积分变换笔记

南京工程学院

Serein

2023 年 1 月 21 日

目录

第一章　Fourier 变换

1.1 Fourier 积分公式

Fourier 积分公式

当在 t 处连续时，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

当在 t 处间断时，有

$$f(t)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

注意：当在 t 处间断时，应取该点左右极限计算

Fourier 积分公式的复数形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Dirichlet 积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

1.2 Fourier 变换与其逆变换

Fourier 变换式

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=F(\omega)$$

$F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的象函数

Fourier 逆变换式

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=f(t)$$

$f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的象原函数

1.3 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

Dirac 函数（δ 函数）

若 $\delta(t)$ 满足

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

则 $\delta(t)$ 为 δ 函数

性质

对性质良好的 $f(t)$，δ 函数有如下性质

性质一

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

性质二

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

性质三

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

性质四

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

性质五

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at-b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t - \frac{b}{a}\right)$$

常见函数的 Fourier 变换

表 1.1: 常见函数的 Fourier 变换

函数	Fourier 变换
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\pi\mathrm{i}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta'(t)$	$\mathrm{i}\omega$
$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{i}\omega)^n$

1.4 Fourier 变换的性质

A、线性性质

若 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$$

B、位移性质

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f(t+t_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)\right]=F(\omega-\omega_0)$$

C、**微分性质**

设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且当 $|t| \to +\infty$，$f(t) \to 0$，则

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \mathrm{i}\omega F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathscr{F}[tf(t)] = \mathrm{i}F'(\omega)$$

$$\mathscr{F}[t^n f(t)] = \mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega)$$

D、**积分性质**

设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，

当 $t \to +\infty$ 时，$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t \to 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)$$

当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(x) \neq 0$ 时，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega) + \pi F(0)\,\delta(\omega)$$

E、**相似性质**

设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，且 $a \neq 0$，则

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

补充

在求 Fourier 变换时，我们或许会遇到被变换式中有 $\sin\omega_0 t$ 或是 $\cos\omega_0 t$，此时我们需要用定义展开，同时用欧拉公式表示出 $\sin\omega_0 t$ 或 $\cos\omega_0 t$，根据 Euler 公式，我们有

$$\sin\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{2\mathrm{i}}$$

以及

$$\cos\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{2}$$

1.5 卷积

概念

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

满足的运算律

（1）交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

（2）结合律

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$$

（3）分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

（4）设 α 为常数，则

$$\alpha [f_1(t) * f_2(t)] = [\alpha f_1(t)] * f_2(t) = f_1(t) * [\alpha f_2(t)]$$

（5）函数卷积的绝对值小于等于函数绝对值的卷积，即

$$|f_1(t) * f_2(t)| \leqslant |f_1(t)| * |f_2(t)|$$

卷积定理

设 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t)$$

$$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}[f_1(t) f_2(t) \cdots f_n(t)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} F_1(\omega) * F_2(\omega) * \cdots * F_n(\omega)$$

第二章　Laplace 变换

2.1 Laplace 变换的概念

定义

Laplace 变换

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Laplace 逆变换

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

常见函数的 Laplace 变换

表 2.1: 常见函数的 Laplace 变换

函数	Laplace 变换
1	$\frac{1}{s}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	s^n

几种单位阶跃函数变形的 Laplace 变换

例 2.1.1.

$$\mathscr{L}[u(t-1)] = \mathscr{L}[u(t-1)\,u(t-1)] = \mathrm{e}^{-s}\mathscr{L}[u(t)] = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

例 2.1.2.

$$\mathscr{L}[u(1-t)] = \mathscr{L}[1-u(t-1)] = \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

例 2.1.3.

$$\mathscr{L}[u(2t-2)] = \mathscr{L}[u(t-1)] = \mathscr{L}[u(t-1)\,u(t-1)] = \mathrm{e}^{-s}\mathscr{L}[u(t)] = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

例 2.1.4.

$$\mathscr{L}[u(t+1)] = \frac{1}{s}$$

2.2 Laplace 变换的性质

A、线性性质

若 $\mathscr{L}\left[f_1(t)\right]=F_1(s)$，$\mathscr{L}\left[f_2(t)\right]=F_2(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\right]=\alpha\mathscr{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]+\beta\mathscr{L}\left[F_2(s)\right]$$

B、微分性质

若 $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$\mathscr{L}\left[tf(t)\right]=-F'(s)$$

$$\mathscr{L}\left[t^nf(t)\right]=(-1)^nF^{(n)}(s)$$

C、积分性质

若 $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$$

D、位移性质

若 $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right]=F(s-a)$$

E、延迟性质

若 $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则对于 $\forall\tau>0$，有

$$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\,u(t-\tau)\right]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)$$

