Estimación de parámetros

Con frecuencia las incertidumbres o desviaciones estándar de las mediciones son desconocidas o deben verificarse. En general los parámetros de una población son desconocidos y es necesario estimarlos a partir de las mediciones.
Cada medición es el valor observado de una variable aleatoria. Supongamos que diferenciamos lo que es el valor medido, x, de la variable aleatoria X.
Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores medidos, podemos asumir que cada uno de ellos proviene de medir variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituyen una **muestra aleatoria** de tamaño n de una v.a. X si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **independientes idénticamente distribuidas**

El propósito de tomar una muestra aleatoria es obtener información sobre los parámetros desconocidos de la población. Por ejemplo, se desea alcanzar una conclusión acerca de la proporción de artículos defectuosos en la producción diaria de una fábrica. Sea p la proporción de artículos defectuosos en la población, para hacer una inferencia con respecto a p, se selecciona una muestra aleatoria (de un tamaño apropiado) y se utiliza la proporción observada de artículos defectuosos en la muestra para estimar p.

La proporción de la muestra $\hat{p}$ se calcula dividiendo el número de artículos defectuosos en la muestra por el número total de artículos de la muestra. Entonces $\hat{p}$ es una función de los valores observados en la muestra aleatoria. Como es posible obtener muchas muestras aleatorias de una población, el valor de $\hat{p}$ cambiará de una a otra. Es decir $\hat{p}$ es una variable aleatoria. Esta variable aleatoria se conoce como estadístico.

En nuestro caso tomaremos muestra de los desniveles entre marcas fijas para obtener información acerca de la población a que pertenecen nuestras observaciones. Las observaciones deberán responder a un modelo funcional para evitar los sesgos y a un modelo estadístico o estocástico para evaluar su bondad.

Un **estadístico** es cualquier función de la muestra aleatoria

Estadísticos usuales

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. X donde $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$
Si desconocemos μ un estadístico que se utiliza para estimar ese parámetro es la media o **promedio muestral** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Análogamente si se desconoce σ^2 un estadístico usado para tener alguna información sobre ese parámetro es la **varianza muestral** que se define como $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

Otro estadístico es la **desviación estándar muestral** $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

Como un estadístico es una variable aleatoria, éste tiene una distribución de probabilidad, esperanza y varianza.

Una aplicación de los estadísticos es obtener estimaciones puntuales de los parámetros desconocidos de una distribución. Por ejemplo como se dijo antes se suelen estimar la media y la varianza de una población.

Cuando un estadístico se utiliza para estimar un parámetro desconocido se lo llama **estimador puntual**. Es habitual simbolizar en forma genérica a un parámetro con la letra θ y al estadístico que se utiliza como estimador puntual de θ, simbolizarlo con $\hat{\Theta}$.

Por lo tanto $\hat{\Theta}$ es una función de la muestra aleatoria: $\hat{\Theta} = h\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$

Al medir la muestra aleatoria se obtienen $x_1, x_2, ..., x_n$, y entonces el valor que toma $\hat{\Theta}$ es $\hat{\theta} = h\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ y se denomina estimación puntual de θ

El objetivo de la estimación puntual es seleccionar un número, a partir de los valores de la muestra, que sea el valor más cercano a θ.

Por ejemplo, supongamos que X_1, X_2, X_3, X_4 es una muestra aleatoria de una v.a. X. Sabemos que X tiene distribución normal pero desconocemos μ.

Tomamos como **estimador** de μ al promedio muestral $\overline{X}$, es decir $\hat{\mu} = \overline{X}$

Tomamos la muestra (medimos X_1, X_2, X_3, X_4) y obtenemos

$$x_1 = 24,\ x_2 = 30,\ x_3 = 27,\ x_4 = 32$$

Entonces la **estimación puntual** de μ es $\overline{x} = \frac{24+30+27+32}{4} = 28.25$

Si la varianza σ^2 de X también es desconocida, un **estimador puntual** usual de σ^2 es la varianza muestral, es decir $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, para la muestra dada la **estimación** de σ^2 es 12.25.

<u>Ejemplo</u>

La distancia se midió cinco veces con un método cuya incertidumbre no se conoce. Las cinco mediciones, en metros, son: 21.10 21.05 20.98 21.12 y 21.05.
Estime la distancia y determine la incertidumbre en la estimación.

<u>Solución</u>

Sea $\bar{X}$ el promedio de las cinco mediciones y sea s la desviación estándar de la muestra. Se calcula $\bar{X} = 21.06\ m$ y $s = 0.05\ m$

Se estimaría que la distancia es $\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{5}}$. No se conoce σ. Sin embargo se puede aproximar σ con *s*. por lo tanto la distancia se estima con

$$21.06 \pm 0.0543/\sqrt{5}\ m \qquad \text{o} \qquad 21.06 \pm 0.02\ m$$

Intervalos de confianza

A veces resulta más conveniente estimar un parámetro desconocido dando un intervalo de valores posibles del parámetro, de manera tal que dicho intervalo contenga al verdadero parámetro con determinada probabilidad.

Específicamente, a partir de una muestra aleatoria, se construye un intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ donde los extremos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son dos estadísticos(al igual que la media estimada y la varianza estimadas), tal que $P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 1-\alpha$ donde θ es el parámetro poblacional desconocido a estimar y α es un valor real entre cero y uno dado de antemano. Por ejemplo si $\alpha = 0.05$, se quiere construir un intervalo $\left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)$ tal que $P\left(\theta \in \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2\right)\right) = 0.95$, o escrito de otra forma $P\left(\hat{\Theta}_1 \le \theta \le \hat{\Theta}_2\right) = 0.95$

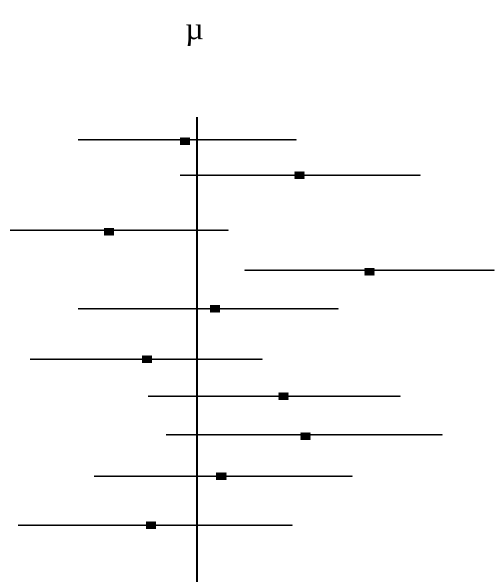
Esta probabilidad tiene el siguiente significado: como $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son estadísticos, los valores que ellos toman varían con los valores de la muestra, es decir si $x_1, x_2, ..., x_n$ son los valores medidos de la muestra entonces el estadístico $\hat{\Theta}_1$ tomará el valor θ_1 y el estadístico $\hat{\Theta}_2$ tomará el valor θ_2.

Si medimos nuevamente la muestra obtendremos ahora valores $x_1', x_2', ..., x_n'$ y por lo tanto $\hat{\Theta}_1$ tomará el valor θ_1' y el estadístico $\hat{\Theta}_2$ tomará el valor θ_2', diferentes en general de los anteriores.

Esto significa que si medimos la muestra 100 veces obtendremos 100 valores diferentes para $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ y por lo tanto obtendremos 100 intervalos distintos, de los cuales aproximadamente 5 de ellos no contendrán al verdadero parámetro.

Al valor $1-\alpha$ se lo llama **nivel de confianza** del intervalo. También se suele definir como nivel de confianza al $(1-\alpha)100\%$

La construcción repetida de un intervalo de confianza para μ se ilustra en la siguiente figura



<u>Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianza conocida</u>.

El método general para construir intervalos de confianza es el siguiente llamado ***método del pivote:***

Supongamos el siguiente caso particular, sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocido, se quiere construir un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$.

1- tomamos un estimador puntual de μ, sabemos que $\hat{\mu} = \overline{X}$ es un estimador con buenas propiedades.

