



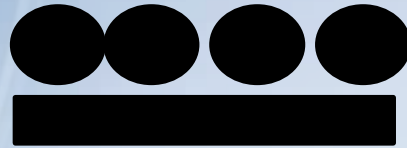
Procesamiento digital de señales

Semana 12.

Transformadas Wavelet – parte 2

Versión 13 de Noviembre 2017

Dra. María del Pilar Gómez Gil
Otoño 2017
Coordinación de computación
INAOE



Tema Transformadas wavelet-parte 2

Funciones wavelets (ondoletas)

Problema con el tamaño de ventana

- Cuando las frecuencias varían fuertemente en las diferentes partes de la señal, ningún tamaño de ventana será bueno, pues se perderá información
- Por ejemplo, ver este [programa](#) que genera diferentes espectrogramas con diferentes ventanas
- En estos casos conviene usar funciones wavelet, las cuales realizan diferentes “barridos” con diferentes resoluciones.

Análisis wavelet

- Actualmente se aplica de manera importante en señales ruidosas y no periódicas (Addison, 2002)
- Consiste básicamente en calcular una correlación entre una señal y un conjunto de funciones, que forman una base, conocidas como “funciones wavelet”
- La similitud entre las wavelets (ondeletas) y la señal siendo analizada se calcula para diferentes pasos de tiempo y escalas (frecuencias), lo que permite una representación “local” de la energía de la señal

Definición formal de función wavelet (1/2)

Sea la función $\varphi(\cdot)$ una onda pequeña, esto es, una función que oscila en periodos cortos de tiempo.

$\varphi(\cdot)$ es una wavelet si las siguientes condiciones se cumplen (Addison, 2002):

1. Su energía es finita, esto es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

2. Siendo su transformada de Fourier:

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i2\pi u t} dt$$

se cumple que:

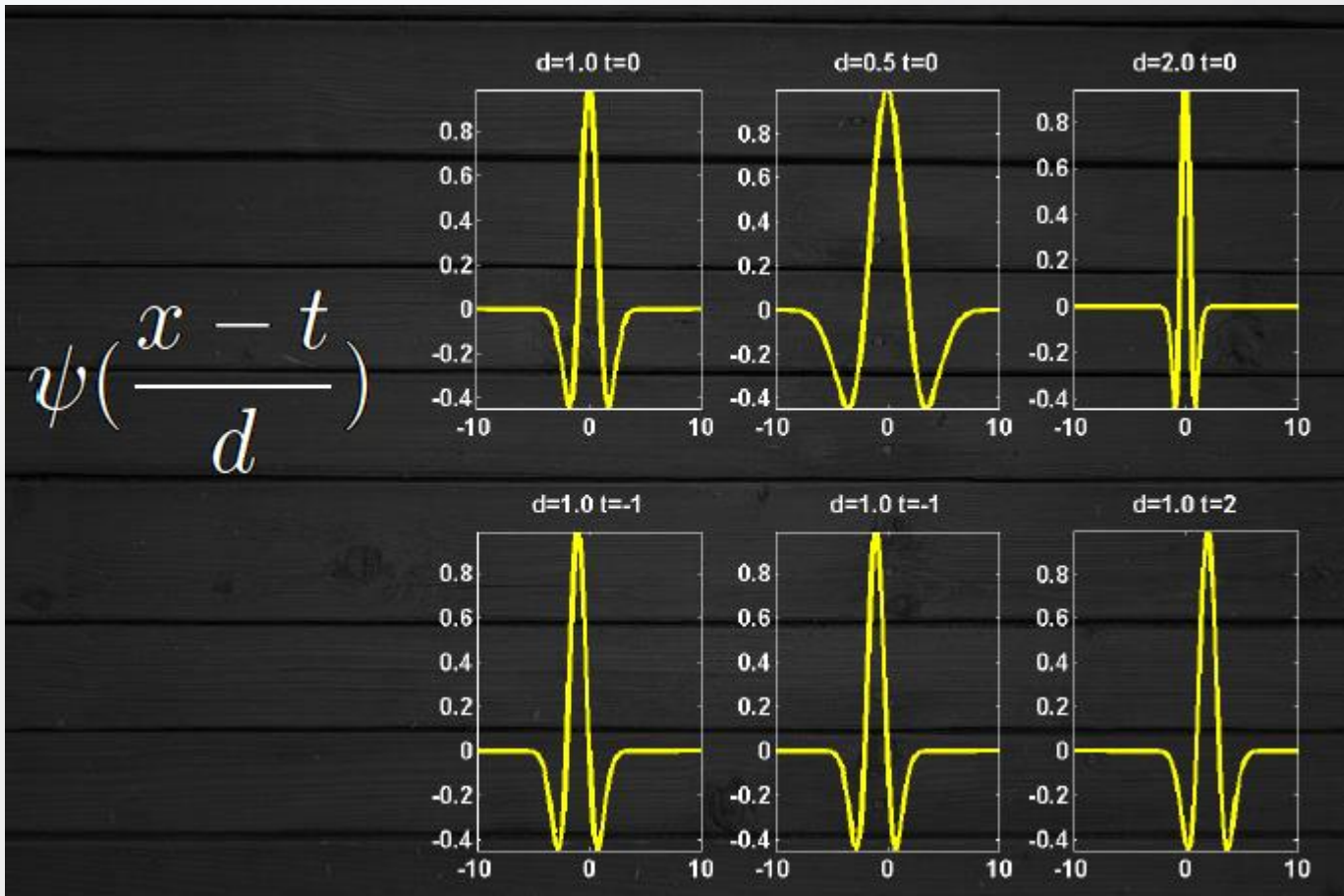
continúa....

Definición formal de función wavelet (2/2)

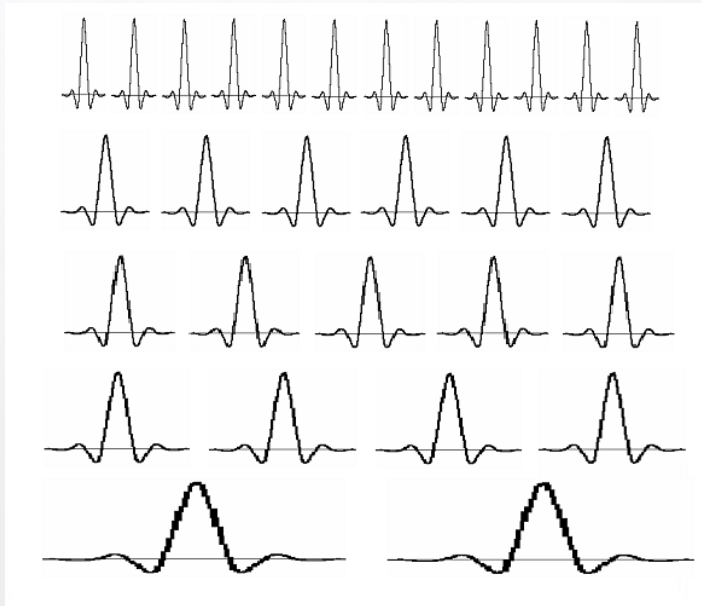
$$C_{\varphi} = \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(u)|^2}{u} du < \infty$$

C_{φ} se conoce como la constante de admisibilidad, e implica que la media de $\varphi(\cdot)$ es cero.

Dilatación (d) y traslación (t) de funciones wavelets

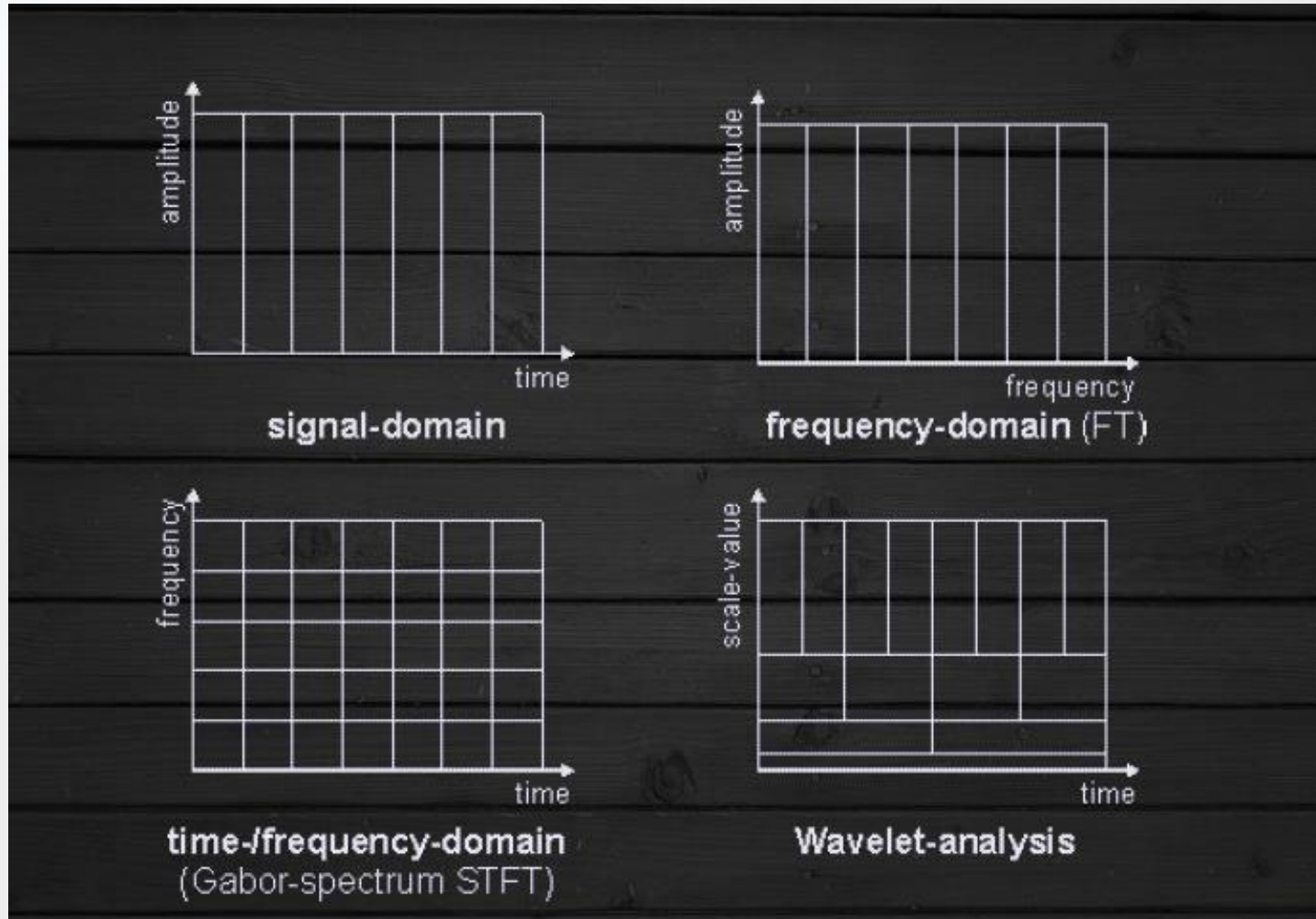


Ideas básicas detrás del Análisis wavelet



- Se usan variantes de una función a diferentes escalas
- Las funciones no son periódicas, por lo tanto no se puede hablar de frecuencia. En vez de frecuencia, se habla de “escala”

