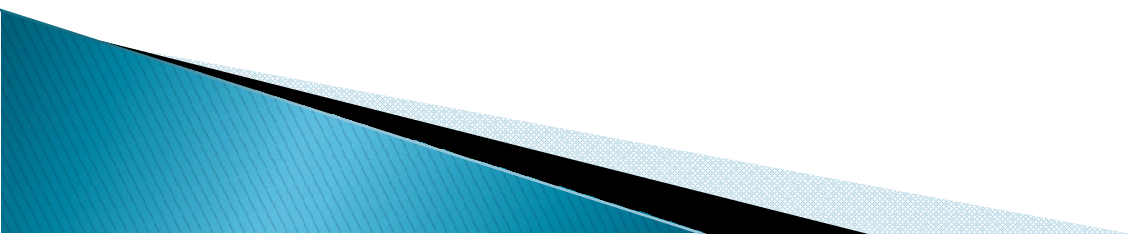


Filtros Digitales – FIR

- ▶ En general, el diseño de cualquier filtro digital es llevado a cabo en 3 pasos:
- ▶ **1. Especificaciones:** Antes de poder diseñar un filtro debemos tener algunas especificaciones, las cuales son determinadas por la aplicación.
- ▶ **2. Aproximaciones:** Una vez que las especificaciones son definidas, se hace uso de los conceptos y herramientas matemáticas ya descritos para establecer la descripción del filtro que aproxime las especificaciones dadas.
- ▶ **3. Implementación:** El resultado del paso anterior es una descripción del filtro en forma de ecuaciones de diferencia, una función de transferencia $H(z)$, o una respuesta impulsiva $h(n)$.



Propiedades de los filtros FIR

Los filtros F.I.R. son sistemas que por definición presentan una respuesta al impulso de duración finita. Si se considera al sistema causal, la expresión indicada a continuación caracteriza a un filtro F.I.R. de coeficientes b_k .

$$h[n] = \sum_{k=0}^{L-1} b_k \delta[n-k]$$

La función de sistema que caracteriza al filtro es la Transformada Z de la respuesta al impulso .

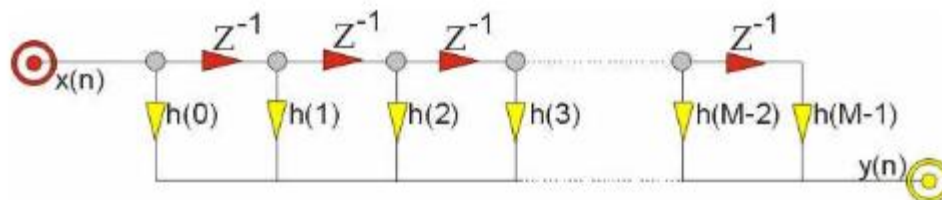
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{k=0}^{L-1} b_k z^{-k}$$

Las características más importantes de estos sistemas son:

- Pueden presentar una característica de fase exactamente lineal. Esto ocurre si la respuesta al impulso cumple:

$$h[n] = \pm h[L-1-n] \quad \text{para } n=0, 1, \dots, (L-1)$$

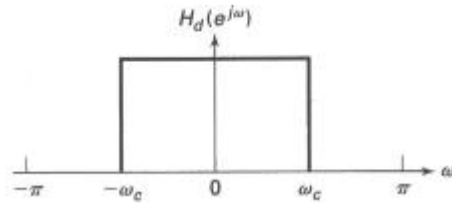
- Dado que su estructura es no recursivas son siempre estables.



Frente a los filtros IIR presentan la desventaja de requerir un orden mucho mayor.

Método de las Ventanas

Nos planteamos realizar un filtro pasabajos ideal con una frecuencia de corte ω_c , tal y como indica la figura.

