

# Técnicas avanzadas de tratamiento de señal: aplicaciones biomédicas

---

Juan Pablo Martínez Cortés

## Análisis tiempo-frecuencia: La STFT y la transformada Wavelet

# Análisis de señales no estacionarias

- El análisis de Fourier permite descomponer una señal en sus componentes frecuenciales

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

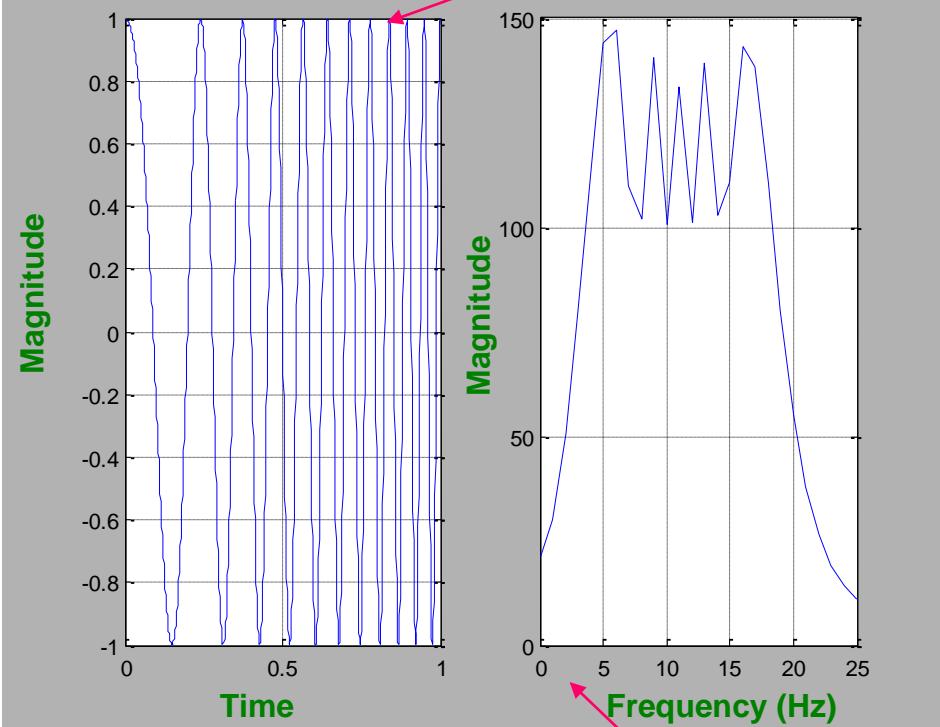
- Exponenciales complejas → señales estacionarias
- El análisis de Fourier es adecuado para señales estacionarias.
- Lo mismo podemos decir para señales discretas
- ¿Qué pasa con las señales no estacionarias?

# Análisis de señales no estacionarias

- Frequencia: 2 Hz a 20 Hz

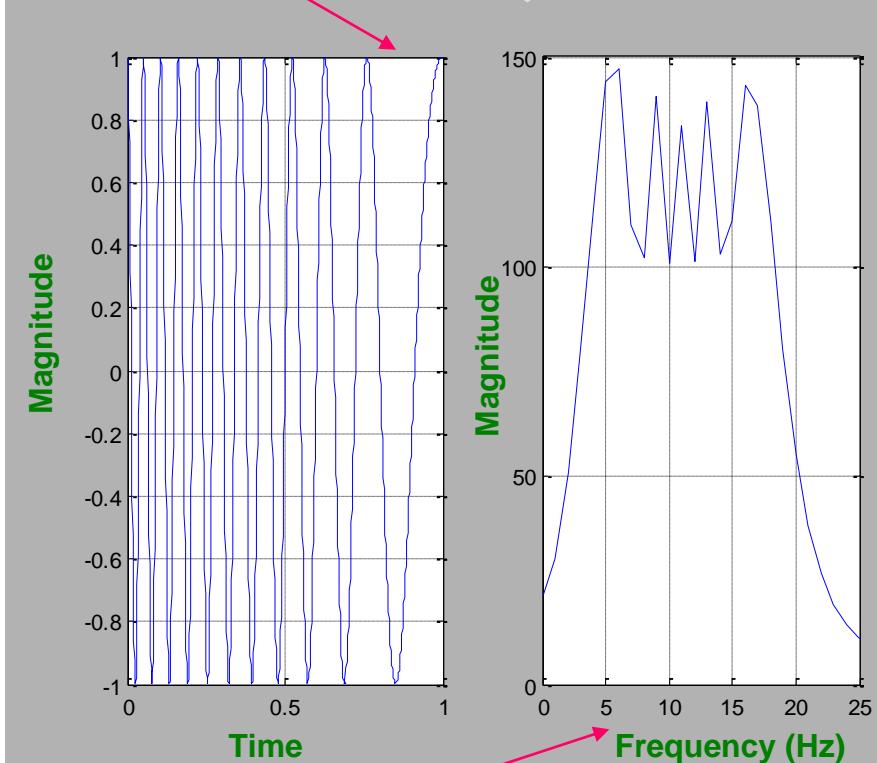


Iguales en tiempo



Iguales en frecuencia

- Frequencia: 20 Hz a 2 Hz



¿Cuándo aparece cada frecuencia? La TF no lo puede decir

# Transformada de Fourier localizada (STFT)

## □ Short-time Fourier transform

- Se calcula la transformada de Fourier de la señal multiplicada por una ventana que es  $\neq 0$  sólo en un corto espacio de tiempo. Trasladando la ventana obtenemos la descomposición 2D

$$\text{STFT}\{x(t)\} = X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j2\pi ft}dt$$

- $w(t)$  es una ventana centrada en cero.
- Puede verse como producto escalar con  $w(t - \tau)e^{-j2\pi ft}$
- La STFT es adecuada para analizar señales con componentes transitorias (no estacionarias)
- Para señales discretas, definimos la STFT

$$\text{STFT}\{x(n)\} = X(m, f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n - m)e^{-j2\pi fn}dt$$

- La variable  $f$  también suele discretizarse → DSTFT

# Short-Term Fourier Transform

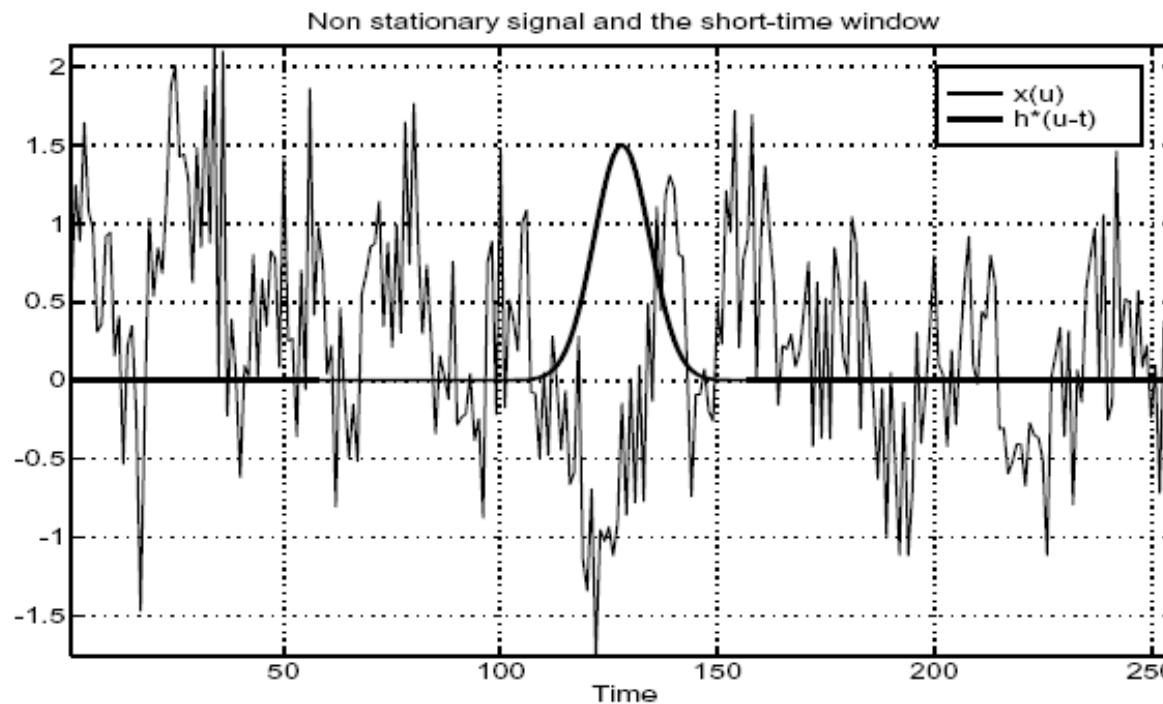
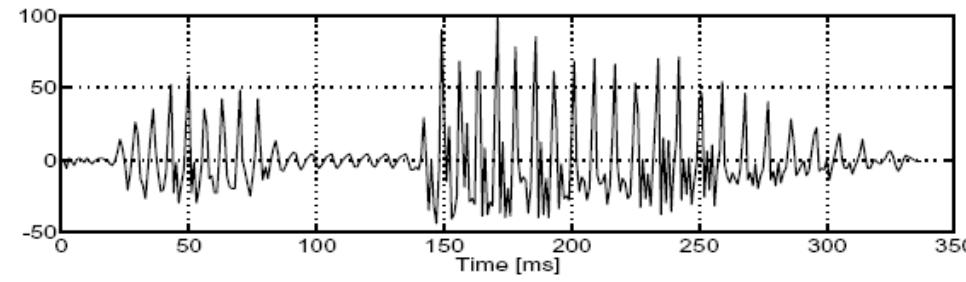
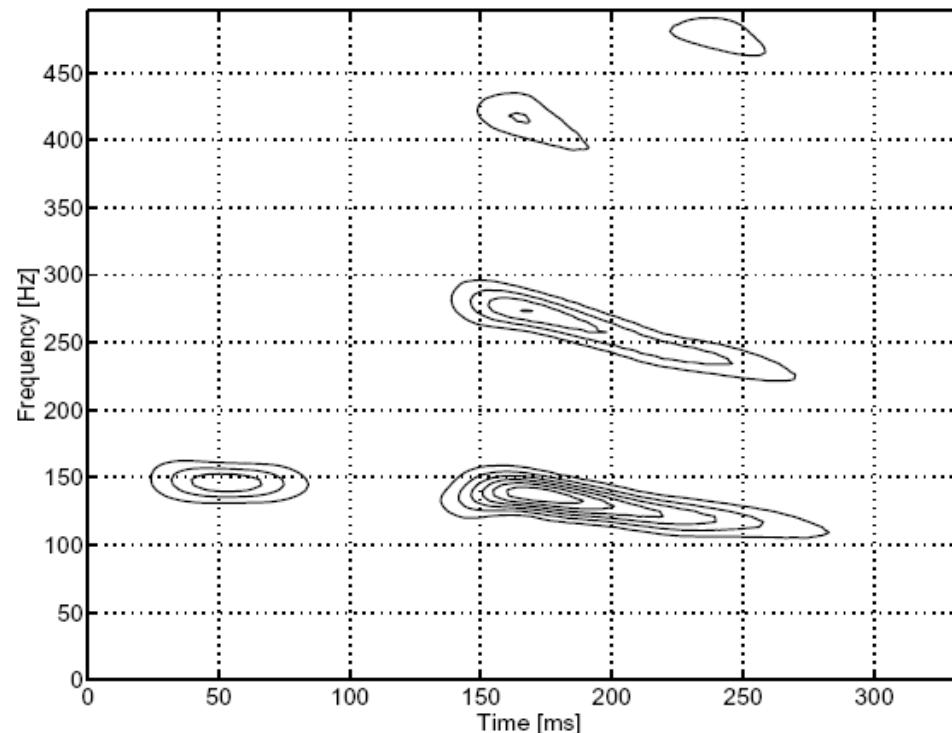


Figure 3.1: non-stationary signal  $x(u)$  and the short-time window  $h^*(u - t)$  centered at time  $t$



Squared modulus of the STFT of the word GABOR



# Transformada de Fourier localizada (STFT)

- Inverse Short-time Fourier transform

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, f) e^{j2\pi ft} d\tau df$$

- Espectrograma, método de análisis espectral

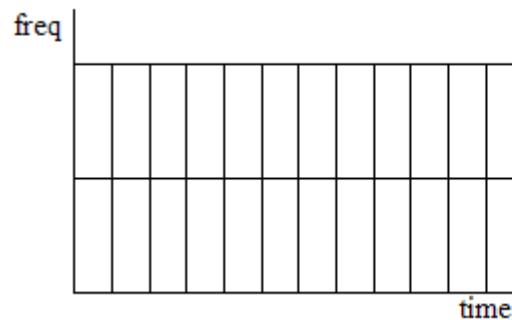
$$|X(\tau, f)|^2$$

- La anchura de la ventana determina la resolución temporal y frecuencial.
  - Ventana estrecha → resol. temp. " resol. freq. +
  - Ventana ancha → resol. temp. + Resol. freq. "

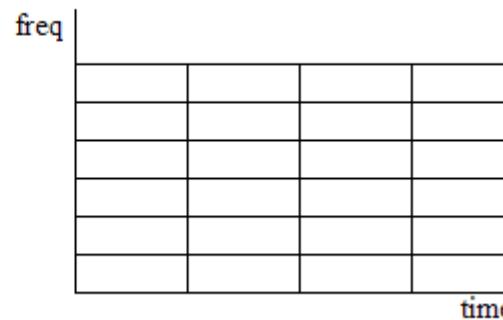
Compromiso entre resolución frecuencial y temporal

# Transformada de Fourier localizada (STFT)

- Representación de la resolución tiempo-frecuencia



Ventana estrecha

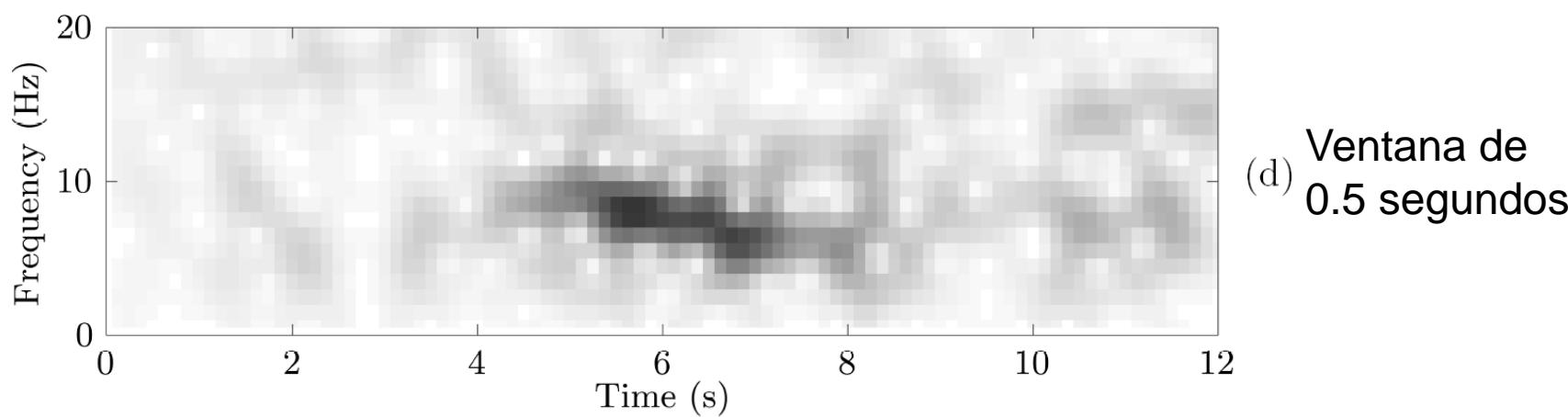
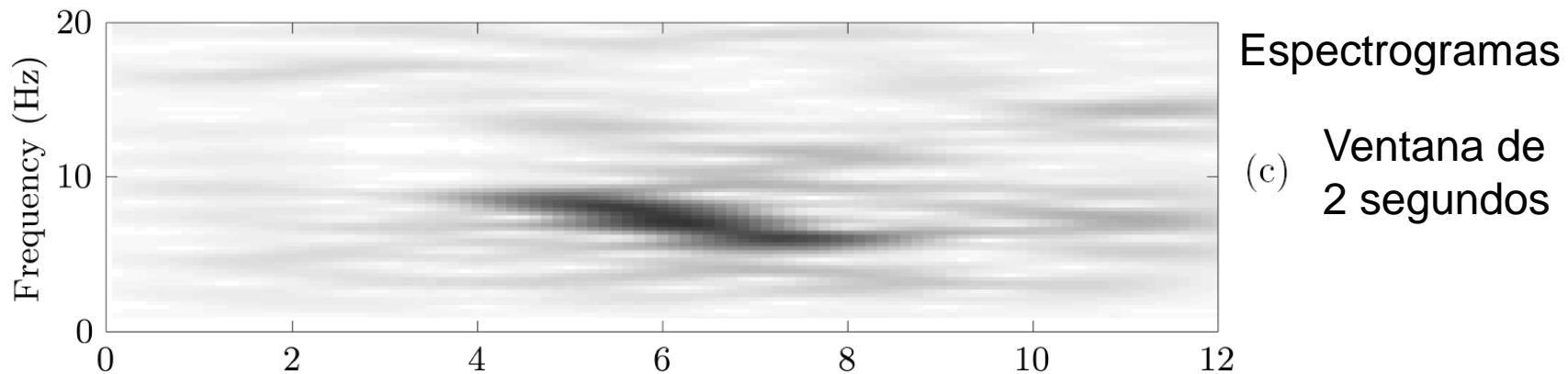
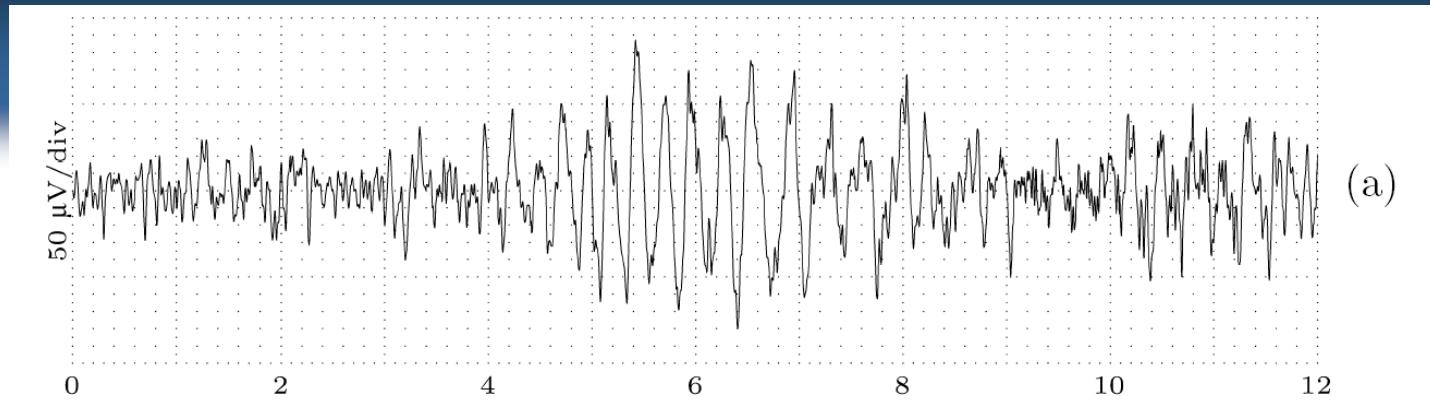


