

Introducción al

Tratamiento Digital de Señales

Año 2020
Técnicas Digitales III
Rev.1.5

Objetivo

- Analizar paso a paso la razón del procesamiento digital
- Comprender las limitaciones de los métodos matemáticos
- Aproximaciones necesarias a partir del análisis de sistemas LTI

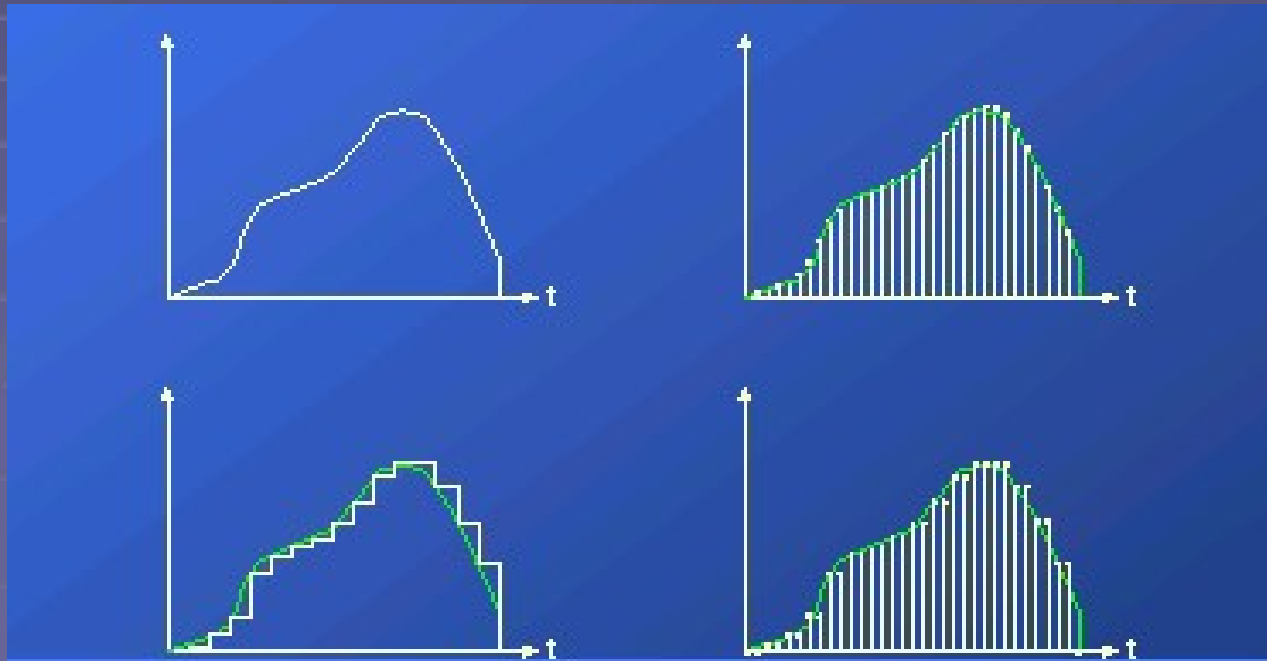
Señales y sistemas

- Señales y clasificación
- Sistemas y clasificación
- Respuesta al impulso de los sistemas

Señales

Se tratarán 4 tipos de señales:

- Analógicas, $x(t)$: amplitud y tiempo continuos.
- Muestreadas, $X[n]$, tiempo discreto , amplitud continua.
- Cuantizada, $X_q[t]$, tiempo continua amplitud discreta.
- Digital, $-x_q[n]$, amplitud y tiempo discreto.



Clasificación de las señales

■ Clasificación de las señales según su duración

- Causales: Son 0 para $t < 0$. Se definen sólo para el eje positivo de t .
- Anticausales: Son 0 para $t > 0$. Se definen sólo para el eje negativo de t .
- No causales: Se definen para ambos ejes de t .
- Continuas: Se definen para todo tiempo t .
- Periódicas: $x_p(t) = x_p(t \pm nT)$, donde T es el periodo y n es un entero.

■ Basada en la simetría

- Simetría Par: $x(t) = x(-t)$
- Simetría Impar: $x(t) = -x(-t)$

■ En energía y potencia (impulsos limitados en tiempo y señales periódicas)

Energía de una señal :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Potencia de un

$$P_x = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

Una señal se dice que es de energía si E_x es finito, lo que implica que P_x es 0. Ej. Pulsos limitados en el tiempo.

Una señal se dice que es de potencia si P_x es finito, lo que implica que E_x es infinito. Ej. Una señal periódica.

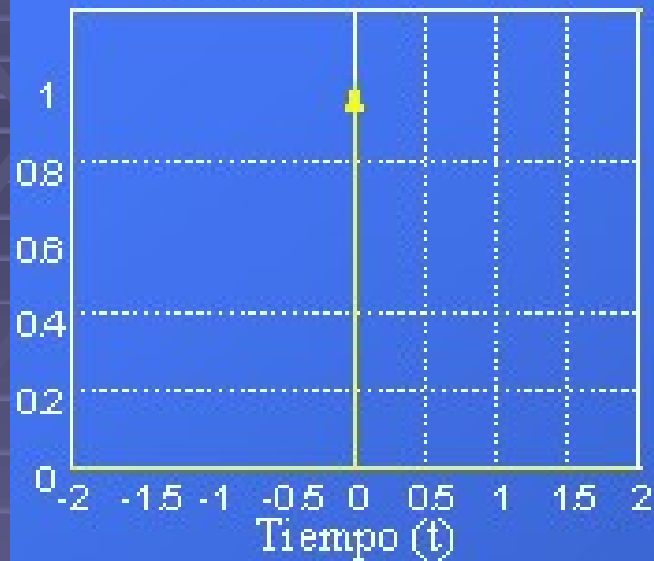
- Escalón unidad : $u(t)$
- Rampa : $r(t) = t u(t)$
- Pulso : $u(t+1/2) - u(t-1/2)$
- Triangular : $tri(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1)$
- Sinc : $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
- Impulso: También llamada función delta o función de Dirac:

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

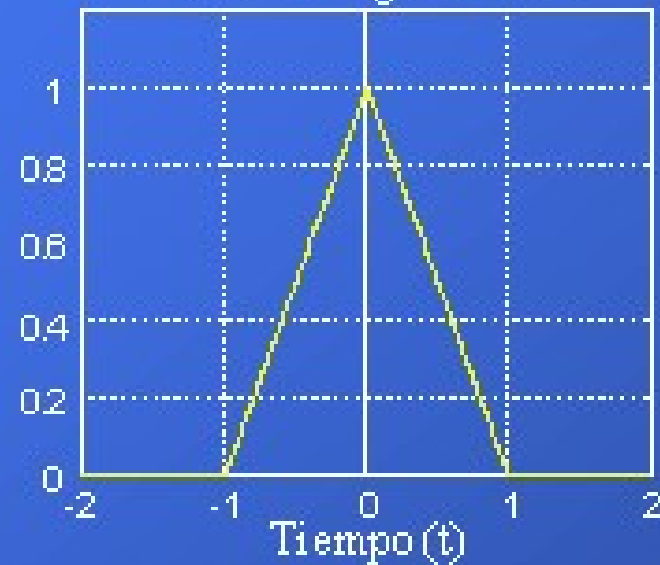
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

Algunas señales: (cont)

Función delta de Dirac



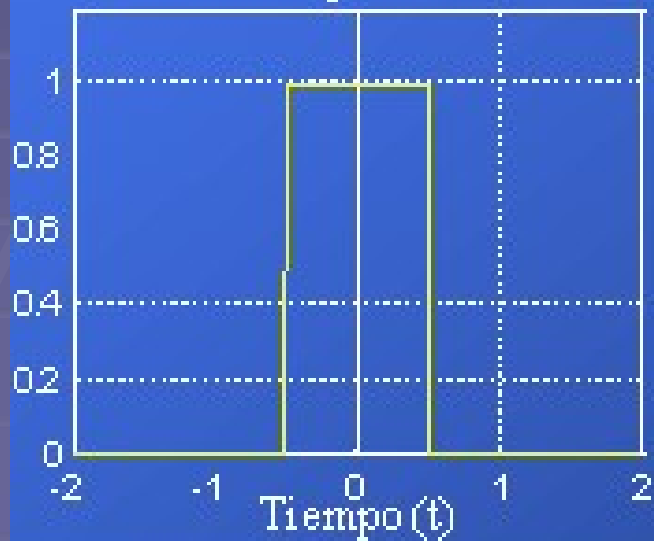
Función triangular unidad



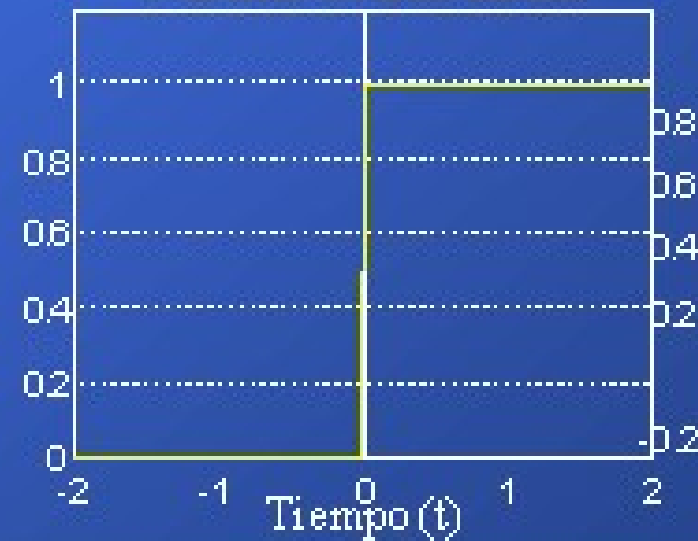
Función rampa unidad



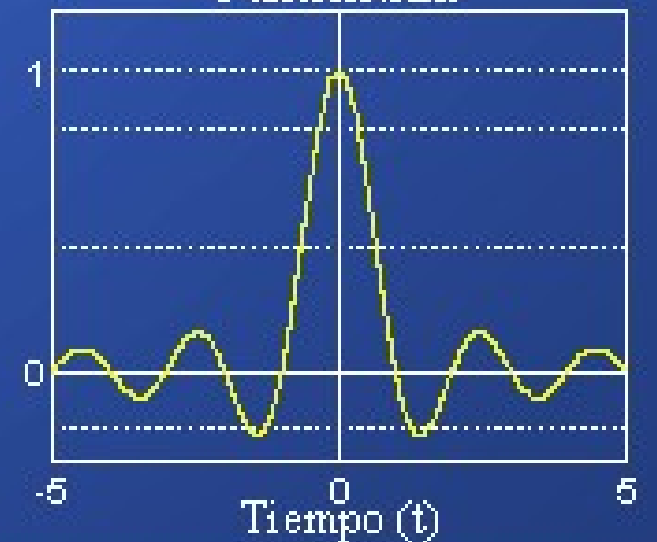
Función pulso unidad



Función escalón unidad



Función Sinc



Operaciones con señales:

- Desplazamiento en el tiempo: $x(t-2)$, desp. A la derecha
- Compresión en el tiempo: $x(2t)$
- Dilatación en el tiempo: $x(t/2)$
- Reflexión: $x(-t)$

Señales en MATLAB

□ Algunas señales en MATLAB

```
>> y = diric(x,N)
```

La función de Dirichlet se define de la siguiente forma:

$$D(x) = \frac{\sin(Nx/2)}{N \sin(x/2)}$$

Los argumentos de entrada es un vector x en cuyos puntos queremos calcular la función de Dirichlet y el parámetro N, que es el número de máximos de la función en el intervalo (0-2π).

```
>> y = sawtooth(x,width)
```

Genera una señal en diente de sierra con periodo 2π para los elementos del vector x. El parámetro "width" es un escalar entre 0 y 1, y describe la fracción del periodo 2π en el que ocurre el máximo.

```
>> y = sinc(x)
```

La función $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$.

```
>> y = square(x,duty)
```

Genera una onda cuadrada de periodo 2π con un duty cycle dado. El parámetro "duty" es el porcentaje del periodo en el cual la señal es positiva.