2- a partir de $\hat{\mu} = \overline{X}$ construimos el estadístico $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$. Notar que *Z* ***(pivote)*** contiene al verdadero parámetro μ y que bajo las condiciones dadas $Z \sim N(0,1)$

3- como conocemos la distribución de *Z*, podemos plantear: hallar un número z tal que

$$P(-z \le Z \le z) = 1\text{-}\alpha,$$

Si reemplazamos la v.a. *Z* por su expresión tenemos:

$$P\left(-z \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le z\right) = P\left(-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X} - \mu \le z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

Multiplicando todos los miembros de la desigualdad por -1 (el orden de los miembros se invierte) llegamos a:

$$P\left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

Evidentemente, si definimos

$\begin{cases} \hat{\Theta}_1 = \overline{X} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \hat{\Theta}_2 = \overline{X} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$, hemos construido dos estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ tales que $P(\hat{\Theta}_1 \le \mu \le \hat{\Theta}_2) = 1\text{-}\alpha$,

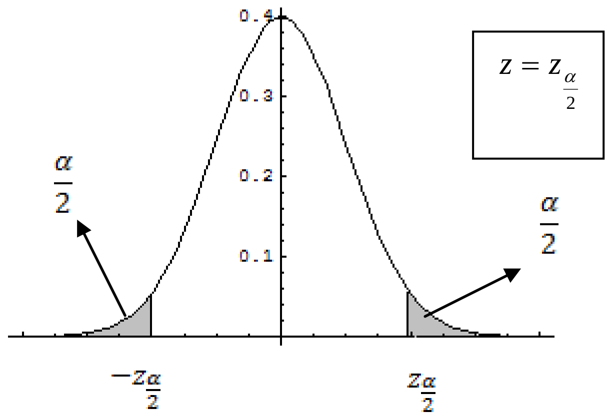
es decir hemos construido el intervalo de confianza bilateral deseado $[\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2]$. Todos los elementos que forman los estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son conocidos ya que el número *z* verifica la ecuación anterior, es decir

$P(-z \le Z \le z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 1\text{-}\alpha$ donde $\Phi(z)$ es la *Fda* para la v.a. $Z \sim N(0,1)$

Recordando que $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$, esta ecuación queda:

$\Phi(z)-\Phi(-z)=2\Phi(z)-1=1\text{-}\alpha$, o bien

$\Phi(z)=1-\frac{\alpha}{2}$ o de otra forma $P(Z>z)=\frac{\alpha}{2}$.



Al valor de z que verifica esta ecuación se lo suele indicar $z_{\frac{\alpha}{2}}$. En consecuencia, el intervalo de confianza bilateral al nivel de significación 1-α queda:

$$\left[\hat{\Theta}_1,\hat{\Theta}_2\right]=\left[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En consecuencia:

Si $(X_1,X_2,...,X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una v.a. X donde $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 conocido, un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

<u>Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianza desconocida</u>

Nuevamente como se trata de encontrar un intervalo de confianza para μ nos basamos en la esperanza muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} X_i$ que sabemos es un buen estimador de μ. Pero ahora no podemos usar como pivote a

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

porque desconocemos σ y una condición para ser pivote es que, excepto por el parámetro a estimar (en este caso μ), todos los parámetros que aparecen en él deben ser conocidos. Entonces proponemos como pivote una variable aleatoria definida en forma parecida a Z pero reemplazando σ por un estimador adecuado.

Ya vimos que la varianza muestral definida

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

donde $\overline{X}$ es la esperanza muestral, es un estimador insesgado de la varianza poblacional $V(X)$, es decir, $E(S^2) = V(X) = \sigma^2 \quad \forall n$. Entonces estimamos σ con S y proponemos como pivote a la variable aleatoria

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}.$$

Pero para poder usar a *T* como pivote debemos conocer su distribución.

Se puede probar que la distribución de *T* es una distribución llamada ***Student con parámetro n-1***.

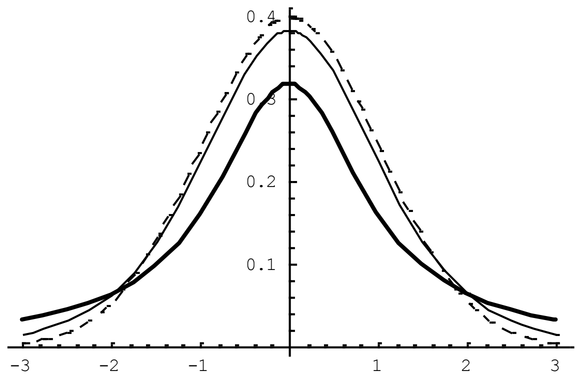
<u>Nota</u>: Una v.a. continua tiene distribución ***Student con k grados de libertad***, si su *f.d.p*. es de la forma

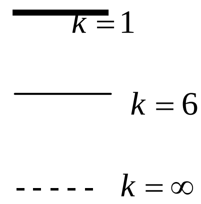
$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{(k+1)}{2}\right]}{\sqrt{\pi k}\ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\left[\left(\frac{x^2}{k}\right)+1\right]^{\frac{k+1}{2}}} \qquad -\infty < x < \infty$$

<u>Notación</u>: $T \sim t_k$

La gráfica de la *f.d.p*. de la distribución Student tiene forma de campana como la normal, pero tiende a cero más lentamente. Se puede probar que cuando $k \to \infty$ la *fdp* de la Student tiende a la *fdp* de la $N(0,\ 1)$.

En la figura siguiente se grafica *f(x)* para diferentes valores de *k*





Anotaremos $t_{\alpha,k}$ al cuantil de la Student con k grados de libertad que deja bajo la *fdp* a derecha un área de α , y a su izquierda un área de $1-\alpha$.
Luego, para construir el intervalo de confianza buscado a partir del pivote T procedemos como en los casos anteriores:

Comenzamos por plantear la ecuación

$$P\left(-t \leq T \leq t\right) = 1\text{-}\alpha\,,$$

donde la incógnita es el número real t.

Si reemplazamos la v.a. T por su expresión, tenemos sucesivamente (multiplicando por $S/\sqrt{n}$ y restando $\overline{X}$):

$$P\left(-t \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t\right) = P\left(-t\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\overline{X}-t\frac{S}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\overline{X}+t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

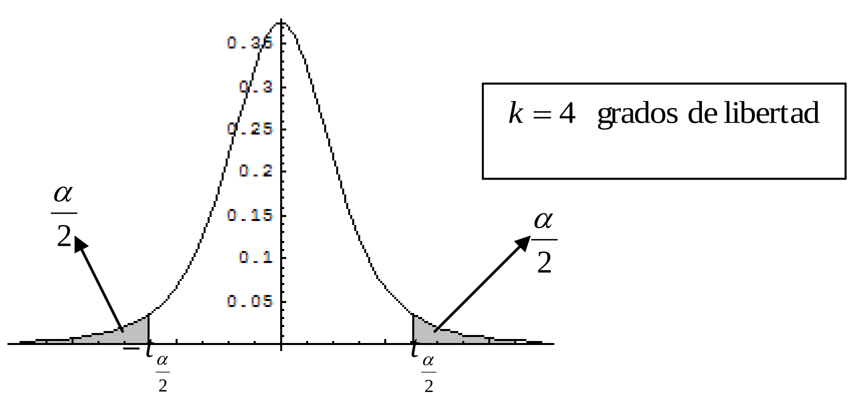
Multiplicando todos los miembros de la desigualdad por -1 (el orden de los miembros se invierte) llegamos a:

$$P\left(\overline{X}-t\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1\text{-}\alpha$$

Evidentemente, si definimos

$\begin{cases} \hat{\Theta}_1 = \overline{X} - t\dfrac{S}{\sqrt{n}} \\ \hat{\Theta}_2 = \overline{X} + t\dfrac{S}{\sqrt{n}} \end{cases}$, hemos construido dos estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ tales que $P\left(\hat{\Theta}_1 \leq \mu \leq \hat{\Theta}_2\right) = 1\text{-}\alpha$,

veamos quien es el número t que verifica la ecuación, es decir (ver figura):



$P(-t \leq T \leq t) = F(t) - F(-t) = 1 - \alpha$ donde $F(t)$ es la *Fda* para la v.a. $T \sim t_{n-1}$.

Por la simetría de la distribución t de Student se deduce fácilmente de la figura anterior que $F(-t) = 1 - F(t)$, entonces:

$F(t) - F(-t) = 2F(t) - 1 = 1 - \alpha$, o bien (ver figura anterior),

$F(t) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

Al valor de t que verifica esta ecuación se lo suele indicar $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$. En consecuencia, el intervalo de confianza bilateral al nivel de significación 1-α queda:

$$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \quad \text{Con} \quad F\left(t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

En consecuencia:

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de una v.a. *X* donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

σ^2 desconocido , un intervalo de confianza para μ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejemplo:

Se realiza una medición de control midiendo una dirección 16 veces. La media en segundos de la dirección resultó en 25.4 con una desviación estándar 1.3” . Determinar el intervalo del 95% de confianza para la media de la dirección. Comparar los resultados construyendo el intervalo con la distribución normal y con la distribución de T de Student.

α= 0.05
(1-α). 100= 95%

a) Construyo el intervalo con la distribución normal z=1.960

b) Construyo el intervalo con la distribución T de Student para 15 grados de libertad **t=2.131**

a) Queremos un intervalo de confianza para μ de nivel 95%. Por lo tanto $\alpha = 0.05$

Utilizamos primero el intervalo $\left[\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

Buscamos en la tabla de la normal estándar el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

Reemplazando:

$$\left[25.4 - 1.96 \times \frac{1.3''}{\sqrt{16}}, 25.4 + 1.96 \times \frac{1.3''}{\sqrt{16}} \right] = [24.8, 26.0]$$

b)

El intervalo a utilizar es $\left[\overline{X} - t_{15,\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{15,\frac{\alpha}{2}} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

Reemplazando:

$$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = \left[25.4 - 2.131 \frac{1.3''}{\sqrt{16}}, 25.4 + 2.131 \frac{1.3''}{\sqrt{16}} \right] = [24.7, 26.1]$$

Se observa que el ancho del intervalo es mayor al considerar la distribución T de Student. Este ancho se incrementará al disminuir los grados de libertad y se reducirá hasta coincidir con el de la distribución normal en caso contrario.
Para el ejemplo anterior lo correcto es aplicar la distribución T de Student en el caso de tener que estimar la varianza de la muestra con n<30.