Ventana ancha

- El principio de incertidumbre impide mejorar la resolución en una dimensión si no es a costa de la otra

$$\Delta\tau\Delta f \geq \frac{1}{2}$$

- La mejor resolución frecuencial → FT (se pierde información temporal)



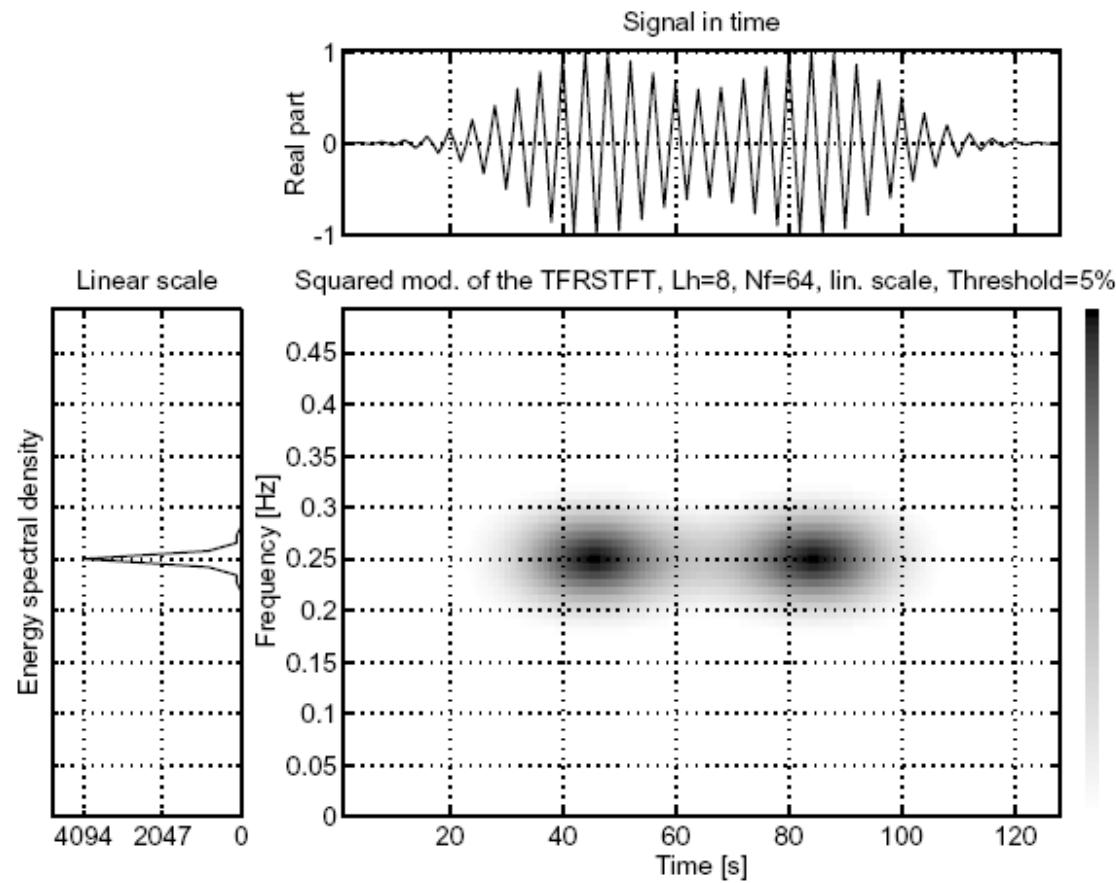


Figure 3.8: Same gaussian atoms analyzed by the STFT using a Hamming window  $h$  of 17 points : frequency resolution is poorer, but the two components can be easily distinguished

# Transformada de Fourier localizada (STFT)

La STFT también puede verse como

- Un banco de filtros, de forma que

$$X(n, f_0) = e^{-j2\pi f_0 n} (x(n) * w(n)) e^{-j2\pi f_0 n}$$

- Una expansión como combinación lineal de una base compuesta por versiones de la ventana de análisis trasladadas en frecuencia y en tiempo (átomos)
- En este caso, los coeficientes pueden verse como la correlación entre la señal y el átomo correspondiente

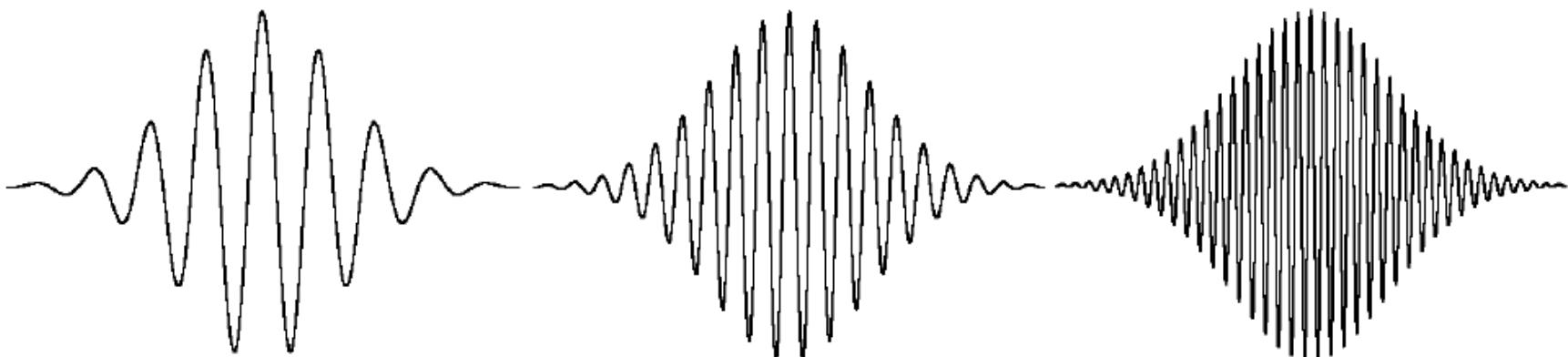


Figure 2 – Real parts of three different filters associated to STFT.

# Análisis de señales no estacionarias

- La STFT nos da la misma resolución temporal para cualquier frecuencia.
- En muchas señales reales interesa tener una buena resolución temporal para eventos de alta frecuencia, y buena resolución frecuencial para eventos de baja frecuencia.
  - Los eventos de alta frecuencia pueden ser rápidos, mientras que los de baja frecuencia son lentos por naturaleza
  - Una misma resolución  $\Delta f$  puede ser aceptable a altas frecuencias, y demasiado pobre a bajas frecuencias.
- El análisis mediante wavelets se ajusta a estos requisitos.

# ¿Qué son las wavelets?

- Son funciones oscilatorias concentradas en tiempo que permiten un análisis de señales transitorias.
- Se obtienen mediante el escalado temporal (dilatación) y traslación de una wavelet prototipo

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

- Permiten analizar las señales a diferentes escalas → análisis multirresolución.

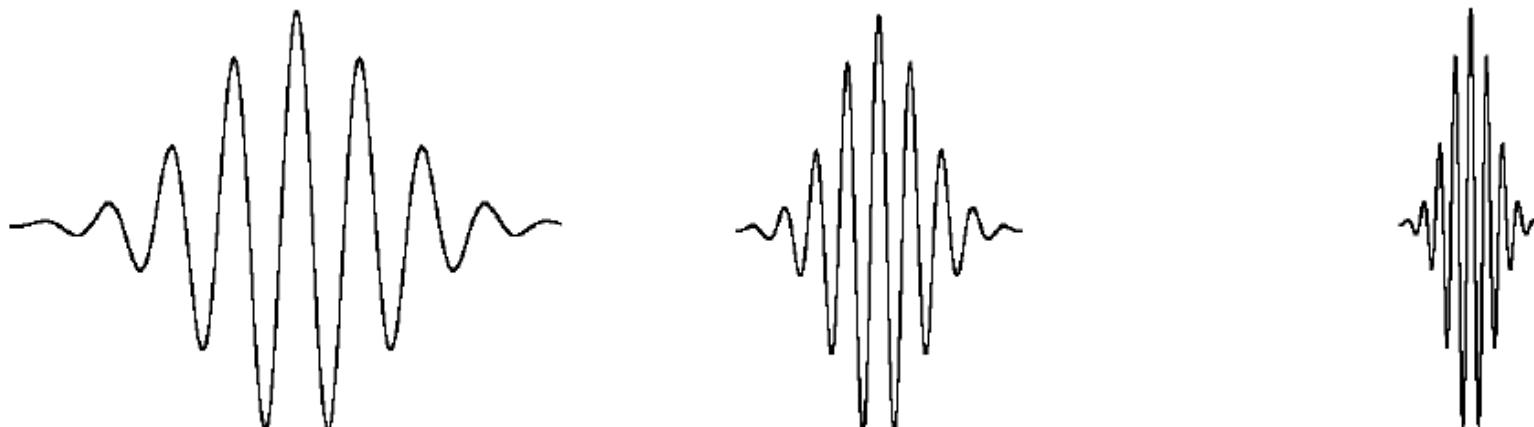
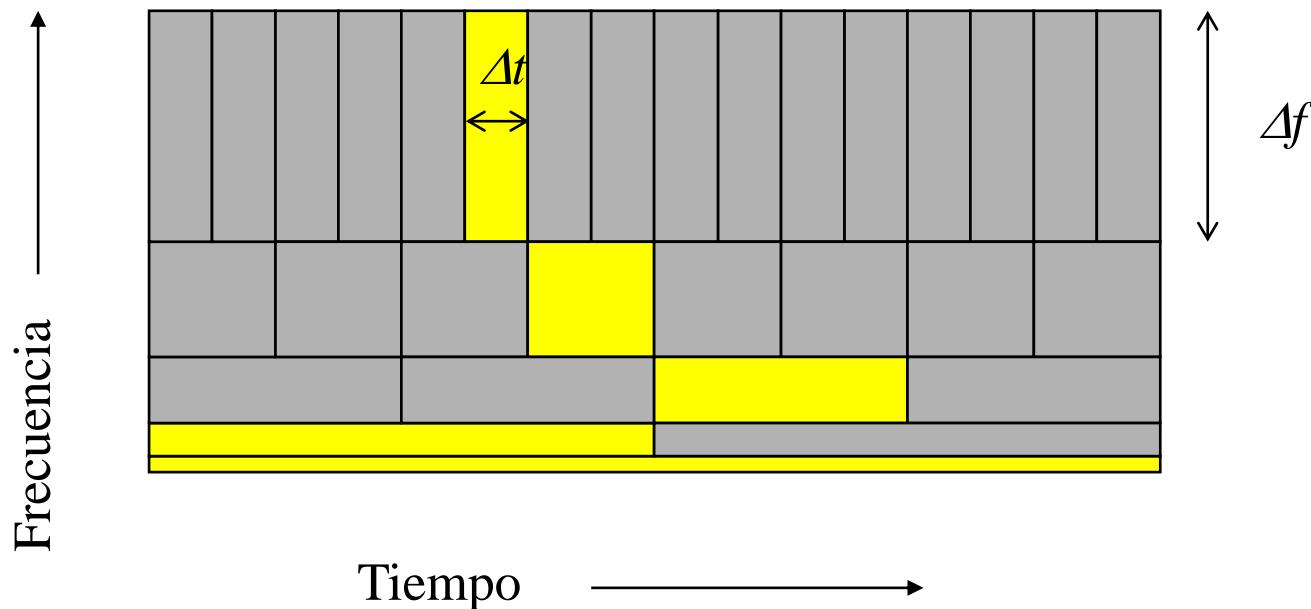


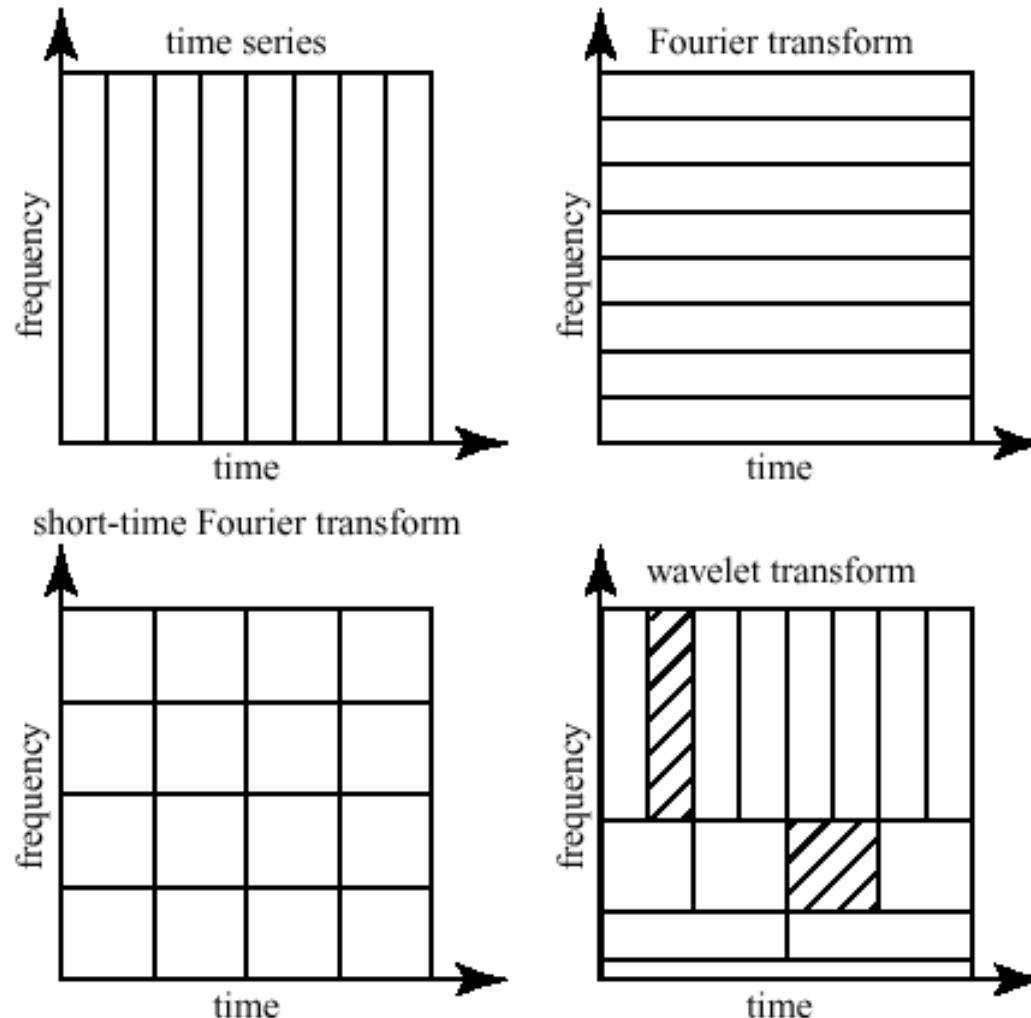
Figure 4 - Three different wavelets with different frequencies and time duration's.

# ¿Qué son las wavelets?

- Al disminuir el parámetro de escala  $s$ , aumenta la frecuencia que se analizar, pero también disminuye la duración de la wavelet.
- Se consigue así una resolución frecuencial mejor para frecuencias altas y una resolución temporal mejor para frecuencias bajas.



# Fourier vs wavelets: Resol. tiempo-frecuencia



From [http://www.cerm.unifi.it/EUcourse2001/Gunther\\_lecturenotes.pdf](http://www.cerm.unifi.it/EUcourse2001/Gunther_lecturenotes.pdf), p.10

# Transformada wavelet continua (CWT)

- La CWT de una señal continua se define como la correlación entre  $x(t)$  y la versión escalada y trasladada de la wavelet  $\psi(t)$

$$w(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t - \tau}{s} \right) dt$$

- Es un mapeo bidimensional al dominio tiempo-escala
- La CWT para una escala  $s$  puede interpretarse como un filtrado, ya que es la convolución entre  $x(t)$  y  $h(t) = \psi(-t/s)/\sqrt(s)$

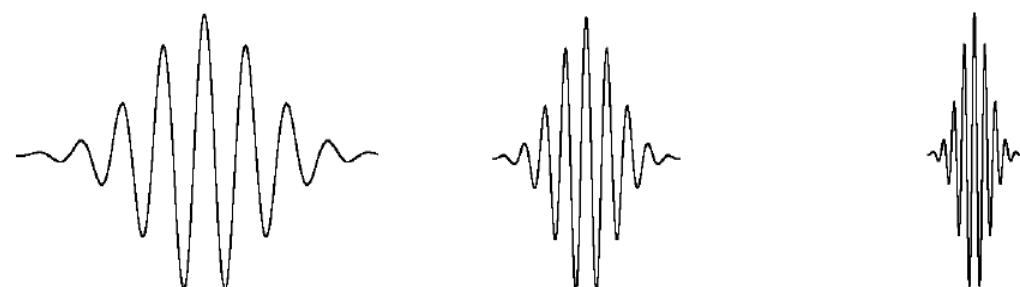
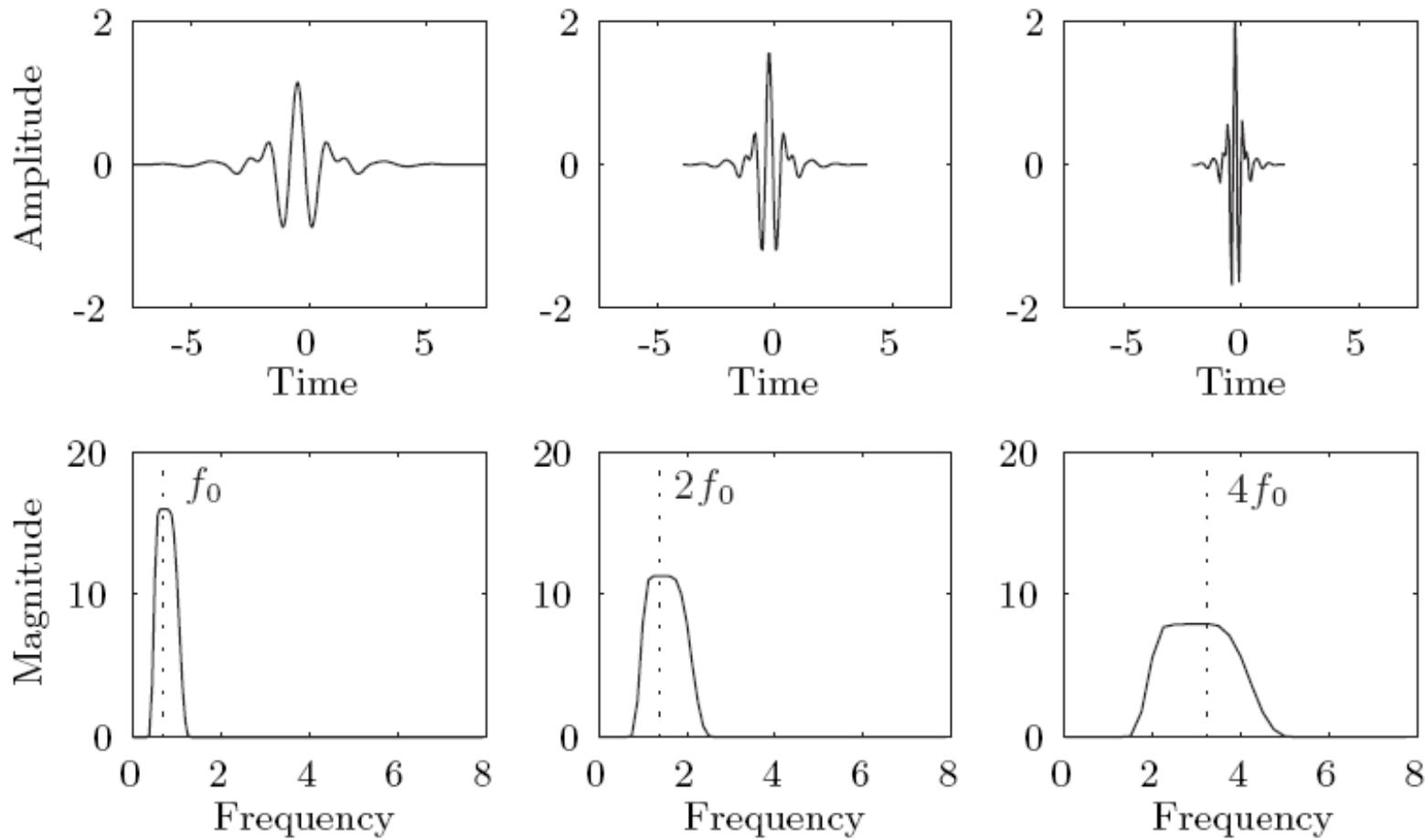


Figure 4 - Three different wavelets with different frequencies and time duration's.