STFT vs. Wavelets para descomposición de una señal



Transformada discreta wavelet

(1/3)

- Sabemos que cualquier función se puede expresar como una descomposición lineal

$$f(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} \varphi_{\ell}(t)$$

- Donde a_{ℓ} son los coeficientes de expansión (valores reales) y $\varphi_{\ell}(t)$ es un conjunto de funcione reales, conocidas como el conjunto de expansión (Sidney Burrus, et al., 1998):

Transformada discreta wavelet

(2/3)

- Usando wavelets como el conjunto de expansión, se puede definir la expansión de una función cualquiera $f(t)$ como:

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \varphi_{j,k}(t)$$

Donde j y k son índices (valores enteros) y las funciones wavelets $\varphi_{j,k}(t)$ forman un conjunto ortogonal de funciones (base).

- Los coeficientes $a_{j,k}$ se conocen como la **transformada discreta wavelet** (*Discrete Wavelet Transform, DWT*)

Transformada discreta wavelet

(3/3)

- La ecuación:

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \varphi_{j,k}(t)$$

corresponde a la transformación inversa discreta wavelet.

- Esta ecuación se expresa en términos de dos índices: el tiempo de traslación k y el índice de escalamiento j (Burrus, et al., 1998).

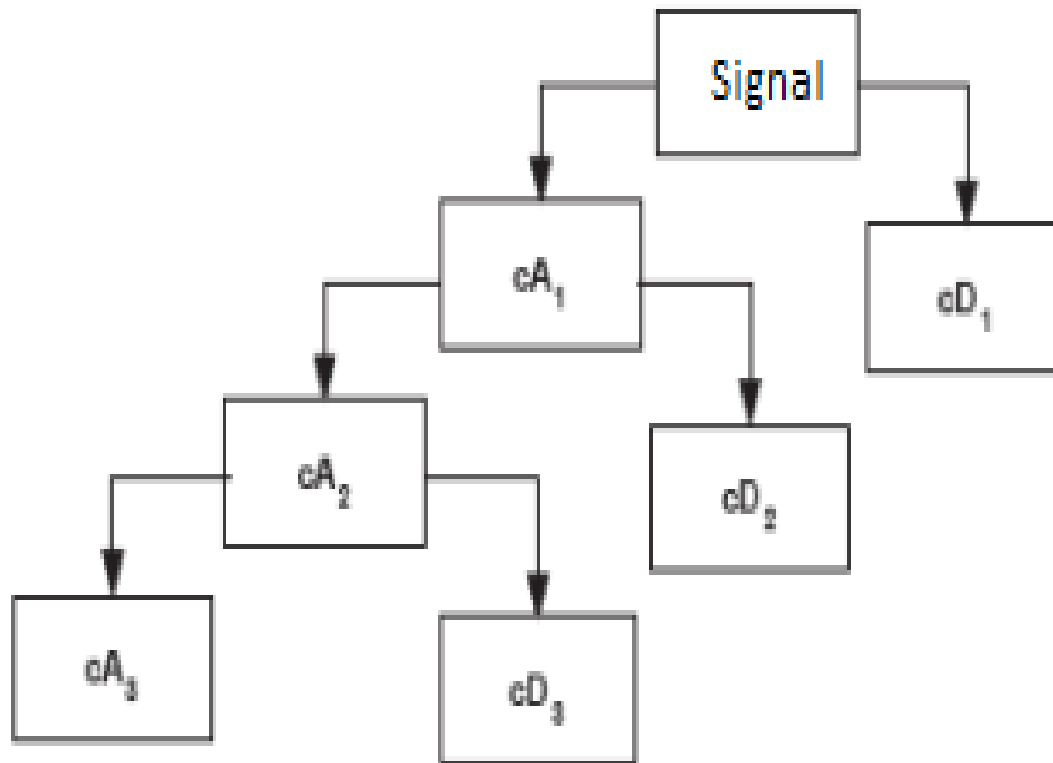
Estimación de coeficientes de DWT (1/2)

- Hay varias maneras de estimar coeficientes de la DWT, una de ellas consiste en utilizar un banco de filtros.
- En este método, la señal pasa por filtros pasa altas filtros pasa bajas
- La salida de cada filtro contiene la mitad de las frecuencias de la señal original, pero el mismo número de elementos.
- Las salidas de ambos filtros se **concatenan**, lo que genera una nueva señal con el doble de elementos que la original. Para regresar al tamaño original de la señal, la salida de cada filtro se pasa por un proceso de sub-muestreo.

Estimación de coeficientes de DWT (2/2)

- Las salidas sub-muestreadas de los filtros pasa bajas se conocen como *coeficientes de aproximación*
- Las salidas sub-muestradas del filtro pasa altas se conocen como *coeficientes de detalle*
- Los coeficientes de aproximación se introducen nuevamente a un banco de filtros, y el proceso se repite tantas veces como se desee.

Un árbol de descomposición wavelet con 3 niveles

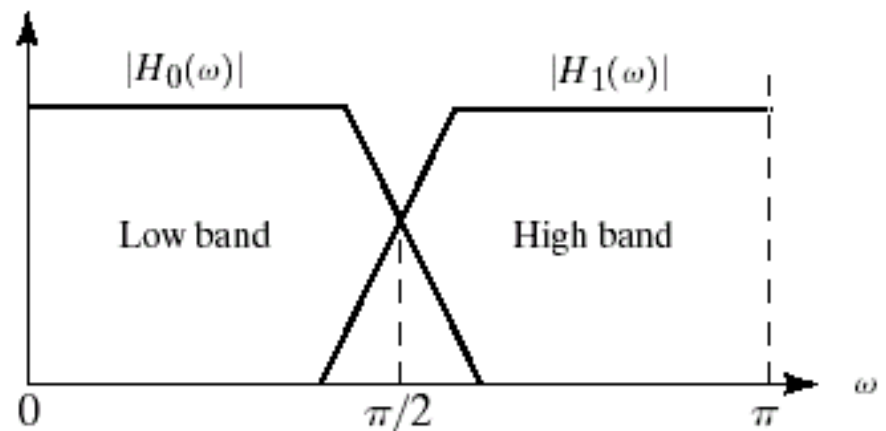
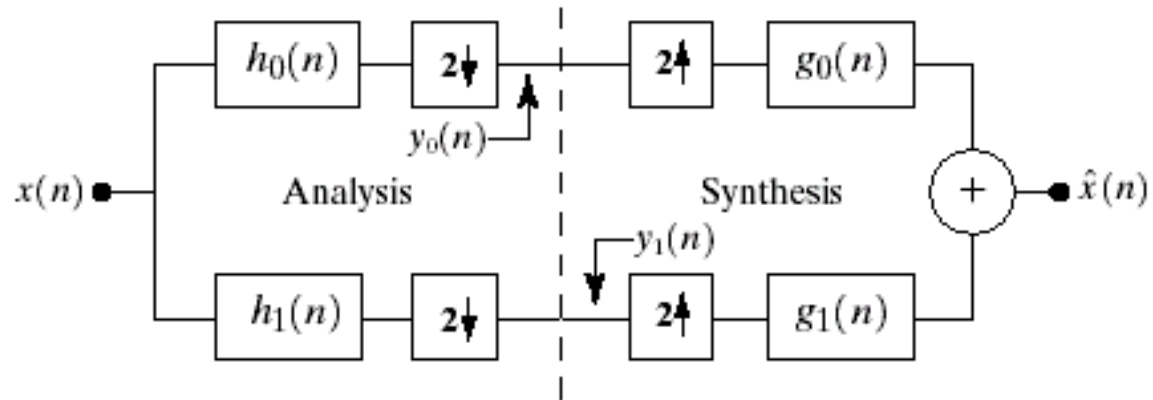


Cálculo de DWT y DWT inversa, un nivel

a

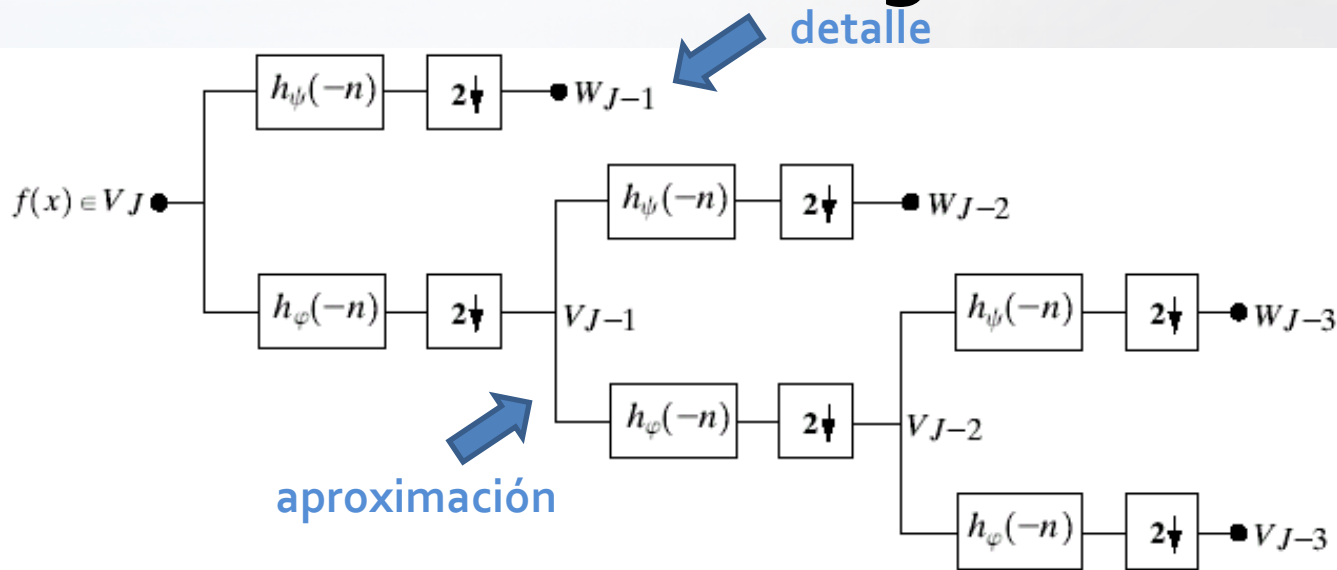
b

FIGURE 7.4 (a) A two-band filter bank for one-dimensional subband coding and decoding, and (b) its spectrum splitting properties.