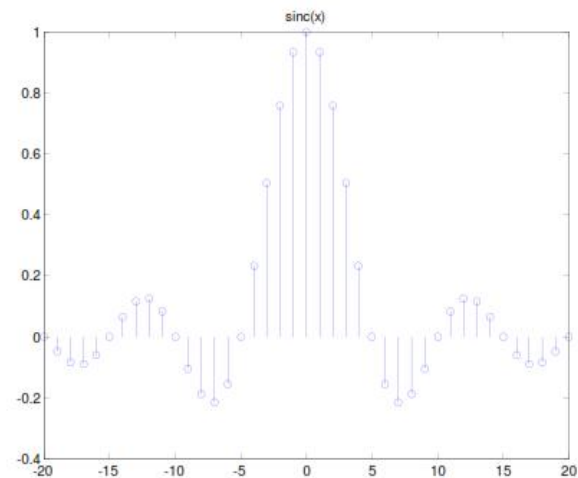


Haciendo la Transformada inversa de Fourier discreta de esta función $H_d(F)$, nos queda:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(w) e^{jwn} dw$$

$$h_i(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & n \neq 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \end{cases}$$

$$-\infty < n < \infty$$

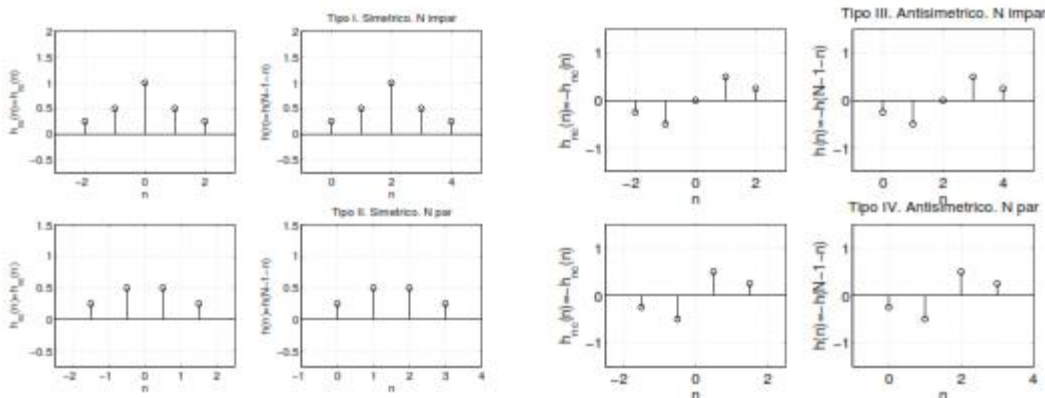


Filtros FIR de fase lineal

La ventaja de los filtros FIR es que pueden diseñarse para que presenten FASE LINEAL. La linealidad de fase implica que se verifiquen ciertas condiciones de simetría:

Si consideramos sistemas FIR con coeficientes reales, una secuencia conjugada simétrica se dice que es una secuencia PAR, y una secuencia conjugada antisimétrica es una secuencia IMPAR. Dependiendo del número de coeficientes del filtro y del tipo de simetría tenemos varias posibilidades.

Tipo:	Número de términos (N)	Simetría
I	Impar	Simétrico $h(k) = h(N-1-k)$
II	Par	Simétrico $h(k) = h(N-1-k)$
III	Impar	Antisimétrico $h(k) = -h(N-1-k)$
IV	Par	Antisimétrico $h(k) = -h(N-1-k)$



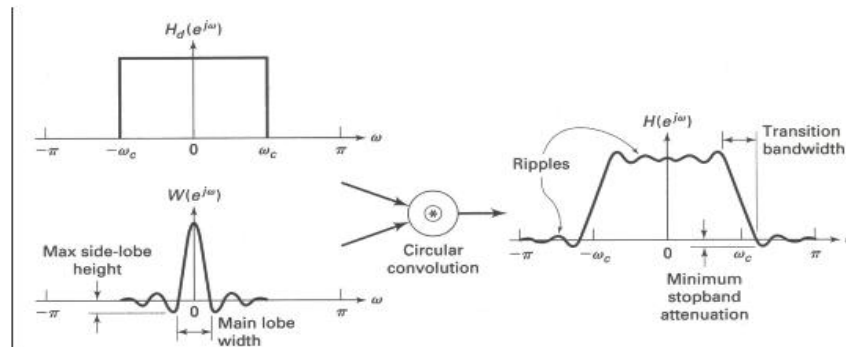
El método de las ventanas se basa en truncar la respuesta impulsional infinita de un filtro ideal. El procedimiento es el siguiente:

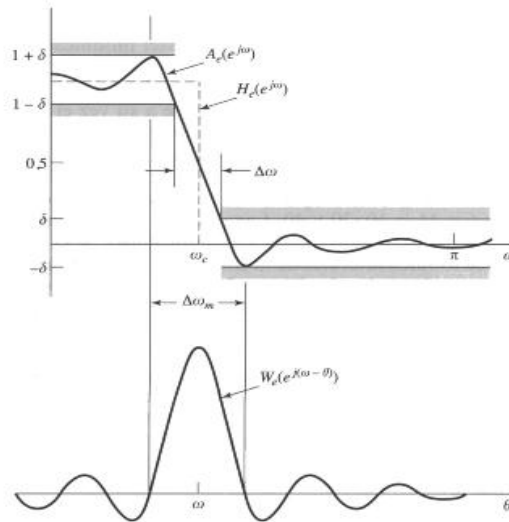
- Obtener la respuesta impulsional del filtro ideal que deseamos diseñar $h(n)$ (pasabajos, pasaaltos, etc.)
- Enventanar (truncar) dicha respuesta impulsional $\boxed{h(n) = h_i(n) \cdot w(n)}$, donde $w(n)$ es la respuesta impulsional de la ventana y $h_i(n)$ es la respuesta del filtro ideal. La respuesta de la ventana debe ser de la forma:

$$w(n) = \begin{cases} \text{función simétrica en el intervalo } \frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

- Desplazar la respuesta impulsional enventanada un número adecuado de muestras para hacerla causal. (también se puede desplazar la respuesta impulsional del filtro ideal previamente, para que la secuencia enventanada sea causal) .

Como el producto en el dominio del tiempo equivale a una convolución en el dominio de la frecuencia, podemos estudiar el efecto que este enventanado tiene sobre la respuesta del filtro.



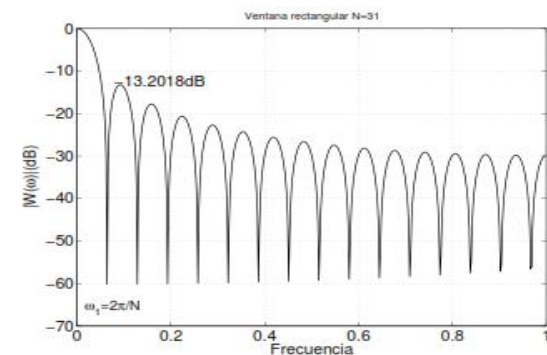


Consideremos la ventana mas sencilla; la ventana rectangular

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

$$W(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+2} + z^{-N+1} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$W(\omega) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

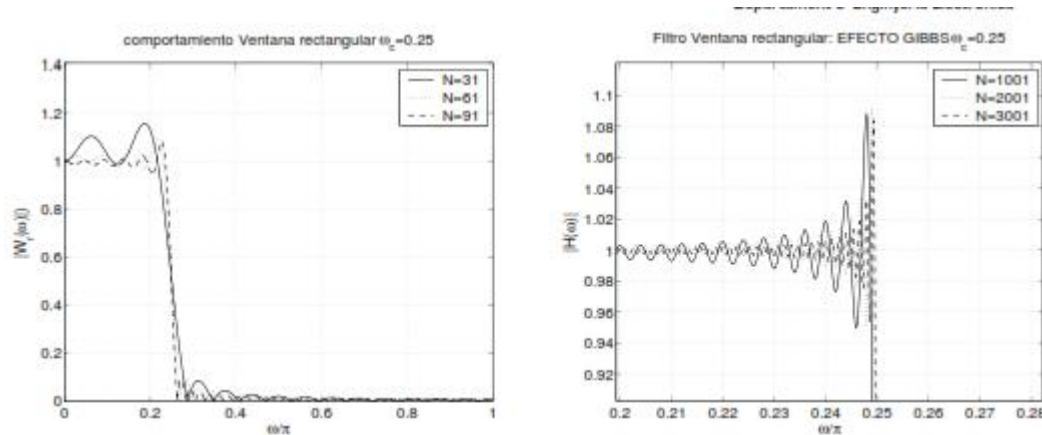


La anchura del lóbulo principal para esta ventana es $\frac{4\pi}{N}$

El efecto del enventanado o truncamiento de la respuesta ideal es doble:

- por una parte, la anchura del lóbulo principal está relacionada con la aparición de una banda de transición en el filtro. Cuanto mayor sea el lóbulo principal mayor será la banda de transición del filtro.
- por otra, la presencia de lóbulos laterales (secundarios) lleva a la aparición de un rizado u oscilaciones en la respuesta en frecuencia, en ambas bandas, (más apreciables en la banda no pasante).

A medida que el número de términos (ventana de mayor longitud) aumenta, el nivel de oscilación va disminuyendo, hasta hacerse cero cuando $N \rightarrow \infty$, excepto en la discontinuidad en la que aparece una oscilación de amplitud aproximada igual al 11% de la amplitud en la discontinuidad, tanto en la banda pasante como en la no pasante. Este comportamiento oscilatorio en las proximidades de la discontinuidad se conoce como FENOMENO DE GIBBS.



Ventana	Anchura del lóbulo ppal de la ventana	Anchura de la banda de transición del filtro diseñado $\Delta\omega$	Pico Lóbulo secundario de la ventana(dB)	Atenuación del filtro diseñado con esta ventana Rs(dB)
Rectangular	$\frac{4\pi}{N}$	$\frac{1.8\pi}{N}$	-13	-21
Bartlett (triangular)	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.1\pi}{N}$	-25	-25
Von Hann (Hanning)	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.2\pi}{N}$	-31	-44
Hamming	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.6\pi}{N}$	-41	-53
Blackman	$\frac{12\pi}{N}$	$\frac{11\pi}{N}$	-57	-74

Diseño de filtros pasabanda, eliminabanda y pasaaltos

Table 6.2 Summary of ideal impulse responses for standard frequency selective filters.

Filter type	Ideal impulse response, $h_D(n)$	
	$h_D(n), n \neq 0$	$h_D(0)$
Lowpass	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Highpass	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Bandpass	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Bandstop	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

f_c , f_1 and f_2 are the passband or stopband edge frequencies; N is the length of filter.

Respuesta en frecuencia vs simetría de los filtros FIR

$h(nT)$	N	$H(e^{j\omega T})$
Simétrica	Impar	$e^{-j\omega(N-1)T/2} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \cos(\omega k T)$
	Par	$e^{-j\omega(N-1)T/2} \sum_{k=1}^{N/2} b_k \cos[\omega(k-1/2) T]$
Antisimétrica	Impar	$e^{-j[\omega(N-1)T/2 - \pi/2]} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \sen(\omega k T)$
	Par	$e^{-j[\omega(N-1)T/2 - \pi/2]} \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sen[\omega(k-1/2) T]$
donde: $a_0 = h[(\frac{N-1}{2})T]$ $a_k = 2h[(\frac{N-1}{2} - k) T]$ $b_k = 2h[(\frac{N}{2} - k) T]$		

Ejemplo

Diseñar un filtro pasabajos:

- Frecuencia de paso : 1.5kHz
- Ancho transición: 0.5kHz
- Atenuación banda de rechazo > 50dB
- Frecuencia de muestreo: 8kHz

$$h_D(n) = 2f_c \text{sinc}(2nf_c)$$

La atenuación se consigue con Hamming o Blackman. Por simplicidad elegimos Hamming.