# Transformada wavelet continua (CWT)

## □ Respuestas frecuenciales de los filtros equivalentes



Al estrechar las wavelets, aumenta la frecuencia central y el ancho de banda

# Transformada wavelet continua (CWT)

- La señal original puede recuperarse como

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w(s, \tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t - \tau}{s} \right) \frac{d\tau ds}{s^2}$$

donde

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{|\Omega|} d\Omega < \infty,$$

Ésta es la llamada condición de admisibilidad.  
Para ello, es necesario que se cumpla:

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

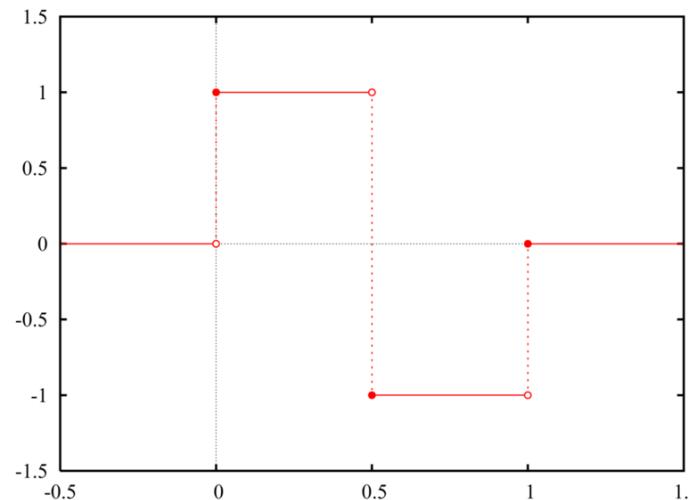
- Es decir, ha de ser una función de media nula, y además debe tender a cero para  $t \rightarrow \pm\infty$
- → se trata de un banco de filtros paso banda

# Transformada wavelet continua (CWT)

- Diversas funciones cumplen las condiciones.
- La wavelet utilizada se elige en función de otras características deseadas (simplicidad, simetría, duración limitada, continuidad, parecido con las señales a analizar)
- Ejemplos de wavelets

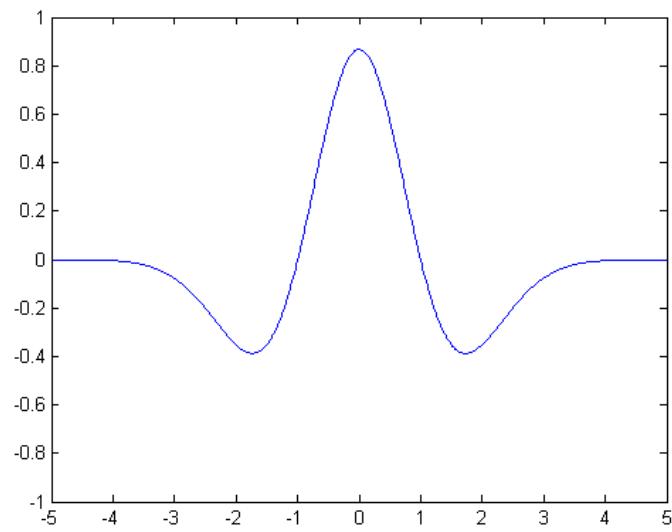
Wavelet de Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$



Sombrero mexicano

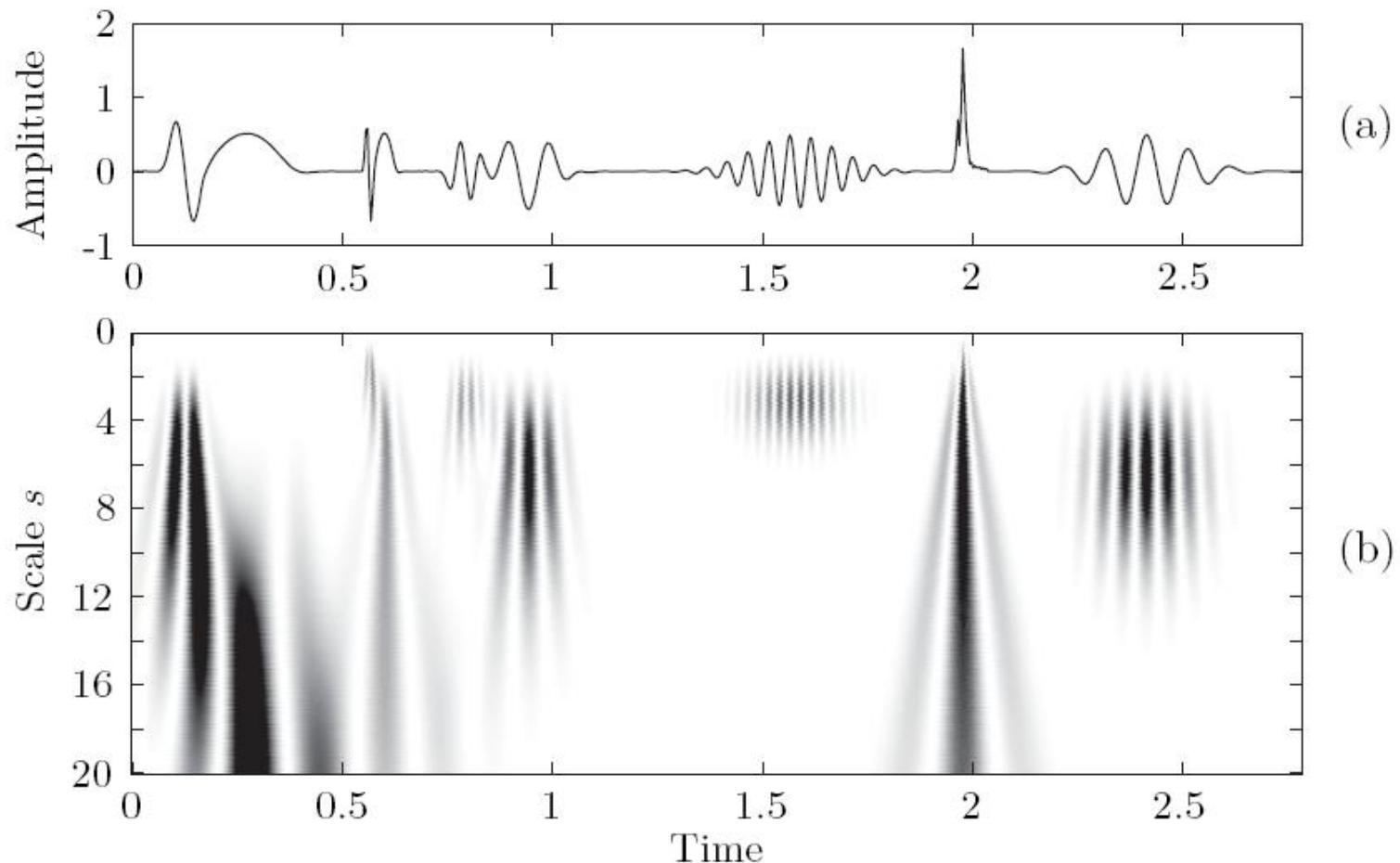
$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2},$$



# Transformada wavelet continua (CWT)

- Puede verse como un método de análisis tiempo-frecuencia.

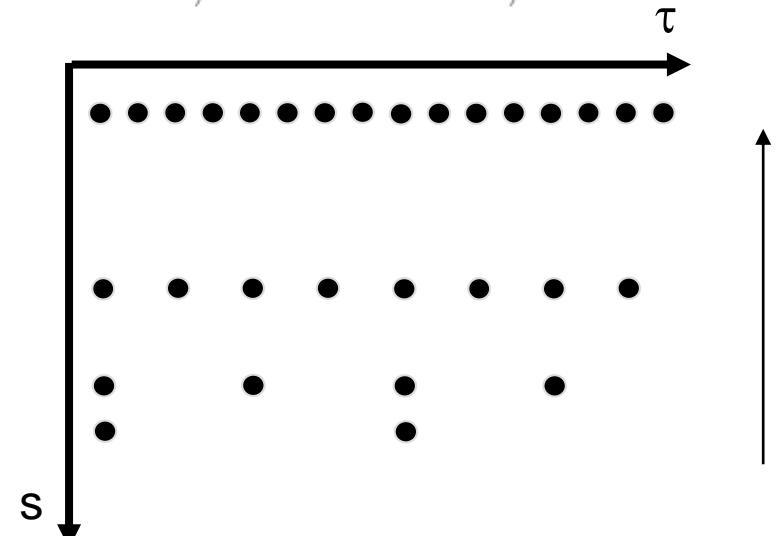
Escalograma  $|w(\tau, s)|^2$



# Discretización de la transformada wavelet

- La CWT es altamente redundante.
- Se discretizan los valores  $\tau$  y  $s$  de acuerdo con una “rejilla” adecuada
- El muestreo más utilizado es el diádico:

$$s = 2^{-j}, \quad \tau = k2^{-j},$$



Rejilla diádica

# Transformada wavelet diádica

- Las wavelets discretizadas son entonces

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

quedando la transformada discreta wavelet (DWT)

$$w_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}(t) dt.$$

No se pierde información de la señal, que se puede recuperar como

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

- Si el muestreo fuese más “grueso”, no podría recuperarse la señal original.

# Análisis multirresolución

- Se trata de una forma de implementar la DWT.
- Sea una señal  $x(t)$ . Buscamos descomponer la señal en sus detalles a las diferentes escalas.
- Para ello, definimos  $x_j(t)$  como una aproximación a  $x(t)$  en la escala  $j$ -ésima, de forma que

$$x_{j+1}(t) = x_j(t) + y_j(t).$$

Donde  $y_j(t)$  contiene los detalles en la escala  $j$ -ésima. A su vez,  $x_j(t)$  puede descomponerse en  $x_{j-1}(t)$  e  $y_{j-1}(t)$ , hasta que tenemos

$$x(t) = x_j(t) + \sum_{l=j}^{\infty} y_l(t).$$

# Análisis multirresolución

- Junto con la función wavelet  $\psi(t)$  se define una función de escalado  $\varphi(t)$  que genera una serie de funciones a partir de su escalado y traslación

$$\varphi_{0,k}(t) = \varphi(t - k),$$



Todas las funciones  
de norma unidad

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$$

- Las funciones de escalado de una misma escala (traslaciones) han de ser ortogonales (no entre distintas escalas)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0,k}(t) \varphi_{0,n}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - k) \varphi(t - n) dt = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

- Las funciones de escalado permiten representar la aproximación a la señal en una escala dada

# Análisis multirresolución

- Por tanto, la función de escalado ha de cumplir la llamada ecuación de refinamiento

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\varphi(n) \varphi_{1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\varphi(n) \varphi(2t - n)$$

- $h_\varphi(n)$  son los “coeficientes de escalado”
- La función de escalada y los coeficientes de escalado son únicos para una wavelet dada.
- Los coeficientes de escalado permiten calcular la transformada wavelet de manera muy sencilla

# Análisis multirresolución

- Descomponiendo los sucesivos subespacios de aproximación, tenemos

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0} \oplus \mathcal{W}_{j_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_j$$

$$x(t) = x_{j_0}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} y_j(t)$$

- La señal de detalle en la escala  $j$ -esima es una c.l. de las funciones base

$$y_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_j(n) \psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_j(n) \psi(2^j t - n)$$

- Donde  $d_j(k)$  son los coeficientes de la descomposición wavelet

$$d_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad \longleftarrow \text{Son los } w_{j,k} \text{ de la DWT}$$

# Análisis multirresolución

- La descomposición en coeficientes wavelets de  $x(t)$  es

- Al igual que las funciones de escalado, las wavelets en la escala  $j$ -ésima pueden expresarse en función de las funciones de escalado de la escala superior

$$\mathcal{W}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$$

- ## Ecuación wavelet

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\psi}(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n)$$

# Análisis multirresolución

- Aunque los  $h_\psi(n)$  son distintos de los  $h_\varphi(n)$  , pueden expresarse en función de ellos para N finito y par

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(N_\varphi - 1 - n) \quad n = 0, \dots, N_\varphi - 1$$