Fourier 与 Laplace 变换性质

表 2.2: Fourier 与 Laplace 变换性质

性质	Fourier 变换	Laplace 变换
微分性质	$\mathscr{F}\left[f'(t)\right]=\mathrm{i}\omega F(\omega)$ $\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$ $\mathscr{F}\left[tf(t)\right]=\mathrm{i}F'(\omega)$ $\mathscr{F}\left[t^n f(t)\right]=\mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega)$	$\mathscr{L}\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0)$ $\mathscr{L}\left[f''(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ $\mathscr{L}\left[tf(t)\right]=-F'(s)$ $\mathscr{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)$
积分性质	$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)$	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$ $\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$ $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$
位移性质	$\mathscr{F}\left[f(t+t_0)\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$ $\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)\right]=F(\omega-\omega_0)$	$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right]=F(s-a)$
Fourier 变换相似性质 Laplace 变换延迟性质	$\mathscr{F}\left[f(at)\right]=\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)u(t-\tau)\right]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)$

2.3 Laplace 逆变换

部分分式法

有些题目可将有理分式化为多个真分式之和，真分式形如

$$\frac{b}{(x+a)^m}$$

$$\frac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^n}, a\neq 0, b^2-4ac<0$$

配方法

有些题目可将分母进行配方，配凑出 $\sin(kt)$ 或者 $\cos(kt)$ 的 Laplace 变换形式

例 2.3.1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[2\cdot\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\right] \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right] \\
&= 2\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)
\end{aligned}$$

例 2.3.2.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}\right]$$

不妨设

$$\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{s+2}$$

易得

$$s-1=a(s+1)(s+2)+bs(s+2)+cs(s+1)$$

因此有

$$\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+2}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+2}\right]\\ &= -\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\\ &= -\frac{1}{2}+2\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}\end{aligned}$$

例 2.3.3.

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s(s+1)^2}\right]$$

不妨设

$$\frac{s+2}{s(s+1)^2}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^2}$$

则我们有

$$s+2=a(s+1)^2+bs(s+1)+cs$$

易得

$$\frac{s+2}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{-1}{(s+1)^2}$$

而

$$\frac{-1}{(s+1)^2}=\left(\frac{1}{s+1}\right)'$$

且

$$\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$$

因此

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]=t\mathrm{e}^{-t}$$

从而

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s\left(s+1\right)^{2}}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{-1}{\left(s+1\right)^{2}}\right] \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{\left(s+1\right)^{2}}\right] \\
&= 2-2\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}
$$

例 2.3.4.

$$
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^{2}+1\right)^{2}}\right]
$$

注意到

$$
\left(\frac{1}{s^{2}+1}\right)'=-\frac{2s}{\left(s^{2}+1\right)^{2}}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^{2}+1\right)^{2}}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{\left(s^{2}+1\right)^{2}}\right]\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^{2}+1}\right)'\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[-\left(\frac{1}{s^{2}+1}\right)'\right] \\
&= \frac{1}{2}t\sin t
\end{aligned}
$$

2.4 卷积

概念

$$
f_{1}\left(t\right)*f_{2}\left(t\right)=\int_{0}^{t}f_{1}\left(\tau\right)f_{2}\left(t-\tau\right)\mathrm{d}\tau
$$

满足的运算律

对于 Laplace 卷积，其满足的运算律与 Fourier 卷积满足的运算律一致

卷积定理

设 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$，则

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$$

例 2.4.1. 求

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, t \leqslant 0 \\ t, t > 0 \end{cases}$$

与

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, t \leqslant 0 \\ \sin t, t > 0 \end{cases}$$

的卷积

解

1) 当 $t \leqslant 0$ 时，$f_1(t) * f_2(t) = 0$

2) 当 $t > 0$ 时，

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathscr{L}[f_1(t)] \cdot \mathscr{L}[f_2(t)]$$

由于

$$\mathscr{L}[f_1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s^2+1}$$

则

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

因此

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] = t - \sin t$$

2.5 Laplace 变换的应用

解线性微分方程

例 2.5.1. 解线性微分方程：

$$y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{-t}$$

且满足初值条件：

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

解

令 $y = y(t)$ 是该微分方程的解，且 $\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$

则我们有

$$\mathscr{L}[y''(t)] + 2\mathscr{L}[y'(t)] - 3\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\right]$$

而又由于

$$\mathscr{L}[y''(t)] = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathscr{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

则

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

整理得

$$\left(s^2 + 2s - 3\right) Y(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

即

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

而又由于

$$\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)} = \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{3}{8}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{s+3}$$

则

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{3}{8}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{s+3}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} \\ &= \frac{1}{8}\left(3\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{aligned}$$