Sistema

- Un sistema físico es un conjunto de dispositivos conectados entre sí, cuyo funcionamiento está sujeto a leyes físicas.

Para nosotros un sistema es un procesador de señales.

Las señales a ser procesadas son la excitación del sistema .

La salida del sistema es nuestra señal procesada.

- El *análisis de sistemas* implica el estudio de la respuesta del sistema a entradas conocidas.
- La *síntesis de sistemas* se realiza especificando las salidas que deseamos para una entradas dadas y estudiando que sistema es el más adecuado .

El sistema se representa mediante ecuaciones diferenciales que relacionan la salida $y(t)$ y la entrada $x(t)$ mediante constantes, parámetros y variables independientes.

Sistemas: Clasificación

- Los sistemas se clasifican en :
 - * Lineales: los coeficientes no dependen de x o y , no hay términos constantes.
 - * No lineales: los coeficientes dependen de x o y , hay términos constantes.
 - * Invariante en el tiempo: Los coeficientes no dependen de t .
 - * Variante en el tiempo: Los coeficientes son funciones de t .

- A los sistemas lineales se les puede aplicar el principio de superposición.

$$\text{Si } x(t)=x_1(t)+x_2(t) \rightarrow y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

$$x(t)=K x_1(t) \rightarrow y(t)=K \cdot y_1(t)$$

Un sistema es invariante en el tiempo cuando la respuesta $y(t)$ depende sólo de la forma de la entrada $x(t)$ y no del tiempo en que se aplica.

Matemáticamente:

$$\text{Si } L\{x(t)\}=y(t) \rightarrow L\{x(t-t_0)\}=y(t-t_0)$$

$L\{\}$ indica el sistema físico en cuestión.

Para Finalizar sistema

- Usaremos sistemas LTI: lineal e invariante en el tiempo.
- La respuesta al impulso del sistema se representa con $h(t)$ y es la respuesta a la excitación delta de dirac y nos proporciona la base para estudiar cualquier tipo de entrada.
- Es la principal herramienta para el estudio de un sistema.

Convolución

- Podremos calcular la respuesta $y(t)$ de un sistema a una entrada cualquiera $x(t)$.
- Condiciones para llevarla a cabo:

Sistema LTI

Respuesta al impulso del sistema $h(t)$

Basándonos en el principio de superposición y en que el sistema es invariante en el tiempo:

$$\text{Si } L\{\delta(t)\} = h(t) \rightarrow L\{K \cdot \delta(t - t_0)\} = K \cdot h(t - t_0)$$

- Una señal arbitraria de entrada $x(t)$ puede expresarse como un tren infinito de impulsos. Para ello, dividimos $x(t)$ en tiras rectangulares de anchura t_s y altura $x(k t_s)$. Cada tira la reemplazamos por un impulso cuya amplitud es el área de la tira :

$$t_s \cdot x(k.t_s) \delta(t - Kt_s)$$

La función $x_s(t)$ que aproxima $x(t)$ es :

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s x(k t_s) \cdot \delta(t - k t_s)$$

$x(t)$ es el límite cuando $t_s \rightarrow d\lambda$, $k t_s \rightarrow \lambda$:

$$x(t) = \lim_{t_s \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} t_s x(k t_s) \cdot \delta(t - k t_s) = \int x(\lambda) \delta(t - \lambda) \cdot d\lambda$$

Y aplicando el principio de superposición:

$$y(t) = L\{x(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \delta(t - \lambda) \cdot d\lambda\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot L\{\delta(t - \lambda)\} \cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot h(t - \lambda) \cdot d\lambda = x(t) * h(t)$$

Conclusiones Convolución

- Mediante convolución hemos sido capaces de determinar la respuesta del sistema a una señal de entrada a partir de la respuesta del sistema a una entrada impulso.
- La función $h(t)$ se define para $t \geq 0$ y decrece cuando $t \rightarrow \infty$, para la mayoría de los sistemas físicos. Por tanto,
- La respuesta en t_0 depende de los valores actual y pasados de la entrada y de la respuesta al impulso.
- Los valores más recientes de $x(t)$ son multiplicados por sus correspondientes más antiguos (y más grandes) valores de $h(t)$.

Propiedades de la convolución

- Propiedades (se supone que $x(t)*h(t)=y(t)$):

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$[K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)] * h(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t)$$

$$x(t) * h(t - \alpha) = y(t - \alpha)$$

$$x(t - \alpha) * h(t - \beta) = y(t - \alpha - \beta)$$

$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$

$$x(t) * h'(t) = x'(t) * h(t) = y'(t)$$

$$x'(t) * h'(t) = y''(t)$$

$$x^m(t) * h^n(t) = y^{m+n}(t)$$

$$x(\alpha t) * h(\alpha t) = \left| \frac{1}{\alpha} \right| y(\alpha t)$$

Correlación y Autocorrelación

- Correlación: Es una operación similar a la convolución, con la diferencia de que en la correlación no hay que “reflejar” una de las señales:

$$R_{xy}(t) = x(t) \ast \ast y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) y(\lambda - t) d\lambda = x(t) \ast y(-t)$$

Esta expresión nos indica que la relación que existe entre la convolución y la correlación.

La correlación nos da una medida de la similitud entre dos señales. No existe la propiedad conmutativa por lo que dadas dos señales $x(t)$ e $y(t)$ se definen dos correlaciones:

$$R_{xy}(t) = x(t) \ast \ast y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) y(\lambda - t) d\lambda$$

$$R_{yx}(t) = y(t) \ast \ast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda) x(\lambda - t) d\lambda$$

que sólo coinciden en $t=0$: $R_{xy}(0) = R_{yx}(0)$

Correlación y Autocorrelación

- La correlación de una señal consigo misma se denomina autocorrelación:

$$R_{xx}(t) = x(t) ** x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) x(\lambda - t) d\lambda$$

La autocorrelación representa la similitud entre una señal y su desplazada. El máximo de autocorrelación se obtiene cuando no hay desplazamiento ($t=0$). La autocorrelación es simétrica con respecto al origen, ya que $R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$.

Ejemplo de uso de la autocorrelación: Radar.

Convolución Discreta

□ Convolución discreta :

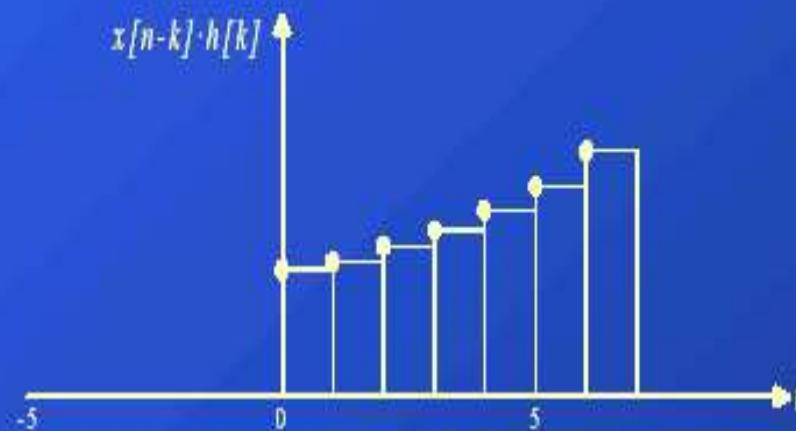
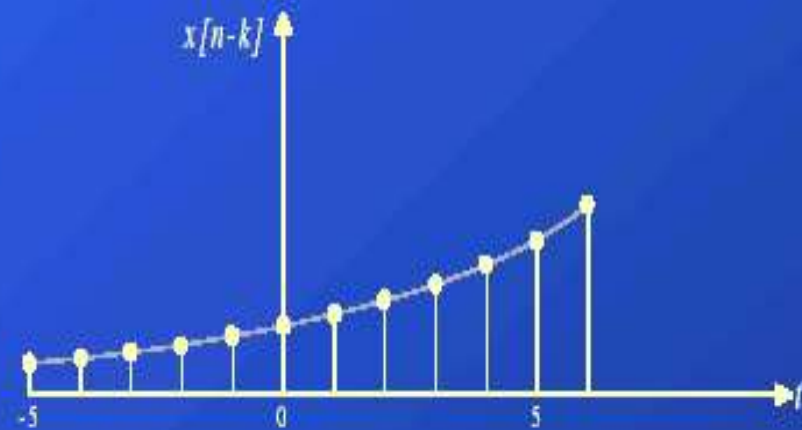
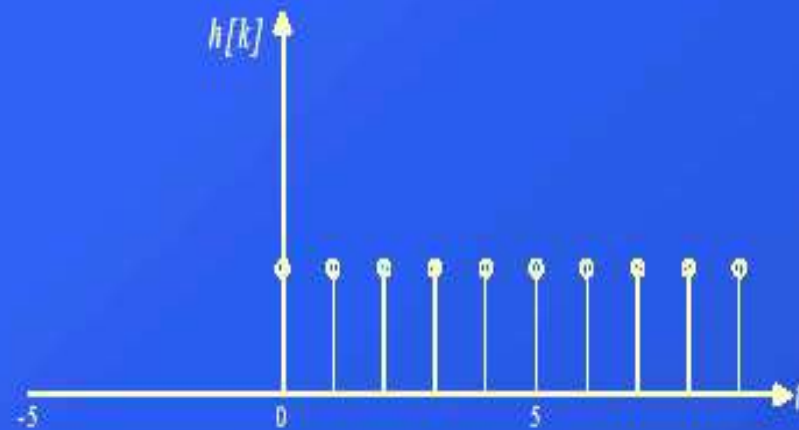
- Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que sólo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica.
- Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función $x(\lambda)h(t-\lambda)$. Para ello, disponemos de muestreos de ambas señales en los instantes de tiempo $n t_s$, que llamaremos $x_s[k]$ y $h_s[n-k]$ (donde n y k son enteros). El área es, por tanto,

$$y_s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s \cdot x_s[k] h_s[n-k] = t_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k]$$

- La convolución discreta se define para un intervalo de muestreo $t_s = 1$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k]$$

Convolución Discreta



- En la práctica se trabaja con secuencias de longitud finita.
- Para hacer la convolución:
 - una de las secuencias se refleja y se desplaza sucesivamente
- Veremos algunos métodos para calcular la convolución a partir de dos secuencias.