# Análisis multirresolución: un ejemplo

## Funciones de escalado de Haar

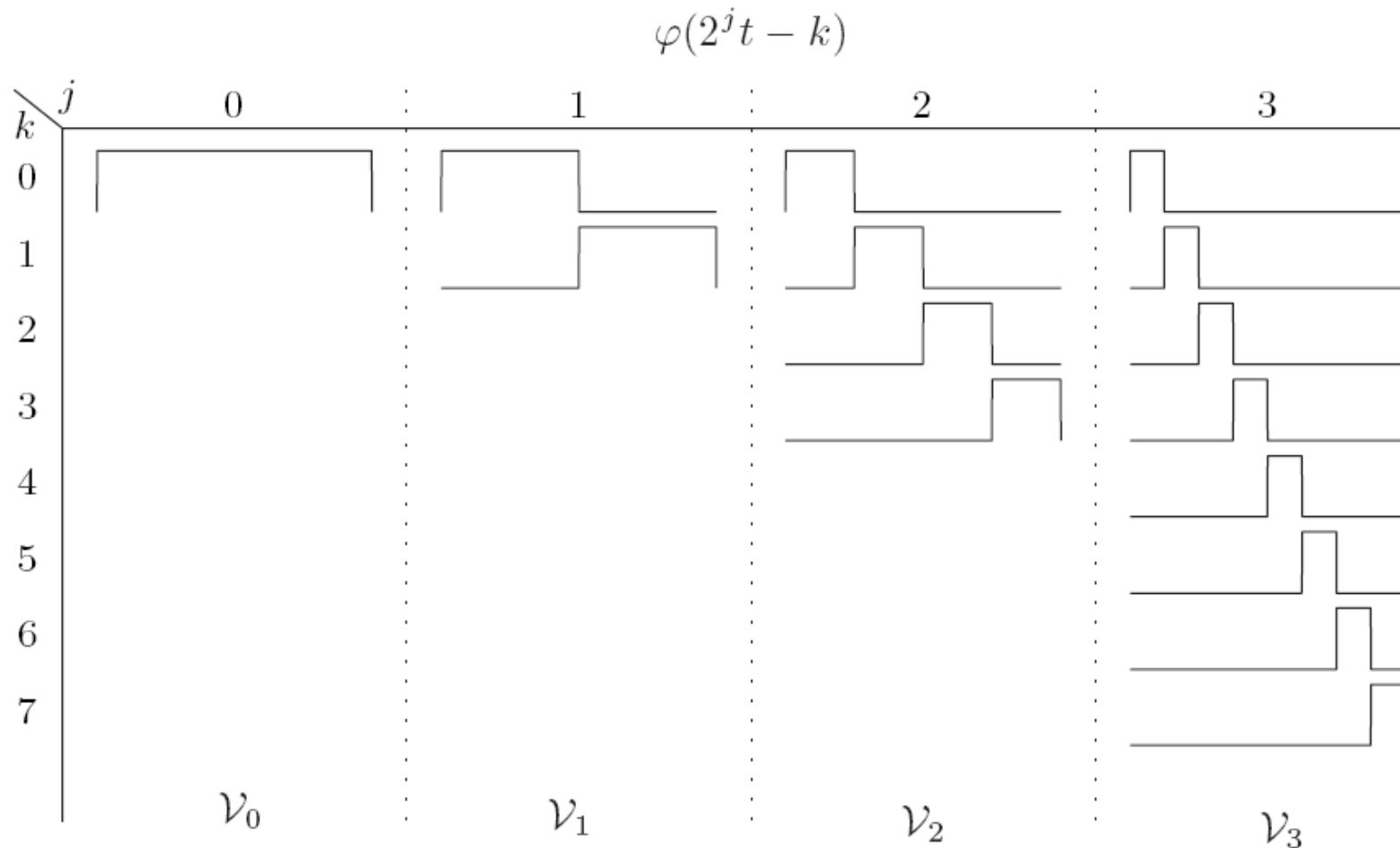
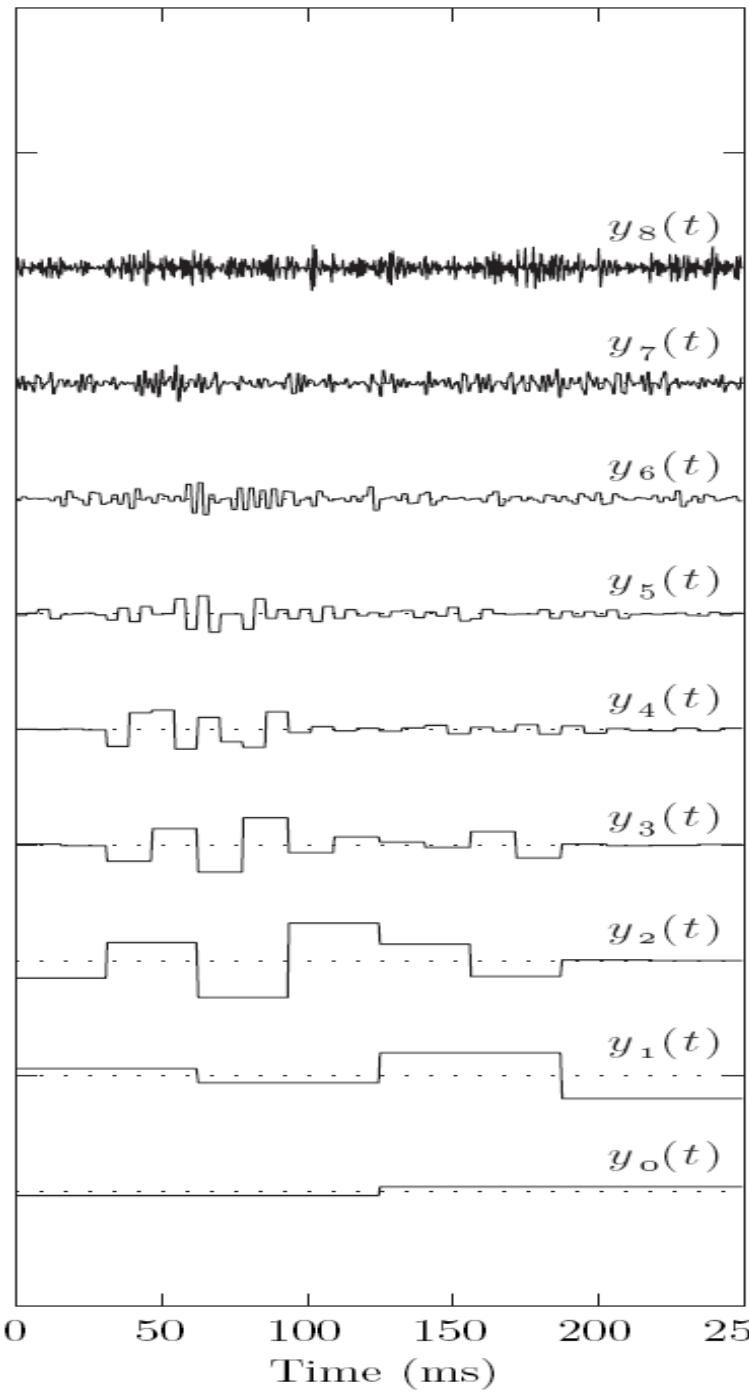
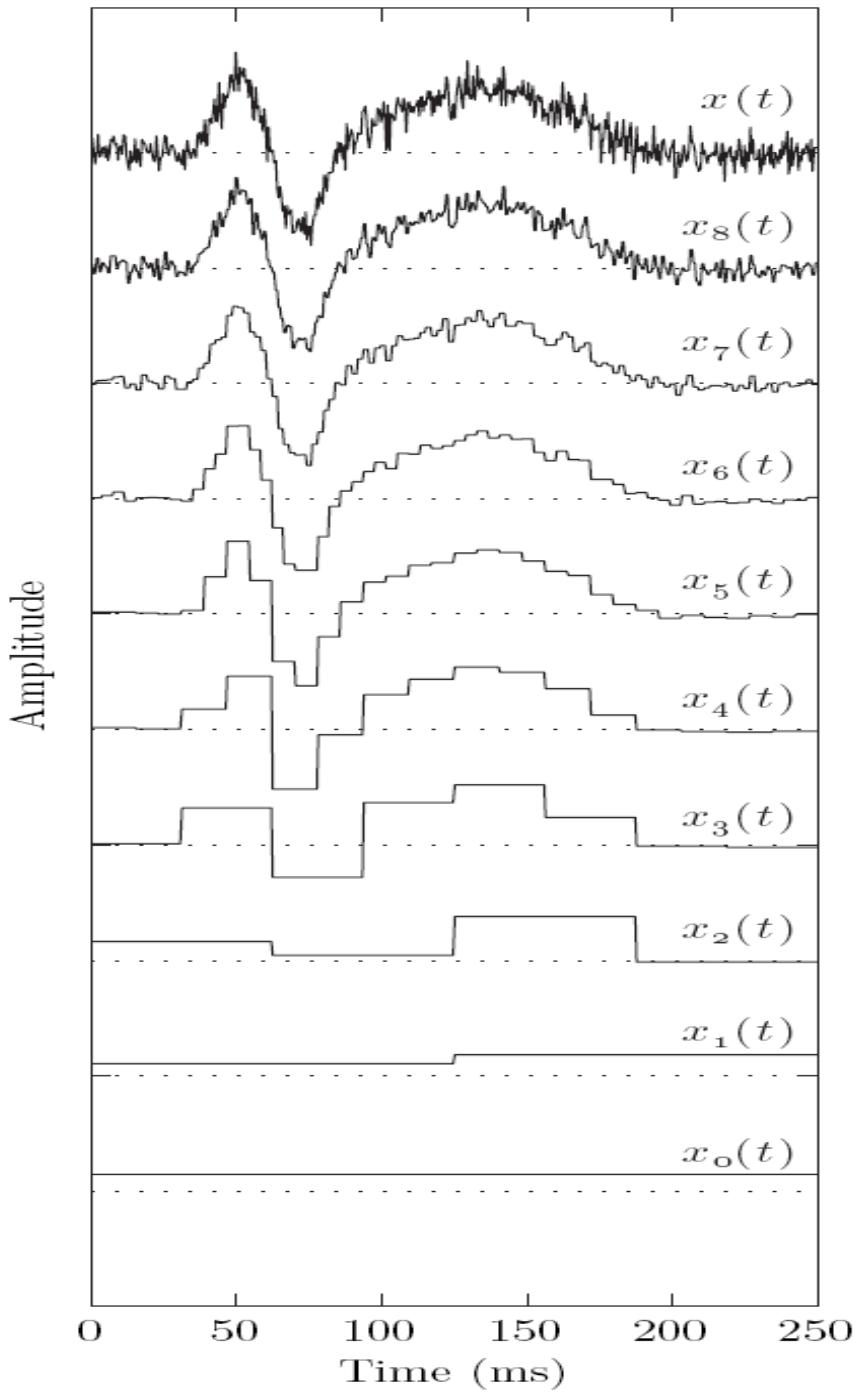
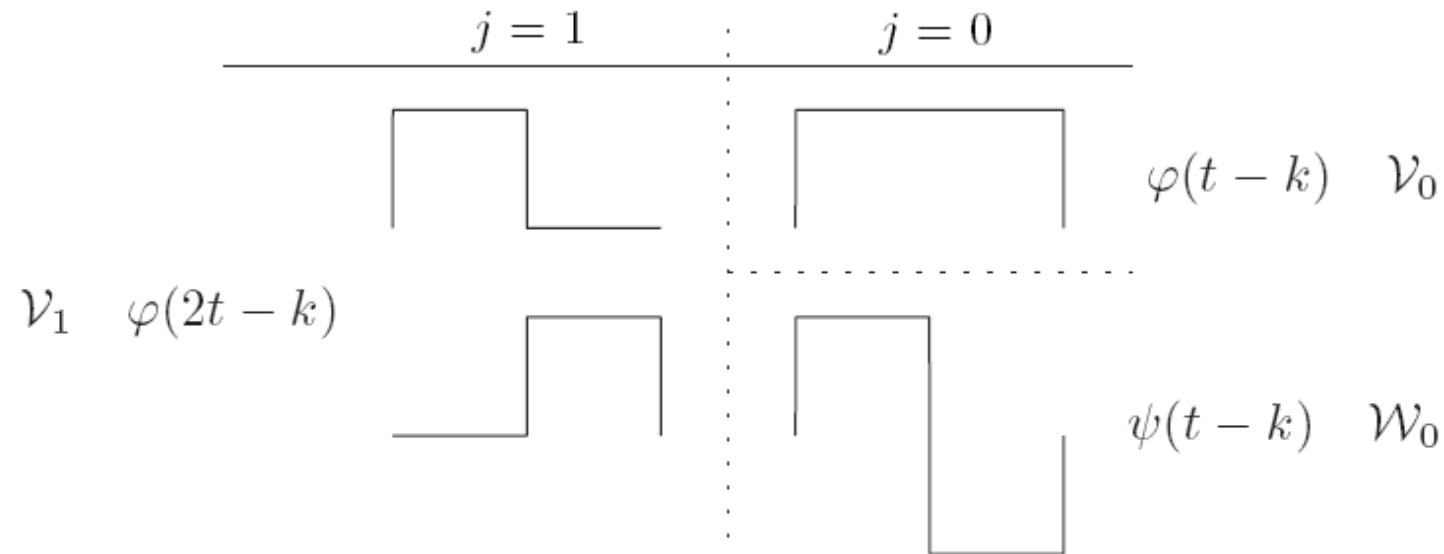


Figure 4.40: The Haar scaling functions that span the subspaces  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ , and  $\mathcal{V}_3$ .



# Análisis multirresolución



**Figure 4.42:** Decomposition of the subspace  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0$  by the Haar scaling and wavelet functions.

# Análisis multirresolución

- Una de las razones de la popularidad de las wavelets es la sencillez de implementación.
- Las ecuaciones de refinamiento y wavelet pueden expresarse de forma más general como

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\varphi}(n - 2k) \varphi_{j+1,n}(t)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_{\psi}(n - 2k) \varphi_{j+1,n}(t)$$

- Calculando la convolución de  $x(t)$  con las funciones de escalado y wavelet, obtenemos que

$$c_j(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\varphi}(n - 2k) c_{j+1}(n) = h_{\varphi}(-n) * c_{j+1}(n)|_{n=2k}$$

$$d_j(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\psi}(n - 2k) c_{j+1}(n) = h_{\psi}(-n) * c_{j+1}(n)|_{n=2k}$$

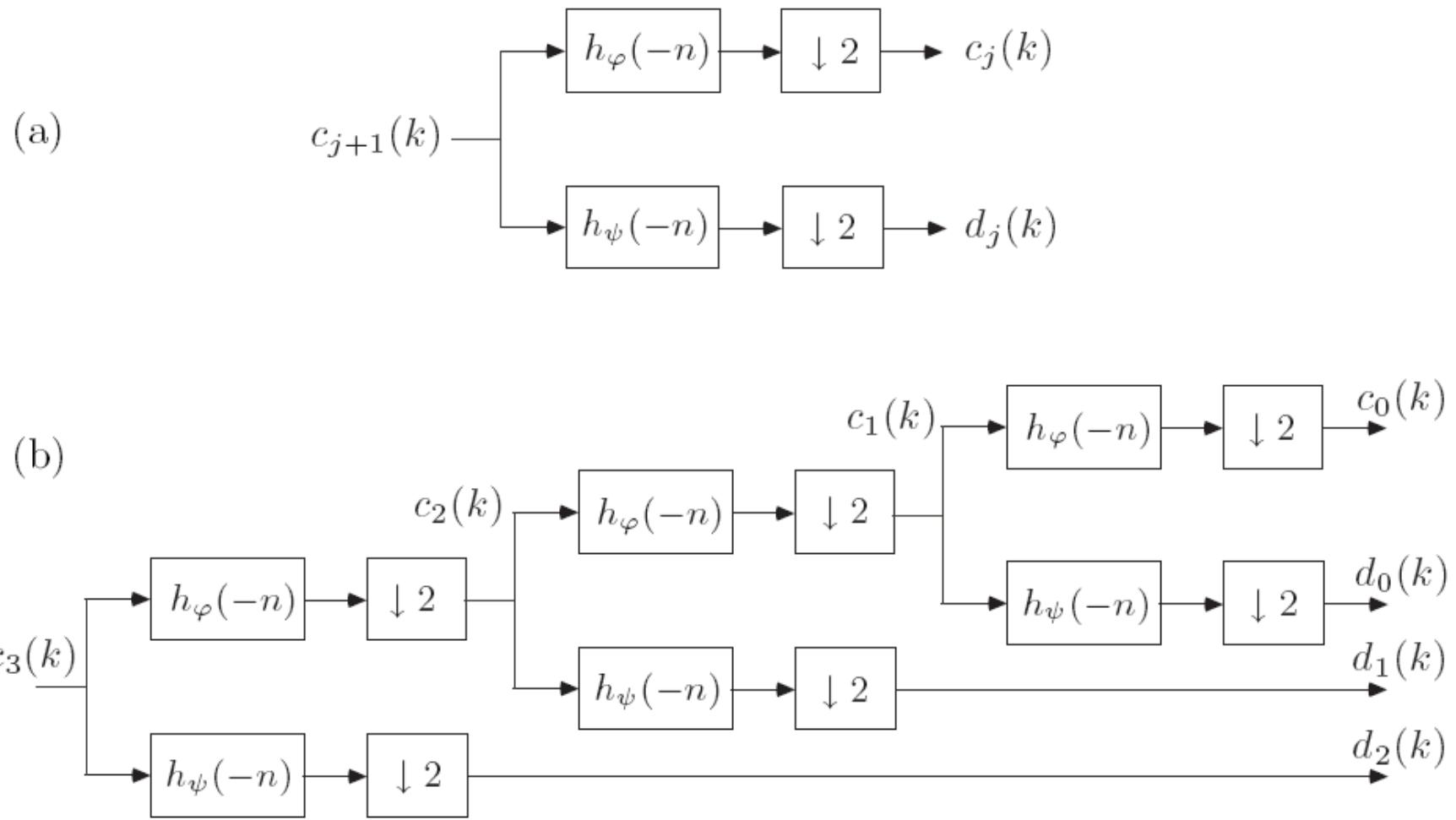
# Análisis multirresolución

- Pueden obtenerse los coeficientes wavelets a partir de un banco de filtros diádico → recuérdese la relación entre los coeficientes

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(N_\varphi - 1 - n) \quad n = 0, \dots, N_\varphi - 1$$

- Las expresiones de la función wavelet y la función de escalado no intervienen en el cálculo, tan sólo los coeficientes de escalado (filtro paso bajo) y coeficientes wavelet (filtro paso alto).
- Ejemplo, Haar wavelet

$$\begin{bmatrix} h_\varphi(0) & h_\varphi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_\psi(0) & h_\psi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



**Figure 4.43:** (a) A two-channel analysis filter bank for calculating the coefficients of the wavelet series expansion in (4.333). (b) The discrete wavelet transform based on the filter bank in (a), which, in this case, produces the coefficients that decompose the space  $\mathcal{V}_3$  into  $\mathcal{V}_0, \mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$ , and  $\mathcal{W}_2$ .

# Análisis multirresolución

- La escala más fina, viene limitada por la frecuencia de muestreo. Llega un momento en que se puede aproximar

$$c_j(k) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - k)dt = x(k)$$

- Las expresiones de la función wavelet y la función de escalado no intervienen en el cálculo, tan sólo los coeficientes de escalado (filtro paso bajo) y coeficientes wavelet (filtro paso alto).
- Ejemplo, Haar wavelet

$$\begin{bmatrix} h_\varphi(0) & h_\varphi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_\psi(0) & h_\psi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

*Scale*

$j = 3$

$c_3(0), c_3(1), c_3(2), c_3(3), c_3(4), c_3(5), c_3(6), c_3(7)$

$j = 2$

$c_2(0), c_2(1), c_2(2), c_2(3) \quad d_2(0), d_2(1), d_2(2), d_2(3)$

$j = 1$

$c_1(0), c_1(1) \quad d_1(0), d_1(1) \quad d_2(0), d_2(1), d_2(2), d_2(3)$

$j = 0$

$c_0(0) \quad d_0(0) \quad d_1(0), d_1(1) \quad d_2(0), d_2(1), d_2(2), d_2(3)$

**Figure 4.44:** Calculation of the DWT for a signal of length  $N = 8$ . The final result is given by the coefficients at the bottom for  $j = 0$ . The vertical arrows indicate that the coefficients are simply copied down from the previous scale. The calculation is initialized by setting the coefficients  $c_3(k)$  equal to the signal samples  $x(k)$ .