$$\Delta f = 0.5k/8k = 0.0625$$

$$\Delta f = 3.3/N$$

$$N = 3.3/\Delta f$$

$$N = 3.3/0.0625$$

$$N = 52.8$$

$N = 53$, número de coeficientes elegido

$$w(n) = 0.54 + 0.46\cos(2\pi n/53), -26 < n < 26$$

Se selecciona f_c en la mitad de la banda de transición:

$$f_c' = f_c + \Delta f$$

$$f_c' = (1.5k + 0.25k)/8k = 1.75k/8k = 0.21875$$

Como $h(n)$ es simétrico se calculan solo $h(0)\dots h(26)$
Para $n=0$

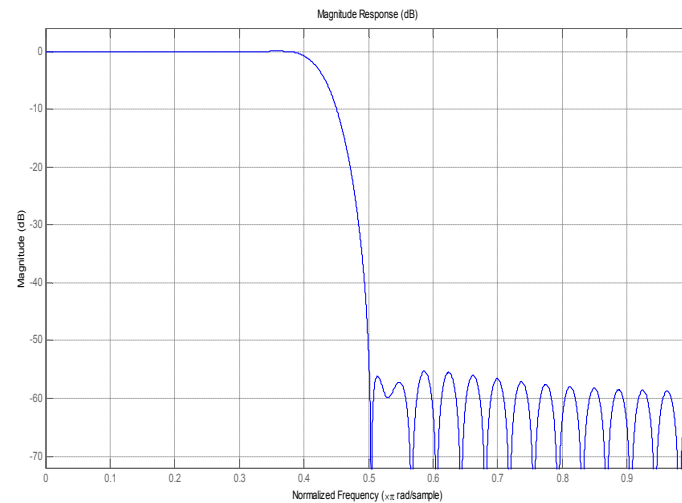
$$h_D(0) = 2f_c \text{sinc}(2nf_c) = 0.4375$$
$$w(0) = 0.54 + 0.46\cos(2\pi n/53) = 1$$
$$h(0) = h_D(0)w(0) = 0.4375$$

$$h(1) = h_D(1)w(1) = 0.31119$$
$$h(2) = h_D(2)w(2) = 0.06012$$

$$h(26) = h_D(26)w(26) = 0.000913$$

Cálculo de los coeficientes en Matlab:

```
n=-26:26;  
fc= 0.2187;  
hd = 2*fc*sinc(2*n*fc);  
w = 0.54+0.46*cos(2*pi*n/53);  
h=hd.*w;  
[Hf,w]=freqz(h,1,128);  
fvtool(h,1)
```



Ejemplo 2

Banda pasante: 150–250Hz

Ancho de transición: 50Hz

Atenuación banda rechazo: 60dB //// lo cumple la ventana de Kaiser y Blackman

Frecuencia de muestreo: 1kHz

Kaiser:

$$N \geq (A - 7.95) / (14.36 \Delta f) = (60 - 7.95) / (14.36 * 50 / 1000) = 72.49$$

$$N = 73. \quad // \text{Blackman } N = 110$$

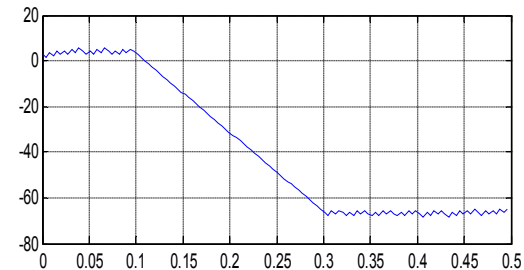
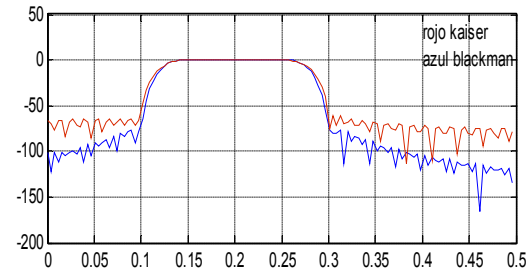
$$\beta = 0.1102(A - 8.7) = 0.1102(60 - 8.7) = 5.65$$