Convolución Discreta

- Propiedades sobre la duración de la convolución discreta.

El índice del comienzo de la convolución es la suma de los índices de comienzo de las respectivas señales. Si las dos señales comienzan en $n=n_0$ y $n=n_1$, la convolución comienza en $n=n_0+n_1$.

- Para dos secuencias de duración M y N , su convolución se extiende durante $M+N-1$ muestreos.

- Propiedades de la convolución discreta ($x[n]*h[n]=y[n]$)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$[Ax_1 + Bx_2]*h = y_1 + y_2$$

$$x[n]*h[n-\alpha] = x[n-\alpha]*h[n] = y[n-\alpha]$$

$$x[n-\alpha]*h[n-\beta] = y[n-\alpha-\beta]$$

$$\delta[n]*h[n] = h[n]$$

$$h[n] = \delta[n]*h[n] = \{u[n] - u[n-1]\}*h[n] = y_u[n] - y_u[n-1]$$

$$u[n]*x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$$

$$\{x[n] - x[n-1]\}*h[n] = y[n] - y[n-1]$$

Formas de calcular la convolucion discreta:

Convolución Discreta

❑ Método de la tira deslizante (Sliding Strip Method)

- ♦ Sea $h[n]=\{2,5,0,4\}$, $x[n]=\{4,1,3\}$, $t_s=1/2$. Las dos secuencias comienzan en $n=0$.
 - ♦ Hacemos el “reflejo” de una de ellas, $x[-n]=\{3,1,4\}$.
 - ♦ Alineamos las secuencias y las sumamos y desplazamos sucesivamente.

	$t=0$	$t=t_s$	$t=2t_s$
h	2 5 0 4	2 5 0 4	2 5 0 4
x	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 2 \ 20 \ 0 \ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 6 \ 5 \ 0 \ 0 \end{array}$
	Suma=8	Suma=22	Suma=11
	$y_s[0]=8 \cdot \frac{1}{2}=4$	$y_s[1]=22 \cdot \frac{1}{2}=11$	$y_s[2]=11 \cdot \frac{1}{2}=5.5$
	$t=3t_s$	$t=4t_s$	$t=5t_s$
h	2 5 0 4	2 5 0 4	2 5 0 4
x	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 15 \ 0 \ 16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 4 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 12 \ 0 \ 0 \end{array}$
	Suma=31	Suma=4	Suma=12
	$y_s[3]=31 \cdot \frac{1}{2}=15.5$	$y_s[4]=4 \cdot \frac{1}{2}=2$	$y_s[5]=12 \cdot \frac{1}{2}=6$

Convolución Discreta

- ♦ La convolución discreta $y[n]$ es $\{8, 22, 11, 31, 4, 12\}$. La convolución numérica es $\{4, 11, 5.5, 15.5, 2, 6\}$.

❑ Método de las Suma por Columnas

- ♦ Hacemos el mismo ejemplo. No es necesario “reflejar” una de las secuencias.

n	0	1	2	3	4	5
h	2	5	0	4		
x	4	1	3			
	8	20	0	16		
		2	5	0	4	
			6	15	0	12
y	8	22	11	31	4	12

$$y[n] = \{8, 22, 11, 31, 4, 12\}, n=0, 1, 2, \dots, 5$$

- Correlación discreta : Se definen de igual manera que en el caso continuo, así como la autocorrelación.

$$R_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k-n] \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$R_{yx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[k-n] \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Convolución y Correlación en MATLAB

- ❑ MATLAB dispone de dos funciones para el cálculo de convoluciones y correlaciones.

```
>> y = conv(x,h)
```

Hace la convolución de los vectores x y h . El vector resultante y tiene un tamaño igual a $\text{length}(x) + \text{length}(h) - 1$

```
>> rxy = xcorr(x,y)
```

Hace la correlación de los vectores de M elementos x e y . Devuelve un vector de $2M-1$ elementos.

```
>> rxx = xcorr(x)
```

Hace la autocorrelación del vector x de M elementos. Devuelve un vector de $2M-1$ elementos.

Series y Transformada de Fourier

- Las series de fourier describen señales periódicas como una combinación de señales armónicas (sinusoides).
- Se puede analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial o espectro.
- Dualidad entre tiempo y frecuencia.
- Forma trigonométrica de las series de fourier: se pretende describir una función periódica $x(t)$ de período T , frec fundamental $f=1/T$, $\omega_0=2\pi f$

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + \dots + a_k \cos(k\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + b_k \sin(k\omega_0 t) + \dots \\&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\end{aligned}$$

- En forma exponencial:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s[k] \exp(jk\omega_0 t)$$

- Cálculo de los coeficientes

$$X_s[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

- Relación de Parseval

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T x_p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_s[k]|^2$$

La potencia contenida en una señal puede evaluarse a partir de los coeficientes de su correspondiente serie de Fourier.

- Espectro de señales periódicas : Los coeficientes $X_s[k]$ son los coeficientes espectrales de la señal $x_p(t)$.
- La gráfica de esos coeficientes en función del índice armónico k ó de las frecuencias $k\omega_0$, se denomina espectro.
- Hay dos tipos de gráficos, uno de magnitud con los coeficientes $|X_s[k]|$ y otro de la fase de $X_s[k]$.
- La función $|X_s[k]|$ así como la fase de $X_s[k]$ son funciones discretas de la frecuencia.
- Es importante saber cuantos armónicos serán necesarios para reconstruir una señal dada. Para ello utilizaremos la relación de Parseval.

□ Respuesta de un sistema a entradas periódicas

- ◆ Tenemos un sistema cuya respuesta a impulso es $h(t)$. Si sometemos esta sistema a una entrada armónica $x(t)=\exp(j\omega t)$, la respuesta $y(t)$ será la convolución de $h(t)$ con $x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \exp\{j\omega(t - \lambda)\} d\lambda = \exp(j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \exp(-j\omega\lambda) d\lambda = x(t) H(\omega)$$

- ◆ Como toda señal $x_p(t)$ puede ser expresada como una suma infinita de armónicos y aplicando el principio de superposición:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_S[k] \exp(jk\omega_0 t) \leftrightarrow y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_S[k] H[k\omega_0] \exp(jk\omega_0 t)$$

- ◆ La respuesta del sistema a una señal periódica es también una señal periódica de la misma frecuencia que la señal de entrada, pero con diferentes magnitudes y fases.
- ◆ La respuesta de un sistema a entradas armónicas nos da la respuesta estacionaria del sistema.

Efecto Gibbs

- Para señales discontinuas, su reconstrucción a partir de las series de Fourier produce el llamado efecto Gibbs, que consiste en la aparición de un pico de del 9% en el punto de discontinuidad . Aun se tiene este efecto cuando se utilicen gran cantidad de armónicos para la reconstrucción.
- Al querer aproximar la función periódica que tiene infinitos armónicos hay que truncar la función hasta el armónico N -> se produce este efecto.
- Para eliminarlo se usan las llamadas ventanas espectrales que suavizan la reconstrucción de la función.

Transformada de Fourier

Para ampliar el concepto de series de Fourier a señales no periódicas se puede visualizar una señal no periódica como una señal continua de período infinito .

- El espaciado entre frecuencias se aprox. a cero y es por lo tanto una función continua
- La señal pasa a ser de potencia a señal de energía.
- Los coeficientes $X_s[k]$ son cero. Ya no es un indicador del contenido espectral de la señal.

Se define la Transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot X_s[k] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Relación entre series y transformada de Fourier

$X(w)$ es la función envolvente de $X_s[k]$

Si muestreamos $X(w)$ a intervalos f_0 . la función resultante es el espectro de una señal periódica de período $T_0 = 1/f_0$

- Es decir, muestrear en el dominio frecuencial se corresponde con señales periódicas en el dominio temporal.

$$X(f) = T \cdot X_s[k] \Big|_{kf_0=f}$$
$$X_s[k] = \frac{X(f)}{T} \Big|_{f=kf_0}$$

- La transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

Transformada de Fourier

- ❑ Podemos utilizar la Transformada de Fourier para analizar la respuesta a sistemas LTI, valiéndonos del hecho de que convolución en el tiempo equivale al producto en el dominio frecuencial.
- ❑ Si la respuesta $y(t)$ a un sistema con una respuesta a impulso $h(t)$ y entrada $x(t)$ con condiciones iniciales cero es

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la Transformada de Fourier a ambos miembros,

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ es la función de Transferencia del sistema. Esta nos permite analizar la respuesta frecuencial del sistema.

- ❑ Como se vió en las Series de Fourier, se puede analizar la respuesta en el estado estacionario del sistema a partir de $H(\omega)$.

- Limitaciones de la Transformada de Fourier

- El sistema debe tener condiciones iniciales cero.

- Entradas que no son señales de energía requieren el uso de impulsos.

Por ello se extiende el concepto de la Transformada de Fourier a la Transformada de Laplace.

- Transformada de Laplace

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

- La cantidad compleja $s = \sigma + j\omega$. De esta forma se generaliza el concepto de frecuencia en la Transformada de Fourier.

- Se hace notar que el límite inferior de la integral es 0, lo cual proporciona una misma Transformada para señales causales ya que $x(t)$ y $x(t)u(t)$ son iguales.

- La Transformada de Laplace existe si la integral que la define es finita.

- Para ello se necesita que los valores de s sean unos concretos, lo que define una región de convergencia de la Transformada de Laplace.

- Con la Transformada de Laplace se generaliza el concepto de función de Transferencia de un sistema a aquellos cuyas condiciones iniciales son no nulas.

- De igual manera que en la Transformada de Fourier, podemos obtener la respuesta de un sistema a una señal de entrada $x(t)$ a partir sus Transformadas de Laplace:

$$y(t) = x(t) * h(t) = L^{-1}\{X(s)H(s)\}$$

Donde $H(s)$ es la función de transferencia del sistema.