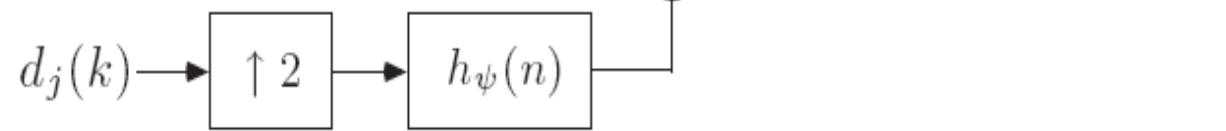
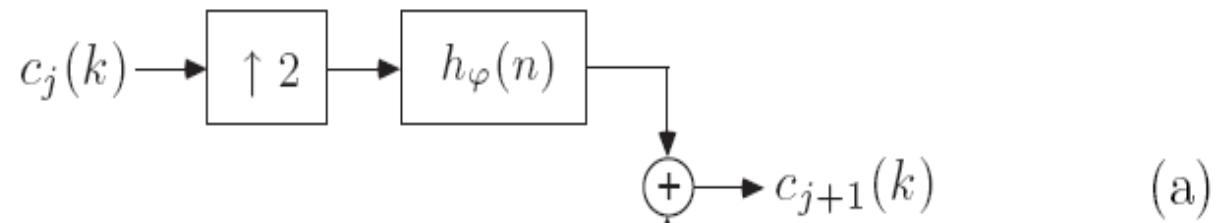
# Análisis multirresolución: reconstrucción

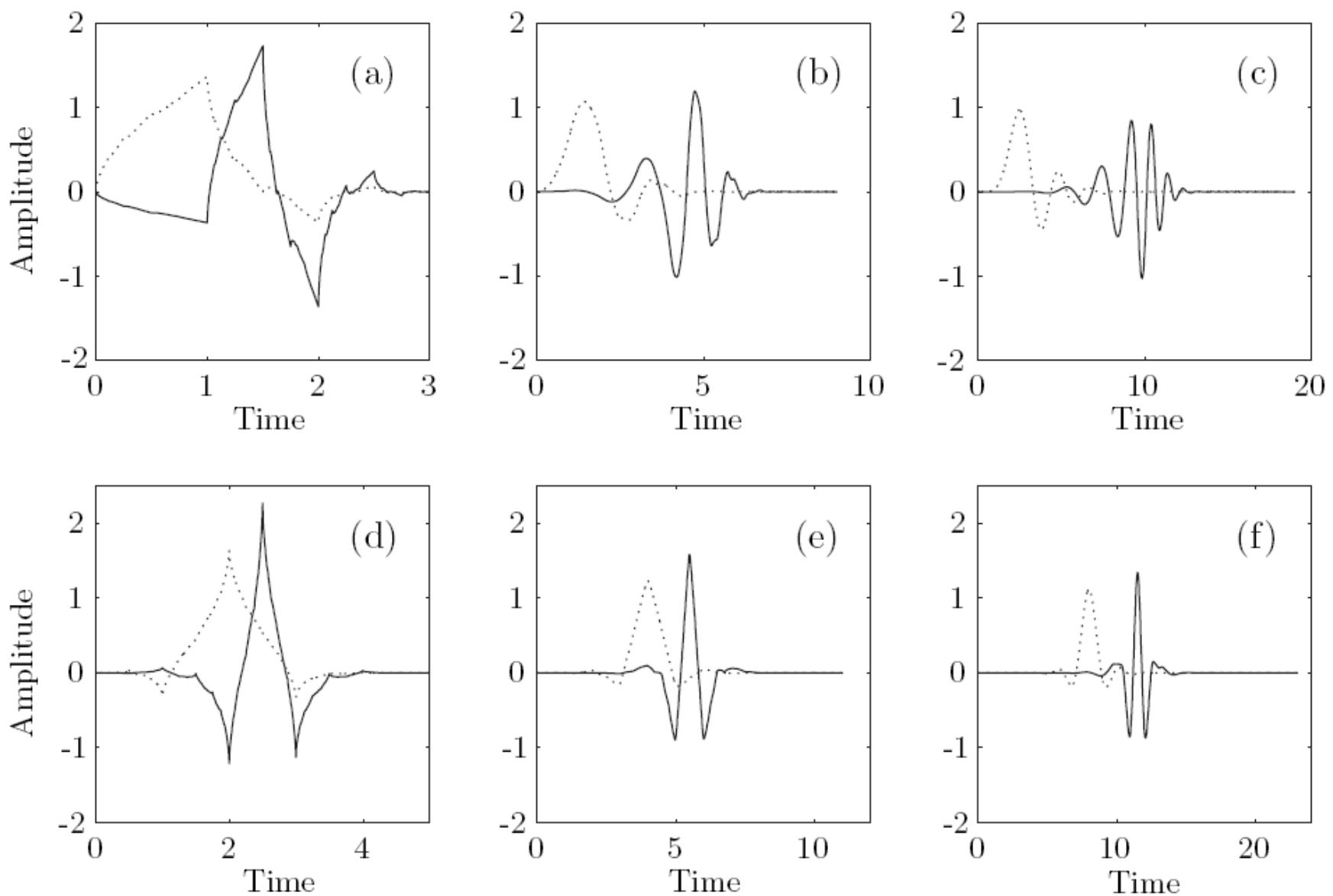
- También podemos plantear la reconstrucción de la señal original a partir de los coeficientes wavelet
- Puede demostrarse que

$$c_{j+1}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_j(n)h_{\varphi}(k - 2n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_j(n)h_{\psi}(k - 2n)$$

$$c_{j+1}(k) = c_j^u(k) * h_{\varphi}(k) + d_j^u(k) * h_{\psi}(k), \quad c_j^u(k) = \begin{cases} c_j(k), & k \text{ even;} \\ 0, & k \text{ odd,} \end{cases}$$

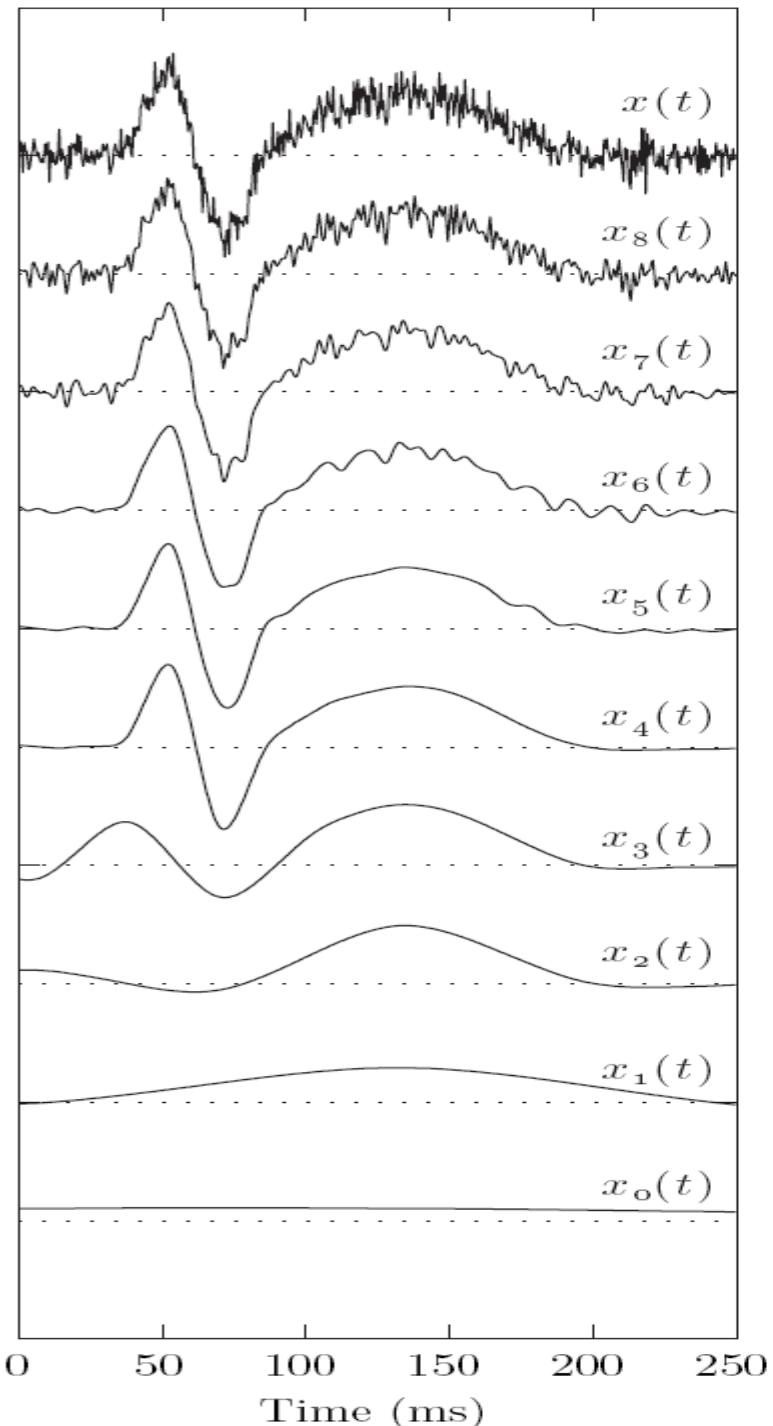
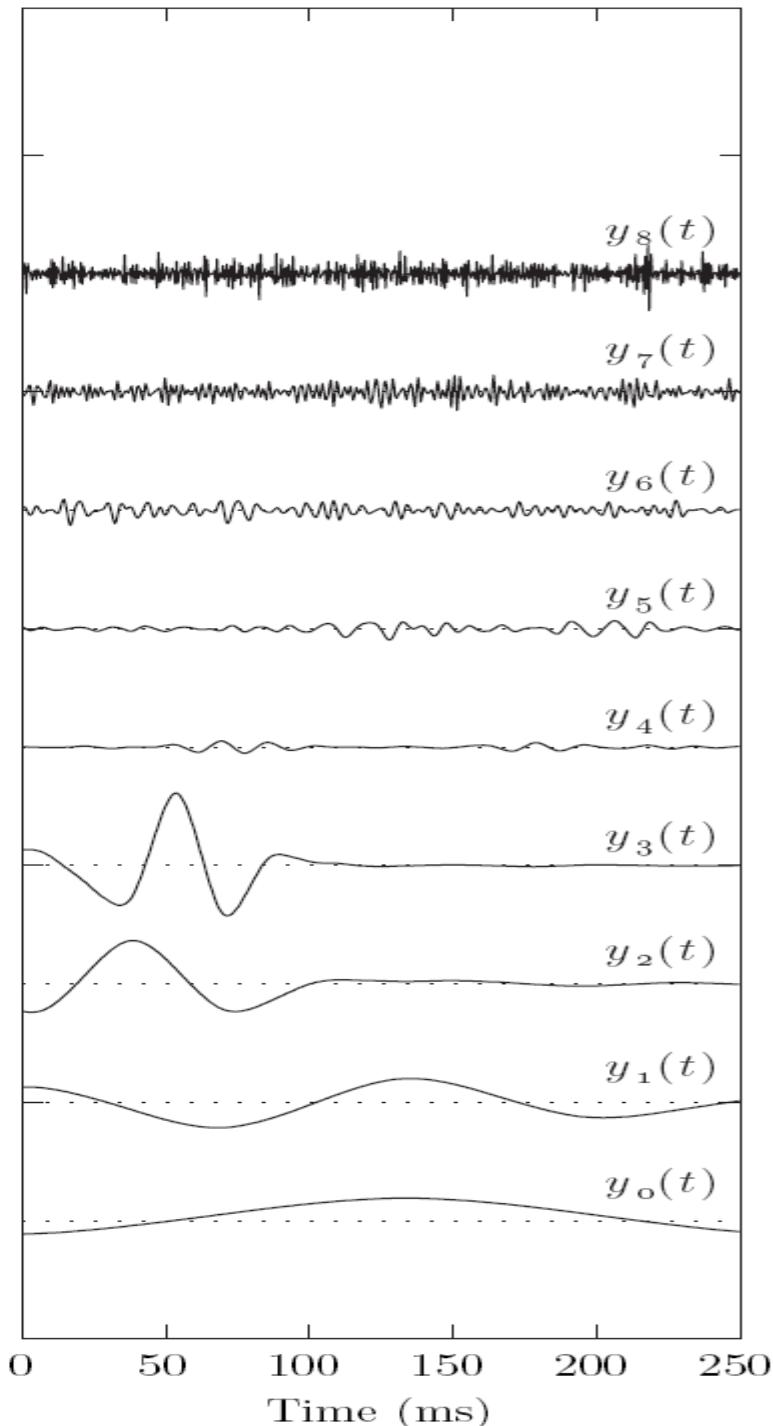
# Análisis multirresolución: reconstrucción

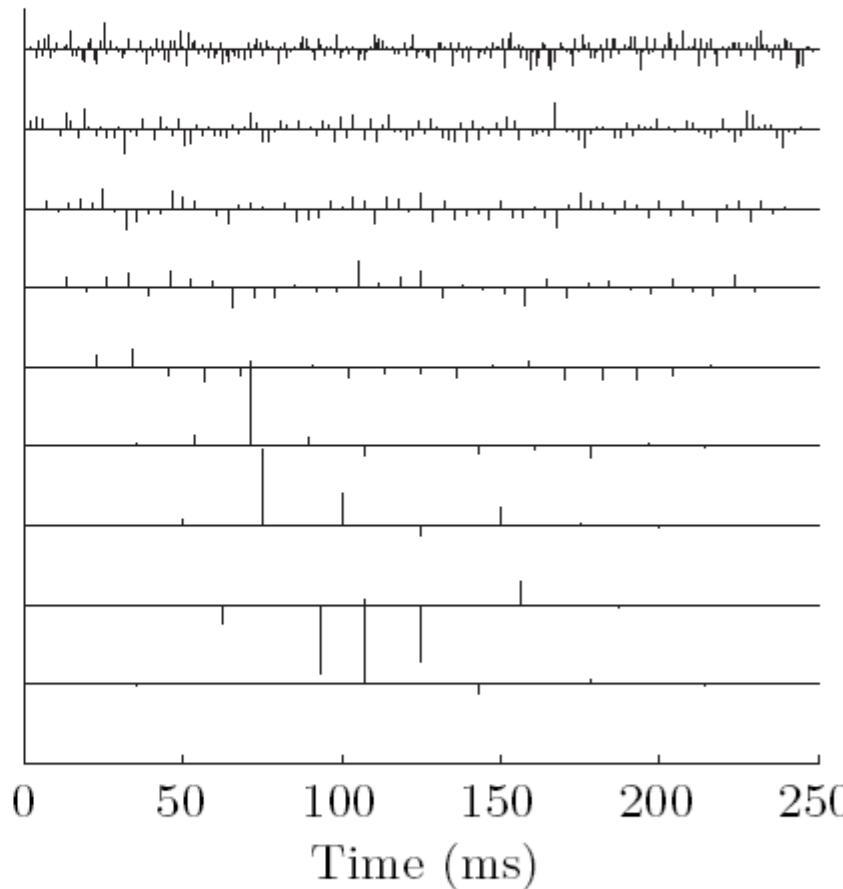
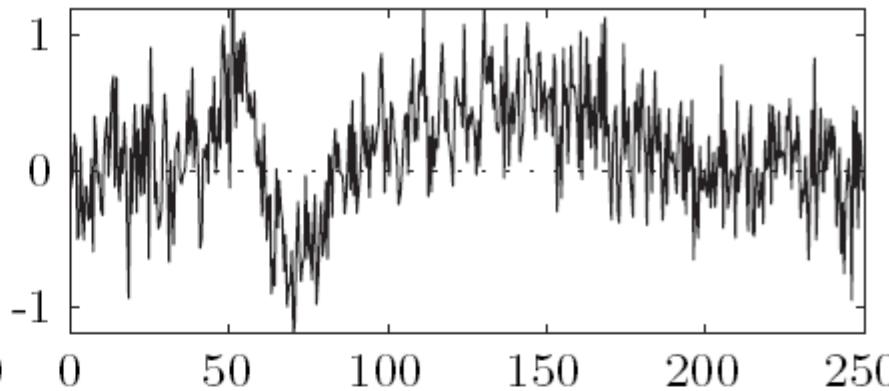
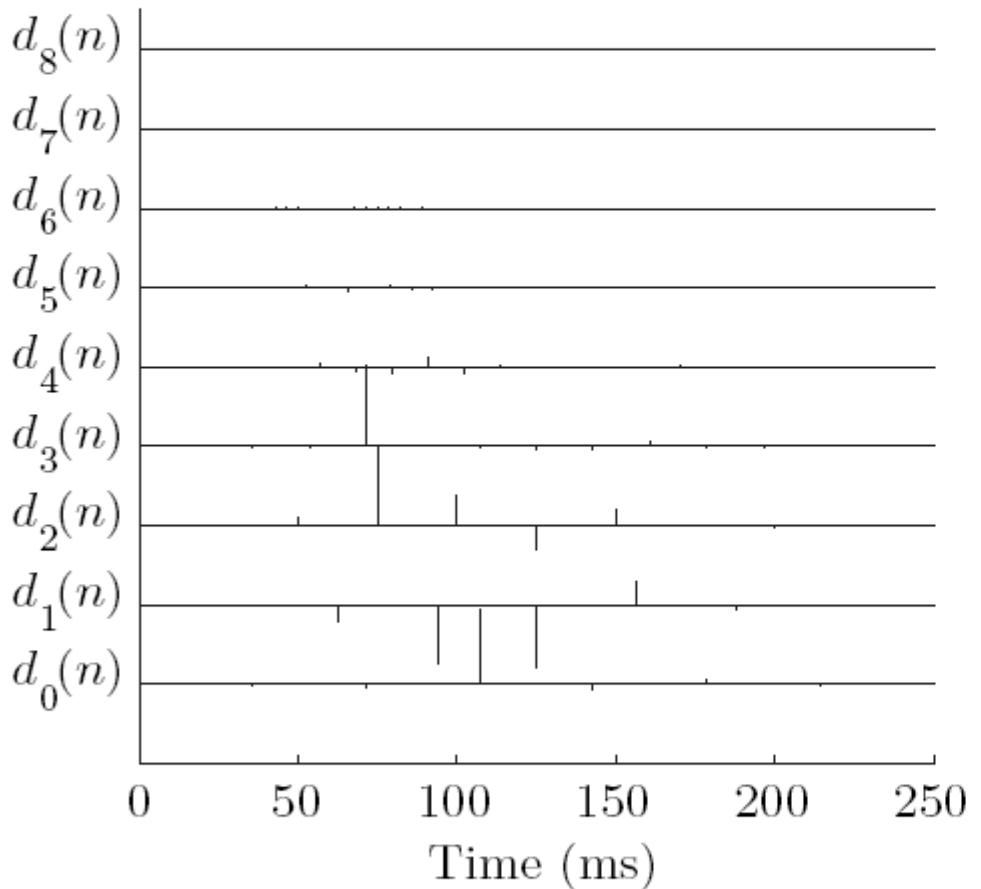
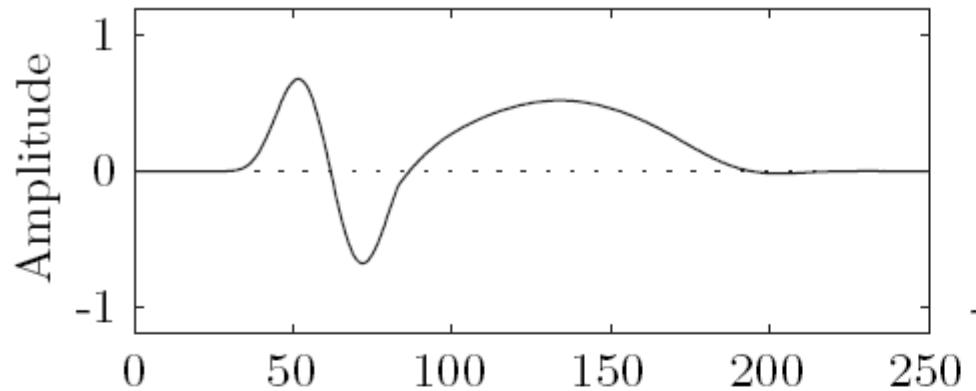




**Figure 4.46:** The scaling function (dotted line) and wavelet function (solid line) for (a) Daubechies-2, (b) Daubechies-5, (c) Daubechies-10, (d) Coiflet-1, (e) Coiflet-2, and (f) Coiflet-4. Note that the timescale differs between the diagrams.