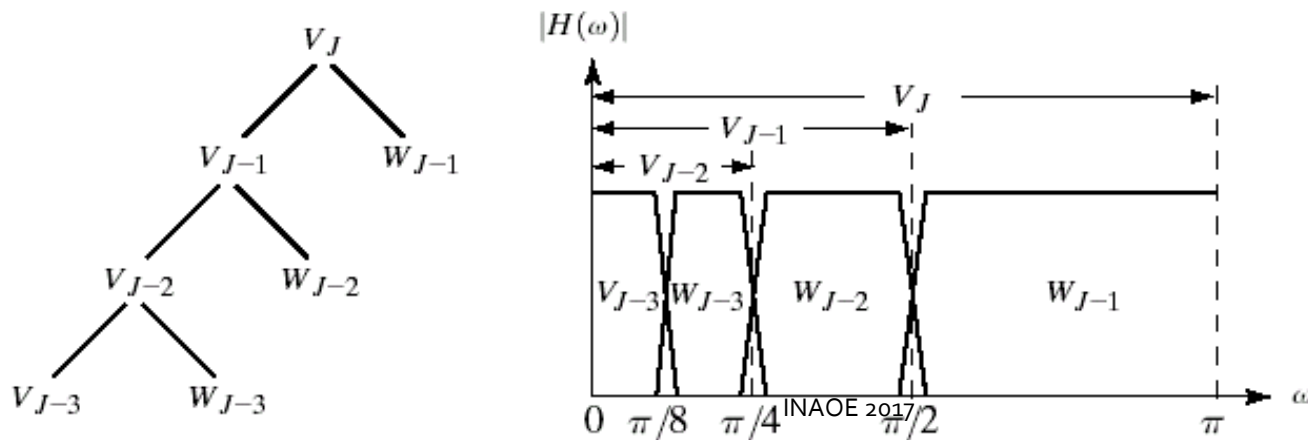
h's y g's son filtros

Banco de filtros con 3 niveles



a
b c

FIGURE 7.28 A three-scale FWT filter bank: (a) block diagram; (b) decomposition space tree; and (c) spectrum splitting characteristics.



Cálculo básico de DWT usando Matlab

Función wavedec, Matlab V2017a

Documentation



CONTENTS

[Close](#)[< Documentation Home](#)[< Wavelet Toolbox](#)[< Discrete Wavelet Analysis](#)[< Signal Analysis](#)[< Wavelet Toolbox](#)[< Code Generation](#)[< Wavelet Toolbox](#)[< Functions](#)**wavedec**[ON THIS PAGE](#)[Syntax](#)[Description](#)[Examples](#)[Algorithms](#)[References](#)[Extended Capabilities](#)[See Also](#)

wavedec

Multilevel 1-D wavelet decomposition

[collapse all in page](#)

Syntax

```
[C,L] = wavedec(X,N,'wname')  
[C,L] = wavedec(X,N,Lo_D,Hi_D)
```

Description

wavedec performs a multilevel one-dimensional wavelet analysis using either a specific wavelet ('wname') or a specific wavelet decomposition filters (Lo_D and Hi_D, see **wfilters**).

Note **wavedec** supports only Type 1 (orthogonal) or Type 2 (biorthogonal) wavelets.

`[C,L] = wavedec(X,N,'wname')` returns the wavelet decomposition of the signal `X` at level `N`, using '`wname`'. **wavedec** does not enforce a maximum level restriction. Use **wmaxlev** to ensure the wavelet coefficients are free from boundary effects. If boundary effects are not a concern in your application, a good rule is to set `N` less than or equal to `fix(log2(length(X)))`.

The output decomposition structure contains the wavelet decomposition vector `C` and the bookkeeping vector `L`, which contains the number of coefficients by level. The structure is organized as in this level-3 decomposition example.

Decomposition:



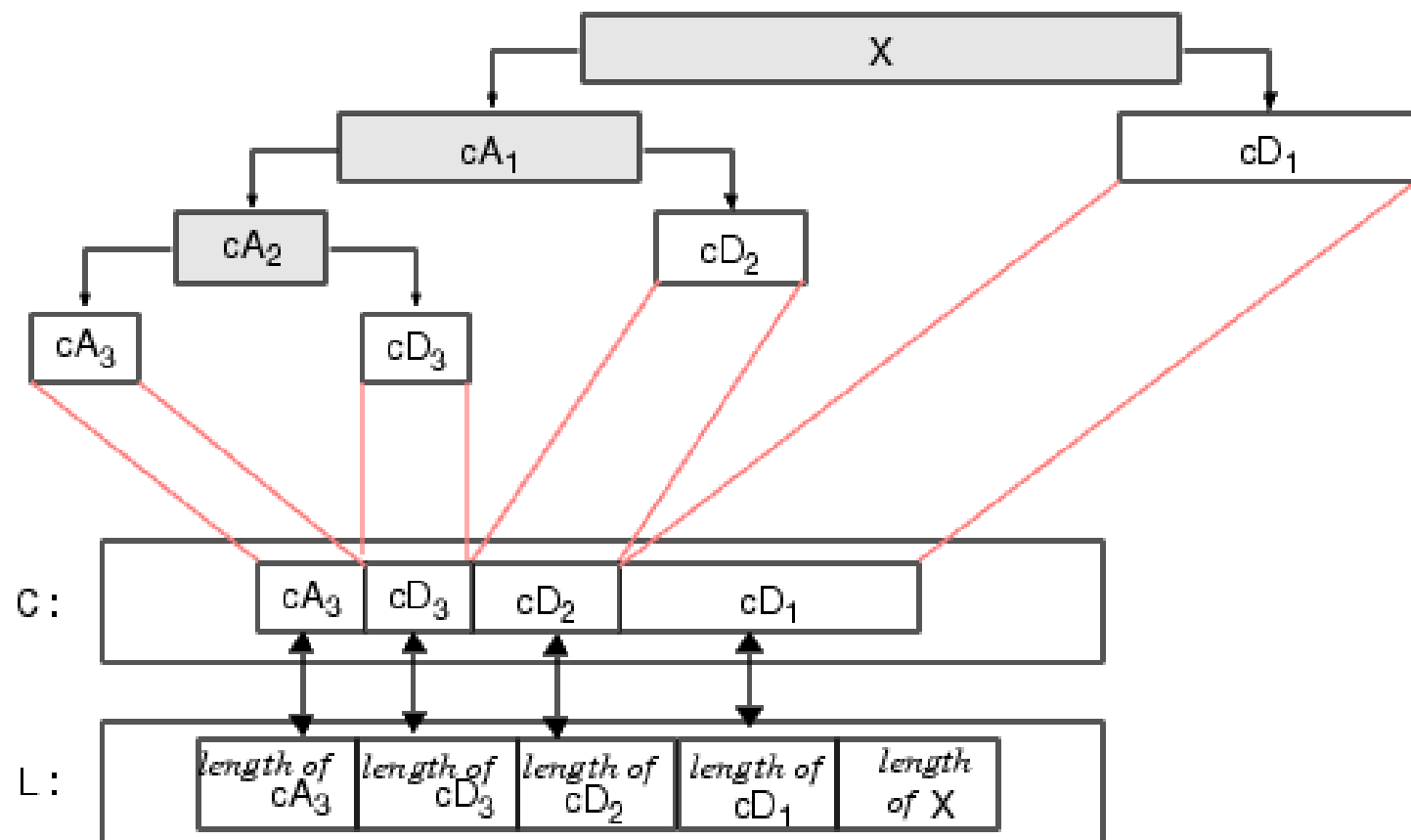
Función “wavedec” (Matlab, 2014)

$[C,L] = \text{wavedec}(X,N,'wname')$

- X - señal a procesar
- N - nivel a que llega el análisis
- 'wname' - nombre de la función wavelet. Esta función solo soporta wavelets ortogonales ó bi-ortogonales
- C - vector que contiene todos los coeficientes resultantes, distribuidos según el diagrama en la siguiente diapositiva
- L - vector de registro (*bookkeeping vector*). Contiene las longitudes de cada conjunto de coeficientes por nivel, distribuidos según el diagrama de la siguiente diapositiva

Distribución de coeficientes y longitudes (Matlab, 2014)

Decomposition:



Algunas funciones wavelet comunes

Wavelet Family Short Name	Wavelet Family Name
'haar'	Haar wavelet.
'db'	Daubechies wavelets.
'sym'	Symlets.
'coif'	Coiflets.
'bior'	Biorthogonal wavelets.
'rbio'	Reverse biorthogonal wavelets.
'meyr'	Meyer wavelet.
'dmey'	Discrete approximation of Meyer wavelet.
'gaus'	Gaussian wavelets.
'mexh'	Mexican hat wavelet.
'morl'	Morlet wavelet.
'cgau'	Complex Gaussian wavelets.
'shan'	Shannon wavelets.
'fbsp'	Frequency B-Spline wavelets.
'cmor'	Complex Morlet wavelets.

