点

对包含 z_0 的任意一条正向简单闭曲线 C，有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases} 2\pi\mathrm{i},n=0\\ 0,n\neq 0\end{cases}$$

3.2 复变函数积分的基本定理

柯西-古萨基本定理

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析，则函数沿 D 内的任意一条简单闭曲线 C 的积分值为零，即

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

原函数与不定积分

与实数域计算方法类似，类似于牛顿-莱布尼茨公式

例 3.2.1.

$$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{2z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2z}\bigg|_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}}\right) = \frac{1-1}{2} = 0$$

复合闭路定理

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

例 3.2.2. 计算

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

其中 Γ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任意一条正向简单闭曲线

解

以 0 与 1 为中心，在 Γ 内作正向圆周 C_1 与 C_2，且两者互不相交，互不包含，则

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z^2-z}\mathrm{d}z \\
&= \oint_{C_1}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z + \oint_{C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z \\
&= 0 - 2\pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i} - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

复变函数积分的基本公式

定理 3.2.3. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内的任意一点，则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0)$$

例 3.2.4. 计算

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=4}\frac{\sin 2z}{z}\mathrm{d}z$$

沿圆周正向

解

由于 $\sin 2z$ 在 $|z|=4$ 内解析，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=4}\frac{\sin 2z}{z}\mathrm{d}z=\sin 2z\big|_{z=0}=0$$

例 3.2.5. 计算

$$\oint_{|z+2|=1}\frac{z}{z^2-4}\mathrm{d}z$$

沿圆周正向

方法一：利用柯西积分公式

$$\begin{aligned}\oint_{|z+2|=1}\frac{z}{z^2-4}\mathrm{d}z &= \oint_{|z+2|=1}\frac{z}{(z-2)(z+2)}\mathrm{d}z\\ &= \oint_{|z+2|=1}\frac{\frac{z}{z-2}}{z+2}\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{z}{z-2}\right|_{z=-2}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-2}{-4}\\ &= \pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

方法二：利用复合闭路定理

$$\begin{aligned}\oint_{|z+2|=1}\frac{z}{z^2-4}\mathrm{d}z &= \oint_{|z+2|=1}\frac{z}{(z-2)(z+2)}\mathrm{d}z\\ &= \oint_{|z+2|=1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}\right)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2}\oint_{|z+2|=1}\frac{1}{z-2}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\oint_{|z+2|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z\\ &= 0+\frac{1}{2}\times 2\pi\mathrm{i}\\ &= \pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

解析函数的高阶导数公式

定理 3.2.6.

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

例 3.2.7.

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z^2+2z-1}{(z-1)^3}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\left.(3z^2+2z-1)''\right|_{z=1}}{(3-1)!} = 6\pi\mathrm{i}$$

3.3 解析函数与调和函数

调和函数

如果二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y}=0$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 的调和函数

解析函数与调和函数的关系

定理 3.3.1. 任何在区域 D 内解析的函数，它的实部与虚部均为区域 D 内的调和函数，且其虚部为实部的共轭调和函数；我们把使得 $u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内构成解析函数的调和函数 v 称为 u 的共轭调和函数

例 3.3.2. 证明 $u(x,y)=2(x-1)y$ 为调和函数，并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由他们构成的解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$

解

(1) **证明：**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y, \frac{\partial u}{\partial y}=2x-2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}=0, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}=0$$

则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}=0,$$

因此 $u(x,y)=2(x-1)y$ 为调和函数

(2) 由于满足 C-R 方程，因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

则

$$v=y^2+g\left(x\right)$$

又由于

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2-2x$$

且

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(y^2+g\left(x\right)\right)'_x=g'\left(x\right)$$

因此有

$$g\left(x\right)=-x^2+2x+C$$

因此

$$f\left(z\right)=2\left(x-1\right)y+\mathrm{i}\left(y^2-x^2+2x+C\right)$$

同时也可带入

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},y=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

得到

$$f\left(z\right)=\mathrm{i}\left(-z^2+2z+C\right)$$

第四章　级数

4.1　复数项级数与幂级数

定义 4.1.1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散，则复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 条件收敛

定理 4.1.2. 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$，则收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$，则收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$

收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

4.2　泰勒级数

定理 4.2.1. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为区域 D 内一点，d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，则当 $|z-z_0| \leqslant d$ 时，$f(z)$ 可以展开成幂级数，且其唯一

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

重要的泰勒展开式

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, R = +\infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, R = +\infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, |z| < 1$$

收敛半径的求法

对于收敛半径的求解，一般可利用上述求收敛半径的公式求解；若求函数在 z_0 处的泰勒展开式的收敛半径，则先找出该函数的奇点，求奇点与 z_0 的最小距离，该距离即为收敛半径