$$fc1 = (150 - 25) / 1000 = 0.125$$

$$fc2 = (150 + 25) / 1000 = 0.175$$

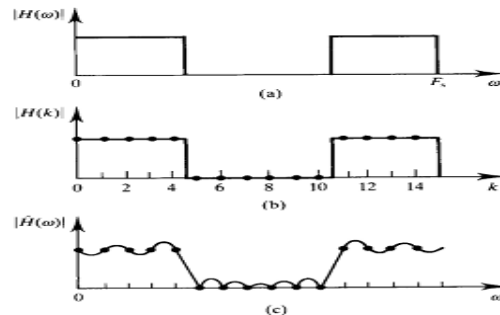
Cálculo en Matlab:

```
n=-36:36;  
f1=0.275;  
f2=0.125;  
B=5.65;  
hd = 2*f1*sinc(2*n*f1) - 2*f2*sinc(2*n*f2);  
w = window(@kaiser,73,5.65);  
h=hd.*w';  
[Hf,w]=freqz(h,1,128);  
subplot(2,1,1);  
plot(w/(2*pi),20*log10(abs(Hf)));grid on;  
subplot(2,1,2);  
plot(w/(2*pi),unwrap(angle(Hf)));grid on;
```



Método del muestreo en frecuencia.

Vamos a definir la respuesta en frecuencia de un filtro a partir de fijar N puntos de $H(\omega)$. Para mayor simplicidad, supongamos que los puntos escogidos están uniformemente distribuidos por todo el espectro digital. Podemos obtener $h(n)$ a partir de la Transformada de Fourier inversa de $\{H(k)\}$, versión muestreada de la $H(\omega)$.



Veamos con detalle el diseño de un filtro de tipo I.

$$h(n) = \text{IDFT}\{H(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N-1} A(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \right\}$$

haciendo el cambio en el índice del segundo sumatorio con $k' = N - k$, obtenemos:

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{k'=1}^{\frac{N-1}{2}} A(N - k') \cdot e^{-j2\pi \frac{k'}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \cdot e^{j2\pi \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \right\}$$

como $A(k)$ es simétrico respecto al punto medio ($\omega=\pi$):

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{N-1} A(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} + \sum_{k'=1}^{N-1} A(k') \cdot e^{-j2\pi \frac{k'}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{N-1} A(k) \cdot \left[e^{j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} + e^{-j2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} \right] \right\}$$

con lo que:

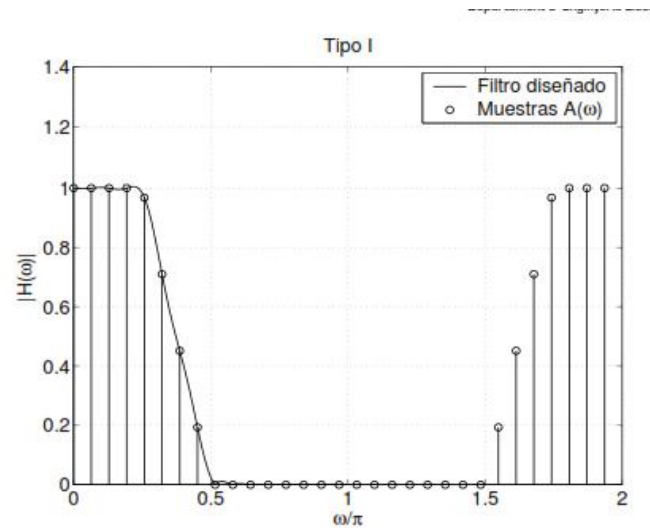
$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{N-1} 2 \cdot A(k) \cdot \cos \left[2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\}$$

Con este método de diseño, obtenemos un filtro cuya respuesta en frecuencia pasa por los puntos fijados, sin embargo, en principio no controlamos el resto de los valores de la respuesta. Veamos la transformada Z del filtro definido para interpretar el método del muestreo uniforme en frecuencia desde otro punto de vista:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{N-1} h(r) \cdot z^{-r} = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kr} \right] \cdot z^{-r} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \sum_{r=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1} \right]^{-r} =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{1 - \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1} \right]^N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} \cdot z^{-1}}$$

La expresión de $H(z)$ nos indica que ésta se puede expresar como una descomposición en cascada de dos filtros. A su vez el segundo filtro esta expresado como una descomposición en paralelo que tendrá tantos términos como valores no nulos tenga $H(k)$. Si se trata de filtros en los que la banda de paso es estrecha, el número de muestras no nulas será pequeño por lo que esta estructura será más eficiente que estructuras directas. La desventaja es que se pueden originar inestabilidades si por efectos de redondeo la cancelación polo-cero no es exacta, ya que estamos implementando este filtro **FIR de forma recursiva**.