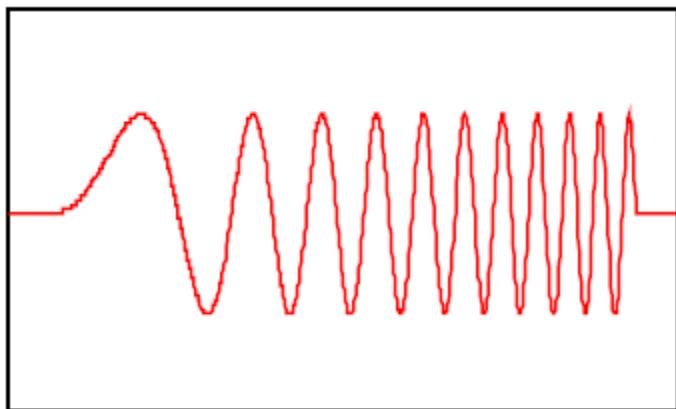
Amplitude

0 50 100 150 200 250  
Time (ms)0 50 100 150 200 250  
Time (ms)

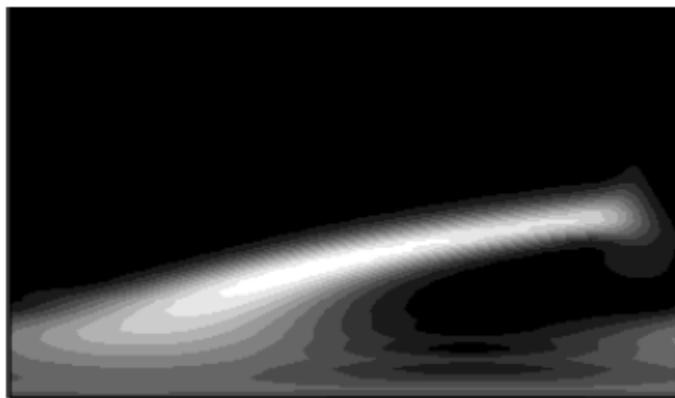


# Aplicaciones: CWT para análisis de señales transitorias

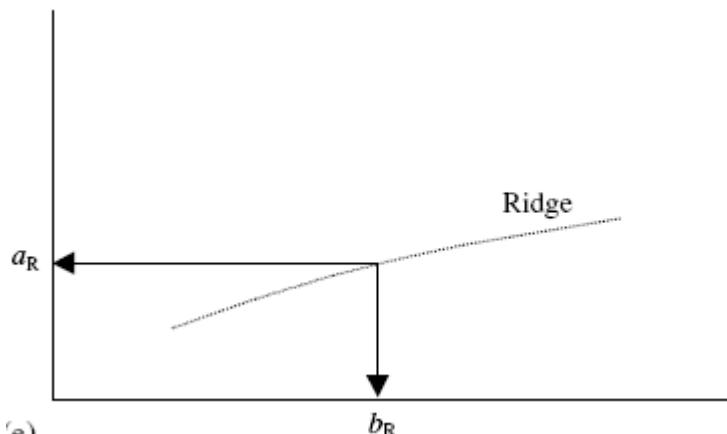
- ❑ Análisis tiempo-escala → localización de eventos transitorios (buena resolución temporal en altas frecuencias y frecuencial en bajas frecuencias).
  - ❑ Utilizado para analizar
    - ❑ Sonidos cardiacos
    - ❑ ECG
    - ❑ HRV
    - ❑ EEG
- ❑ Análisis de discontinuidades e irregularidades



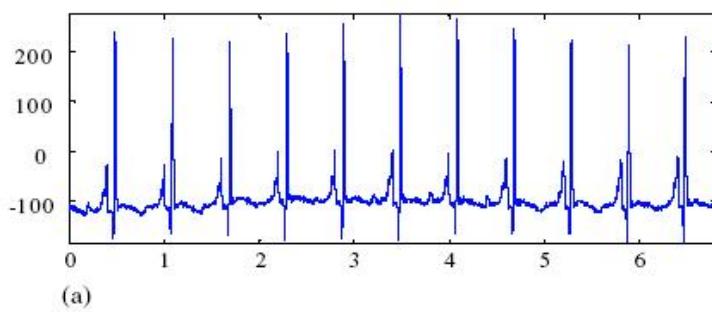
(a)



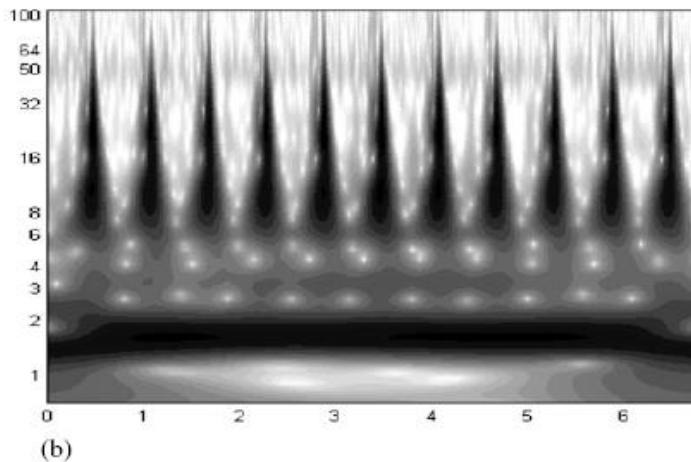
CWT



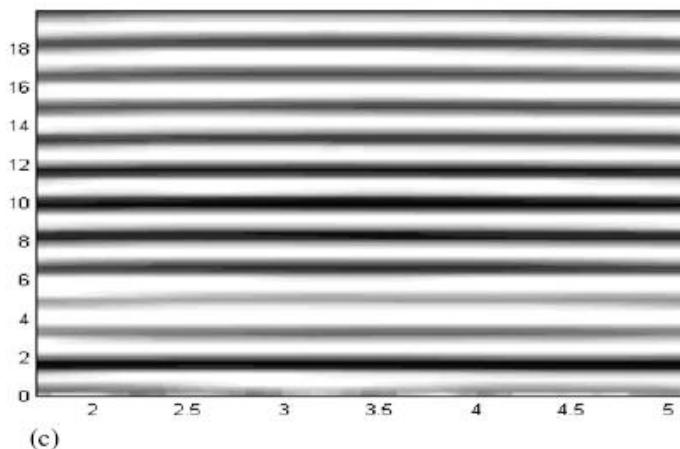
Máximo de la CWT



ECG



Escalograma

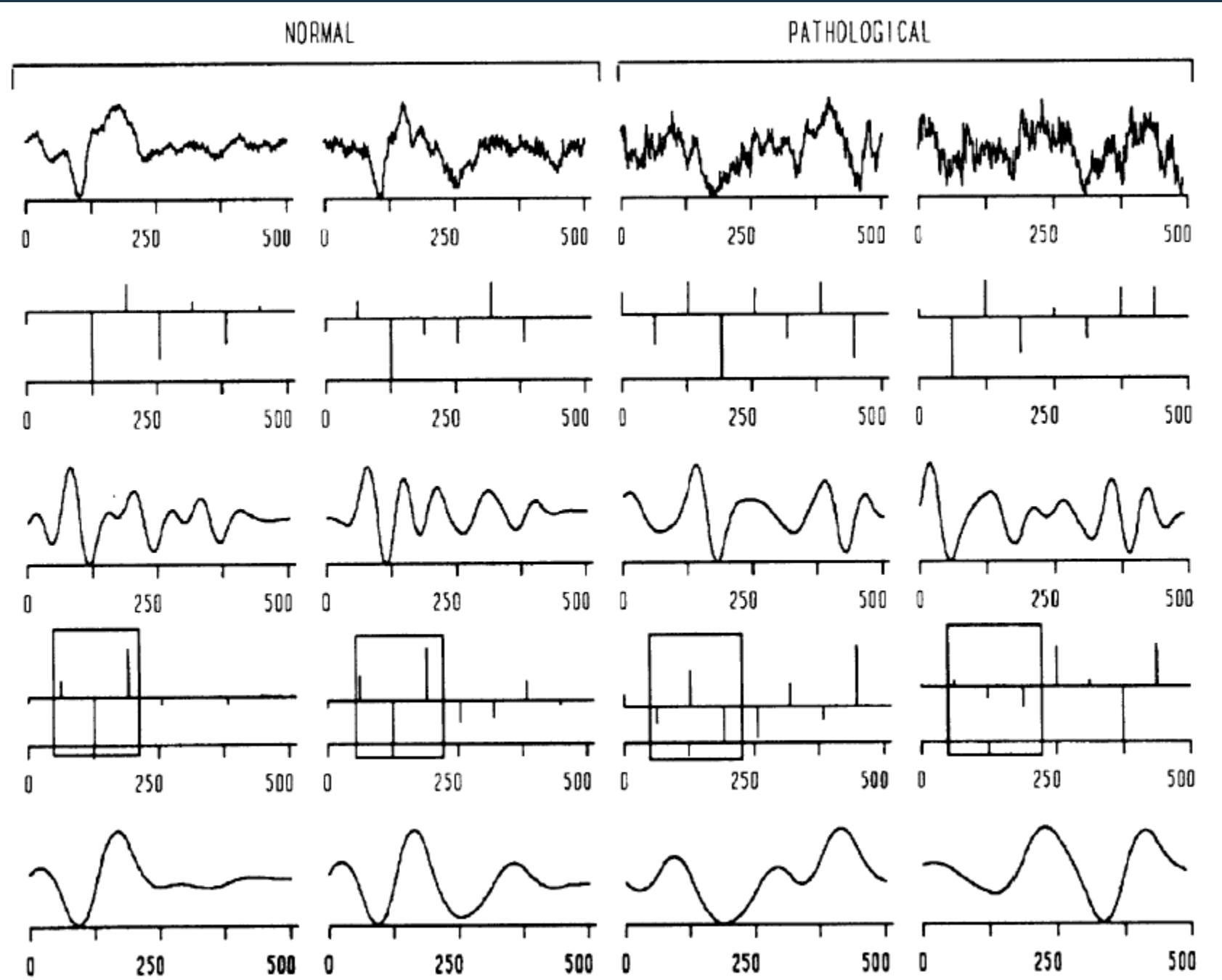


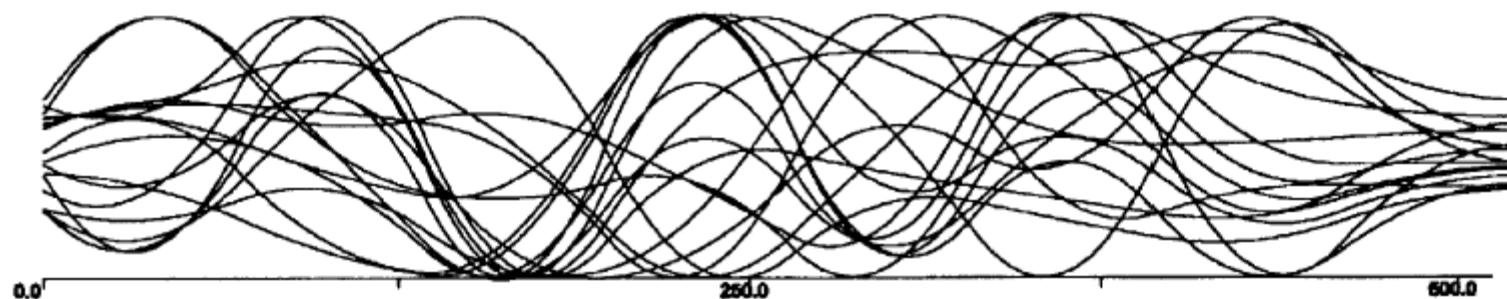
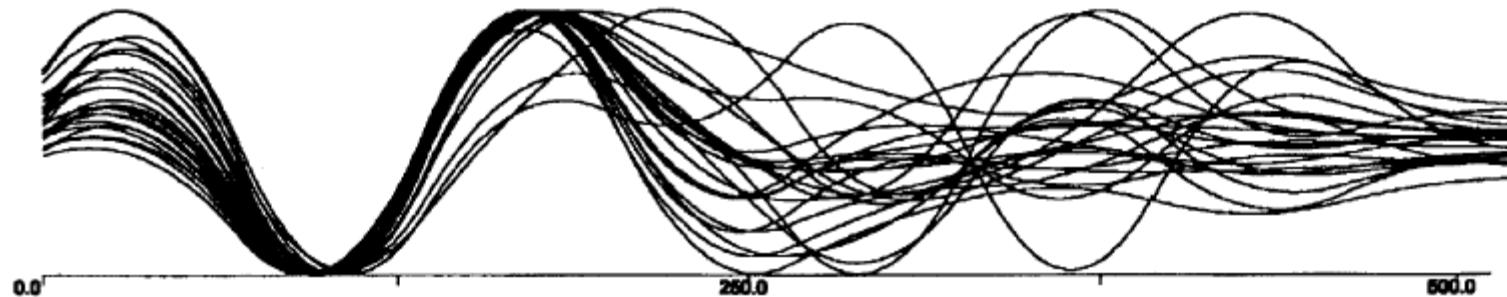
Espectrograma

**Figure 9.** Wavelet scalogram versus STFT spectrogram for rhythmic signal. (a) Original rhythmic ECG signal. (b) Morlet based scalogram corresponding to (a). (c) Spectrogram corresponding to (a) generated using a short time Fourier transform with a 3.4 s Hanning window.

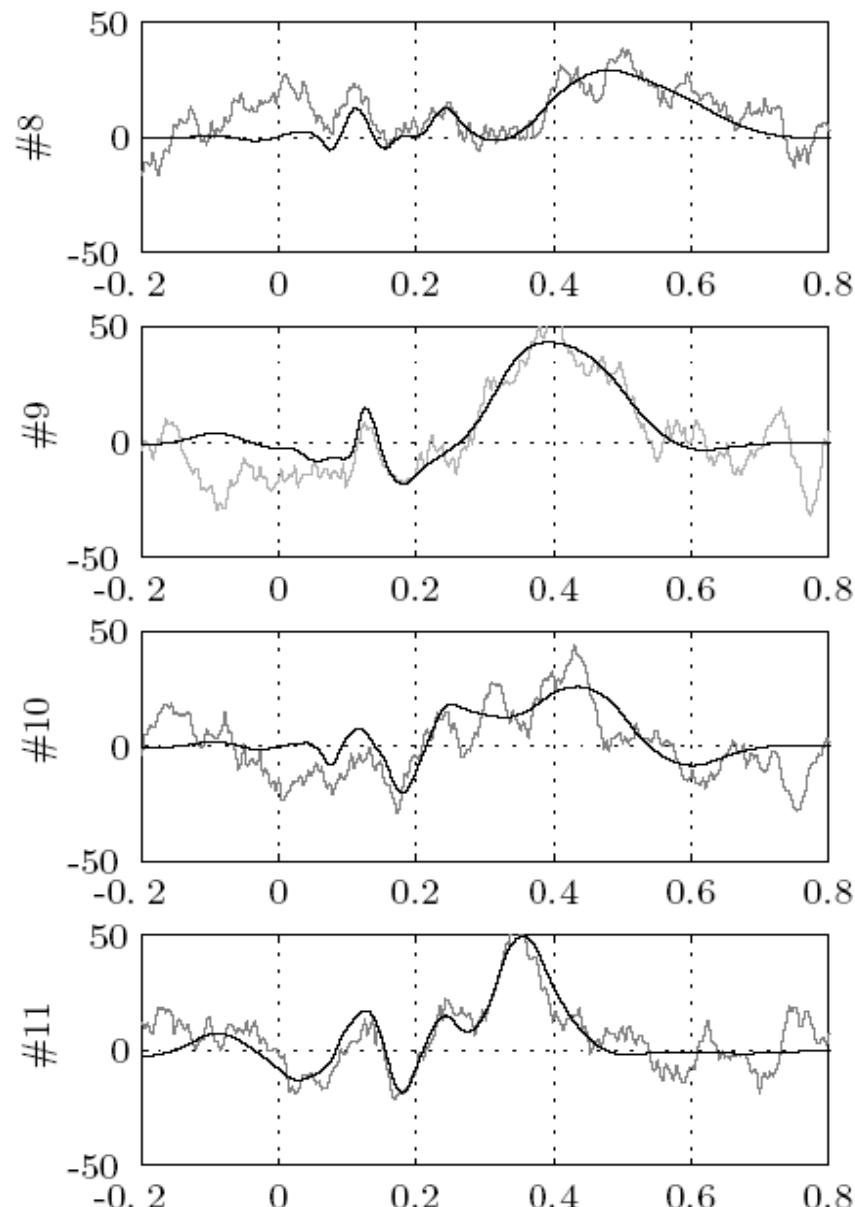
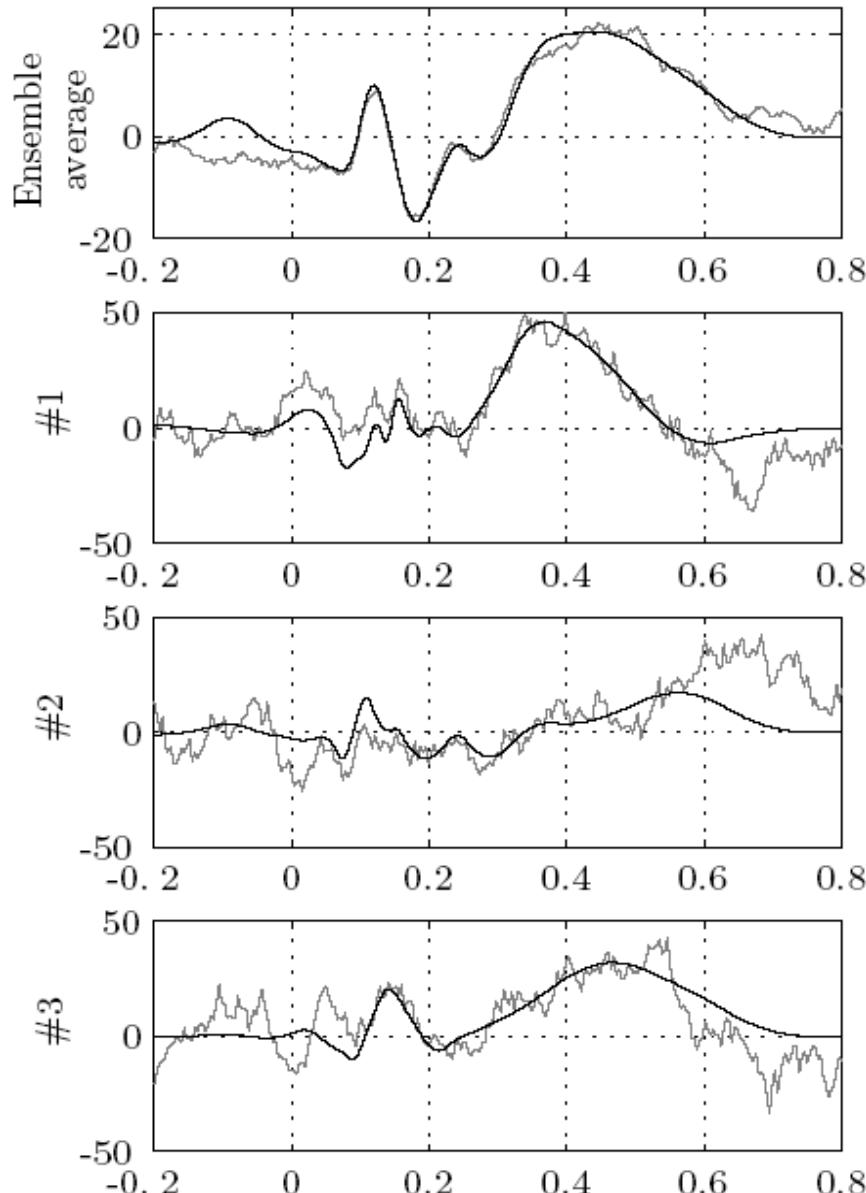
# Aplicaciones: DWT para eliminación de ruido

- Muy utilizado en señales (ECG, EP) e imágenes biomédicas
- Estrategia 1: (lineal)  
Fijar a cero ciertos coeficientes de la DWT (por ejemplo, los de las escalas mayores que una dada  $J_T$ ) y después realizar la DWT inversa. Se trata de un filtrado lineal y variante en el tiempo. Se elimina el ruido a costa de suavizar la señal.
- Estrategia 2: (no lineal)  
Thresholding: poner a cero los coeficientes que estén por debajo de un umbral. El umbral puede ser fijo o variante para las diferentes escalas o intervalos temporales.