例 4.2.2. 求

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

在 $z=1$ 处的泰勒展开式的收敛半径

解

令 $1+z^2=0$，得 $z=\pm\mathrm{i}$，又 $(0,\pm\mathrm{i})$ 到 $(-1,0)$ 距离为 $\sqrt{2}$，因此收敛半径 $R=\sqrt{2}$

例 4.2.3. 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n z^n$$

的收敛半径

解

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^n}{(-3)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$$

4.3 敛散性的判断

等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}$$

当 $|q|<1$ 时，收敛

当 $|q|\geqslant 1$ 时，发散

调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散

p **级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

当 $p\leqslant 1$ 时，发散

当 $p>1$ 时，收敛

定理 4.3.1. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

有如下审敛法

比较审敛法

$$u_n \leqslant v_n$$

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

简言之：大收则小收，小发则大发

比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

(1) 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

(2) 若 $l = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n_n$ 收敛

(3) 若 $l = +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n_n$ 发散

比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

(1) 若 $0 < \rho < 1$，则级数收敛

(2) 若 $\rho > 1$，则级数发散

(3) 若 $\rho = 1$，则级数敛散性不确定

根值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

(1) 若 $\rho < 1$，则级数收敛

(2) 若 $\rho > 1$，则级数发散

(3) 若 $\rho = 1$，则级数敛散性不确定

交错级数敛散性的判别

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$$

若同时满足以下两个条件，则收敛

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,u_n\geqslant u_{n+1}$$

拓展：若用**比值**或**根值**审敛法判别，则当判定出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

4.4 洛朗级数

例 4.4.1. 将函数

$$f(z)=\frac{1}{z-2}$$

在解析区域 $1<|z-1|<+\infty$ 内展开成洛朗级数

解

$$f(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}$$

由于 $1<|z-1|<+\infty$，则 $|z-1|<1$，因此有

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n$$

例 4.4.2. 将函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在解析区域

(1) $|z|<1$

(2) $1<|z|<2$

(3) $2<|z|<+\infty$

内展开成洛朗级数

解

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

(1) 在 $|z|<1$ 内

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(2) 在 $1<|z|<2$ 内，$\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，则

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

且 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，则

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

因此

$$f(z)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(3) 在 $2<|z|<+\infty$ 内，$\left|\dfrac{1}{z}\right|<\dfrac{1}{z}<1$，$\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ 则

$$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

因此

$$f(z)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

例 4.4.3. 将函数

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$$

分别在圆环域

(1) $0<|z|<1$

(2) $0<|z-1|<1$

内展开成洛朗级数

解

(1) 在 $0<|z|<1$ 内，有

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

则

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$$

(2) 在 $0<|z-1|<1$ 内，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

结论

根据洛朗级数相关性质，有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}$$

例 4.4.4. 求

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z(1-z)^2}\mathrm{d}z$$

解

函数

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$$

在 $0<|z|<1$ 内处处解析，且 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 在此圆环内，又由于

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$$

因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z(1-z)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$$

第五章　留数

5.1 孤立奇点

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的奇点

定义 5.1.1. *如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，但在 z_0 的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点*

定义 5.1.2. *设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，在 z_0 的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，函数 $f(z)$ 展开成洛朗级数*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

(1) 展开式中不含 $(z-z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为可去奇点

(2) 展开式中只有有限个 $(z-z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为极点，且若最高负幂次项次数为 $-m$，则其为 m 级极点

(3) 展开式中有无穷个 $(z-z_0)$ 的负幂次项 $\Rightarrow z_0$ 为本性奇点

引申

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在 $\Rightarrow z_0$ 为可去奇点

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty\Rightarrow z_0$ 为极点

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在且不为 $\infty\Rightarrow z_0$ 为本性奇点

例 5.1.3. *求函数*

$$f(z)=\frac{z^3}{(z^2+1)(z+1)^2}$$

的极点，并指出是几级极点

解

$z=\pm\mathrm{i}$ 为一级极点，$z=-1$ 为二级极点

说明

若解析函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内满足

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点

例 5.1.4. 求下列函数的极点，并指出是几级极点

(1) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$

解

(1)

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{z^2}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots$$

因此 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点

另解

由于对于分母 $z=0$ 为 z^2 的二级零点，对于分子 $z=0$ 为 e^z-1 的一级零点，这是由于

$$\left.(\mathrm{e}^z-1)\right|_{z=0}=0,\left.(\mathrm{e}^z-1)'\right|_{z=0}=1$$

因此 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点（$2-1=1$）

(2) 由于

$$\sin(k\pi)=0,\left.[\sin(z)]'\right|_{k\pi}=\cos(k\pi)=(-1)^k\neq 0$$

因此 $z=k\pi$ 为 $\sin z$ 的一级零点，即 $z=k\pi$ 为 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的一级极点