<u>Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal</u>

Supongamos que se quiere hallar un intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una distribución normal.

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de una v.a. *X*, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Tomamos como estimador puntual de σ^2 a $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{1=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2$

Luego a partir de este estimador puntual construimos el estadístico $X = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

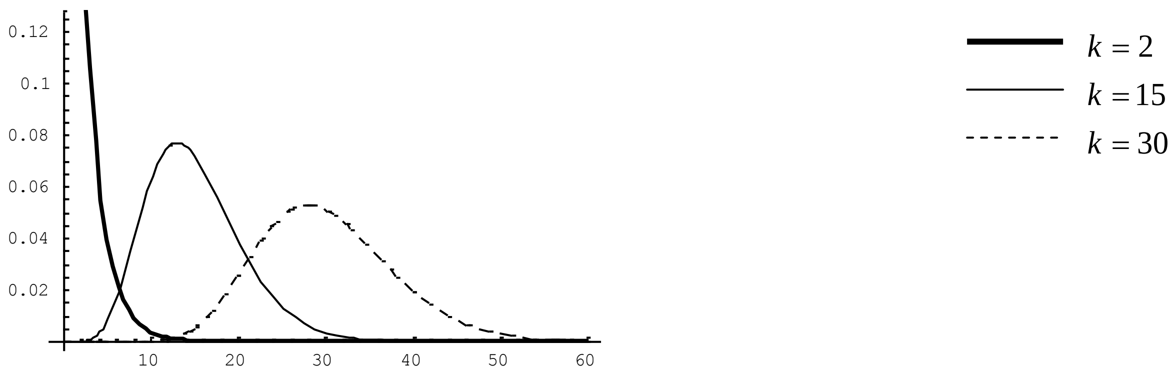
Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar σ^2 y tiene una distribución conocida, se puede probar que *X* tiene una distribución llamada ***ji-cuadrado con n-1 grados de libertad***

<u>Observación</u>: Si X es una v.a. continua se dice que tiene distribución ***ji-cuadrado con k grados de libertad*** si su f.d.p. es

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \qquad x > 0$$

Notación: X~ $\chi_k^{\ 2}$

La distribución ji-cuadrdo es asimétrica. En la figura siguiente se grafica la densidad para diferentes valores de *k*



Anotaremos $\chi^2_{\alpha,k}$ al cuantil de la ji-cuadrado con *k* grados de libertad que deja bajo la *fdp* a derecha un área de α , y a su izquierda un área de $1-\alpha$.

Propiedades:

1- Se puede probar que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$ entonces $Z = X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + ... + X_n^{\ 2}$ tiene distribución ji-cuadrado con *n* grados de libertad.

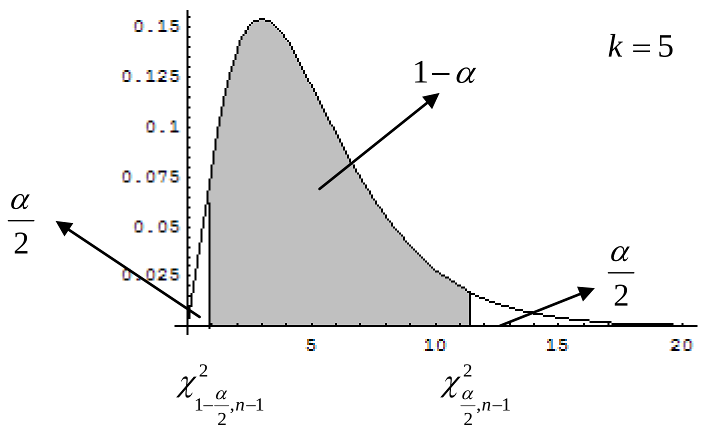
2- Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes tal que X_i tiene distribución ji-cuadrado con k_i grados de libertad, entonces $Z = X_1 + X_2 + ... + X_n$ tiene distribución ji-cuadrado con *k* grados de libertad donde $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$

3- Si $X \sim \chi_k^2$ entonces ***para k grande*** $\sqrt{2X} \sim N\left(\sqrt{2k-1},\ 1\right)$ aproximadamente.

Para desarrollar el intervalo de confianza planteamos hallar dos números *a* y *b* tales que

$$P(a \leq X \leq b) = 1-\alpha \qquad \text{es decir} \qquad P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1-\alpha$$

Se puede probar que la mejor elección de *a* y *b* es: $a = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ y $b = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$



Por lo tanto

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha$$

y despejando σ^2 se llega a

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Entonces

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ es una muestra aleatoria de una v.a. X, donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, un intervalo de confianza para σ^2 de nivel $1-\alpha$ es

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}};\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$$

<u>Observación</u>: un intervalo de confianza para σ de nivel $1-\alpha$, es $\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}};\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right)$

Ejemplo:
Se quiere evaluar la habilidad en bisectar y leer de un operador con un teodolito de 1”. Para eso realiza 20 lecturas a una señal bien definida y distante. La desviación estándar de la muestra es de 1.8”. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la varianza poblacional.

Solución:
La v.a. de interés es *X*: “Valor de una dirección determinada”
Se asume que $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ con μ y σ desconocidos. Sólo nos interesa estudiar la varianza.

Tenemos que $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.975,19} = 8.91$ y

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{0.025,19} = 32.85$

Además $S^2 = 3.24$

Por lo tanto el intervalo es

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}};\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \right) = \left(\frac{(20-1)\times 3.24}{32.85};\ \frac{(20-1)\times 3.24}{8.91} \right) = (1.87;6.91)$$

Y un intervalo para σ es $\left(\sqrt{0.00884};\ \sqrt{0.0326}\right) = (1.4'';\ 2.6'')$
Esto se interpreta de la siguiente manera: estoy midiendo de tal manera que con una frecuencia de 95 sobre 100 veces que construya un intervalo de confianza, o que repita el experimento, este va a contener a la varianza poblacional.
En este caso si supongo que la varianza poblacional debería ser 1”^{2} lo realizado no alcanza para decir que he logrado el objetivo satisfactoriamente.

Intervalo de confianza para la diferencia de dos medias, varianzas conocidas

Supongamos que tenemos dos variables aleatorias ***independientes*** normalmente distribuidas:
$\begin{cases} X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \end{cases}$ y suponemos que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas.

Sean además
$(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1})$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 de X_1
$(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_2})$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 de X_2.

Deseamos construir un intervalo al nivel de confianza $1-\alpha$ para la diferencia de esperanzas $\mu_1 - \mu_2$.
Ya sabemos cuál es la distribución del promedio de variables aleatorias normales independientes:

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = \dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \overline{X}_2 = \dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i} \sim N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{cases}$$

Consideremos ahora la diferencia $\overline{Y} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Si $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ tienen distribución normal y son independientes, su diferencia también es normal, con esperanza igual a la diferencia de las esperanzas y la varianza es la suma de las varianzas:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Por lo tanto

$Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$, es decir, tiene distribución normal estandarizada.

La v.a. Z cumple con toda las condiciones para servir de pivote y construiremos nuestro intervalo en forma análoga a cómo hicimos en los casos anteriores:
Comenzamos por plantear la ecuación

$$P(-z \le Z \le z) = 1\text{-}\alpha,$$

donde la incógnita es el número real z.

Reemplazamos la v.a. Z por su expresión y tenemos sucesivamente (multiplicando por $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ y restando $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$):

$$P\left(-z \le \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le z\right) = P\left(-z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2) \le z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) =$$

$$= P\left(-(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le -(\mu_1 - \mu_2) \le -(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando todos los miembros de la desigualdad por -1 (el orden de los miembros se invierte) llegamos a:

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le (\mu_1 - \mu_2) \le \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Evidentemente, si definimos

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_1 = X_1 - X_2 - z\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \\ \hat{\Theta}_2 = X_1 - X_2 + z\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}, \end{cases}$$

Habremos construido dos estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ tales que $P\left(\hat{\Theta}_1 \le (\mu_1 - \mu_2) \le \hat{\Theta}_2\right) = 1\text{-}\alpha$, es decir habremos construido el intervalo de confianza bilateral deseado. Todos los elementos que forman los estadísticos $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son conocidos ya que el número *z* verifica la ecuación anterior, es decir:

$P(-z \le Z \le z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 1\text{-}\alpha$ donde $\Phi(z)$ es la *Fda* para la v.a. $Z \sim N(0,1)$

o bien, según vimos:

$\Phi(z) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ que anotamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

En consecuencia, el intervalo de confianza bilateral al nivel de significación 1-α queda:

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \quad \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Por lo tanto

Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias **independientes normalmente distribuidas**:

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2})$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$ y suponemos que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas. Un intervalo de confianza para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \quad \overline{X}_1 - \vec{X}_2 + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] \qquad (8.3)$$

<u>Ejemplo:</u>

Se utilizan dos distanciómetros para medir la misma distancia con centrado forzoso (se excluyen fuentes de incertidumbre ajenas al instrumento). Se sabe que las desviaciones estándar de las distancias son $\sigma_1 = 2mm + 3ppm$ y $\sigma_2 = 3mm + 3ppm$ respectivamente. Se toman dos muestras

aleatorias, $n_1 = 12$ mediciones con el primer distanciómetro y $n_2 = 10$ observaciones con el segundo. Las distancias promedio son $x_1 = 30.875$ m y $x_2 = 30.869$ m.
Asumiendo que ambas muestras provienen de distribuciones normales, construya un intervalo de confianza de nivel 90% para la diferencia entre las medias de la distancia.
Solución:
Como $1-\alpha = 0.90$ entonces $\alpha = 0.10$
Por lo tanto $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.65$
El intervalo será

$$\left[(30.875-30.869)-1.65\sqrt{\frac{0.002^2}{12}+\frac{0.003^2}{10}};(30.875-30.869)+1.65\sqrt{\frac{0.002^2}{12}+\frac{0.003^2}{10}}\right]$$

O sea $\left[0.004;\ \ 0.008\right]$

Si se conocen las desviaciones estándar y los tamaños de las muestras son iguales (es decir $n_1 = n_2 = n$), entonces puede determinarse el tamaño requerido de la muestra de manera tal que la longitud del intervalo sea menor que l

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n}} \le l \qquad \Rightarrow \qquad n \ge \left(\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l}\right)^2 \left(\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}\right)$$

Si las muestras aleatorias se toma de una distribución normal, donde σ_1 y σ_2 son ***desconocidos***, $n_1 \ge 30$ y $n_2 \ge 30$, entonces se puede probar que al reemplazar σ_1 por S_1 y σ_2 por S_2, el estadístico

$$\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \approx N(0,1) \quad \textit{aproximadamente}$$

y puedo construir el intervalo para $\mu_1-\mu_2$ como antes:

$$\left[\overline{X}_1-\overline{X}_2-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}_1-\overline{X}_2+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right], \qquad (8.4)$$

pero su nivel es aproximadamente $1-\alpha$

Para muestras tomadas de dos poblaciones normales, o para muestras de tamaño $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$, de dos poblaciones cualesquiera, el intervalo de confianza dado anteriormente en (8.3), proporciona buenos resultados.

En el caso de que la población de la que se extrae la muestra no sea normal pero $n_1 \geq 30$ y, el $n_2 \geq 30$ nivel de confianza del intervalo (8.3) es aproximadamente $1-\alpha$.

Intervalo de confianza para la diferencia de dos medias, varianzas desconocidas

Nuevamente supongamos que tenemos dos variables aleatorias ***independientes*** normalmente distribuidas:

$\begin{cases} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases}$ y suponemos que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son ***desconocidas*** .

Sean además
$(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1})$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 de X_1
$(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_2})$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 de X_2 .
Pero ahora n_1 ***o*** n_2 ***no son mayores que 30***
Supongamos que es razonable suponer que las varianzas desconocidas son iguales, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$
Deseamos construir un intervalo al nivel de confianza $1-\alpha$ para la diferencia de esperanzas $\mu_1 - \mu_2$

Sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ las medias muestrales y S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales. Como S_1^2 y S_2^2 son los estimadores de la varianza común σ^2 , entonces construimos un ***estimador combinado*** de σ^2 . Este estimador es

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Se puede comprobar que es un estimador insesgado de σ^2 .
Se puede probar que el estadístico

$$T = \frac{\vec{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ tiene distribución Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad

Por lo tanto se plantea la ecuación

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \right) = 1 - \alpha$$

o

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} \le \frac{\vec{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \le t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\right) = 1-\alpha$$

Despejamos $\mu_1 - \mu_2$ y queda la expresión

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

Entonces

Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes normalmente distribuidas:

$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1{}^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ y suponemos que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 **son desconocidas e iguales**, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

Un intervalo de confianza para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ de nivel $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} ; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right] \quad (8.5)$$

En muchas ocasiones ***no es razonable suponer que las varianzas son iguales***. Si no podemos garantizar que las varianzas son iguales, para construir un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para $\mu_1 - \mu_2$ utilizamos es estadístico

$$T^* = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Se puede probar que T^* tiene ***aproximadamente*** una distribución Student con ν grados de libertad donde

$$\nu = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$$

si ν no es entero, ***se toma el entero más próximo a*** ν

Por lo tanto planteamos la ecuación

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \le T^* \le t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\right) = 1-\alpha$$

Y despejando $\mu_1 - \mu_2$ el intervalo es

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

Entonces

Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes normalmente distribuidas:

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ y suponemos que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son **desconocidas y distintas**

Un intervalo de confianza para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ de nivel aproximadamente $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right] \qquad (8.6)$$

Donde

$$\nu = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \dfrac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$$

Ejemplo 1:
Una muestra de 6 soldaduras de un tipo tenía promedio de prueba final de resistencia de 83.2 ksi y desviación estándar de 5.2. Y una muestra de 10 soldaduras de otro tipo tenía resistencia promedio de 71.3 si y desviación estándar de 3.1. Supongamos que ambos conjuntos de soldaduras son muestras aleatorias de poblaciones normales. Se desea encontrar un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las medias de las resistencias de los dos tipos de soldaduras.

Solución:
Ambos tamaños muestrales son pequeños y las muestras provienen de poblaciones normales. No podemos asumir igualdad de varianzas. Entonces aplicamos (8.6)

Tenemos que $\bar{x}_1 = 83.2$, $\bar{x}_2 = 71.3$, $s_1 = 5.2$, $s_2 = 3.1$, $n_1 = 6;$ $n_2 = 10$

Como $1-\alpha = 0.95$ entonces $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

Además

$$\nu = \frac{\left({S_1^2}/{n_1} + {S_2^2}/{n_2} \right)^2}{\frac{\left({S_1^2}/{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left({S_2^2}/{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}} = 7.18 \approx 7$$

Entonces buscamos en la tabla de la Student $t_{0.025,7} = 2.365$

Por lo tanto el intervalo es

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, \quad \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right] =$$

$$= \left[83.2 - 71.3 - 2.365 \sqrt{\frac{5.2^2}{6} + \frac{3.1^2}{10}}; \;\; 83.2 - 71.3 + 2.365 \sqrt{\frac{5.2^2}{6} + \frac{3.1^2}{10}} \right] = \left[6.37, \;\; 17.43 \right]$$

<u>Ejemplo 2</u>

Si por ejemplo me interesara evaluar la posibilidad de que una marca se hubiera desplazado verticalmente. Tomadas dos muestras en días distintos, se calculan las medias, las varianzas de ambas muestras. Se utiliza el estadístico T^* para decidir si hubo un desplazamiento. En este caso debería esperarse que $\mu_1 - \mu_2 = 0$

<u>Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos distribuciones normales</u>

Supongamos que se tienen dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente. Se desea encontrar un intervalo de nivel $1-\alpha$ para el cociente de las dos varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Se toma una muestra aleatoria de tamaño n_1 de una de las poblaciones y una muestra de tamaño n_2 de la otra población. Sean S_1^2 y S_2^2 las dos varianzas muestrales.

Consideramos el estadístico

$$F = \frac{{S_2^2}/{\sigma_2^2}}{{S_1^2}/{\sigma_1^2}}$$

Notar que F contiene al parámetro de interés $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, pues $F = \frac{S_2^2 \times \sigma_1^2}{S_1^2 \times \sigma_2^2}$

Se puede probar que F tiene una distribución llamada Fisher con $n_2 - 1$ y $n_1 - 1$ grados de libertad.