Muestreo y Cuantización

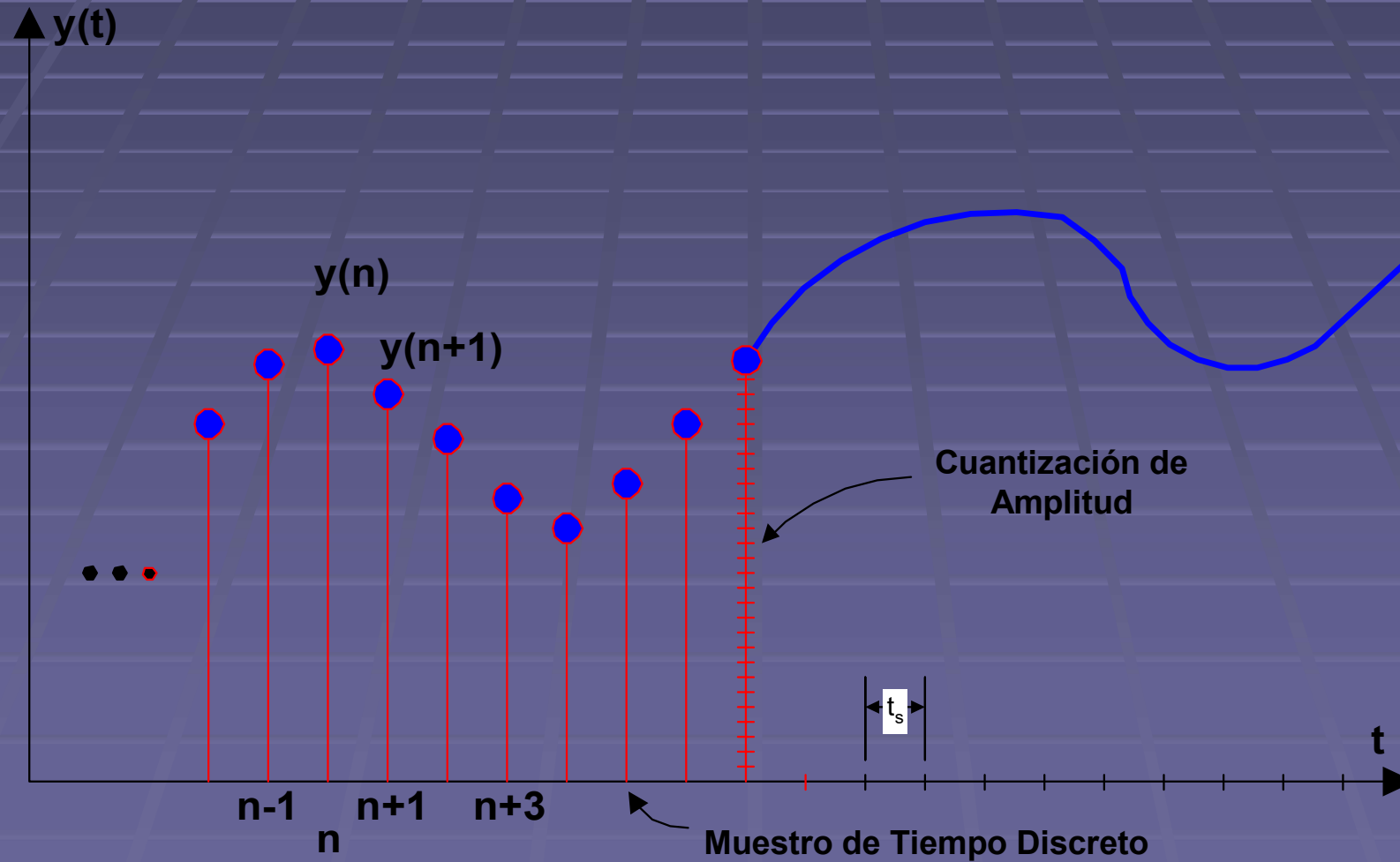
- El muestreo digital de una señal analógica trae consigo una discretización tanto en el dominio temporal como en el de la amplitud.
- Para describir matemáticamente el muestreo nos basaremos en el muestreo ideal. Consiste en una función que toma los valores de la señal $x_c(t)$ en los instantes de muestreo y cero en los otros puntos.

$$x_s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nt_s) \delta(t - nt_s) = x_c(t) \cdot x_I(t)$$

Donde t_s es el período de muestreo y $x_I(t)$ es la función de interpolación. El muestreo trae aparejado pérdida de información de la señal original. El teorema del muestreo establece en que condiciones se debe muestrear para que no se nos escapen los eventos de la señal original que son importantes para nuestro posterior desarrollo con la señal.

Concepto de discretización de la señal

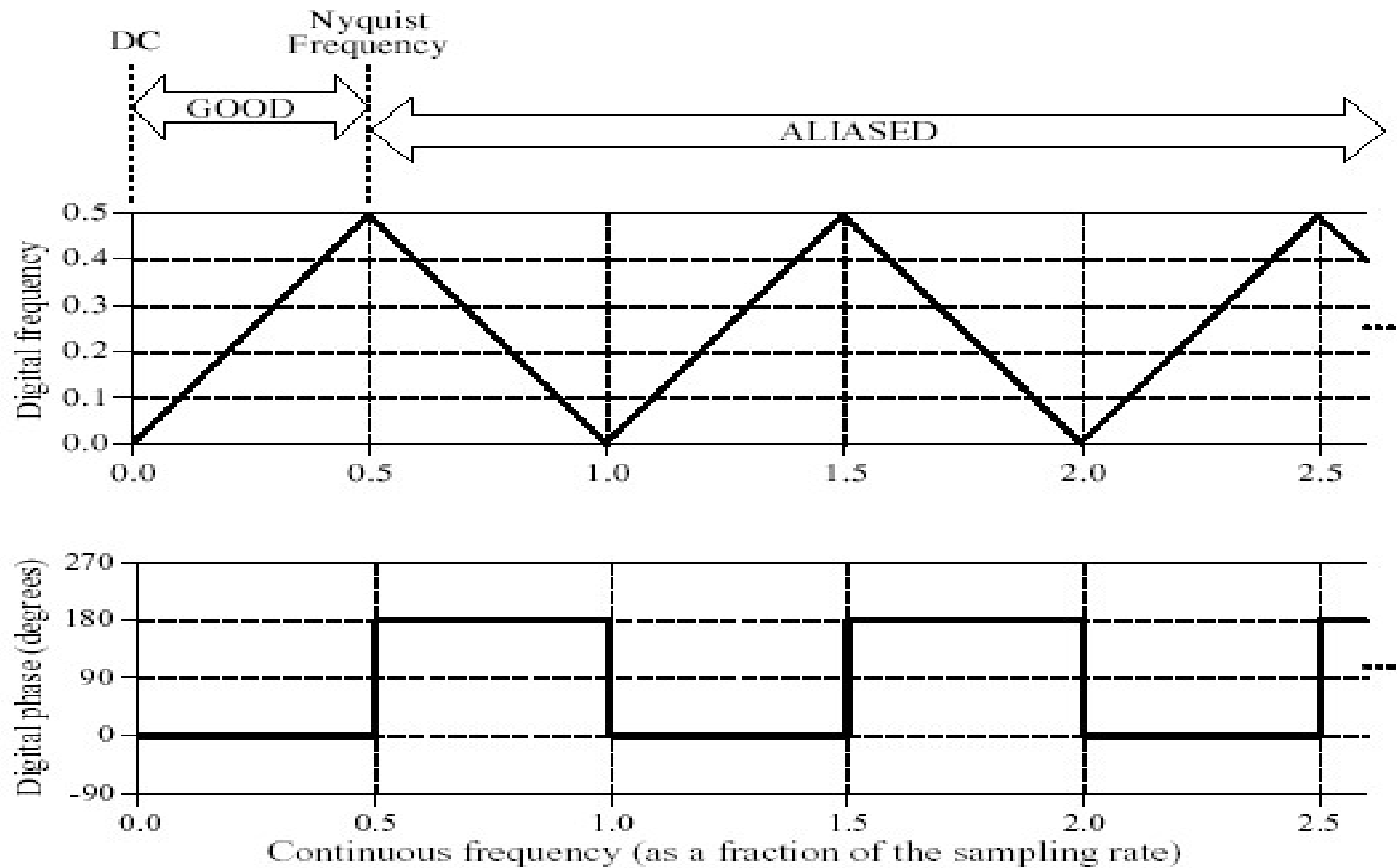
Tiempo discreto y amplitud discreta



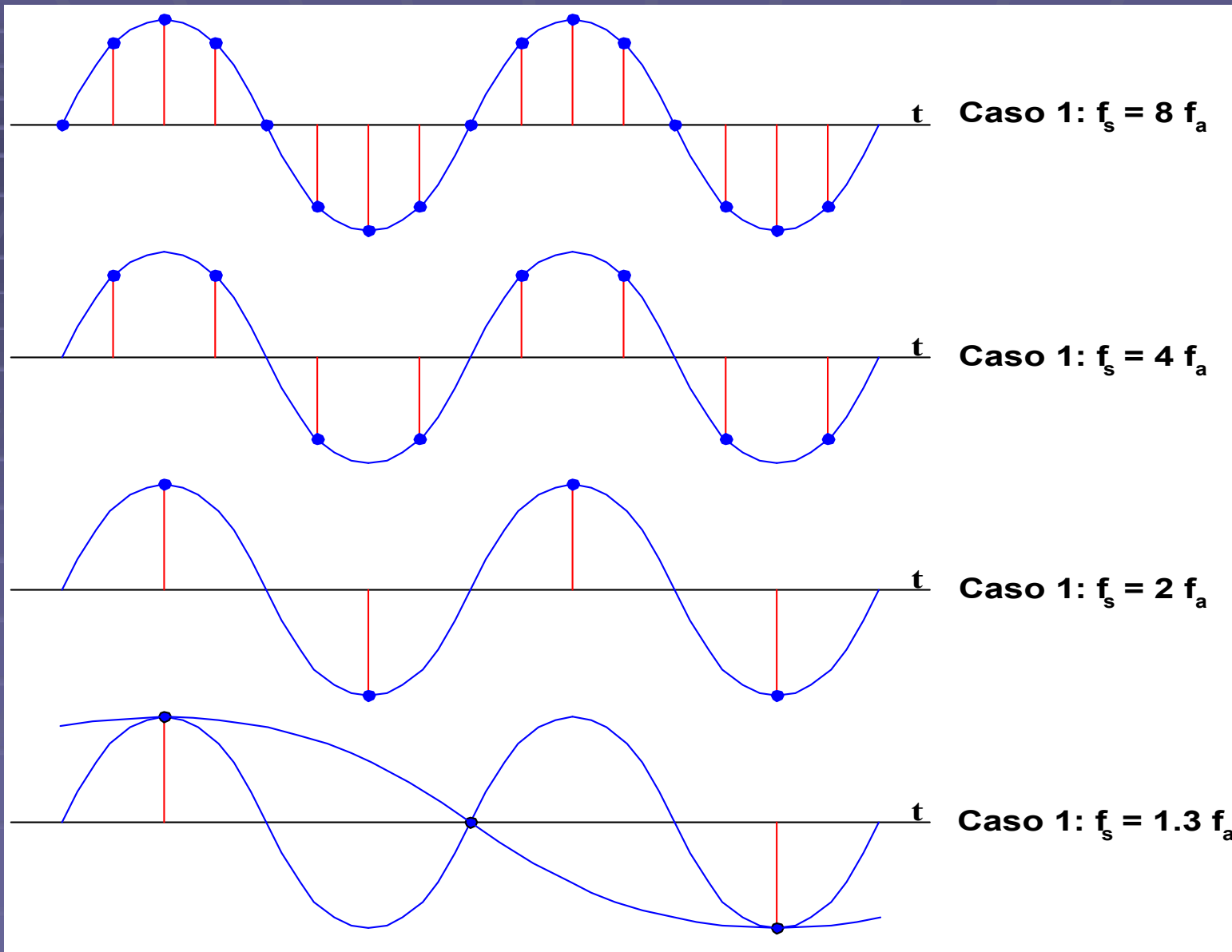
- Teorema del muestreo

Una señal $X_c(t)$ con un espectro limitado a la frecuencia F_b ($|f| \leq F_b$) puede ser muestreada sin pérdida de información si la frecuencia de muestreo f_s supera la cantidad $2F_b$, es decir $f_s \geq 2F_b$.