结论

对于某函数 $f(z)$，在 z_0 处，其为分子的 a 级零点，分母的 b 级零点，且 $a<b$，则 z_0 为 $f(z)$ 的 $b-a$ 级极点

在计算几级极点时，需要将分子分母都因式分解，约去公因式，计算 z_0 为分子、分母的几级零点

计算某函数某一点为其几级零点时，首先因式分解到最简为几个整式相乘的形式，计算 z_0 为各部分的几级零点，最后相加得 z_0 为该函数的几级零点

例 5.1.5. 求函数

$$f(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$$

的极点，并指出是几级极点

解

对于分子，令 $p(z)=z-\sin z$，

$$p(0)=0,p'(0)=0,p''(0)=0,p'''(0)=1$$

显然 $z=0$ 为 $p(z)$ 的三级零点，又 $z=0$ 为 z^6 的六级极点

因此 $z=0$ 为 $f(z)$ 的三级极点

5.2　留数概念与计算

$f(z)$ 在 z_0 处的留数为

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0], \operatorname{Res}[f(z_0)]$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = c_{-1}$$

(1) 若 z_0 为可去奇点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = 0$$

(2) 若 z_0 为本性奇点，则展开洛朗级数，取 c_{-1}

(3) 若 z_0 为极点，有以下规则：

规则 1：若 z_0 为一级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

规则 2：若 z_0 为 m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

规则 3：设

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析，如果 $P(z_0) \neq 0$，$Q(z_0) = 0$，$Q'(z_0) \neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

拓展：若极点 z_0 的级数不为 m，当它的实际级数要比 m 低时，把 m 作为极点 z_0 的级数来计算留数，并不会影响计算结果

例 5.2.1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z - \sin z}{z^6}, 0\right] &= \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5} \left(z^6 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6}\right) \\
&= \frac{1}{5!} \lim_{z \to 0} (-\cos) \\
&= -\frac{1}{5!}
\end{aligned}$$

函数在无穷远点的留数

规则 4：

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

5.3 留数定理及其应用

定理 5.3.1. 设 $f(z)$ 在以简单闭曲线 C 为边界的闭区域 $\overline{D}=D+C$ 内除 z_1，z_2，z_3，$\cdots$，z_n 外解析，其中 z_1，z_2，z_3，$\cdots$，z_n 为 $f(z)$ 在 D 内的孤立奇点，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

定理 5.3.2. 如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点：z_1，z_2，z_3，$\cdots$，z_n，∞，则 (z) 在各奇点的留数总和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$$

留数定理的应用

(1) 计算沿封闭曲线的积分（重点）

例 5.3.3. 计算积分

$$\oint_C \frac{z\mathrm{e}^z}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

其中 C 为正向圆周 $|z|=2$

解

$$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^z}{z^2-1}$$

在圆 $|z|=2$ 内有两个一级极点，为 $z=\pm1$ 且有

$$\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]=\frac{\mathrm{e}}{2},\mathrm{Res}\left[f(z),-1\right]=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$$

因此

$$\oint_C \frac{z\mathrm{e}^z}{z^2-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}\left[f(z),1\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),-1\right]\right]=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right)=\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

(2) 在定积分计算中的应用（几乎不考）

[**A**] 形如

$$\int_0^{2\pi} R\left(\cos\theta, \sin\theta\right) \mathrm{d}\theta$$

的积分，利用 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，做代换

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z} \\ \cos\theta = \dfrac{z^2+1}{2z} \end{cases}$$

从而化为

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \oint_{|z|=1} f\left(z\right) \mathrm{d}z$$

再依据 $|z| = 1$ 中的孤立奇点，通过留数定理计算

[**B**] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(x\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}\mathrm{d}x$$

的积分，且满足

(1) $P\left(x\right)$ 与 $Q\left(x\right)$ 为互质多项式

(2) 分母次数至少比分子次数高两次

(3) $Q\left(x\right)$ 在实轴上没有零点

我们记 $R\left(z\right) = \dfrac{P\left(z\right)}{Q\left(z\right)}$，设其在上半平面内的所有极点为 z_1，z_2，$\cdots$，z_k，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(x\right) \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left[R\left(z\right), z_k\right]$$

[**C**] 形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(x\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x, \alpha > 0$$

的积分，且满足

(1) $R\left(x\right)$ 为互质多项式

(2) 分母次数至少比分子次数高一次

(3) $R\left(x\right)$ 在实轴上没有零点

我们记 $R\left(z\right) = \dfrac{P\left(z\right)}{Q\left(z\right)}$，设其在上半平面内的所有极点为 z_1，z_2，$\cdots$，z_k，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R\left(x\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\left[R\left(z\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}, z_k\right]$$