# Ejemplo de “denoising” en potenciales evocados



# Aplicaciones: DWT como “feature extraction”

- Compresión de ECG
- Extracción de características para clasificación de latidos

# Aplicaciones: detección de eventos

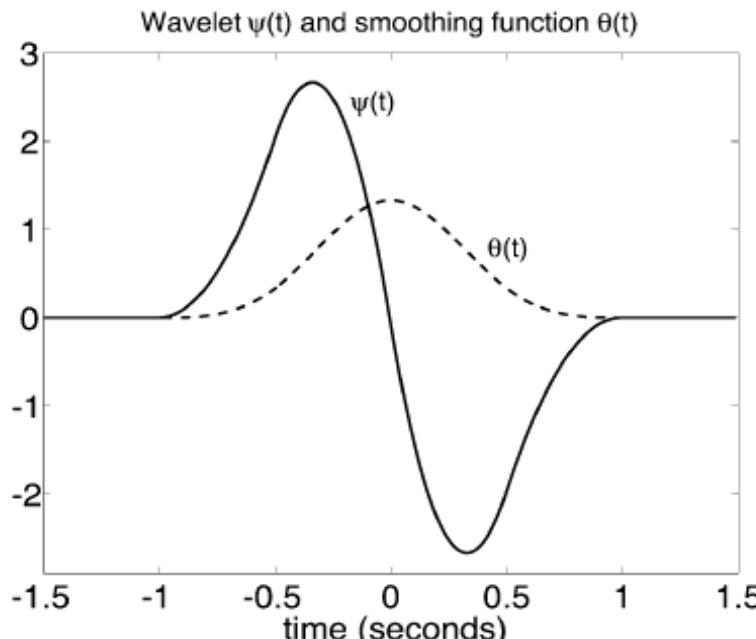
- Detección de potenciales tardíos
- Detección de QRS y determinación de inicios y finales de onda
  - El ECG está formado por ondas a distintas escalas: QRS cortas y de alta frecuencia, P y T más largas y suaves.
- Detección de episodios epilépticos
  - La manifestación más temprana son unas espículas (spikes) de muy corta duración
  - Aparecen también ondas casi periódicas.
  - Se usan algoritmos rápidos para calcular la CWT.
  - Se han utilizado como etapa de entrada a redes neuronales

# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

- El ECG está compuesto por ondas transitorias en distintas escalas e instantes de ocurrencia
- Wavelet prototipo

$$\Psi(\Omega) = j\Omega \left( \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{4}\right)}{\frac{\Omega}{4}} \right)^4$$

Es la derivada de la convolución de 4 pulsos rectangulares



## Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

- Al ser la derivada de una función paso-bajo, puede demostrarse que los coeficientes de la transformada equivalen a la derivada de la señal paso bajo a diferentes escalas.

$$W_a x(b) = -a \left( \frac{d}{db} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \theta_a(t - b) dt$$

- Interesante porque se trata de detectar pendientes, máximos y mínimos de la señal a diferentes escalas.
- Los máximos se verán como cruces por cero en la transformada wavelet a la escala correspondiente, y las pendientes se verán en forma de máximos a lo largo de las escalas

# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

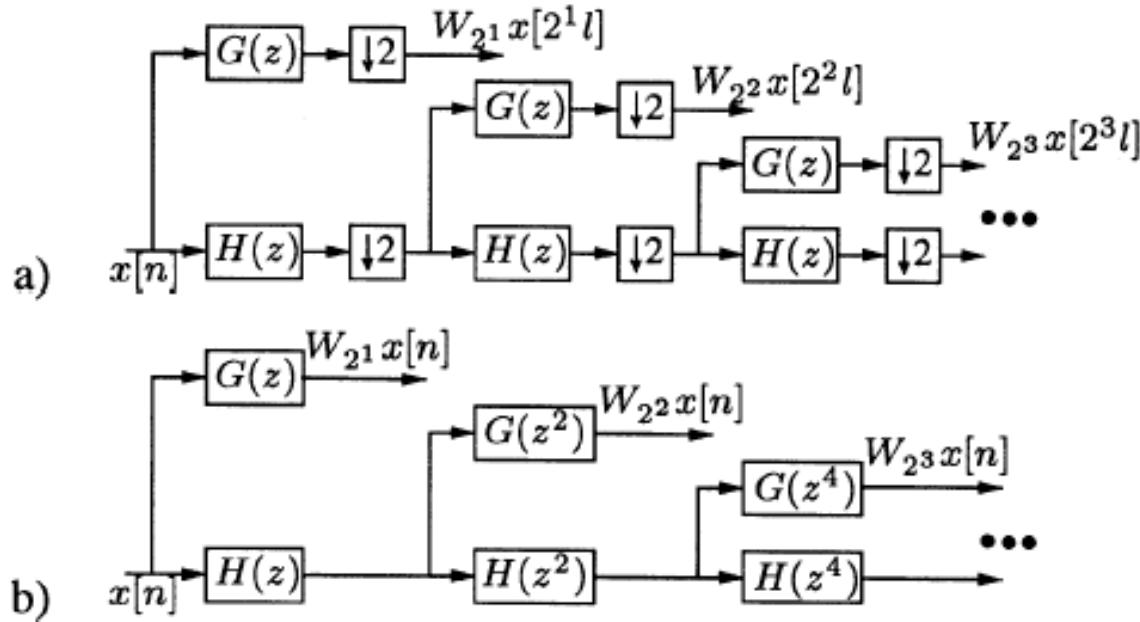


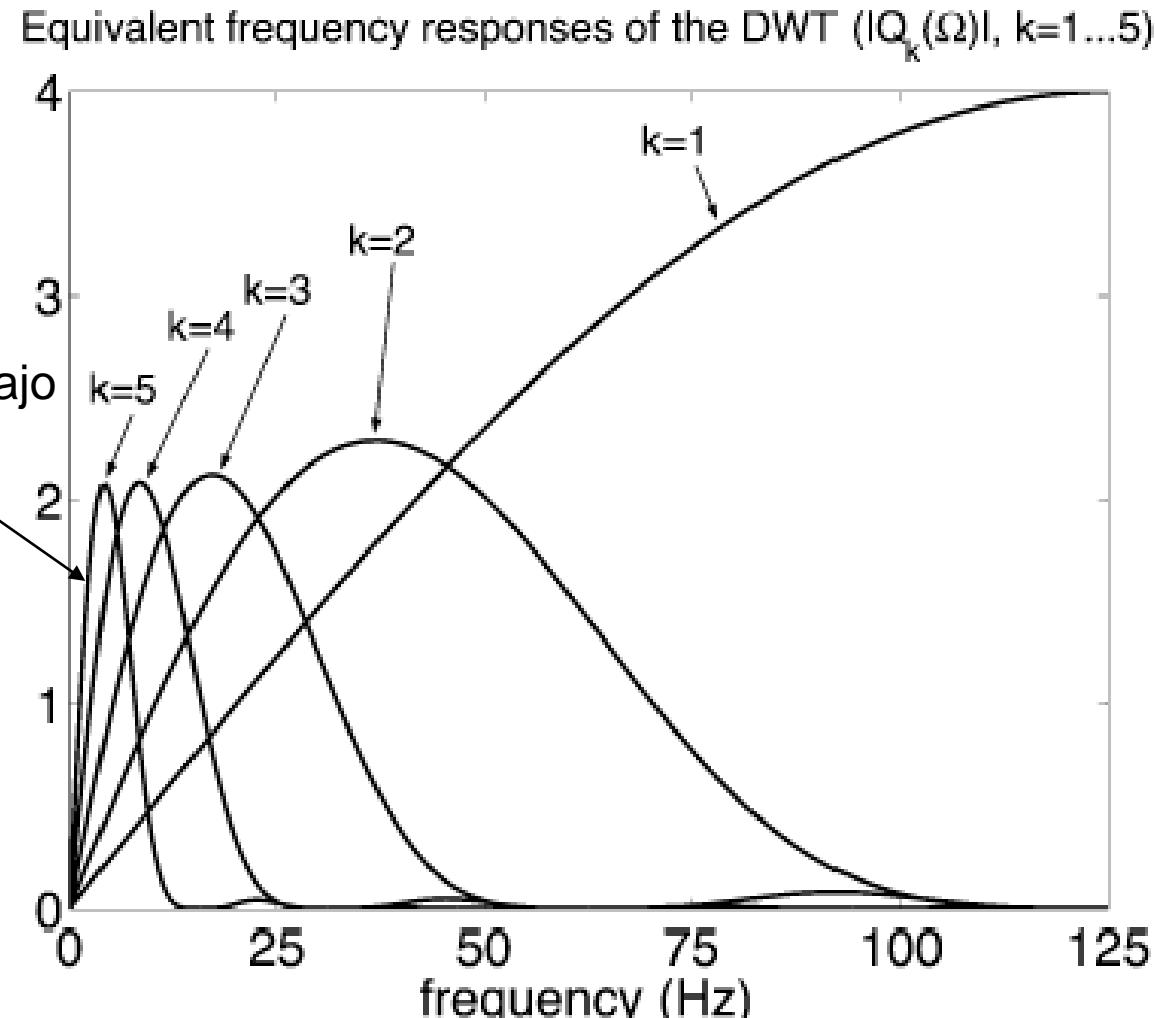
Fig. 1. Two filter-bank implementations of DWT. (a) Mallat's algorithm.  
(b) Implementation without decimation (*algorithme à trous*).

Filtro equivalente para cada escala

$$Q_k(e^{j\omega}) = \begin{cases} G(e^{j\omega}), & k = 1 \\ G\left(e^{j2^{k-1}\omega}\right), \prod_{l=0}^{k-2} H\left(e^{j2^l\omega}\right) & k \geq 2 \end{cases}$$

# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

- La respuesta frecuencial a cada escala es



# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

- Siendo los filtros paso bajo y paso alto

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega/2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^3 \quad h[n] = \frac{1}{8} \cdot \{\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-1]\}$$
$$G(e^{j\omega}) = 4j e^{j\omega/2} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right) \quad g[n] = 2 \cdot \{\delta[n+1] - \delta[n]\}.$$

- Se calculan las distintas escalas de la WT para la señal ECG, y se aplican una serie de reglas para detección de QRS y determinación de inicios, picos y finales de las ondas.
- Para ello se tienen en cuenta las escalas en las que están presentes las diferentes ondas

# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

## □ Ejemplo ilustrativo con señales simuladas

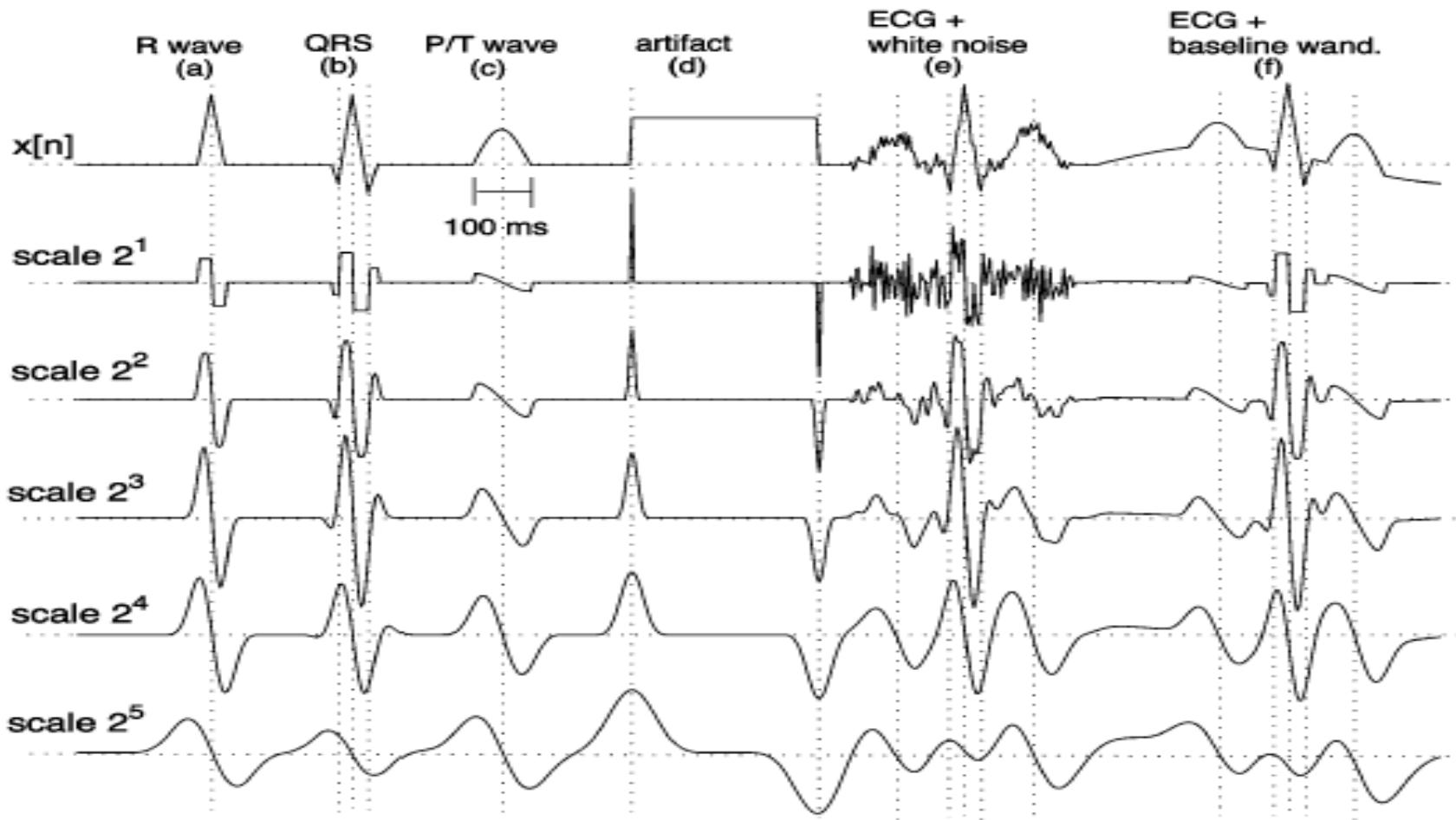
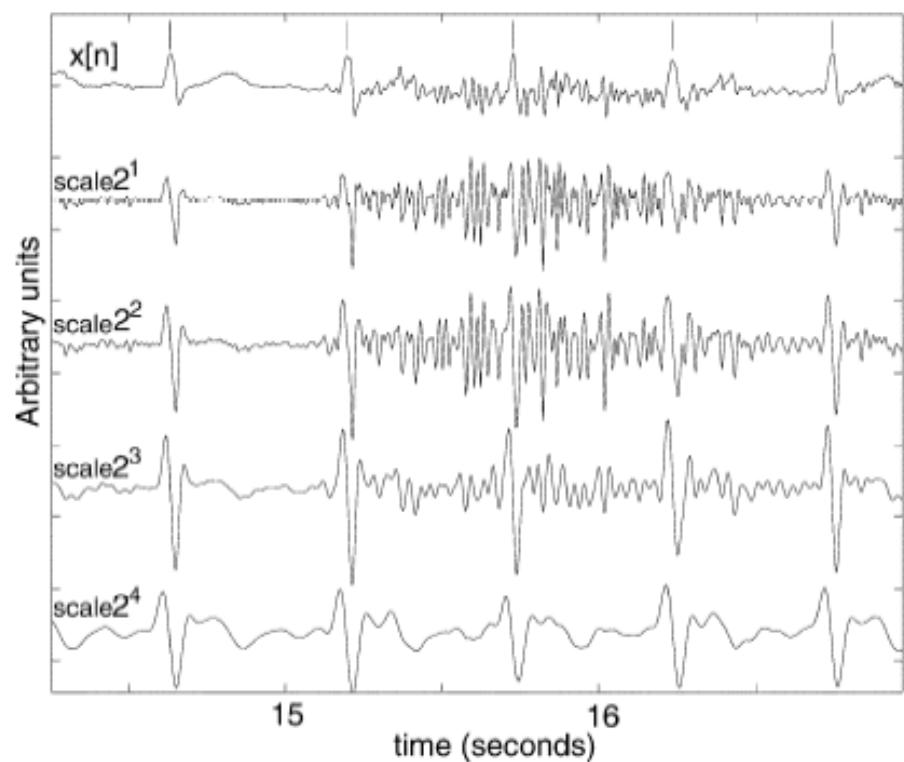
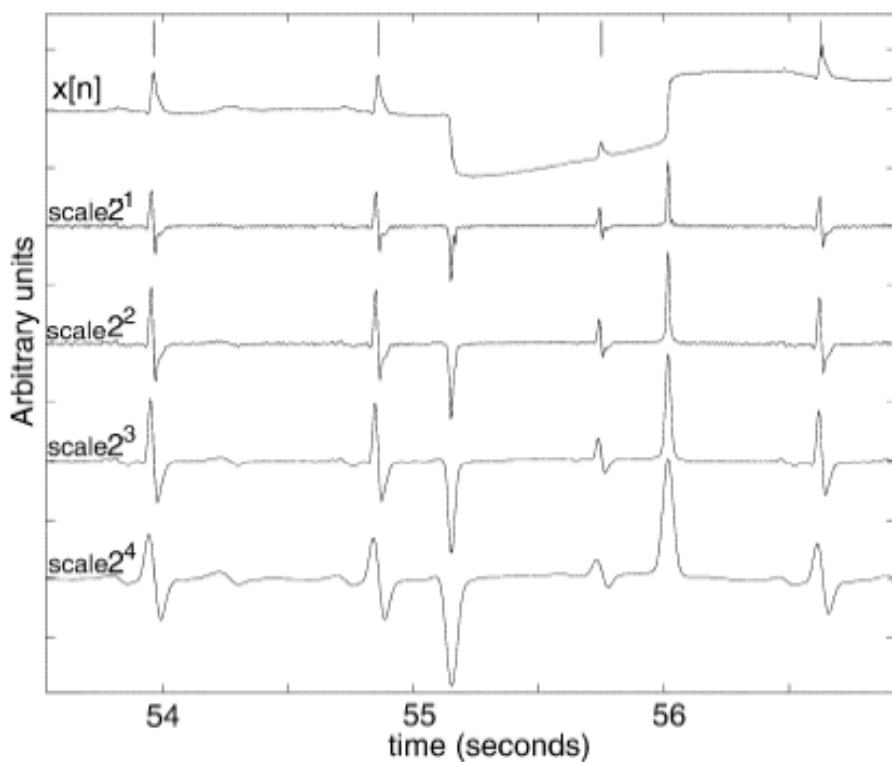


Fig. 5. WT at the first five scales of ECG-like simulated waves. (Inspired by [19, Fig. 1].).