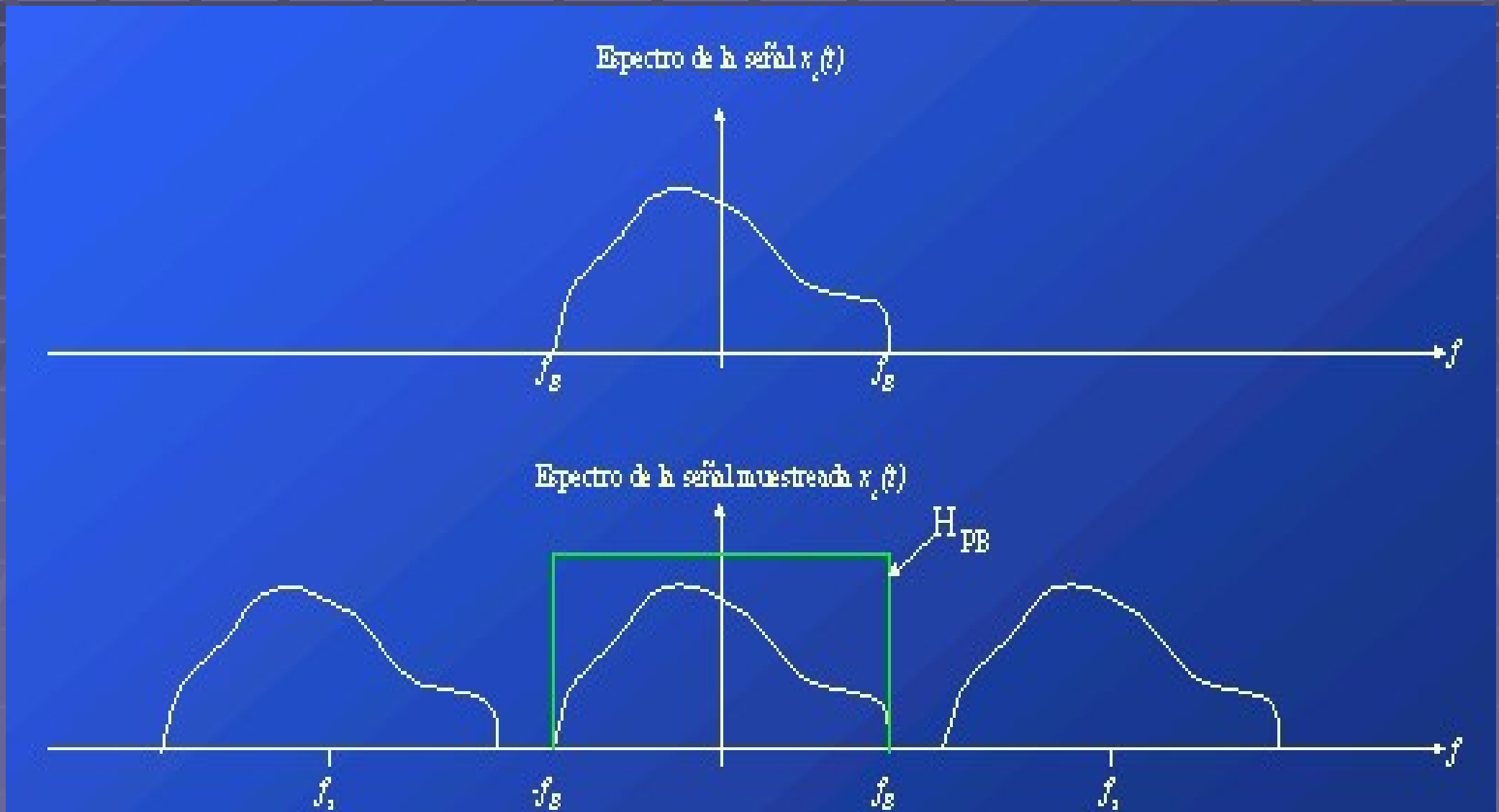
De no muestrearse al menos a esa frecuencia tiene lugar el fenómeno de "Aliasing".



$$F_b/F_s < 0.5$$



Es decir, el espectro de la señal muestreada se compone de una función de período $1/t$, replicándose en cada período el espectro de la señal original. En la sig. Fig. se observa el fenómeno:



- Para recuperar la señal original a partir de la muestreada no tenemos más que aplicar un filtro pasabajo con una frecuencia de corte en $f=f_B$ y una amplificación t_s es decir,

$$X_C(f) = X_S(f)H_{f_B}(f) \rightarrow x_C(t) = x_S(t) * h_{f_B}(t)$$

$$H_{f_B}(f) = t_s \text{rect}\left(\frac{f}{2f_B}\right) \rightarrow h_{f_B}(t) = t_s \cdot 2 \cdot f_B \cdot \text{sinc}(t \cdot 2 \cdot f_B)$$

$$x_S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C(kT_s) \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k] \delta(t - kT_s)$$

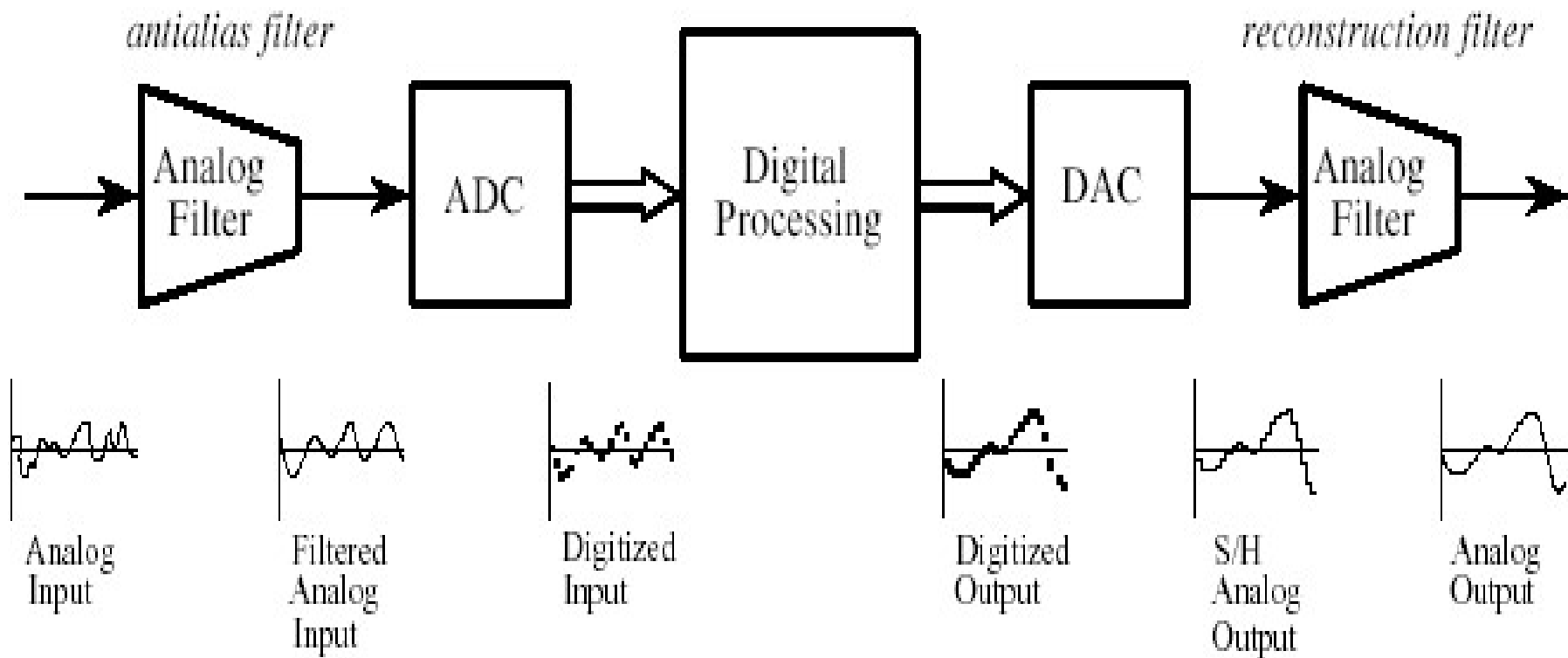
$$x_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k] h_{f_B}(t - kT_s) = 2 \cdot t_s \cdot f_B \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k] \cdot \text{sinc}[2f_B(t - kT_s)]$$

A la función $\text{sinc}(t)$ se le denomina función de interpolación cardinal.