Ejemplos de figuras de funciones wavelets

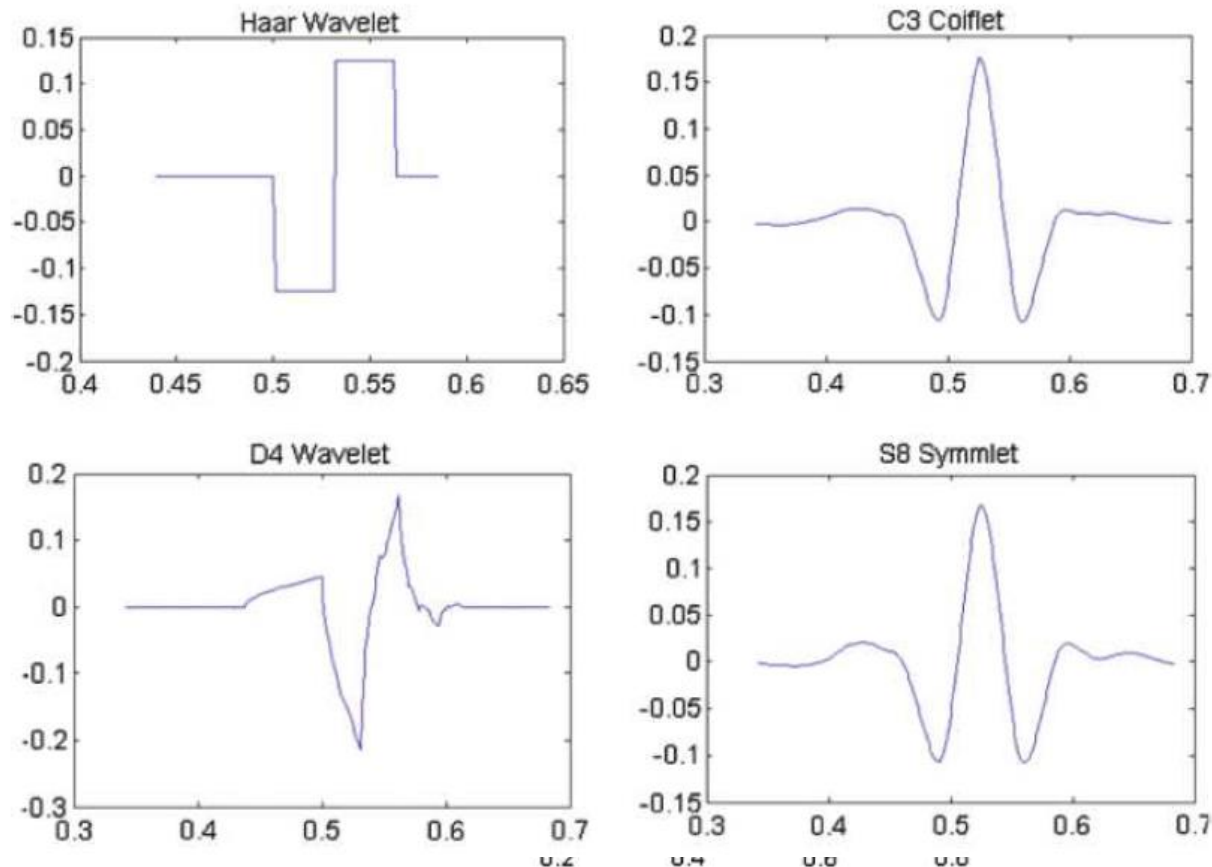


Figure 1.2: Mother wavelets often used in wavelet analysis (MATLAB generated [14])

Ejemplos de figuras de funciones wavelets

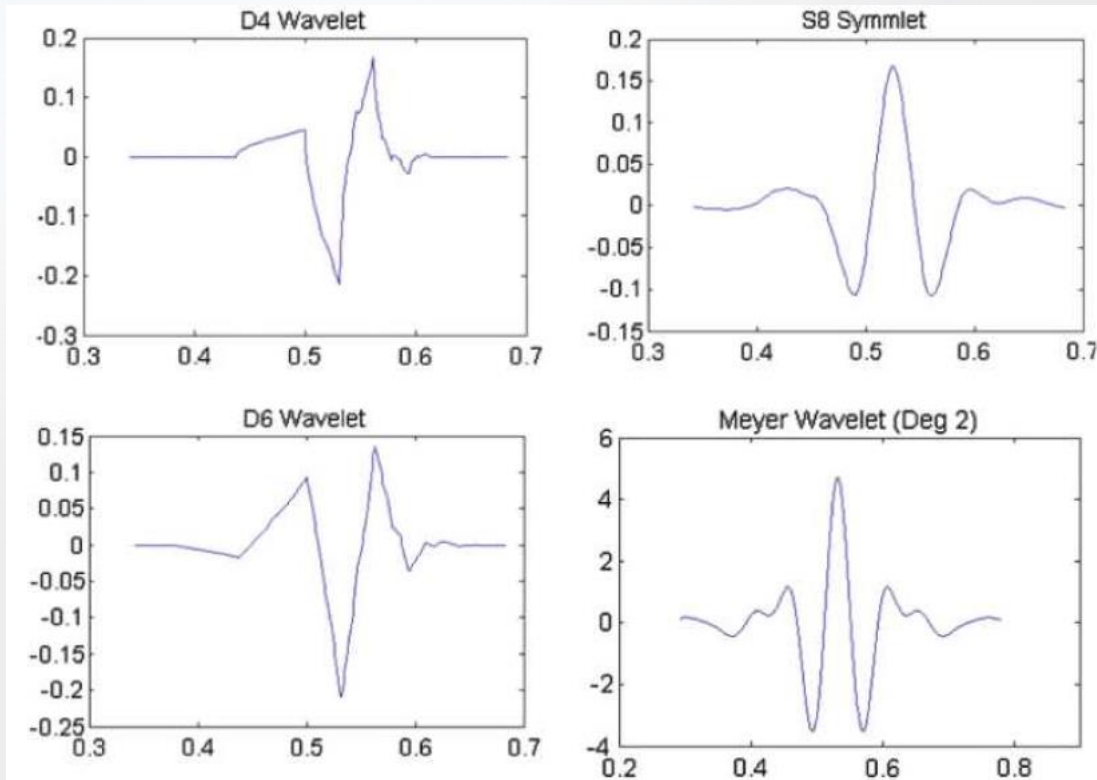


Figure 1.2: Mother wavelets often used in wavelet analysis (MATLAB generated [14])

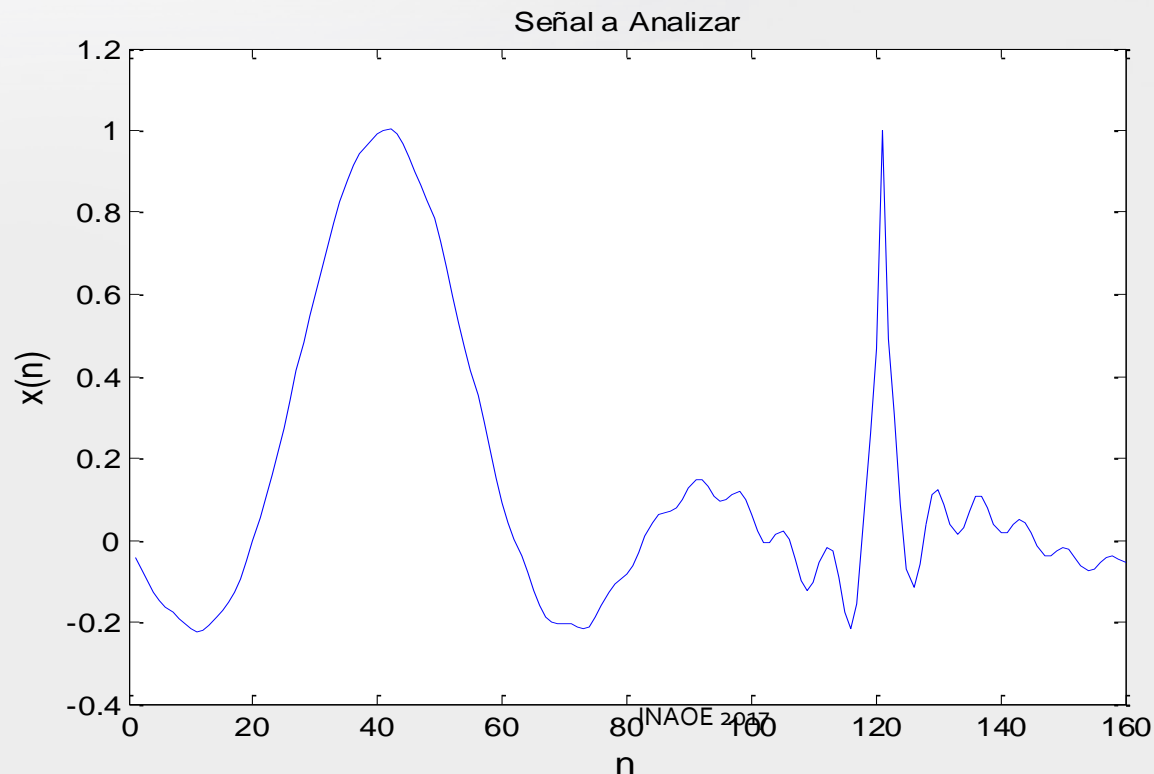
Shukla K.K., Tiwari A.K. (2013)