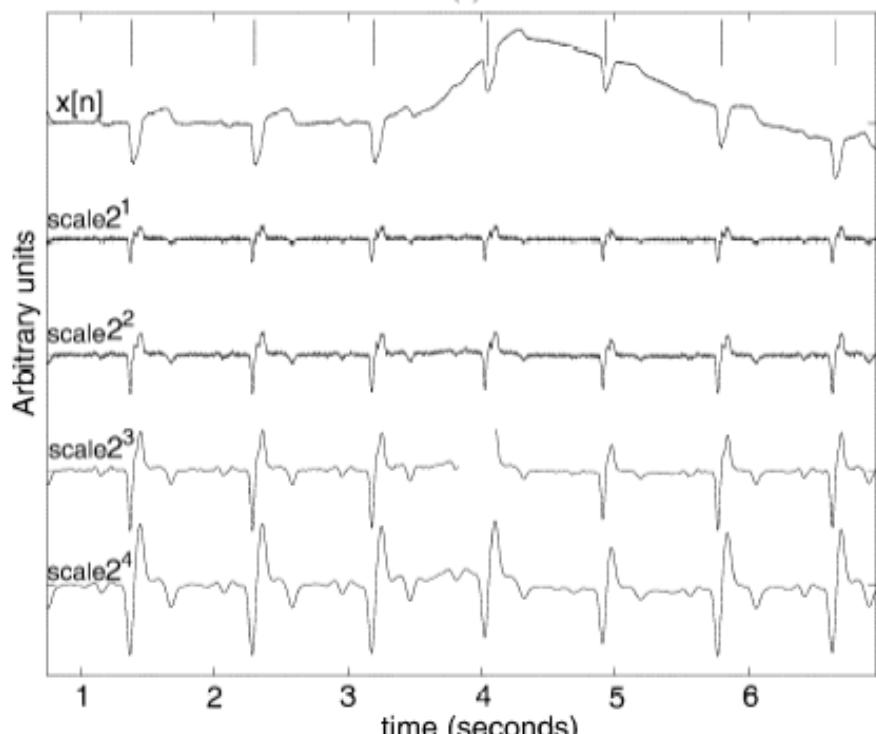
# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

## □ Ejemplo de detección de QRS

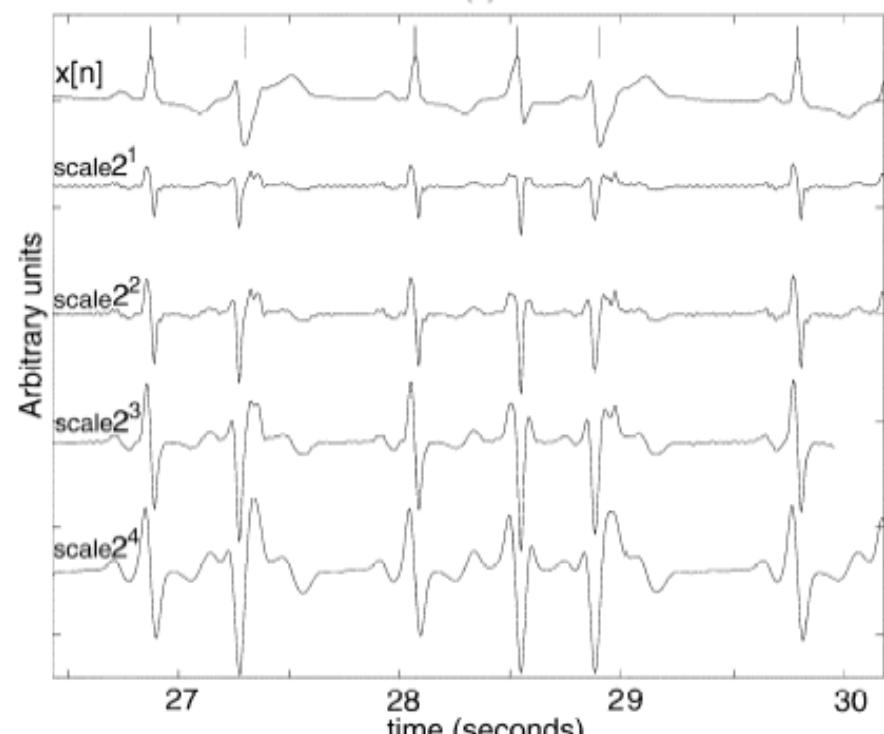


# Aplicación: detección de QRS y puntos significativos

## □ Ejemplo de detección de QRS

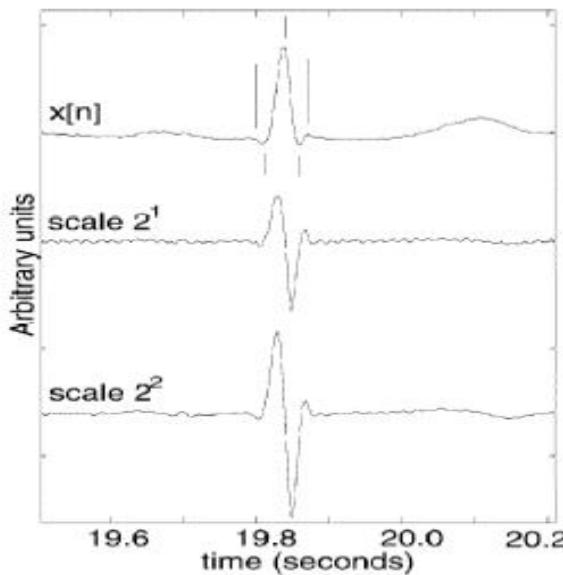


(c)

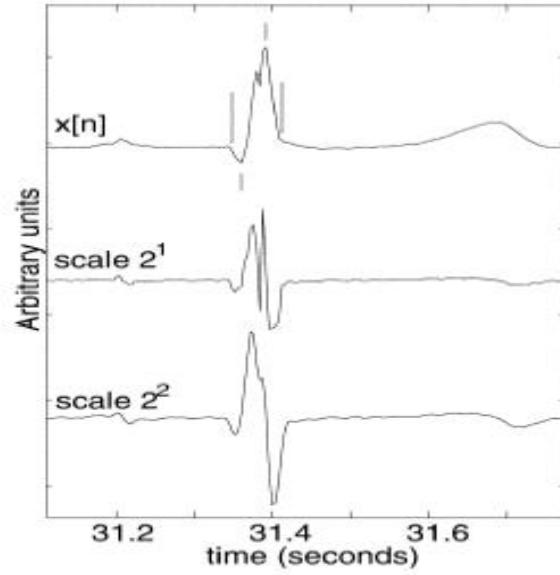


(d)

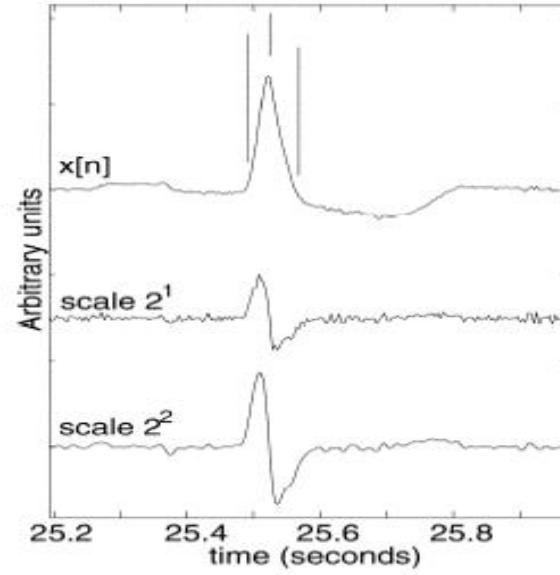
# Ondas, inicio y fin del QRS



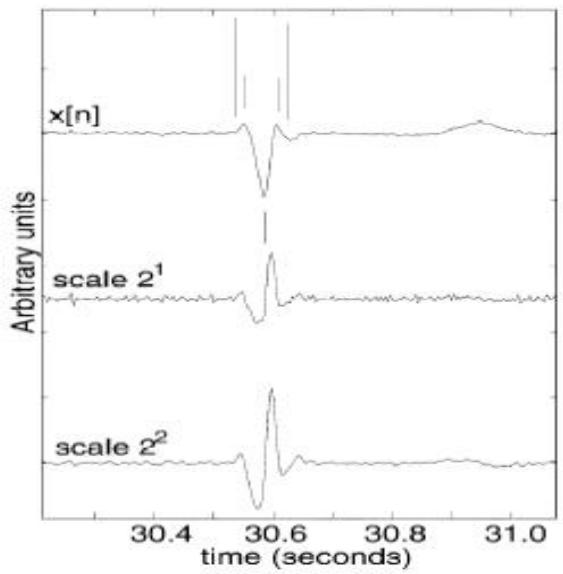
(a)



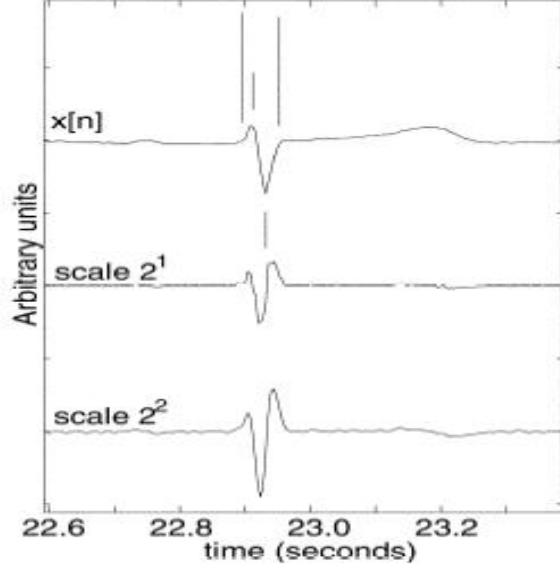
(b)



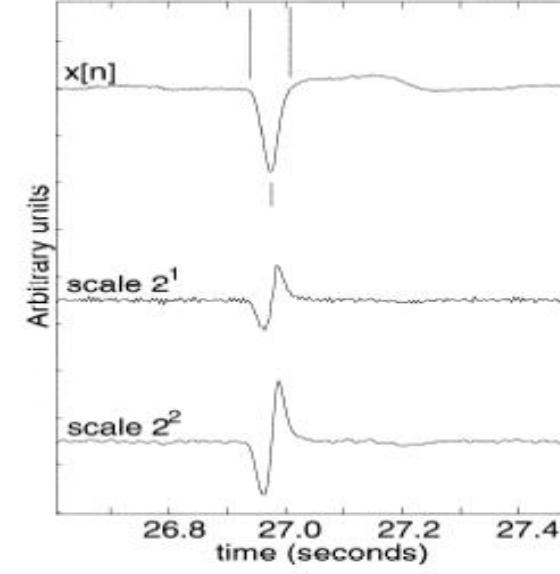
(c)



(d)

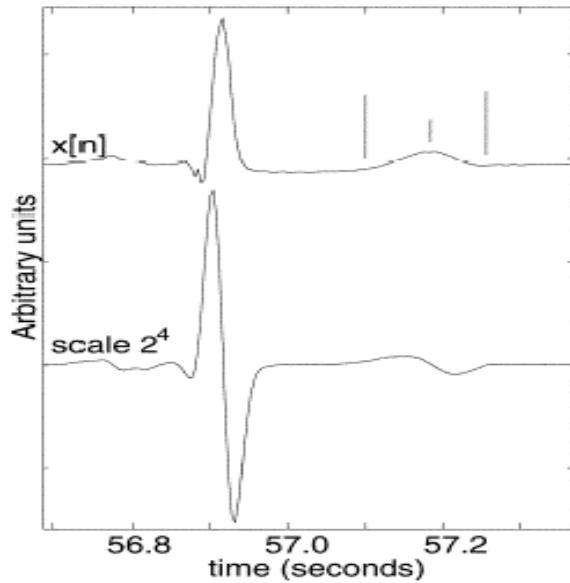


(e)

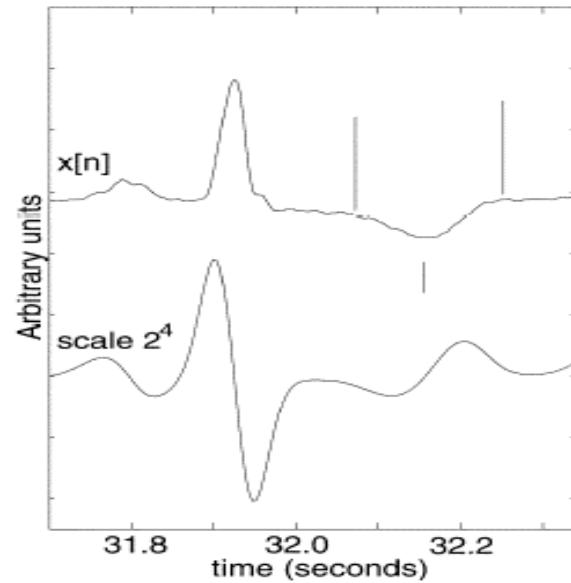


(f)

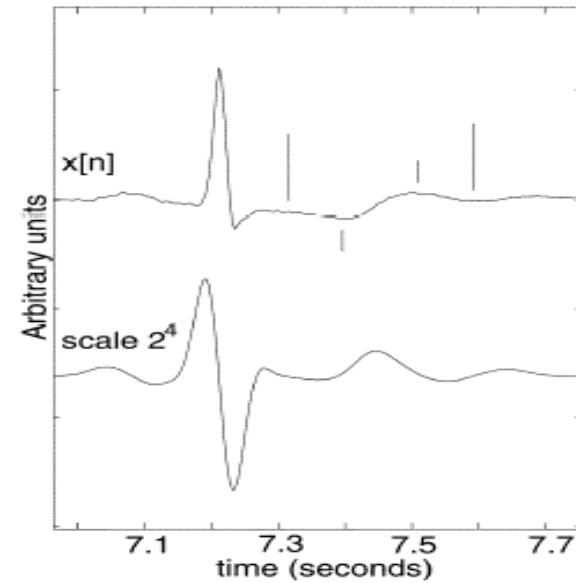
# Inicio, pico(s) y fin de onda T



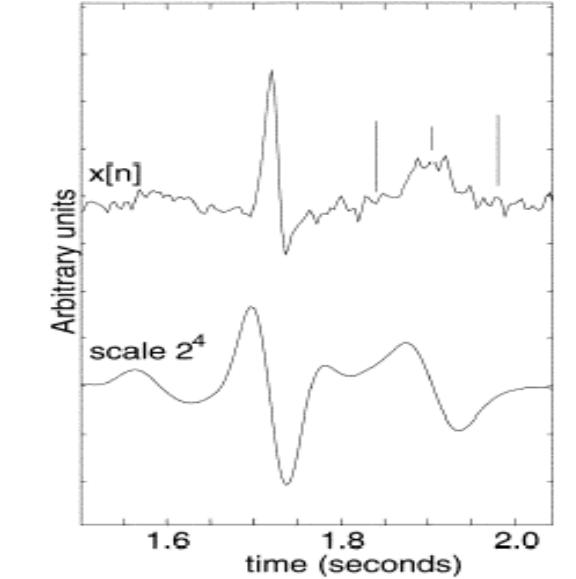
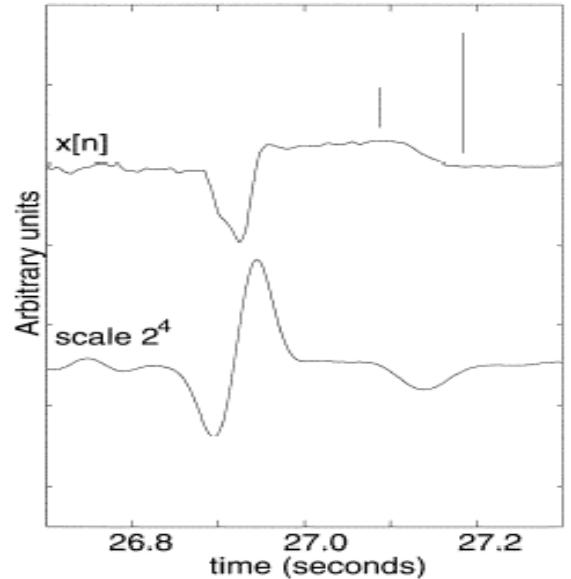
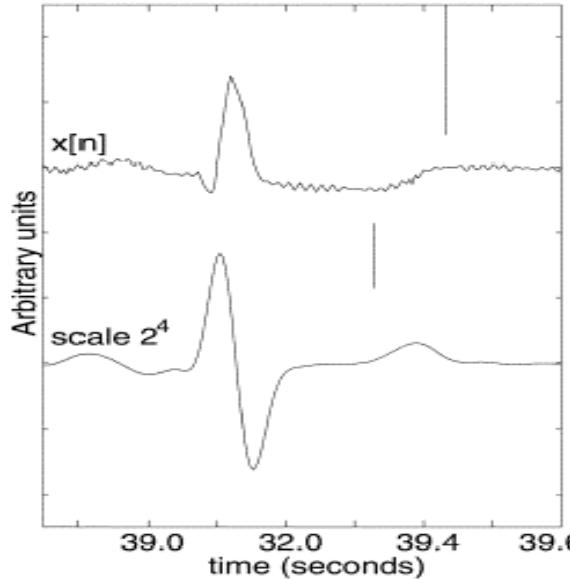
(a)



(b)



(c)



# Inicio, pico y fin de onda P