Observación:
Sea X una variable aleatoria continua, se dice que tiene distribución Fisher con u grados de libertad en el numerador y v grados de libertad en el denominador si su *fdp* es de la forma

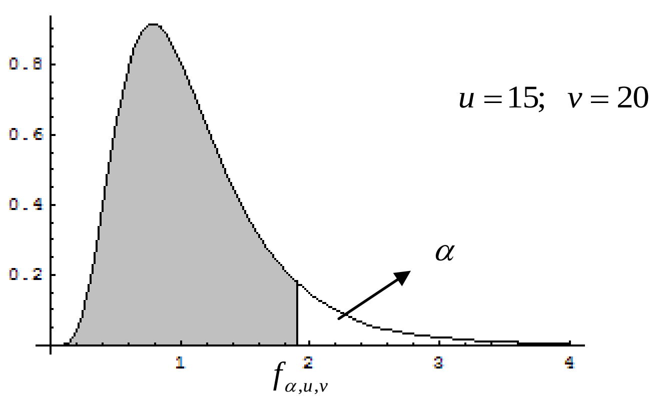
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{u}{2}} x^{\frac{u}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)x+1\right]^{\frac{u+v}{2}}} \qquad 0 < x < \infty$$

En particular si W e Y son variables aleatorias independientes ji-cuadrado con u y v grados de libertad respectivamente, entonces el cociente

$$F = \frac{W/u}{Y/v}$$

Tiene una distribución Fisher con u grados de libertad en el numerador y v grados de libertad en el denominador.
Notación: $F \sim F_{u,v}$

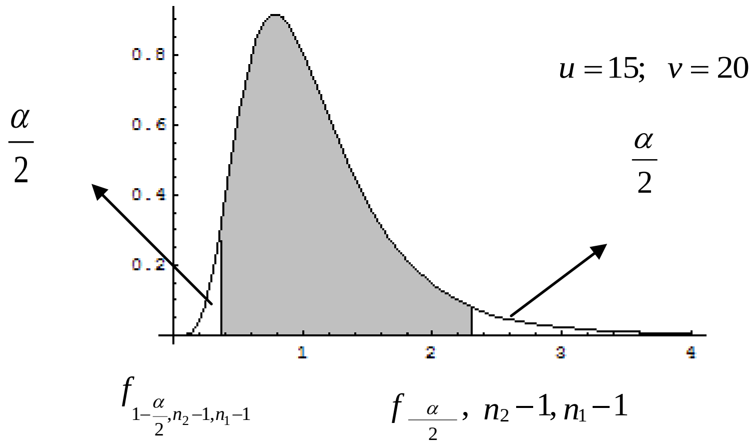
La gráfica de una distribución Fisher es similar a la de una ji-cuadrado, es asimétrica. Anotamos $f_{\alpha,u,v}$ al cuantil que deja a su derecha un área de α bajo la curva de densidad.



Existe la siguiente relación entre los cuantiles de una $F_{u,v}$ y de una $F_{v,u}$

$$\boxed{f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}}}$$

Planteamos la siguiente ecuación $P(a \le F \le b) = 1 - \alpha$ y se puede probar que la mejor elección de *a* y *b* es: $a = f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}$ y $b = f_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}$



Entonces

$$P\left(f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \le \frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2} \le f_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \right) = 1 - \alpha$$

Despejando el cociente $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ queda :

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \right) = 1 - \alpha$$

Por lo tanto

Si se tienen dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente, entonces un intervalo de nivel $1-\alpha$ para el cociente de las dos varianzas $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ es

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} ; \; \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \right]$$

Ejemplo

Al medir el desnivel entre dos marcas mediante dos equipos distintos tomo dos muestras. La primer muestra con el equipo A es de tamaño 6 con una varianza de 2.3mm² y la segunda con un equipo B de tamaño 10 con una varianza de 1mm². Suponga que para cada equipo se genera una muestra aleatoria de una población normal. ¿Se puede concluir que las varianzas del desnivel medido con el equipo A es distinta de la varianza del desnivel medido con el equipo B? Utilizar $\alpha = 0.05$

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} ; \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \right]$$

$S_1^2 = 2.3$; $n_1 = 6$

$S_2^2 = 1$; $n_2 = 10$

$$\left[\frac{2.3}{1} \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}, n1-1, n2-1}} ; \quad \frac{2.3}{1} f_{\frac{\alpha}{2}, n2-1, n1-1} \right]$$

El intervalo de confianza construido será
[0.5 ; 10]

El cociente esperado entre las varianzas estará entre estos límites con una probabilidad de 0.95

Resumen:
Hemos visto que los parámetros poblacionales (medias y varianzas) serán estimados mediante un número finito de observaciones. A ese número finito de observaciones se lo llamará muestra.
La construcción de Intervalos de Confianza con los datos de las muestras nos permitirá evaluar la fiabilidad de los métodos empleados en la toma de muestras determinando la probabilidad con que esos intervalos contendrán los parámetros poblacionales.
Necesitaremos construir intervalos de confianza para las cotas compensadas y para las observaciones compensadas para la varianza del ajuste para poder evaluar los desacuerdos con que nos enfrentaremos al interactuar con marcos o redes pre existentes o **cualquier hipótesis de trabajo**.
Es decir, poder justificar por qué se toma determinada decisión (de rechazo o no) con los resultados del trabajo.

Test de Hipótesis

Hasta ahora hemos estudiado el problema de estimar un parámetro desconocido a partir de una muestra aleatoria.

En muchos problemas se requiere tomar una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Esta proposición recibe el nombre de ***hipótesis estadística***, y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como ***prueba o test de hipótesis***.

Como se emplean distribuciones de probabilidad para representar poblaciones, también podemos decir que una hipótesis estadística es una proposición sobre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, donde la hipótesis involucra a uno más parámetros de esta distribución.

Por ejemplo, supongamos que un instrumento mide distancias con una media $\boldsymbol{\mu}$ y que al comparar sus mediciones contra una base de calibración se encuentran diferencias entre las medias muestreadas y las medias de control. Se debe emitir una opinión fundada acerca de la variable aleatoria de interés en este caso es *X*: “distancia medida”.
La preocupación del profesional consiste en que el instrumento pueda materializar correctamente el sistema métrico decimal.
Entonces, la pregunta es: ¿es factible que esta muestra pueda provenir de una v.a. con media menor o mayor?
Éste es el tipo de preguntas que las pruebas de hipótesis están diseñadas para responder. Veremos cómo construir una prueba de hipótesis, pero podemos decir que en general se basa en construir a partir de la muestra aleatoria un ***estadístico***, y según el valor que tome este ***estadístico de prueba*** se aceptará o se rechazará la hipótesis.

Supongamos que se han hecho 30 mediciones y se ha obtenido una media muestral $\overline{X} = 99.993m$ y una desviación estándar muestral *s = 0.010*. Y que el valor de control es μ = 100.
Hay dos interpretaciones posibles de esta observación:

1- La media poblacional es realmente mayor o igual que 100.000, y la media muestral es menor que 100 debido a la ***variabilidad*** propia de la variable aleatoria $\overline{X}$
2- La media poblacional es en realidad menor que 100, y la media muestral refleja este hecho.

Estas dos explicaciones tienen nombres: la primera se llama ***hipótesis nula***; la segunda es la ***hipótesis alternativa***.
En la mayoría de las situaciones la hipótesis nula dice que el efecto que indica la muestra es atribuible solamente a la variación aleatoria del estadístico de prueba.
La hipótesis alternativa establece que el efecto que indica la muestra es verdadero.
Para hacer las cosas más precisas, todo se expresa mediante símbolos. La hipótesis nula se denota por H_0, la hipótesis alternativa se denota con H_1. Como es usual la media poblacional se anota μ. Por lo tanto se tiene

$$H_0 : \mu \geq 100.000 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu < 100.000 \quad \text{(hipótesis alternativa unilateral)}$$

Esencialmente, para realizar una prueba de hipótesis se pone la hipótesis nula en juicio. Se asume que H_0 es verdadera, de la misma manera como se empieza en un juicio bajo el supuesto de que un acusado es inocente. La muestra aleatoria proporciona la evidencia.

Las hipótesis son siempre proposiciones ***sobre los parámetros de la población o distribución bajo estudio***, no proposiciones sobre la muestra.
Otros tipos de hipótesis que podrían formularse son

$$H_0 : \mu \leq 100.000 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > 100.000 \qquad \text{(hipótesis alternativa unilateral)}$$

o

$$H_0 : \mu = 100.000 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 100.000 \qquad \text{(hipótesis alternativa bilateral)}$$

En el ejemplo tenemos $X_1, X_2, ..., X_{30}$ muestra aleatoria de la v.a. *X* definida anteriormente.
Como estamos haciendo una hipótesis sobre la media poblacional es razonable tomar como estadístico de prueba a $\overline{X}$. El valor observado de la media muestral es $\overline{X} = 99.993$.
Si el valor de $\overline{X}$ es muy "menor" que 100.000 entonces se considera que hay evidencia en contra H_0 y se la rechaza, aceptando la hipótesis alternativa.
Si el valor de $\overline{X}$ no es "muy menor" que 100.000 entonces se considera que no hay evidencia en contra H_0 y se rechaza la hipótesis alternativa.
Ya veremos cómo construir una ***regla de decisión***, supongamos ahora que tenemos la siguiente regla:

$$\begin{cases} se \quad rechaza \ H_0 \quad si \quad \overline{X} < 99.997 \\ se \quad acepta \quad H_0 \quad si \quad \overline{X} \geq 99.997 \end{cases}$$

El intervalo $\left(99.997, \quad \infty \right)$ es la ***zona de aceptación.***

La región $\left(-\infty; \quad 99.997 \right)$ es la ***zona de rechazo o región crítica.***

Mientras que 99.997 es el ***punto crítico***.

Como estamos tomando una decisión basados en el valor de un estadístico podemos cometer dos tipos de errores: rechazar H_0 cuando ésta es verdadera, es decir el estadístico toma valores en la zona de rechazo cuando H_0 es verdadera; o aceptar H_0 cuando ésta es falsa, es decir que el estadístico tome valores en la zona de aceptación cuando H_0 es falsa.
El primero se conoce como ***error de tipo I***, y el segundo como ***error de tipo II***.
Debido a que la decisión se basa en variables aleatorias es posible asociar probabilidades a los errores de tipo I y II, específicamente anotamos

$$\alpha = P(error \quad de \quad tipo \quad I)$$

$$\beta = P(error \quad de \quad tipo \quad II)$$

A $\alpha = P(error \quad de \quad tipo \quad I)$ se lo conoce como ***nivel de significancia del test***.