Ejemplo: señal a analizar

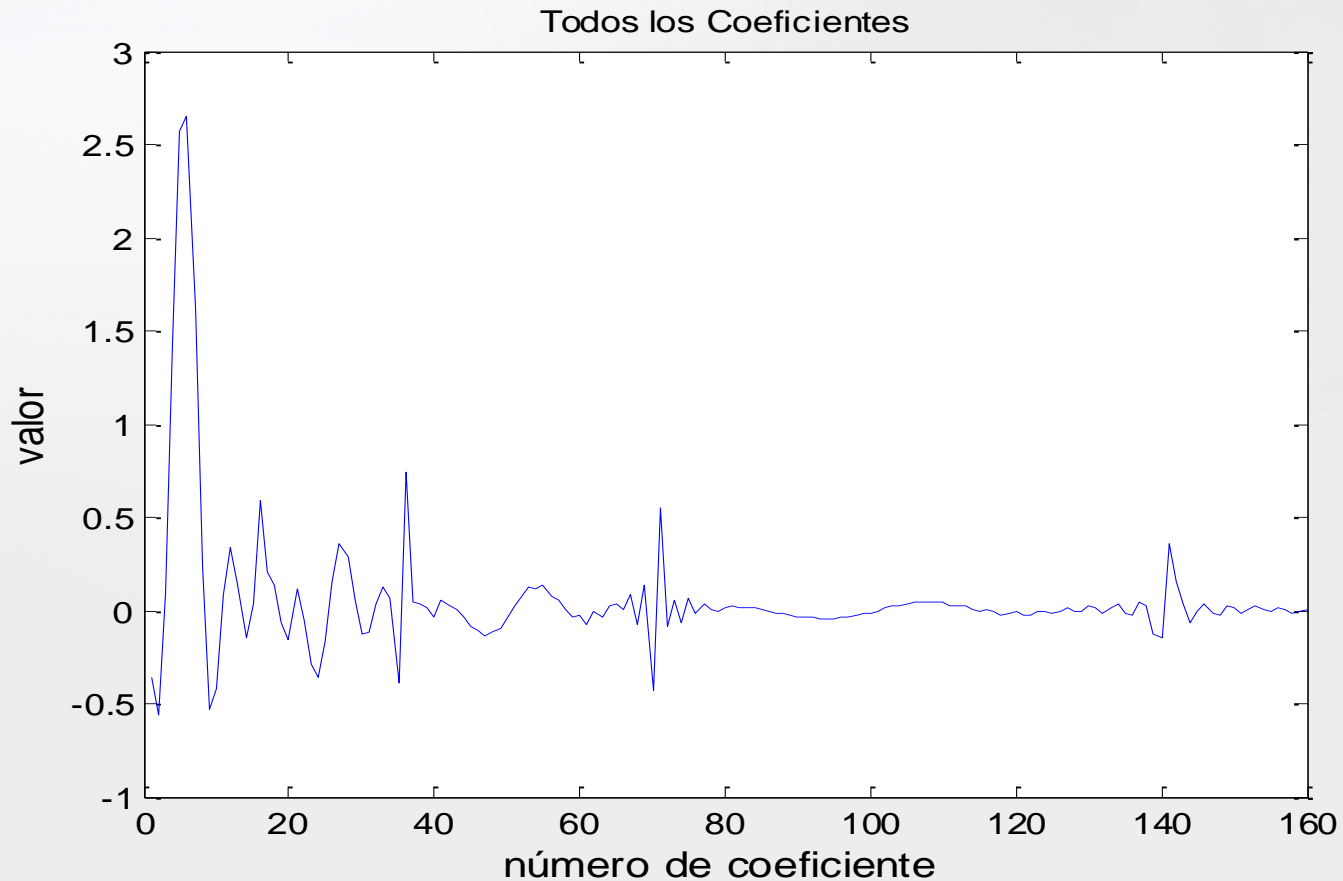
[Código en Matlab](#)

generada como la suma de dos señales Sinc con diferentes magnitudes y desplazamientos:

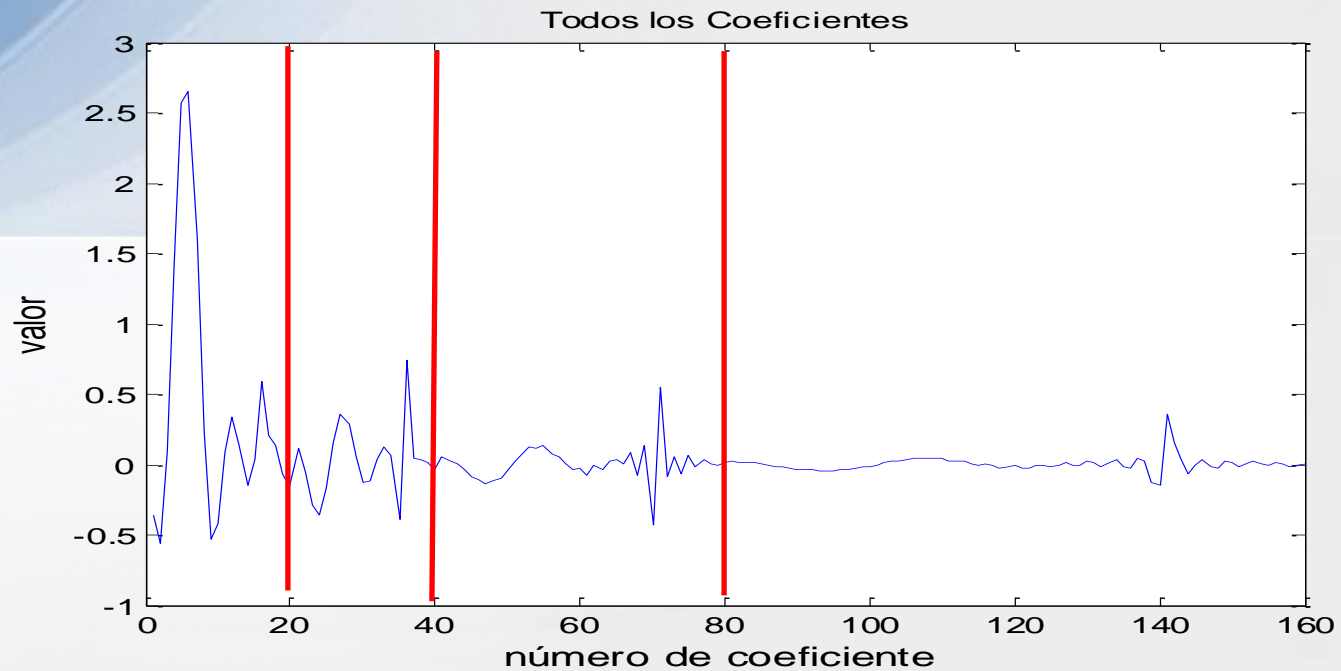
$$x(n) = 0.15 \text{sinc}(n - 40) + 0.9 \text{sinc}(n - 120)$$



Ejemplo: todos los coeficientes



`[C,L] = wavedec(sig,3,'db1')`



Registro de longitudes (vector L):

índice 1 : 20

índice 2 : 20

índice 3 : 40

índice 4 : 80

índice 5 : 160

$L = [20 \quad 20 \quad 40 \quad 80 \quad 160]$

Reconstrucción de la señal

(1/2)

- `X = wrcoef('type',C,L,'wname',N)`
Reconstruye una sola rama de los coeficientes

Type – define el tipo de coeficiente:
para aproximación, 'type' = 'a'
para detalle 'type' = 'd'