Optimizando la respuesta en amplitud: *muestras en la banda de transición*

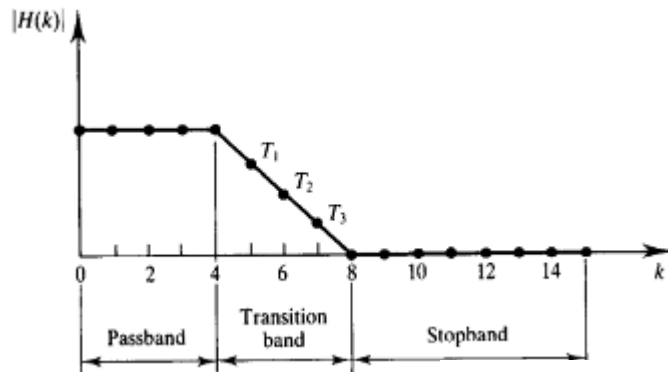


Table 6.11 Optimum transition band frequency samples for type 1 lowpass frequency sampling filters for $N = 15$ (adapted from Rabiner *et al.*, 1970).

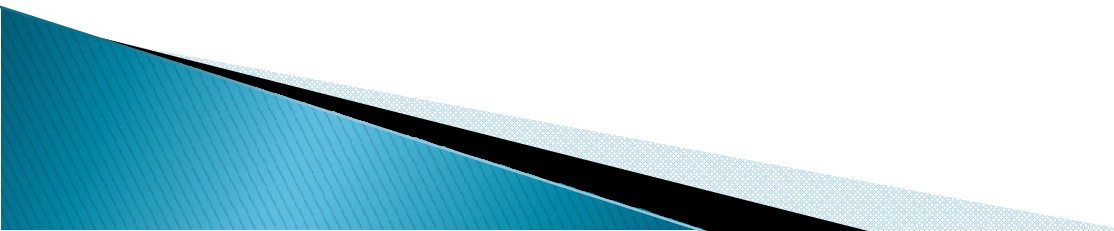
BW	Stopband attenuation (dB)	T_1	T_2	T_3
<i>One transition band frequency sample, $N = 15$</i>				
1	42.309 322 83	0.433 782 96		
2	41.262 992 86	0.417 938 23		
3	41.253 337 86	0.410 473 63		
4	41.949 077 13	0.404 058 84		
5	44.371 245 38	0.392 681 89		
6	56.014 165 88	0.357 665 25		
<i>Two transition band frequency samples, $N = 15$</i>				
1	70.605 405 85	0.095 001 22	0.589 954 18	
2	69.261 681 56	0.103 198 24	0.593 571 18	
3	69.919 734 95	0.100 836 18	0.589 432 70	
4	75.511 722 56	0.084 074 93	0.557 153 12	
5	103.460 783 00	0.051 802 06	0.499 174 24	
<i>Three transition band frequency samples, $N = 15$</i>				
1	94.611 661 91	0.014 550 78	0.184 578 82	0.668 976 13
2	104.998 130 80	0.010 009 77	0.173 607 13	0.659 515 26
3	114.907 193 18	0.008 734 13	0.163 973 10	0.647 112 64
4	157.292 575 84	0.003 787 99	0.123 939 63	0.601 811 54

BW refers to the number of frequency samples in the passband.

Características del filtro diseñado:

- El error de aproximación (diferencia entre el filtro ideal y el diseñado) es cero en las frecuencias muestreadas.
- El error de aproximación en el resto de frecuencias depende de la respuesta ideal. Las transiciones bruscas en la respuesta en frecuencia implican mayores errores.
- El error es mayor en los límites de las bandas y menor dentro de ellas.