Para calcular estas probabilidades debemos conocer la distribución del estadístico de prueba en el caso de ser H_0 verdadera, es decir debemos conocer la distribución del estadístico de prueba "bajo H_0".
En el ejemplo anterior la muestra es grande, ya sabemos que por T.C.L. el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - 100.000}{s/\sqrt{n}} \approx N(0,1) \quad \textbf{\textit{si}} \;\; H_0 \;\; \textbf{\textit{es verdadera,}} \;\; \text{o sea} \quad Z = \frac{\overline{X} - 100.000}{0.010/\sqrt{30}} \approx N(0,1)$$

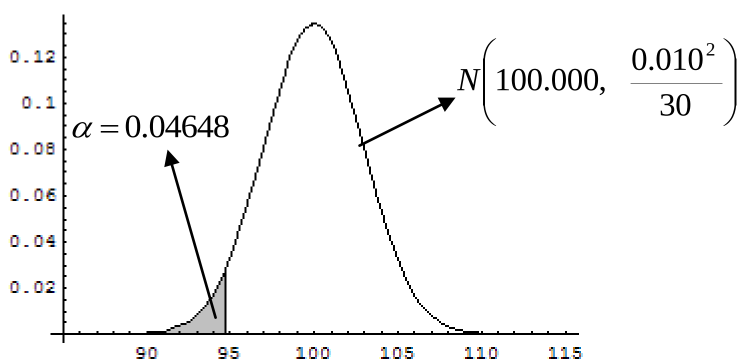
Entonces para calcular α planteamos:

$$\alpha = P(error \quad de \quad tipo \quad I) = P\left(rechazar \quad H_0 / H_0 \quad es \quad V \right) = P\left(\overline{X} < 99.997 / \mu = 100\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 100.000}{0.010/\sqrt{30}} < \frac{99.997 - 100.00}{0.010/\sqrt{30}} \right) \approx \Phi\left(\frac{99.997 - 100.000}{0.010/\sqrt{30}} \right) = \Phi(-1.6835) = 1 - 0.95352 = 0.04648$$

Esto significa que el 4.64% de las muestras aleatorias conducirán al rechazo de la hipótesis $H_0 : \mu \geq 100$ cuando el verdadero μ sea mayor o igual que 100.

En este caso el gráfico de la zona de rechazo es



Del gráfico anterior vemos que podemos reducir α al aumentar la zona de aceptación. Por ejemplo supongamos que ahora la regla de decisión es

$$\begin{cases} se \;\; rechaza \;\; H_0 \;\; si \;\;\; \overline{X} < 99.996 \\ se \;\; acepta \;\; H_0 \;\; si \;\; \overline{X} \geq 99.996 \end{cases}$$

Entonces $\alpha = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; I) = P\left(rechazar \;\; H_0 / H_0 \;\; es \;\; V \right) = P\left(\overline{X} < 99.996 / \mu = 100\right) =$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 100.000}{0.010 / \sqrt{30}} < \frac{99.996 - 100.000}{0.010 / \sqrt{30}} \right) \approx \Phi\left(\frac{99.996 - 100.000}{0.010 / \sqrt{30}} \right) = \Phi(-2.19) = 1 - 0.98899 = 0.011$$

También es importante examinar la probabilidad de cometer error de tipo II, esto es

$$\beta = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; II) = P(aceptar \; H_0 / H_0 \; es \; falsa)$$

$$\beta = P(error \;\; de \;\; tipo \;\; II) = P(aceptar \; H_0 / H_0 \; es \; falsa) = P\left(\overline{X} \geq 99.997 / \mu \neq 100\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{0.010 / \sqrt{30}} \geq \frac{99.997 - \mu}{0.010 / \sqrt{30}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{99.997 - \mu}{0.010 / \sqrt{30}} \right) = \beta(\mu)$$

Donde anotamos con μ a la verdadera media poblacional ***desconocida***.
NO podemos entonces calcular β pues se desconoce el verdadero valor de μ.
Podría plantearse la siguiente pregunta: si el verdadero μ fuera por ejemplo $\mu = 99.998$ ¿cuál sería la probabilidad de aceptar la hipótesis nula siendo falsa?, entonces calculamos

$$\beta(94) = P\left(\frac{\overline{X} - 99.998}{0.010 / \sqrt{30}} \geq \frac{99.997 - 99.998}{0.010 / \sqrt{30}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{99.997 - 99.998}{0.010 / \sqrt{30}} \right) = 1 - \Phi(0.55) = 1 - 0.70884 = 0.29$$

Es decir, si la media verdadera fuera $\mu = 99.998$, entonces el test se equivocaría el 20% de las veces aceptando la hipótesis nula cuando es falsa.

Veamos ahora cómo construir una regla de decisión sobre la media de una población.

<u>Prueba de hipótesis sobre la media, varianza conocida</u>

Supongamos que la variable aleatoria de interés X tiene una media μ y una varianza σ^2 conocida. Asumimos que X tiene distribución normal, es decir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Supongamos que tenemos las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Donde μ_0 es una constante específica.

Es razonable tomar como estadístico de prueba al promedio muestral $\overline{X}$. Bajo las suposiciones hechas tenemos que $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

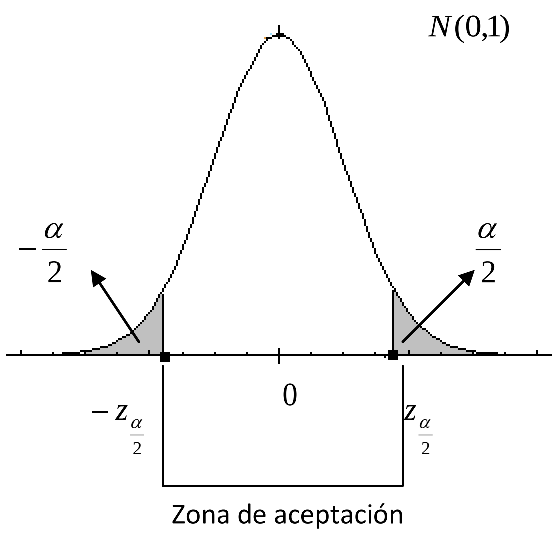
Se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de la población.

Si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera, entonces $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo tanto el estadístico

$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ tiene distribución $N(0,1)$ si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera

Tomamos a Z como ***estadístico de prueba***

Si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera entonces $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$



Es evidente que una muestra que produce un valor del estadístico de prueba que cae en las colas de la distribución de Z será inusual si $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera, por lo tanto esto es un indicador que H_0 es falsa.

Entonces la regla de decisión es:

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \ |Z| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \ |Z| \le z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Notar que la probabilidad que la estadística de prueba tome un valor que caiga en la zona de rechazo si H_0 es verdadera es igual a α .

Ejemplo:

El porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso es 5.5. Para probar si el verdadero promedio de porcentaje es 5.5 para una planta de producción en particular, se analizaron 16 muestras obtenidas de manera independiente. Supongamos que el porcentaje de SiO_2 en una muestra está normalmente distribuido con $\sigma = 3$, y que $\bar{x} = 5.25$.

¿Indica esto de manera concluyente que el verdadero promedio de porcentaje difiere de 5.5?. Utilice $\alpha = 0.01$

Solución:

La v.a. de interés es *X*: "porcentaje de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso"

Asumimos que $X \sim N(\mu, 3^2)$

Podemos plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu = 5.5 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 5.5$$

Tenemos una muestra de tamaño $n = 16$ que dio un promedio muestral $\bar{x} = 5.25$

Como $\alpha = 0.01$ entonces $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575$

Por lo tanto la regla de decisión es
$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \ \left| \dfrac{\bar{X} - 5.5}{3/\sqrt{16}} \right| > 2.575 \\ aceptar \quad H_0 \quad si \ \left| \dfrac{\bar{X} - 5.5}{3/\sqrt{16}} \right| \le 2.575 \end{cases}$$

El estadístico $\left| \dfrac{\bar{X} - 5.5}{3/\sqrt{16}} \right|$ toma el valor $z_0 = \left| \dfrac{5.25 - 5.5}{3/\sqrt{16}} \right| = 0.333333$

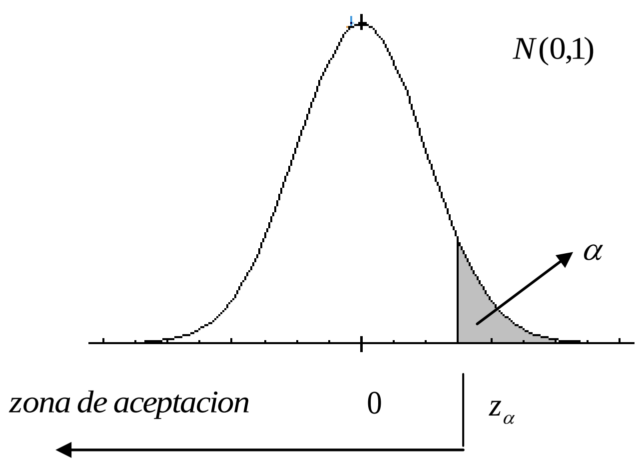
Como $z_0 = 0.333333 < 2.575 = z_{\frac{0.01}{2}}$ se acepta H_0