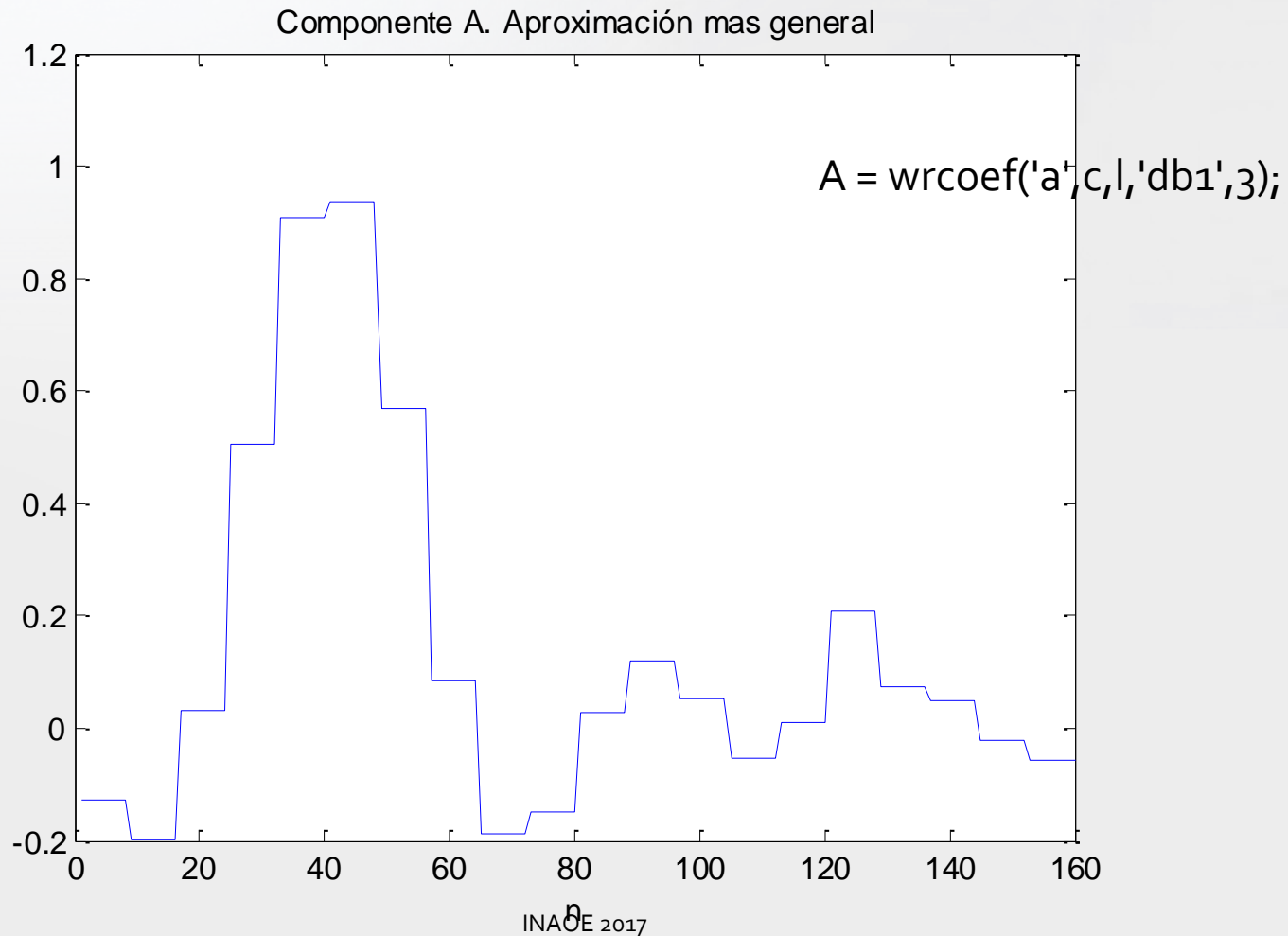
C – vector de coeficientes

L – vector de registro

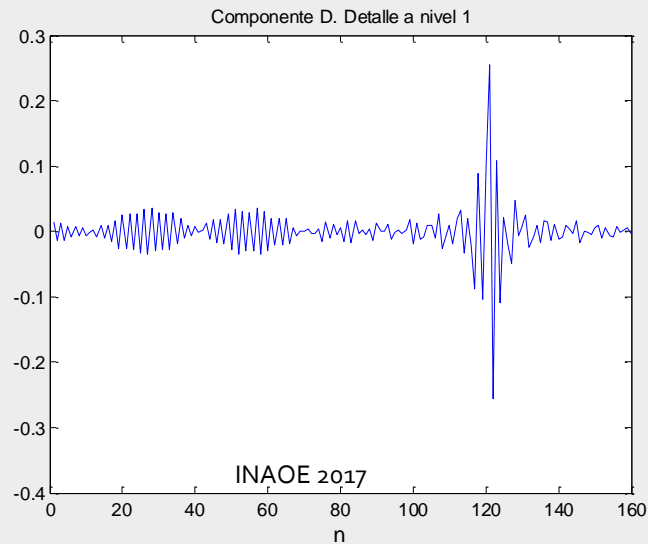
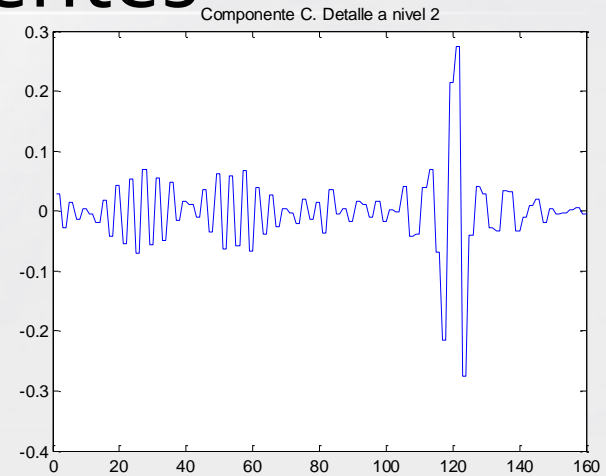
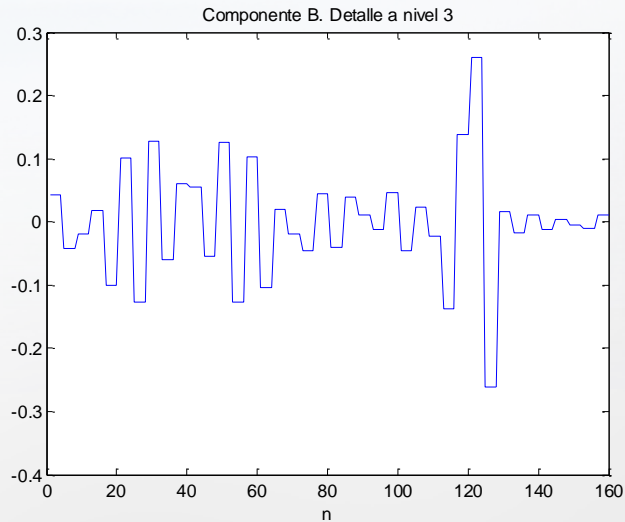
'wname' – nombre de la función wavelet

N – número del nivel a usarse.

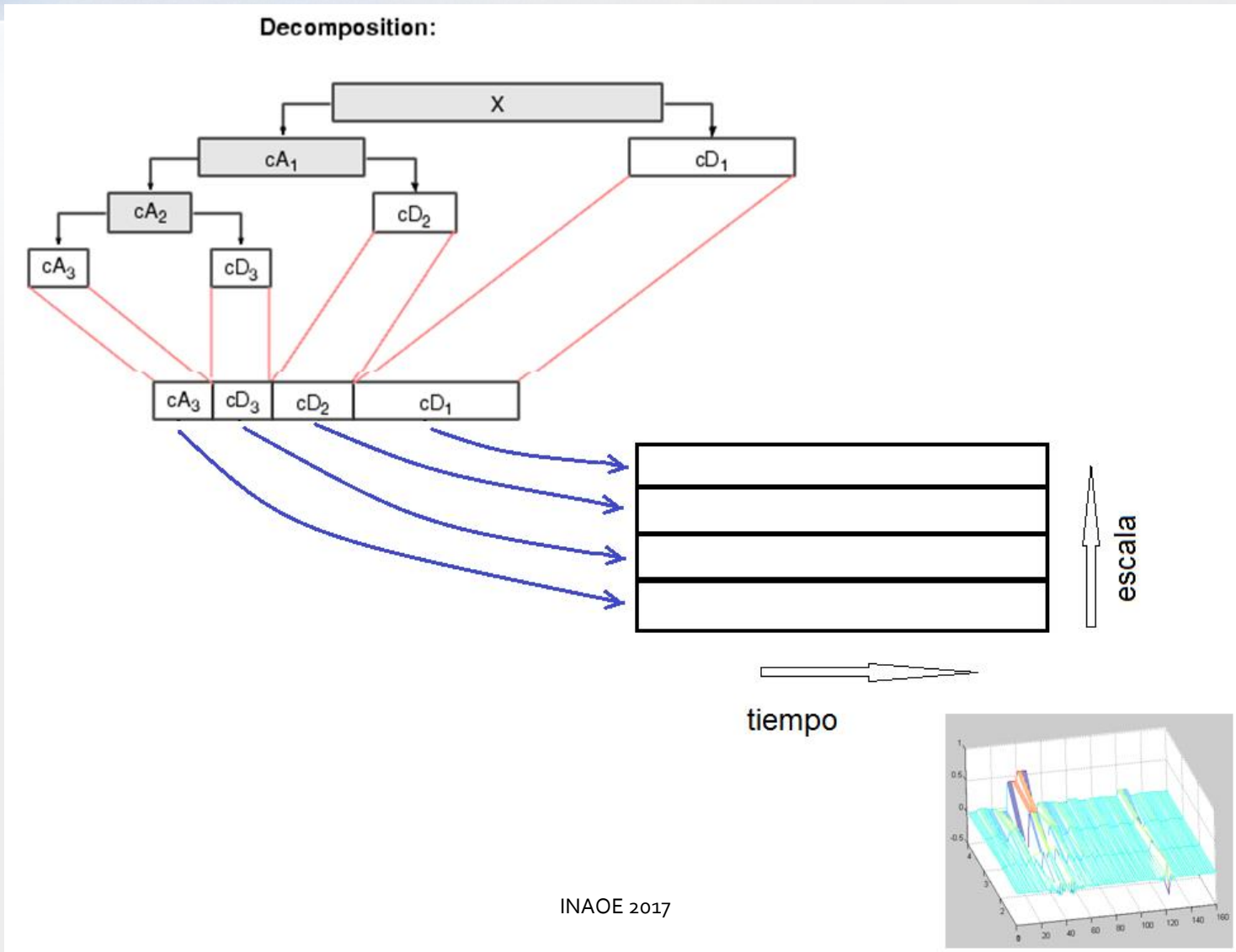
Ejemplo: componente generado para la aproximación mas general



El resto de los componentes



Construcción de un escalograma



Un ejemplo de uso de DWT

Identification of Epilepsy Seizures Using Multi-resolution Analysis and Artificial Neural Networks

**Pilar Gómez-Gil, Ever Juárez-Guerra, Vicente Alarcón-Aquino,
Manuel Ramírez-Cortés and José Rangel-Magdaleno**

O. Castillo et al. (eds.), *Recent Advances on Hybrid Approaches for Designing Intelligent Systems*, Studies in Computational Intelligence 547,
DOI: 10.1007/978-3-319-05170-3_23, © Springer International Publishing Switzerland 2014

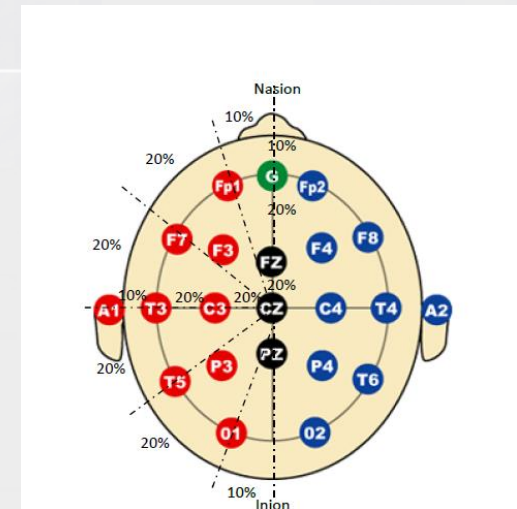
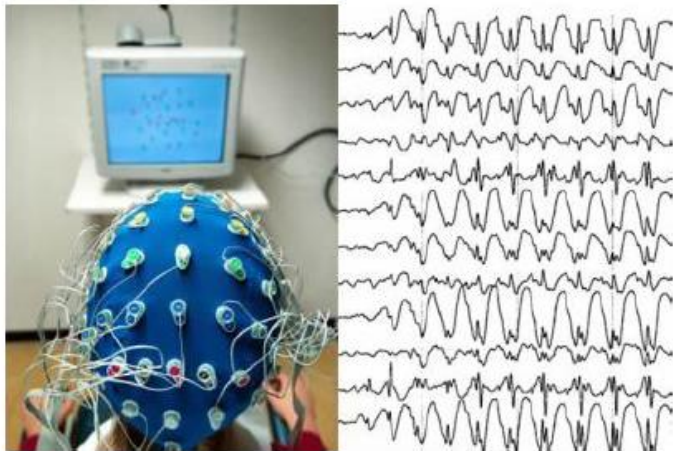
337

EEG and Epilepsy (1/3)