Este tipo de reconstrucción tiene los siguientes problemas

- El dominio de la función sinc es infinito
- Requiere muestreo pasados y futuros.
- Se puede truncar la función $\text{sinc}(t)$, aparecería el efecto Gibbs
- No es posible reconstruir funciones con discontinuidades

Diagrama

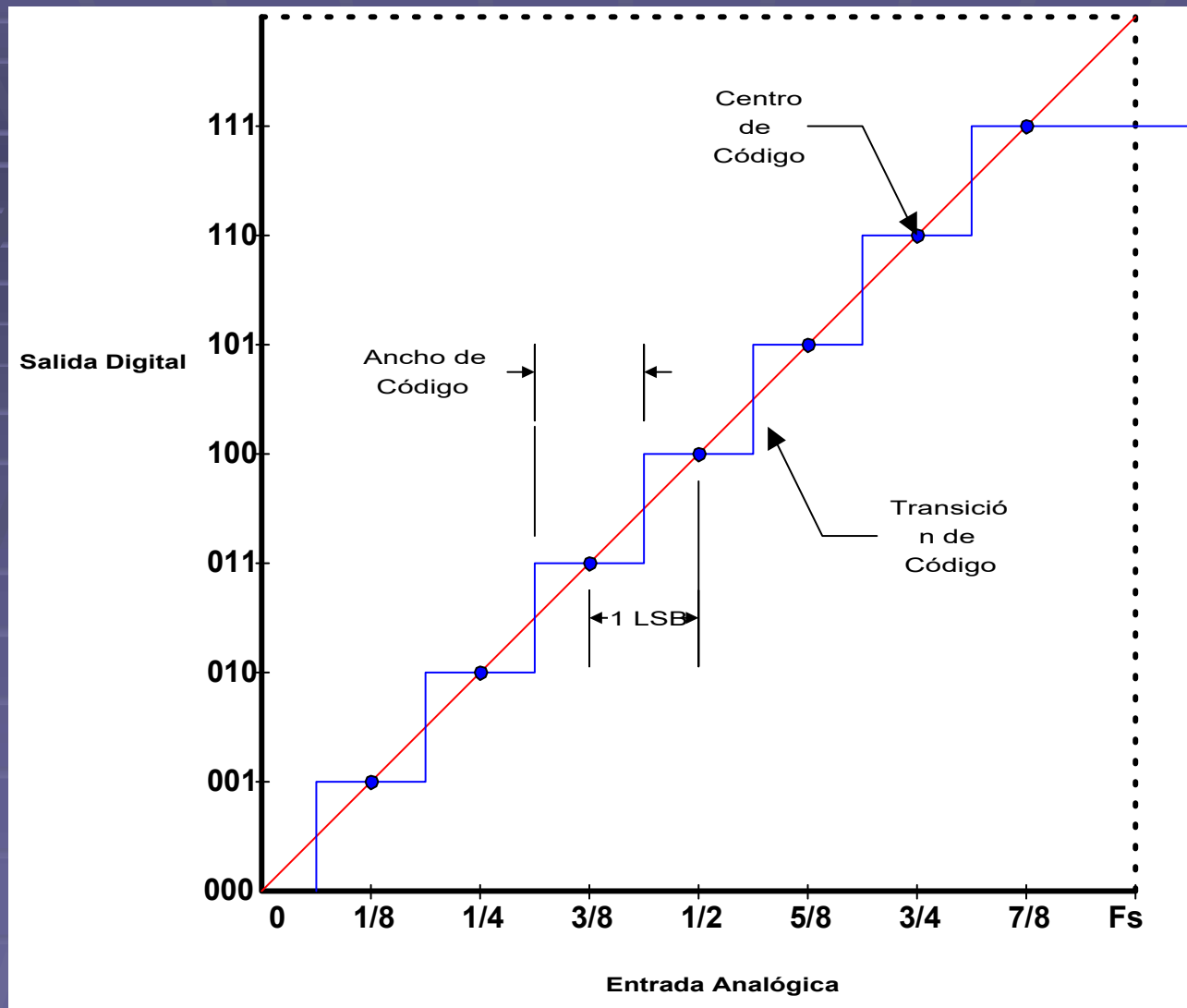


Selección del Filtro Antialias

- Los requerimientos del Filtro Antialias no solo están relacionados a la Tasa de Muestreo sino también al Rango Dinámico del Sistema.
 - Rango Dinámico es la relación entre la señal esperada mas grande a la mas pequeña señal que puede ser resuelta, y es usualmente expresada en dB.

Cuantización

- Para procesar señales digitales no solo alcanza con muestrear la señal analógica, sino también cuantizar la amplitud de la señal a un número finito de niveles.
- El tipo más usual es la cuantización uniforme en el que los niveles son todos iguales. La mayoría usan un número de niveles que es potencia de 2.
Si, cada $L = 2^b$ uno de los niveles es codificado a un número binario de b bits.



- **Ruido de Cuantización:** Llamaremos $x_s[n]$ a la señal discreta y $x_q[n]$ a la señal discreta cuantizada. El error es :

$$\varepsilon[n] = x_s[n] - x_q[n]$$

Se define la relación señal a ruido de cuantización (SNR_Q) como la relación entre la potencia P_s de la señal y la potencia P_N del error $\varepsilon[n]$, medido en decibelios.

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s^2[n] \qquad P_N = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]$$

$$SNR_Q(dB) = 10 \cdot \log \frac{P_s}{P_N} = 10 \cdot \log \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s^2[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]}$$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Transformada Discreta de Fourier

Analizaremos primero la DTFT (transformada de fourier en tiempo discreto) que describe el espectro de señales discretas. Deduciremos la DFT a partir de la convolución discreta ya explicada.

Allí se definió la convolución discreta como

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k]$$

Si tenemos una señal de entrada armónica $x[n] = \exp(j2\pi n f_s t_s)$. La respuesta será:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(n-k)f_s t_s] \cdot h[k]$$

$$= \exp(j2\pi n f_s t_s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi k f_s t_s) \cdot h[k] = x[n] \cdot H(f)$$

Donde $H(f)$ es la DTFT de $h(n)$. $H(f)$ es periódica debido a que $h(n)$ es discreta.

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Se define la DTFT de una señal discreta $x[n]$ como

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi k f t_s)$$

Dualidad entre las series de Fourier y la DTFT

Tenemos una señal periódica continua $x_p(t)$. Mediante las series de Fourier transformamos esa señal periódica continua en una función aperiódica y discreta (los coeficientes espectrales $X_s[k]$).

$$X_s[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s[k] \exp(j2\pi k f_0 t)$$

De manera dual podemos intercambiar tiempo y frecuencia de forma:

$$x_s[k] = \frac{1}{S_f} \int_{S_f} X_p(f) \exp(j2\pi k f t_s) df \quad X_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] \exp(-j2\pi k f t_s)$$

Donde $S_f = 1/t_s$. Ahora tenemos una señal aperiódica discreta $x_s[k]$ y la transformamos en una señal periódica continua $X_p(f)$ mediante la DTFT.

El comportamiento dual entre las series de Fourier y la DTFT se manifiesta en lo siguiente:

- En las series de Fourier parto de una señal $x(t)$, temporal, continua y periódica (periodo T) y obtengo los coeficientes $X[k]$, que es una función de la frecuencia, aperiódica y discreta con una distancia entre dos valores consecutivos de $f_0=1/T$.
- En la DTFT parto de una señal discreta en el tiempo $x[n]$, con periodo de muestreo $t_s=1/f_s$ y aperiódica y obtengo una función $X(f)$, que es función continua de la frecuencia y periódica con periodo f_s .
- Todas las propiedades que se vieron para las series de Fourier tienen su correspondientes equivalencias en la DTFT.
- Sin embargo, a la hora de realizar operaciones tenemos los mismos problemas que en las series de Fourier ya que seguimos tratando con señales continuas o con series de datos de longitud infinita. La electrónica nos obliga a trabajar con un número finito de datos discretos que además tienen una precisión finita.
- De lo que se trata es de conseguir discretizar las variables continuas y de limitar el números de muestras en los dos dominios (temporal y frecuencial).
- Esto nos lleva a definir las series discretas de Fourier y la Transformada Discreta de Fourier (DFT).

De las Series de Fourier a las Series Discretas de Fourier

Para las Series de Fourier se cumple ($f_0=1/T$)

$$x_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_S[k] \exp(j2\pi k f_0 t) \quad X_S[k] = \frac{1}{T} \int_T x_P(t) \cdot \exp(-j2\pi k f_0 t) \cdot dt$$

Para limitar $x_P(t)$, tomamos N muestras de $x_P(t)$ durante un periodo a intervalos t_s , de forma que $N \cdot t_s = T$. Al calcular los coeficientes $X[k]$ me queda,

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N t_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_P[n] \cdot \exp(-j2\pi k f_0 n t_s) \cdot t_s \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_P[n] \cdot \exp(-j2\pi k n / N) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

La cantidad $X[k]$ es la serie de Fourier Discreta de la señal periódica muestreada $x_P[n]$.

- De la DTFT a la DFT

Tenemos una señal $x[n]$ limitado a N muestras con un periodo de muestreo t_s .

La DTFT se define como

$$X_P(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j2\pi n f t_s)$$

$X_P(f)$ es periódica con periodo $1/t_s$. Muestreamos esta señal N veces sobre un periodo, por tanto $X_T[k]$ será sustituir f por $k/(Nt_s)$:

$$\begin{aligned} X_T[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left[-j2\pi n k t_s / (N t_s)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left[-j2\pi n k / N\right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Esta última expresión resultante es la Transformada Discreta de Fourier de una señal $x[n]$. Excepto por el término $1/N$ es idéntica a la Serie Discreta de Fourier.

Podemos interpretar los resultados del DFT de una secuencia $x_s[n]$ desde dos puntos de vista:

- Como los coeficientes espectrales (series de Fourier) de una señal periódica discreta cuyos muestreos coinciden con la secuencia $x_s[n]$.
- Como el espectro de una señal aperiódica discreta cuyos muestreos corresponden a la secuencia $x_s[n]$.

La DFT es una aproximación al espectro de la señal analógica original. Su magnitud se ve influenciada por el intervalo de muestreo, mientras que su fase depende de los instantes de muestreo.

- En general, el DFT es una aproximación a las series o a la transformada de Fourier. Es muy importante elegir correctamente los parámetros del DFT (frecuencia de muestreo $f_s=1/t_s$, resolución de frecuencia $f_0=1/D$). La resolución de frecuencia depende solo de la duración.
- La frecuencia de muestreo se determina a partir del teorema de muestreo. Si queremos detectar el espectro de una señal hasta una máxima frecuencia B , la frecuencia de muestreo deberá ser $2B$.
- La duración del muestreo se elige para una determinada resolución de frecuencia. Una regla de diseño muy útil es: Si queremos los M primeros armónicos de una señal con un error máximo del 5%, el número de muestreos $N=8M$.

Ejemplo

- Ejemplo: Queremos determinar mediante un algoritmo digital el espectro de la señal $x(t)=\exp(-t)$. La máxima frecuencia de la que pide su coeficiente es $f_B=1\text{Hz}$. Además el armónico correspondiente a $f=0.3\text{Hz}$ debe tener un error menor que el 5%. Calcular f_s, D y N .

De acuerdo con el Teorema del Muestreo $f_s=2f_B=2\text{Hz}$.

Escogemos una resolución de frecuencia de $f_0=0.1\text{Hz}$, de forma que $D=1/0.1=10\text{s}$.

La frecuencia 0.3Hz se corresponde con el índice $k=3$, por lo que $N=3 \cdot 8=24$ *muestreos*. Esto me indica que $f_s=N/D=24/10=2.4 > 2$.

Si el objetivo es hacer que N sea lo menor posible (para facilitar los cálculos del DFT), se puede elegir $f_0=0.3\text{Hz}$, $D=1/0.3=3.33\text{s}$, $k=1$ y $N=1 \cdot 8=8$.

