一、相机内参和外参

1、相机投影模型

（1）世界坐标系---->相机坐标系

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{3*3} & T_{3*1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

（2）相机坐标系---->成像平面坐标系

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

（3）成像平面坐标系---->像素坐标系

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & -\frac{\cot\theta}{dx} & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy*\sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

（dx/dy 表示每像素沿 x/y 轴实际物理尺寸）

（4）从世界坐标系到像素坐标系的坐标变换关系可表示为：

$$\frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{3*3} & T_{3*1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = A_{3*3} \begin{bmatrix} R_{3*3} & T_{3*1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

$$\mathrm{s} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = A_{3*3} [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad t] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.5)$$

（A_{3*3}表示相机内参矩阵（5 个内参数），P_{3*4}表示投影矩阵，s=1/Z_c表示未知的尺度因子）

2、相机内参和外参的求解

根据世界坐标系下点 M(x,y)坐标及其对应的像素坐标 m(u,v)求解单应矩阵

在相机标定任务中，我们假设标定板处于 z=0 平面，因此 Z_w=0，式 1.5 退化为：

$$\mathrm{s} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = A_{3*3} [r_1 \quad r_2 \quad t] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.6)$$

令 $H_{3*3} = \lambda A_{3*3} [r_1 \quad r_2 \quad t] = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$，则

$$\mathrm{s} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{sm} = \mathrm{HM} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

展开可得：

$$\mathrm{u} = \frac{h_{00}X_w + h_{01}Y_w + h_{02}}{h_{20}X_w + h_{21}Y_w + h_{22}} \qquad (1.8)$$

$$\mathrm{v} = \frac{h_{10}X_w + h_{11}Y_w + h_{12}}{h_{20}X_w + h_{21}Y_w + h_{22}} \qquad (1.9)$$

进一步展开得：

$$\begin{bmatrix} X_w & Y_w & 1 & 0 & 0 & 0 & -u*X_w & -u*Y_w & -u \\ 0 & 0 & 0 & X_w & Y_w & 1 & -v*X_w & -v*Y_w & -v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{01} \\ h_{02} \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \\ h_{20} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

根据式 1.10，对系数矩阵进行 SVD 分解，最小特征值对应的特征向量即为 H。

3、通过 H 得到内参矩阵和外参矩阵

$$H_{3*3} = \lambda A_{3*3}[r_1 \quad r_2 \quad t] \quad (1.11)$$

（1）内参矩阵

根据旋转矩阵的性质，${r_1}^T r_2 = 0, \det(r_1) = \det(r_2) = 1$ ，可得：

$$\mathrm{h_1}^T A^{-T} A^{-1} h_2 = 0 \quad (1.12)$$

$$\mathrm{h_1}^T A^{-T} A^{-1} h_1 = \mathrm{h_2}^T A^{-T} A^{-1} h_2 \quad (1.13)$$

令$\mathrm{B} = A^{-T} A^{-1}$，展开可发现 B 是对称矩阵，有效元素有 6 个，可用一个 6 维向量表示$\mathrm{b} = [B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33}]^T$。则式 1.12 可写为：

$$\mathrm{h}_i{}^T B h_j = \ {v_{ij}}^T b \quad (1.14)$$

其中$v_{ij} = [h_{i1}h_{j1},\ h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1},\ h_{i2}h_{j2},\ h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3},\ h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3},\ h_{i3}h_{j3}]^T$

把式 1.13 带入 1.11 和 1.12 得：

$$\begin{bmatrix} {v_{12}}^T \\ (v_{11} - v_{22})^T \end{bmatrix} b = 0 \quad (1.15)$$

根据 H 求解出 b，进而得到 B，再进行 cholesky 分解，得到相机内参矩阵 A。

（2）外参矩阵

根据式 1.11，求解相机外参矩阵：

$$\begin{gathered} r_1 = \lambda A^{-1} h_1 \\ r_2 = \lambda A^{-1} h_2 \\ r_3 = \ r_1 \ \times \ r_2 \\ t = \lambda A^{-1} h_3 \end{gathered} \quad (1.16)$$

其中 $\lambda = \frac{1}{\det(A^{-1}h_1)} = \frac{1}{\det(A^{-1}h_2)}$ 。

二、相机畸变参数

1、考虑径向畸变 k_1,k_2,k_3，和切向畸变 p_1,p_2,

纠正径向畸变：

$$x_c = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \quad (2.1)$$

$$y_c = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \quad (2.2)$$

纠正切向畸变：

$$x_c = x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \quad (2.3)$$

$$y_c = y + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy \quad (2.4)$$

其中$r^2 = x^2 + y^2$

可得到纠正前后的坐标关系：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

即:

$$\begin{bmatrix} xr^2 & xr^4 & xr^6 & 2xy & r^2+2x^2 \\ yr^2 & yr^4 & yr^6 & r^2+2y^2 & 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c - x \\ y_c - y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

通过最小二乘法求解 k_1,k_2,p_1,p_2,k_3。

三、相机内参和外参的优化

构建非线性优化模型:

$$\sum\sum \| m_{ij} - \hat{m}(A, k_1, k_2, p_1, p_2, k_3, R_i, t_i, M_j) \|^2 \quad \text{(被减项为重投影)}$$

使用 ceres 进行优化。

四、实验过程记录

1、实现思路记录:

(1) 根据标定板三维坐标与像素坐标对应关系求解单应变换矩阵 H

(2) 使用 ceres 根据重投影误差优化单应矩阵 H,根据 H 重投影得到参考像素坐标

(3) 分解 H 得到 B=ATA,进而得到内参矩阵 A

(4) 根据 H=A[R t]求解外参

(5) 根据观测到的角点值和角点的参考像素坐标,对每幅图像进行相机畸变的计算,并使用 ceres 优化,重投影误差最小时的相机畸变为最后求解结果

2、实验进展

(1) 目前单应矩阵的求解、重投影、单应矩阵分解为 B,B 分解为 A 这些步骤可以完成,求解畸变一步尚有问题,有待改进。

(2) 求解畸变过程中,在使用 ceres 优化时出现了计算雅各比矩阵错误的问题。

(3) 由于时间有限,一些附加功能尚未实现,如保存结果到文件、调用摄像头实时采集数据等功能。