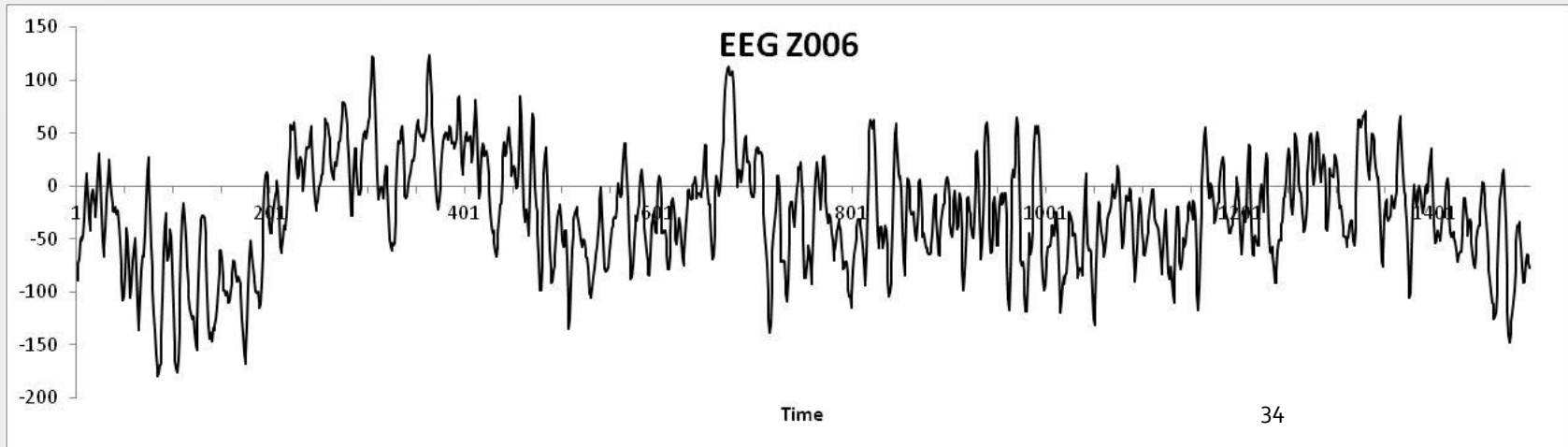
An electroencephalogram (EEG) is the time course of extracellular field potentials generated by synchronous actions among brain cells.



EEG and Epilepsy (2/3)



10-20 electrode placement system
(Juárez-Guerra, 2012)



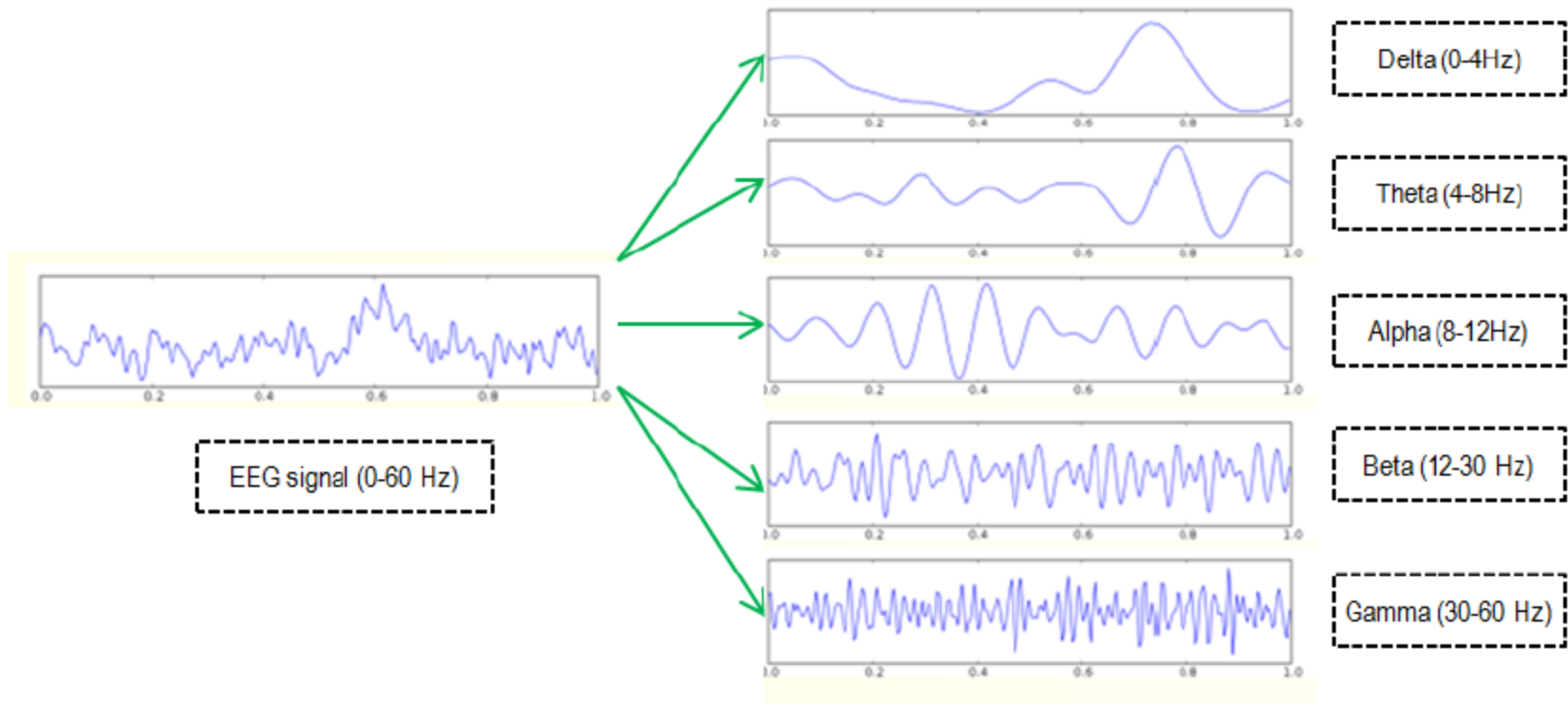
EEG and Epilepsy (3/3)

- Epilepsy is a brain disorder that produces seizures, which can be recognized by experts in EEG's signals.
- Accurate automatic identification of epilepsy seizures is required, due to the complexities associated to human observations of large hours of EEG's for diagnosis.
- A lot of research is going on associated to automatic identification of epilepsy, but still there is room for improvement.

Challenges and proposed work

- Challenges:
 - Noise reduction from original signals.
 - Definition of a suitable feature vector.
 - Choosing the “best” recognizer.
- To tackle these problems, we propose a system based on multi-resolution analysis and neural networks to improve the performance of current classifiers.
- Here, we present preliminary results obtained by a system based on:
 - Infinite Impulse Response (IIR) and Finite Impulse Response (FIR) filters,
 - Wavelet Transforms (WT)
 - Feed-Forward Artificial Neural Networks (FF-ANN).

Frequency Bands of an EEG



Delta (0-4 Hz) and Alpha (8-12 Hz) sub-bands provide useful information to identify a seizure

Metrics involved

- Accuracy: proportion of correctly identified samples
- Sensitivity (recall rate): proportion of actual positives correctly identified as such.
- Specificity: proportion of negative results correctly identified as such.

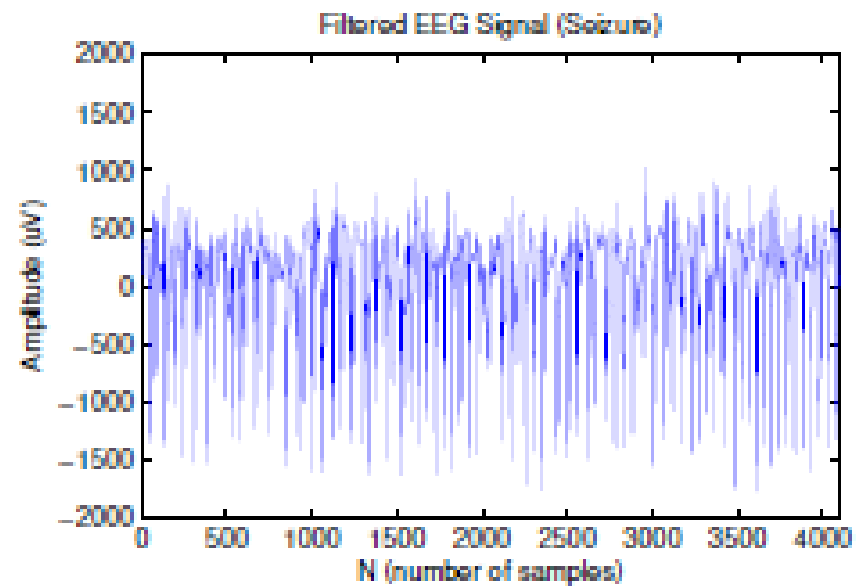
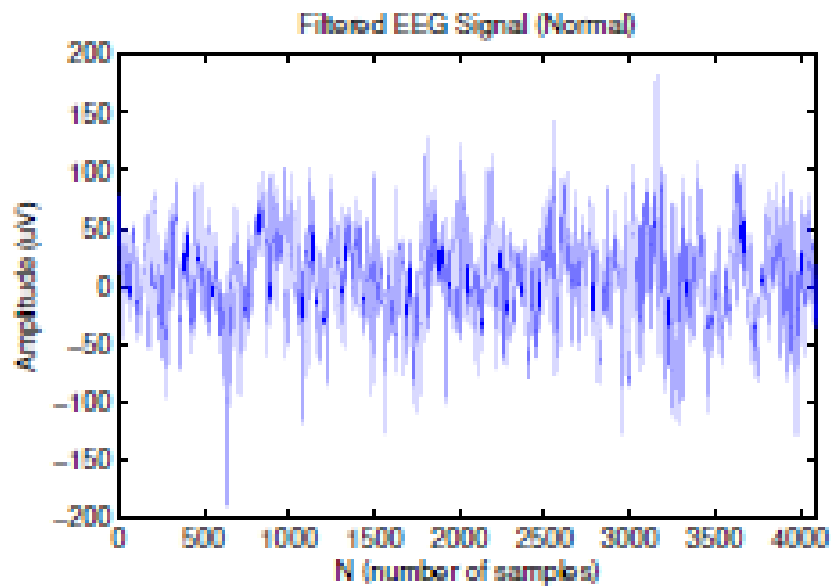
$$accuracy = \frac{TP + TN}{N} \times 100\%$$

$$sensitivity = \frac{TP}{TP + FN} \times 100\%$$

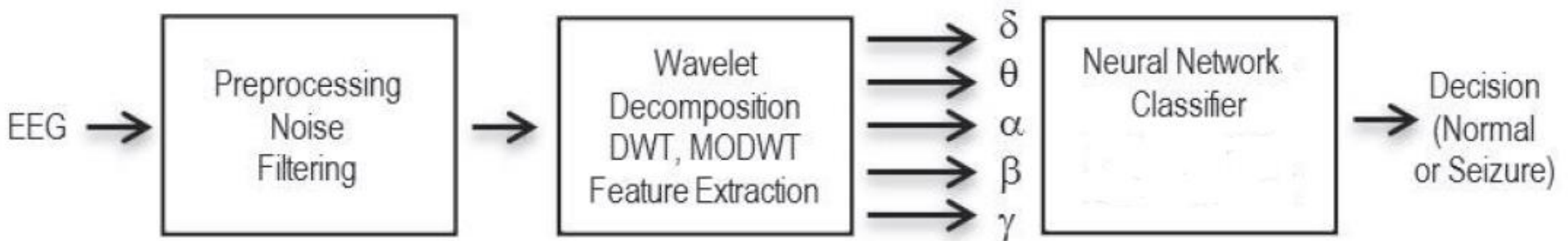
$$specificity = \frac{TN}{TN + FP} \times 100\%$$