Resumiendo Series y transformadas

- Series de Fourier
Señal Continua Periódica (periodo T), Espectro Discreto Aperiódico (intervalo de discretización $1/T$)
- Transformada de Fourier
Señal Continua Aperiódica, Espectro Continuo Aperiódico.
- Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo
Señal Discreta Aperiódica (intervalo de discretización ts), Espectro Continuo Periódico (periodo $1/ts$)
- Transformada Discreta de Fourier
Señal Discreta Periódica (intervalo de discretización ts , periodo T), Espectro Discreto (intervalo de discretización $1/T$)

Transformada de Fourier	
↙	↘
Señal no periódica/continua: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	Espectro no periódico/continuo: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
\Downarrow Muestreo de $x(t)$ (DTFT)	\Downarrow Muestreo de $X(f)$ (serie de Fourier)
Señal muestreada en el tiempo: $x[n] = \int_1 X_p(F) e^{j2\pi nF} dF$ Espectro periódico (periodo = 1): $X_p(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi nF}$	Espectro muestreado: $X[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$ Señal periódica de tiempo (periodo = T): $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j2\pi k f_0 t}$
\Downarrow Muestreo de $X_p(F)$ (DFT)	\Downarrow Muestreo de $x_p(t)$ (DFS)
Espectro muestreado/periódico: $X_{\text{DFT}}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$ Señal periódica de tiempo/muestreada: $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{DFT}}[k] e^{j2\pi nk/N}$	Señal muestreada en el tiempo/periódica: $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{DFS}}[k] e^{j2\pi nk/N}$ Espectro muestreado/periódico: $X_{\text{DFS}}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$

Tipos de Transformadas





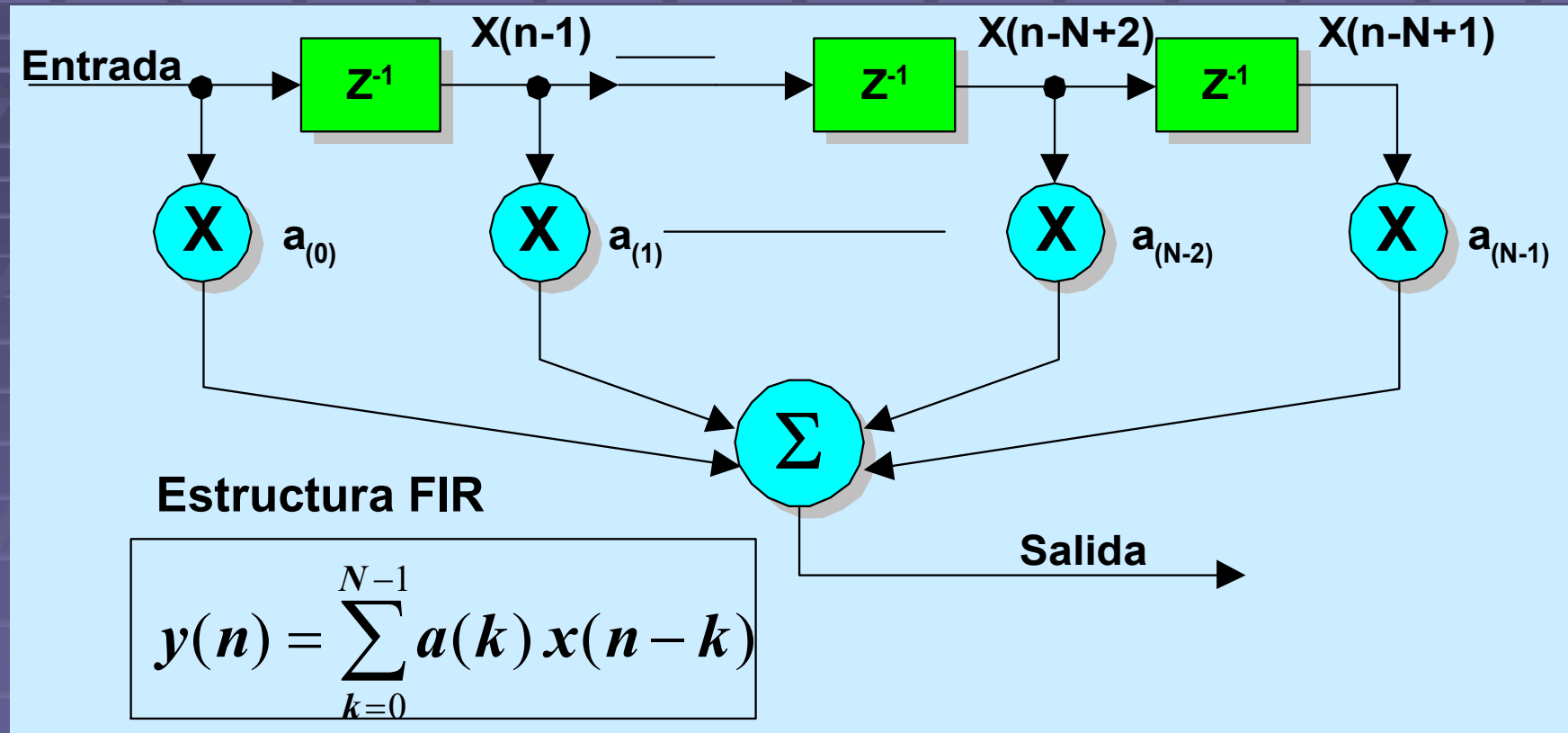
Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform <i>signals that are continuous and aperiodic</i>	
Fourier Series <i>signals that are continuous and periodic</i>	
Discrete Time Fourier Transform <i>signals that are discrete and aperiodic</i>	
Discrete Fourier Transform <i>signals that are discrete and periodic</i>	

FIGURE 8-2

Illustration of the four Fourier transforms. A signal may be continuous or discrete, and it may be periodic or aperiodic. Together these define four possible combinations, each having its own version of the Fourier transform. The names are not well organized; simply memorize them.

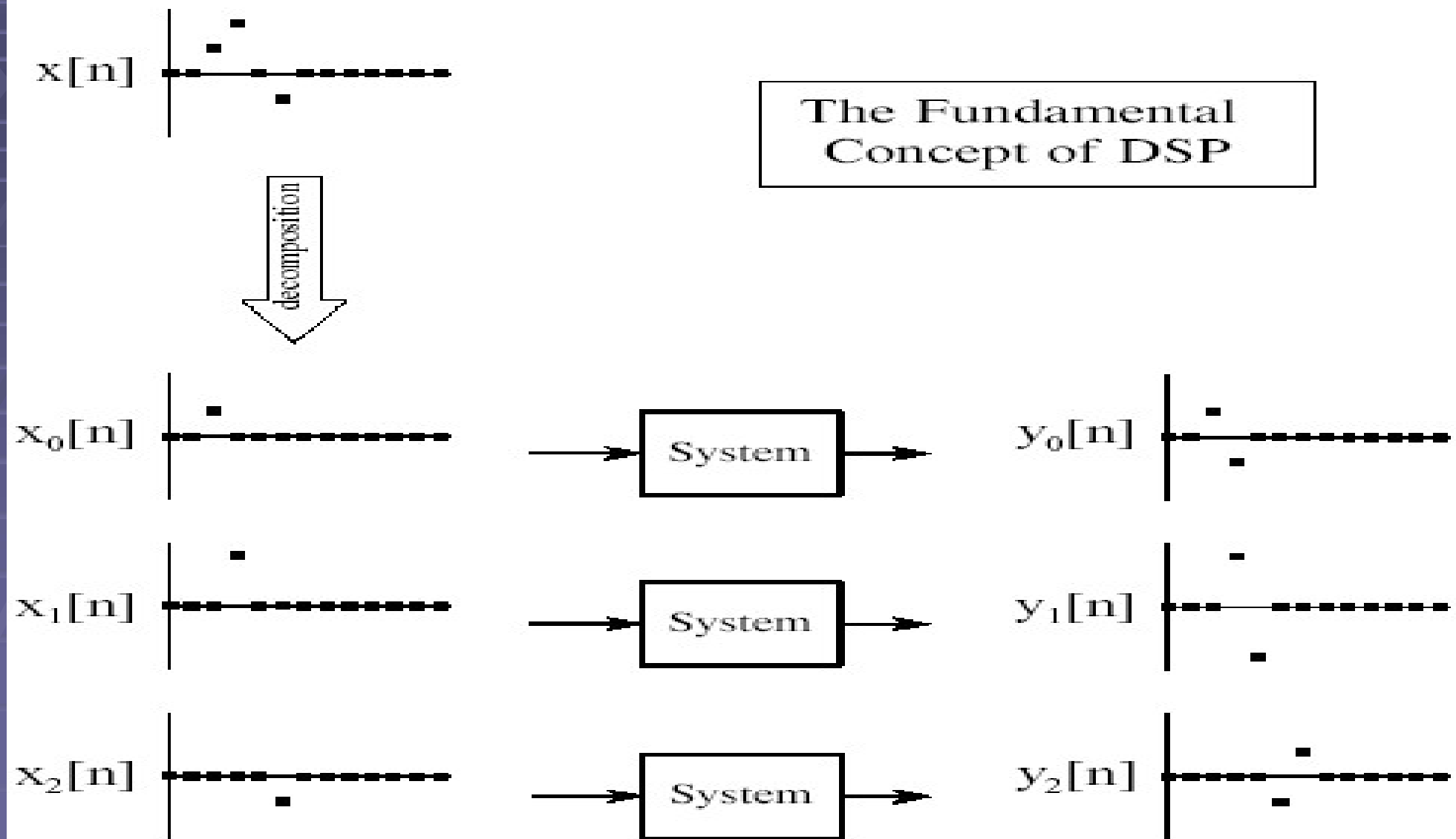
Estructura de un filtro FIR-Uso de convolución