También podemos desarrollar tests o pruebas de hipótesis para el caso de que la hipótesis alternativa es unilateral.
Supongamos las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

En este caso la región crítica debe colocarse en la cola superior de la distribución normal estándar y el rechazo de H_0 se hará cuando el valor calculado de z_0 sea muy grande, esto es la regla de decisión será

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha \end{cases}$$

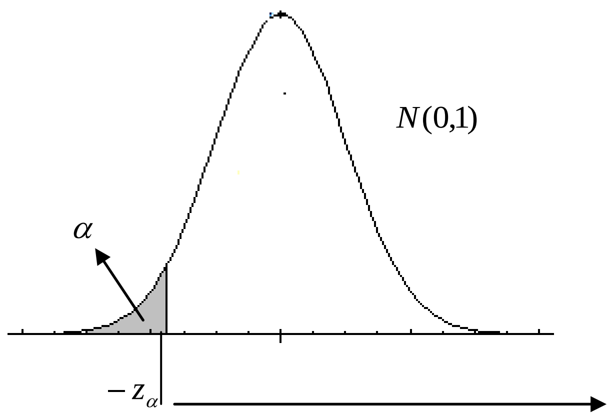


De manera similar para las hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{Contra} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

se calcula el valor del estadístico de prueba z_0 y se rechaza H_0 si el valor de z_0 es muy pequeño, es decir

la regla de decisión será
$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha \end{cases}$$



Ejemplo:
Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de $\sigma = 25$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 20 focos, la cual resulta tener una duración promedio de $\bar{x} = 1040$ horas
¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que la duración promedio del foco es mayor que 1000 horas?. Utilice $\alpha = 0.05$.

Solución:
La v.a. de interés es X: "duración en horas de un foco tomado al azar"
Asumimos $X \sim N(\mu, 25^2)$
Podemos plantear las hipótesis

$$H_0 : \mu = 1000 \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu > 1000$$

Tenemos una muestra de tamaño $n = 20$ que dio un promedio muestral $\bar{x} = 1040$
Como $\alpha = 0.05$ entonces $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Por lo tanto la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}} > 1.645 \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}} \le 1.645 \end{cases}$

El estadístico toma el valor $Z = \dfrac{\bar{X} - 1000}{25/\sqrt{20}}$ toma el valor $z_0 = \dfrac{1040 - 1000}{25/\sqrt{20}} = 7.1554$

Como $z_0 = 7.1554 > 1.645 = z_{0.05}$ se rechaza H_0

P- valor

Hasta ahora se dieron los resultados de una prueba de hipótesis estableciendo si la hipótesis nula fue o no rechazada con un valor especificado de α o nivel de significancia.
A menudo este planteamiento resulta inadecuado, ya que no proporciona ninguna idea sobre si el valor calculado del estadístico está apenas en la región de rechazo o bien ubicado dentro de ella. Además, esta forma de establecer los resultados impone a otros usuarios el nivel de significancia predeterminado.
Para evitar estas dificultades, se adopta el enfoque del ***p-valor***. El ***valor p*** o ***p-valor*** es la probabilidad de que el estadístico de prueba tome un valor que sea al menos tan extremo como el valor observado del estadístico de prueba cuando la hipótesis nula es verdadera. Es así como el p-valor da mucha información sobre el peso de la evidencia contra H_0, de modo que el investigador pueda llegar a una conclusión para cualquier nivel de significancia especificado.
La definición formal del p-valor es la siguiente:

El ***valor p*** es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta el momento, es sencillo calcular el p-valor.
Si z_0 es el valor calculado del estadístico de prueba *Z*, entonces el p-valor es

a) si las hipótesis son $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$p-valor = P(|Z| > |z_0|) = 1 - P(|Z| < |z_0|) = 1 - [\Phi(|z_0|) - \Phi(-|z_0|)] = 1 - [2\Phi(|z_0|) - 1] = 2[1 - \Phi(|z_0|)]$$

b) si las hipótesis son $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu > \mu_0$

$$p-valor = P(Z > z_0) = 1 - P(Z \leq z_0) = 1 - \Phi(z_0)$$

c) si las hipótesis son $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu < \mu_0$

$$p-valor = P(Z < z_0) = \Phi(z_0)$$

Un p-valor muy chico significa mucha evidencia en contra de H_0***;*** un p-valor alto significa que no hay evidencia en contra H_0

Notar que:

Si $\alpha < p-valor$ entonces se acepta H_0 con nivel de significancia α

Si $\alpha > p-valor$ entonces se rechaza H_0 con nivel de significancia α

Ejemplos:

1- En el ejemplo anteúltimo referido al porcentaje deseado de sio_2 en cierto tipo de cemento aluminoso las hipótesis eran: $H_0 : \mu = 5.5$ contra $H_1 : \mu \neq 5.5$; y el estadístico de prueba tomó el valor $z_0 = 0.333333 < 2.575 = z_{\frac{0.01}{2}}$; por lo tanto se aceptaba H_0.

En esta caso $p-valor = P(|Z| > |z_0|) = 2[1-\Phi(|z_0|)] = 2[1-\Phi(0.33333)] = 2[1-0.62930] = 0.7414$

Como el p-valor es muy alto no hay evidencia en contra H_0. Se necesitaría tomar un valor de α mayor a 0.7414 para rechazar H_0 .

2- En el último ejemplo, sobre la duración, en horas, de un foco de 75 watts, las hipótesis eran $H_0: \mu = 1000$ contra $H_1: \mu > 1000$; y el estadístico *Z* tomó el valor $z_0 = 7.1554 > 1.645 = z_{0.05}$; por lo tanto se rechazaba H_0.

En este caso

$p-valor = P(Z > z_0) = 1-\Phi(z_0) = 1-\Phi(7.1554) \approx 0$

Como el p-valor es casi cero hay mucha evidencia en contra de H_0. Prácticamente para ningún valor de α se acepta H_0

<u>Prueba de hipótesis sobre la media de una distribución normal, varianza desconocida</u>

Cuando se prueban hipótesis sobre la media μ de una población cuando σ^2 es desconocida es posible utilizar los procedimientos de prueba dados anteriormente siempre y cuando el tamaño de la muestra sea grande ($n \geq 30$). Estos procedimientos son aproximadamente válidos sin importar si la población de interés es normal o no. Pero si la muestra es pequeña y σ^2 es desconocida debe suponerse que la distribución de la variable de interés es normal.

Específicamente, supongamos que la v.a. de interés tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ donde μ y σ^2 son desconocidas.

Supongamos las hipótesis $H_0: \mu = \mu_0$ contra $H_1: \mu \neq \mu_0$

Sea $X_1; X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n* de la v.a. *X* y sean $\overline{X}$ y S^2 la media y la varianza muestrales respectivamente.

El procedimiento se basa en el estadístico

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

El cual, ***si la hipótesis nula es verdadera***, tiene distribución ***Student con n-1 grados de libertad***.

Entonces, para un nivel α prefijado, la regla de decisión es

$$\begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad |T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad |T| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \end{cases} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{cases} rechazar \quad H_0 \quad si \quad \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \end{cases}$$

La lógica sigue siendo la misma, si el estadístico de prueba toma un valor inusual, entonces se considera que hay evidencia en contra H_0 y se rechaza la hipótesis nula. Como ahora la distribución del estadístico es Student, nos fijamos si T toma un valor t_0 en las colas de la distribución Student con *n-1* grados de libertad.

Si la alternativa es $H_1 : \mu > \mu_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \ \ H_0 \ \ si \ \ T > t_{\alpha,n-1} \\ aceptar \ \ H_0 \ \ si \ \ T \le t_{\alpha,n-1} \end{cases}$

Si la alternativa es $H_1 : \mu < \mu_0$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \ \ H_0 \ \ si \ \ T < -t_{\alpha,n-1} \\ aceptar \ \ H_0 \ \ si \ \ T \ge -t_{\alpha,n-1} \end{cases}$

Ejemplo:
Tengo que verificar el desnivel entre dos puntos el cual no puede ser menor a +7.00 por proyecto. Tomo una muestra de tamaño 6 obteniéndose una media de 6.97 y una desviación estándar muestral de 0.01m. Se puede concluir que el desnivel es menor a 7.00? Utilizar $\alpha = 0.05$ y suponer que la muestra fue tomada de una población normal.