	Positive	Negative
True	TP (<i>True positive</i>): correctly identified	TN (<i>True negative</i>): correctly rejected
False	FP (<i>False positive</i>): incorrectly identified	FN (<i>False negative</i>): incorrectly rejected

EEG during normal and seizure states



System Diagram



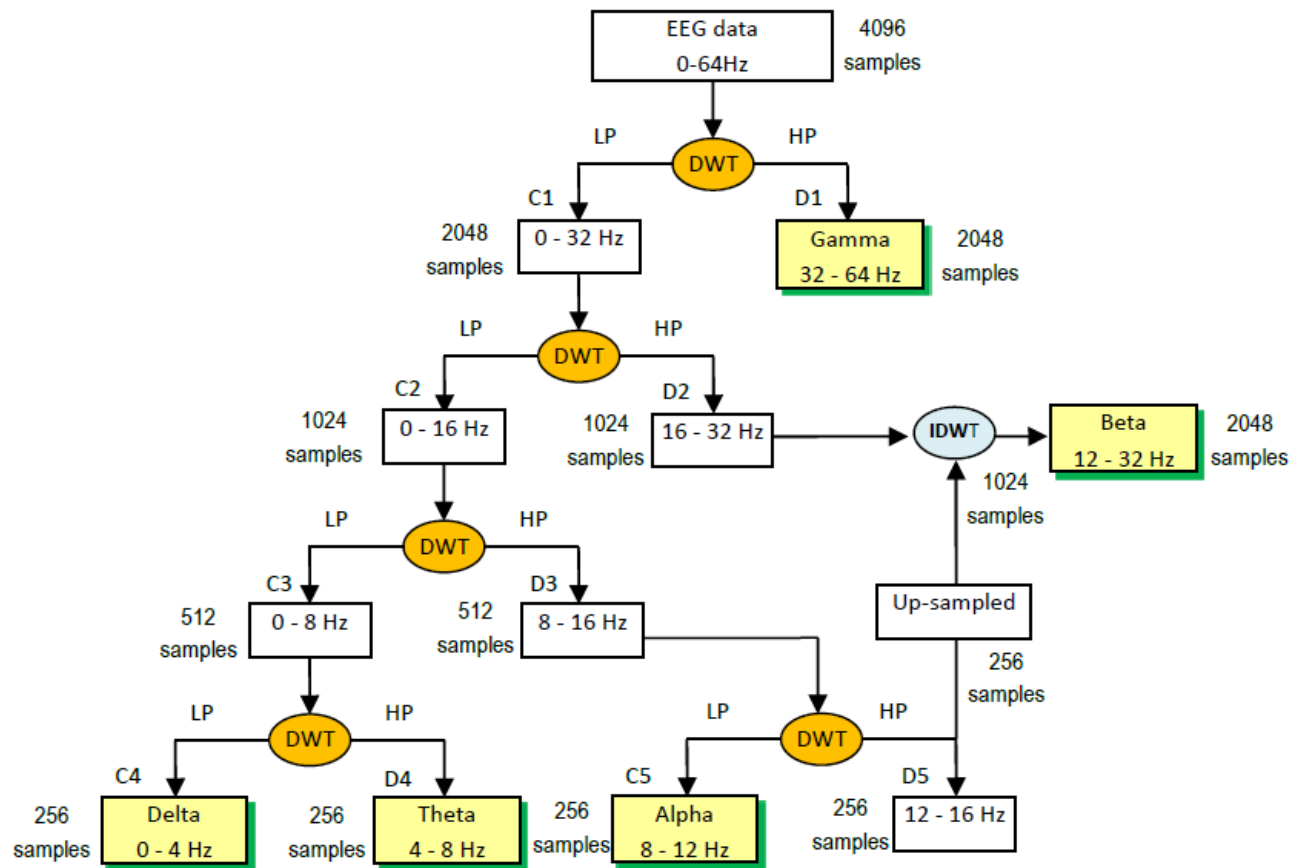
Characteristics of the Experiments (1/2)

- The wavelet analysis was carried out using both a Discrete Wavelet Transform (DWT) and the Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT).
- Experiments were carried out using segments of 23.6 seconds each and using segments of 1 second and 0.7375 seconds each.
- A Haar wavelet, a second-order Daubechies (Db2) wavelet and a fourth-order Daubechies (Db4) wavelet were tested.
- Several FIR (Finite impulse response) and IIR (Infinite Impulse Response) filters were tested.

Characteristics of the Experiments (2/2)

- A multi-layer perceptron with one hidden layer was used as classifier; several numbers of hidden nodes were tested.
- Three-fold validation was applied to all experiments
- Each segment of EEG was represented by a feature vector of six components, built using the mean, absolute median and variance of both delta and alpha sub-bands.

Decomposition of EEG using DWT



Results using segments of 23.1 secs.

Filter	Wavelet	Hidden nodes	Accuracy %	Standard deviation	Sensitivity %	Specificity %
Chebyshev II	DWT - Haar	9	82.82	21.10	82.79	74.64
Chebyshev II	DWT - Db2	15	83.73	21.52	82.56	82.04
Chebyshev II	DWT - Db4	6	91.11	14.59	91.72	88.37
Chebyshev II	MODWT - Haar	9	53.83	15.58	37.92	48.44
Chebyshev II	MODWT - Db2	6	85.85	22.14	82.76	88.67
Chebyshev II	MODWT - Db4	18	84.44	21.33	86.44	85.74
Elliptic	DWT - Haar	21	88.38	16.76	86.46	91.58
Elliptic	DWT - Db2	6	80.30	21.73	79.87	76.85
Elliptic	DWT - Db4	9	82.82	20.20	80.19	87.61
Elliptic	MODWT - Haar	21	59.09	21.31	30.05	56.12
Elliptic	MODWT - Db2	6	90.00	12.91	88.17	96.32
Elliptic	MODWT - Db4	24	87.17	14.85	87.22	85.61
Equiripple	DWT - Haar	18	87.17	19.09	85.47	90.96
Equiripple	DWT - Db2	12	83.03	20.57	81.48	85.36
Equiripple	DWT - Db4	18	86.56	17.05	85.90	91.14
Equiripple	MODWT - Haar	6	87.07	17.66	84.83	92.02
Equiripple	MODWT - Db2	6	88.88	18.52	89.17	82.80
Equiripple	MODWT - Db4	6	85.52	19.04	83.71	84.74
Least Squares	DWT - Haar	6	84.44	21.32	80.00	82.82
Least Squares	DWT - Db2	6	93.23	14.85	93.87	90.07
Least Squares	DWT - Db4	18	82.72	20.13	91.24	81.42
Least Squares	MODWT - Haar	9	83.73	18.32	82.71	90.97
Least Squares	MODWT - Db2	21	84.14	15.96	82.76	87.16
Least Squares	MODWT - Db4	21	87.37	15.82	85.88	90.89

Results using sub-segments

Filter	Wavelet	Hidden nodes	Accuracy %	Standard deviation	Sensitivity %	Specificity %
Chebyshev II	DWT - Haar	18	99.26	0.26	98.93	99.59
Chebyshev II	DWT - Db2	18	99.03	0.27	98.75	99.32
Chebyshev II	DWT - Db4	15	96.57	5.87	95.38	98.91
Chebyshev II	MODWT - Haar	24	99.24	0.32	98.86	99.64
Chebyshev II	MODWT - Db2	24	95.80	12.84	94.77	96.19
Chebyshev II	MODWT - Db4	24	97.72	4.55	96.76	99.13
Elliptic	DWT - Haar	21	95.49	11.10	97.48	95.30
Elliptic	DWT - Db2	21	95.96	12.33	96.65	96.23
Elliptic	DWT - Db4	9	98.44	1.26	97.91	99.06
Elliptic	MODWT - Haar	18	95.98	12.52	95.49	99.74
Elliptic	MODWT - Db2	6	99.12	0.40	98.73	99.51
Elliptic	MODWT - Db4	24	95.34	12.62	91.27	96.14

Future work

- Temporal identification (or classification) refers to the assignation of a category to an object, based on features occurring in different time periods.
- Some temporal classification problems may be solved using static classification strategies, provided that the information about time is represented in some way in a feature vector. However, it is difficult to identify the time lag required to build the feature vector
- We will use recurrent-wavelet neural networks for temporal identification using Haar wavelets as activation functions

Conclusions

- A system for identification of seizures and normal states using EEG is presented
- We analyzed different segment sizes, filters, wavelet transformations and feed-forward neural networks to find the best combinations.
- Based on three-fold validation, an accuracy of 99.26% was obtained, which is slightly better than the 98% obtained by the best work (Shaik et al. 2012)
- Models based on wavelet-recurrent neural networks will be tested next.

Referencias

- Shukla K.K., Tiwari A.K. (2013) [Introduction](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4471-4941-5_1). In: Efficient Algorithms for Discrete Wavelet Transform. SpringerBriefs in Computer Science. Springer, London.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4471-4941-5_1