COMPARACIÓN ENTRE FILTROS FIR E IIR

- **FUNCIÓN DE SISTEMA:** en un FIR son del tipo sólo ceros, ya que todos los polos se encuentran en el origen, (salvo si se emplean diseños de muestreo en frecuencia). Los sistemas IIR pueden tener sus polos y sus ceros en cualquier punto finito del plano z , lo que proporciona mayor flexibilidad en el diseño de filtros sencillos (método de ubicación de polos y ceros).
 - **MÓDULO DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA:** se puede conseguir cualquier distribución de bandas con cualquiera de los dos tipos de filtros. Sin embargo, hay algunas características de amplitud, como la requerida en los sistemas diferenciadores, que se realiza mejor con un sistema FIR. Sin embargo, los filtros paso-todo sólo se pueden realizar con sistemas IIR, ya que los FIR tienen todos sus polos en el origen.
 - **FASE DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA:** los sistemas FIR pueden conseguir una característica de fase exactamente lineal, mientras que los IIR sólo se pueden aproximar a ella a costa de un gran aumento de la complejidad.
 - **ESTABILIDAD:** los filtros FIR realizados de forma no recursiva son intrínsecamente estables, mientras que los IIR sólo serán estables (y causales simultáneamente) si todos sus polos están en el interior de la circunferencia unidad.
- 

- **DIFICULTAD EN EL DISEÑO:** los cálculos necesarios para diseñar un filtro FIR suelen exigir aproximaciones iterativas, mientras que los sistemas IIR suelen diseñarse con fórmulas cerradas y transformaciones sencillas como la bilineal.
- **ESTRUCTURAS:** los sistemas FIR admiten realizaciones recursivas y no recursivas. Se puede reducir el número de multiplicaciones si se emplean estructuras de fase lineal. Sin embargo, los sistemas IIR sólo pueden realizarse con estructuras recursivas. Lo más usual es utilizar estructuras en cascada de secciones de primer o segundo orden, por lo que una parte importante del diseño consiste en distribuir los polos y los ceros en distintas secciones y elegir el orden de conexión de las mismas.
- **SENSIBILIDAD A LAS INTERFERENCIAS:** la salida de un sistema puede verse afectada por su estado inicial (contenido de la memoria) o por cualquier interferencia de corta duración. Si la realización es no recursiva, lo anterior sólo ocurre durante la longitud de la respuesta al impulso. Sin embargo, en los sistemas IIR la perturbación puede afectar a la señal de salida indefinidamente.
- **ERROR DE CUANTIFICACIÓN:** en los sistemas FIR los efectos de la cuantificación pueden hacerse irrelevantes si se utilizan longitudes de palabra a partir de doce bits. Cuando estos filtros se realizan de forma recursiva debe conseguirse una cancelación exacta de polos y ceros después de la cuantificación, y esto obliga a aumentar la longitud de palabra. Para sistemas IIR la cuantificación no sólo afecta a la respuesta en frecuencia sino que puede desplazar los polos fuera de la circunferencia unidad del plano z , y hacer que el sistema no pueda ser simultáneamente causal y estable. También, debido a la cuantificación pueden producirse oscilaciones indeseadas en la salida a causa del desbordamiento o de los ciclos límite.
- **MEMORIA:** los filtros FIR necesitan mucha memoria para almacenar la muestra actual y las anteriores de la señal de entrada, así como los coeficientes del filtro. Este inconveniente se va reduciendo con el abaratamiento y el aumento de la escala de integración de las memorias. Los filtros IIR necesitan menos registros de almacenamiento, ya que el número de coeficientes es menor que el equivalente FIR.
- **EFICIENCIA:** A pesar de que los sistemas IIR tienen menor número de coeficientes que sus equivalentes FIR, puede ocurrir que el sistema FIR emplee menos tiempo para calcular la salida que el IIR. La razón es la regularidad en las operaciones que se realizan en un filtro no recursivo, comparada con la irregularidad necesaria para un sistema recursivo.