Solución:
La v.a. de interés es *X*: "Desnivel entre dos marcas determinadas"
Asumimos que *X* tiene distribución $N(\mu,\sigma^2)$
Las hipótesis serían $H_0 : \mu = 7.0$ contra $H_1 : \mu < 7.0$
El estadístico de prueba es $T = \dfrac{\overline{X} - 7.00}{S/\sqrt{6}}$ y toma el valor $t_0 = \dfrac{6.97 - 7.00}{0.01/\sqrt{6}} = -3.0$
Buscamos en la tabla de la distribución Student $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,5} = 2.015$
Entonces como $t_0 = -3.0 < -t_{\alpha,n-1} = -t_{0.05,5} = -2.015$ se rechaza H_0, por lo tanto hay evidencia que $\mu < 7.0$

Tests de hipótesis sobre la varianza

Supongamos que se desea probar la hipótesis de que la varianza de una población normal es igual a un valor específico, por ejemplo ${\sigma_0}^2$.
Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n de una v.a. X, donde $(X_1, X_2, ..., X_n)$.
Tomamos como estimador puntual de σ^2 a $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{1=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
Luego a partir de este estimador puntual construimos el estadístico $X = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
Este estadístico contiene al parámetro desconocido a estimar σ^2 y ya sabemos que tiene una distribución llamada ***ji-cuadrado con n-1 grados de libertad***
Supongamos las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{contra} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Tomamos como estadístico de prueba a

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \quad \text{y} \quad \text{si} \quad H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \text{ es verdadera , entonces } \ X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Nuevamente, el razonamiento es: si el estadístico X que bajo $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ tiene distribución χ^2_{n-1} toma un valor "inusual", se considera que hay evidencia en contra H_0
Recordar que la distribución χ^2_{n-1} es asimétrica. Entonces la regla de decisión es

$$\begin{cases} recahzar \quad H_0 \quad si \quad X > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \quad ó \quad X < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le X \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \end{cases} \quad \text{donde} \quad X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}$$

Si $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} recahzar \quad H_0 \quad si \quad X > \chi^2_{\alpha,n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad X \le \chi^2_{\alpha,n-1} \end{cases}$

Si $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} recahzar \quad H_0 \quad si \quad X < \chi^2_{1-\alpha,n-1} \\ aceptar \quad H_0 \quad si \quad X \ge \chi^2_{1-\alpha,n-1} \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>:
Si dispongo de un equipo de nivelación que determina desniveles para una estación con una varianza de 1mm² y luego de una serie de 10 observaciones obtengo una varianza muestral de 4mm². Qué decisión tomo respecto del resultado? Asumir que los datos provienen de una distribución normal.
<u>Solución</u>:
La variable de interés es X: "Desnivel en una estación"
Los datos son $s^2 = 4mm^2$ de una muestra de tamaño $n = 10$

Las hipótesis son $H_0: \sigma^2 = 1mm^2$ contra $H_1: \sigma^2 > 1mm^2$

$$\alpha = 0.05 \quad \rightarrow \quad \chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,9} = 16.9$$

El estadístico de prueba es $X = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} = \dfrac{9 \times 4}{1}$ y toma el valor $x_0 = \dfrac{9 \times 4}{1} = \dfrac{9 \times 4}{1} = 36$

Como este último es mayor que $\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,9} = 16.9$ no puedo sostener H_0 .
Pueden suceder varias cosas, entre las observaciones hay valores que incrementan la varianza muestral o simplemente otra perspectiva es que debo cambiar mi hipótesis por una más adecuada.

Ejemplo:
Consideremos nuevamente el ejemplo visto en la sección de intervalos de confianza para la varianza sobre la máquina de llenado de botellas. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas se obtiene una varianza muestral para el volumen de llenado de $s^2 = 0.0153\,\text{oz}^2$.
Si la varianza del volumen de llenado es mayor que 0.01 oz^2, entonces existe una proporción inaceptable de botellas que serán llenadas con una cantidad menor de líquido. ¿Existe evidencia en los datos muestrales que sugiera que el fabricante tiene un problema con el llenado de las botellas? Utilice $\alpha = 0.05$ Se asume que los datos son normales.
Solución:
La variable de interés es X: "volumen de llenado de una botella tomada al azar"
Los datos son $s^2 = 0.0153$ de una muestra de tamaño $n = 20$
Las hipótesis son $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ contra $H_1 : \sigma^2 > 0.01$

$\alpha = 0.05 \quad \to \quad \chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,19} = 30.14$

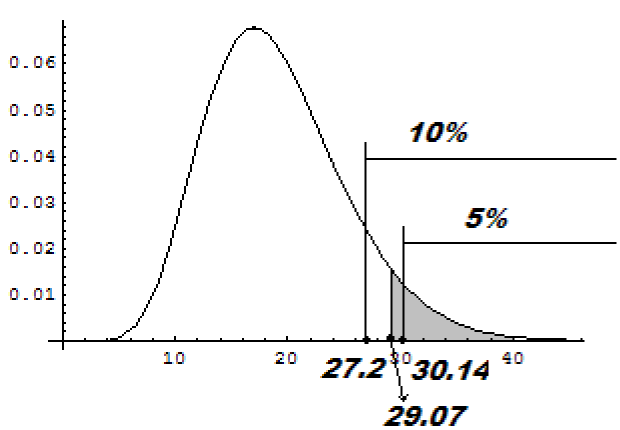
El estadístico de prueba es $X = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\,2}} = \dfrac{19 \times S^2}{0.01}$ y toma el valor

$$x_0 = \frac{19 \times S^2}{0.01} = \frac{19 \times 0.0153}{0.01} = 29.07$$

Como $x_0 = 29.07 < \chi^2_{0.05,19} = 30.14$ entonces no hay evidencia fuerte de que la varianza del volumen de llenado sea menor que 0.01
Para calcular el p-valor
$p - valor = P(X > x_0) = P(X > 29.07)$
Buscamos en la tabla de la distribución ji-cuadrado y vemos que en la fila con $\nu = 19$ no figura 29.07, pero 27.20 < 29.07 < 30.14, y además

$$\begin{cases} P(X > 27.20) = 0.10 \\ P(X > 30.14) = 0.05 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0.05 < p - valor < 0.10$$

En la figura siguiente se ilustra la situación



Tests de hipótesis sobre la igualdad de dos varianzas

Supongamos que tenemos interés en dos poblaciones normales independientes, donde las medias y las varianzas de la población son desconocidas. Se desea probar la hipótesis sobre la igualdad de las dos varianzas específicamente:
Supongamos que tenemos dos variables aleatorias ***independientes*** normalmente distribuidas:

$$\begin{cases} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases} \quad \text{y } \mu_1;\ \mu_2;\ \sigma_1^2 \text{ y } \sigma_2^2 \text{ son desconocidos}$$

y además

$(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1})$ es una muestra aleatoria de tamaño n_1 de X_1
$(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_2})$ es una muestra aleatoria de tamaño n_2 de X_2.
Sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales, S_1^2 y S_2^2 son los estimadores de σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente.
Consideramos el estadístico

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

Sabemos que F tiene una distribución llamada Fisher con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad.

Sean las hipótesis $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Tomamos como estadístico de prueba a $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

Vemos que $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$ si $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ es verdadera
Recordando que la distribución Fisher es asimétrica, la regla de decisión es

$$\begin{cases} rechazar \ \ H_0 \ \ si \ \ F > f_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \ \ ó \ \ F < f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \\ aceptar \ \ H_0 \ \ si \ \ f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \le F \le f_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \end{cases}$$

Si $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \ \ H_0 \ \ si \ \ F > f_{\alpha, n_1-1, n_2-1} \\ aceptar \ \ H_0 \ \ si \ \ F \le f_{\alpha, n_1-1, n_2-1} \end{cases}$

Si $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ entonces la regla de decisión es $\begin{cases} rechazar \;\; H_0 \;\; si \;\; F < f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1} \\ aceptar \;\; H_0 \;\; si \;\; F \geq f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1} \end{cases}$

Ejemplo:
Al medir el desnivel entre dos marcas mediante dos equipos distintos tomo dos muestras. La primer muestra con el equipo A es de tamaño 6 con una varianza de 2.3mm² y la segunda con un equipo B de tamaño 10 con una varianza de 1mm². Suponga que para cada equipo se genera una muestra aleatoria de una población normal. ¿Se puede concluir que la varianza del desnivel medido con el equipa A es mayor que la varianza del desnivel medido con el equipo B? Utilizar $\alpha = 0.05$

Solución:
Las variables aleatorias de interés son
X_1: "Desnivel medido por el equipo A"
X_2: "Desnivel medido por el equipo B"
Asumimos que $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

Las hipótesis son $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
Los datos son $s_1^2 = 2.3$ y $s_2^2 = 6$
$n_1 = 6$; $n_2 = 10$
El estadístico de prueba es $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ y toma el valor $f_0 = \dfrac{2.3}{6} = 0.383$
Buscamos en la tabla de la distribución Fisher $f_{0.05,5,9} = 3.48$
Como $f_0 = \dfrac{2.3}{6} = 0.383 < 3.48 = f_{0.05,5,9}$ no se rechaza $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Utilizando un software de estadística encontramos que el p-valor es 0.8484847