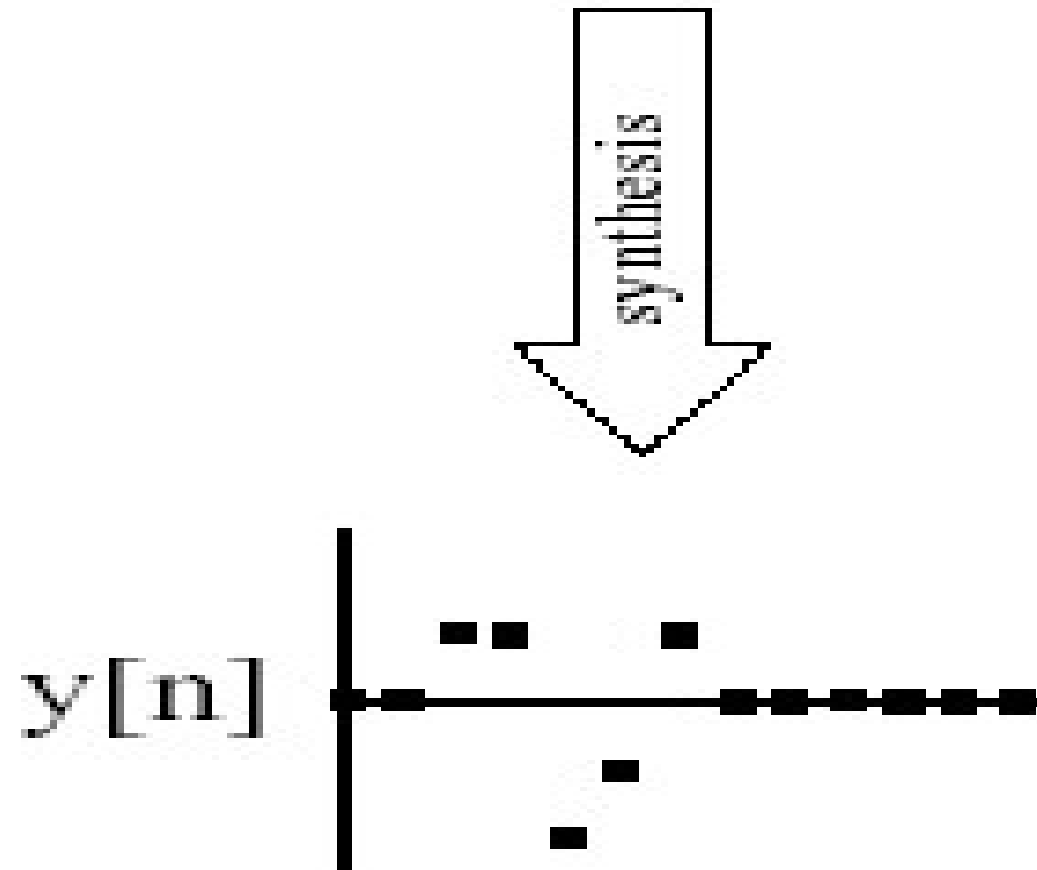


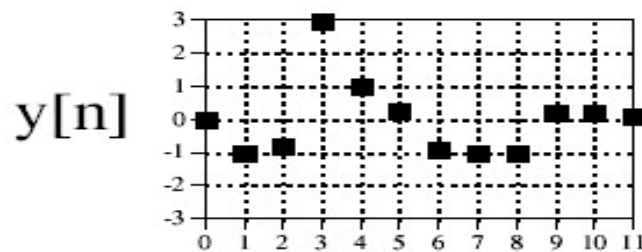
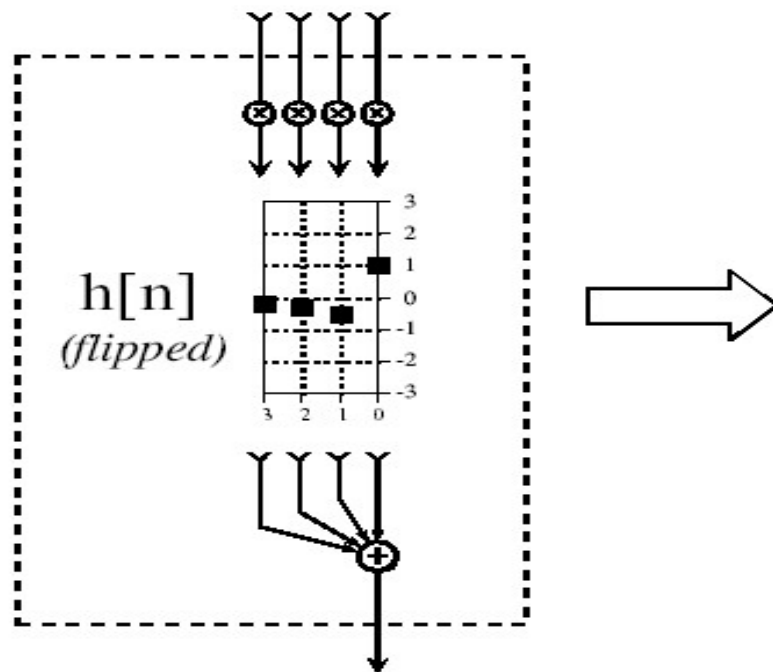
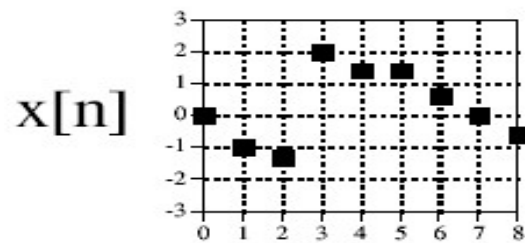
$$y(t) = L\{x(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \delta(t-\lambda) \cdot d\lambda\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot L\{\delta(t-\lambda)\} \cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) \cdot d\lambda = x(t) * h(t)$$

Los valores más recientes de $x(t)$ son multiplicados por sus correspondientes más antiguos (y más grandes) valores de $h(t)$.

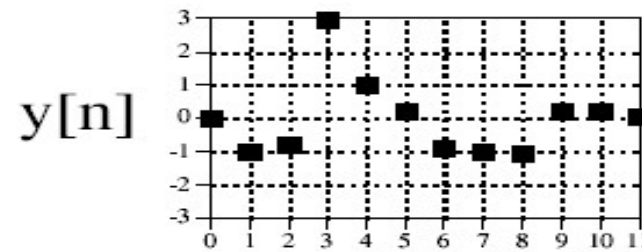
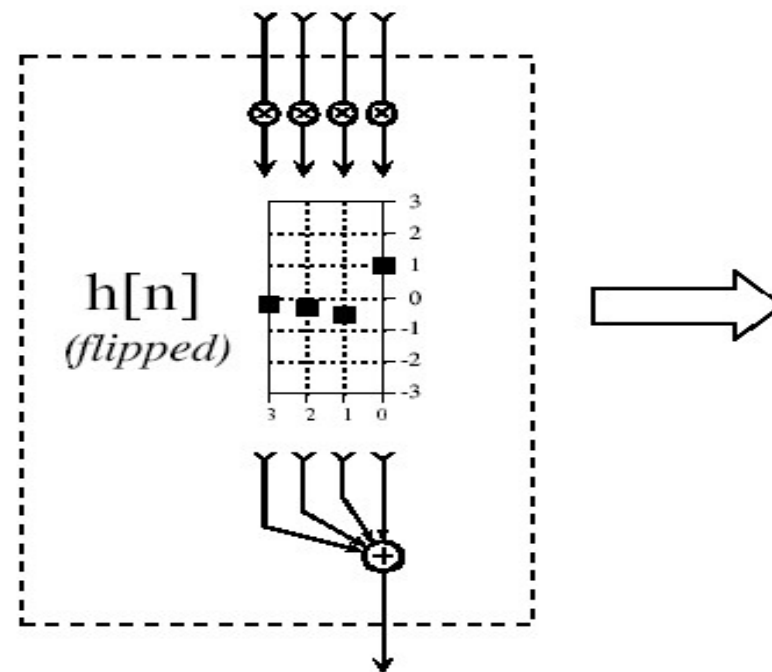
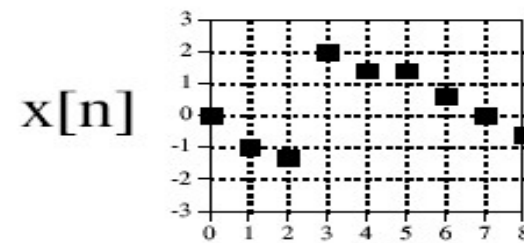
Concepto fundamental de DSP



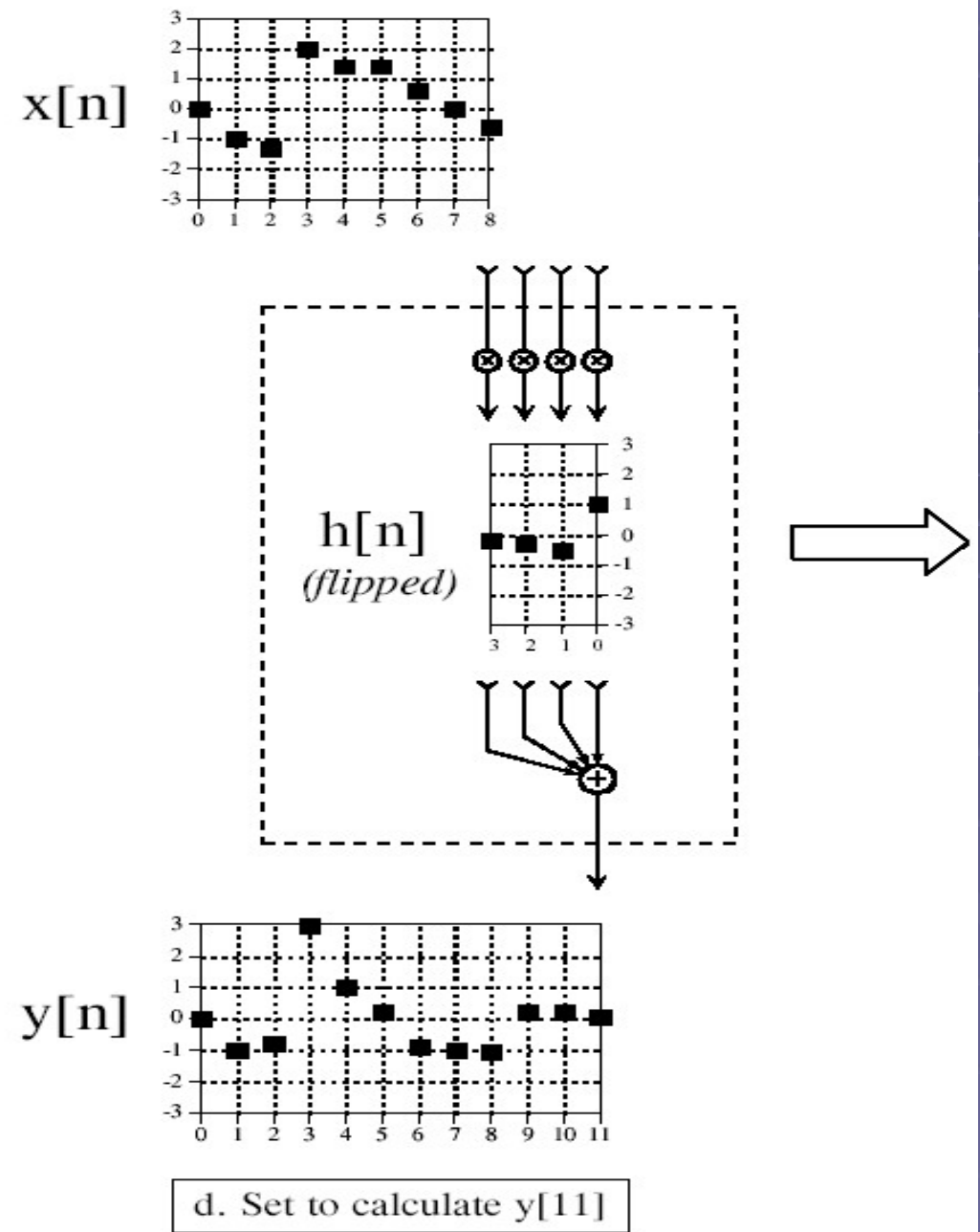
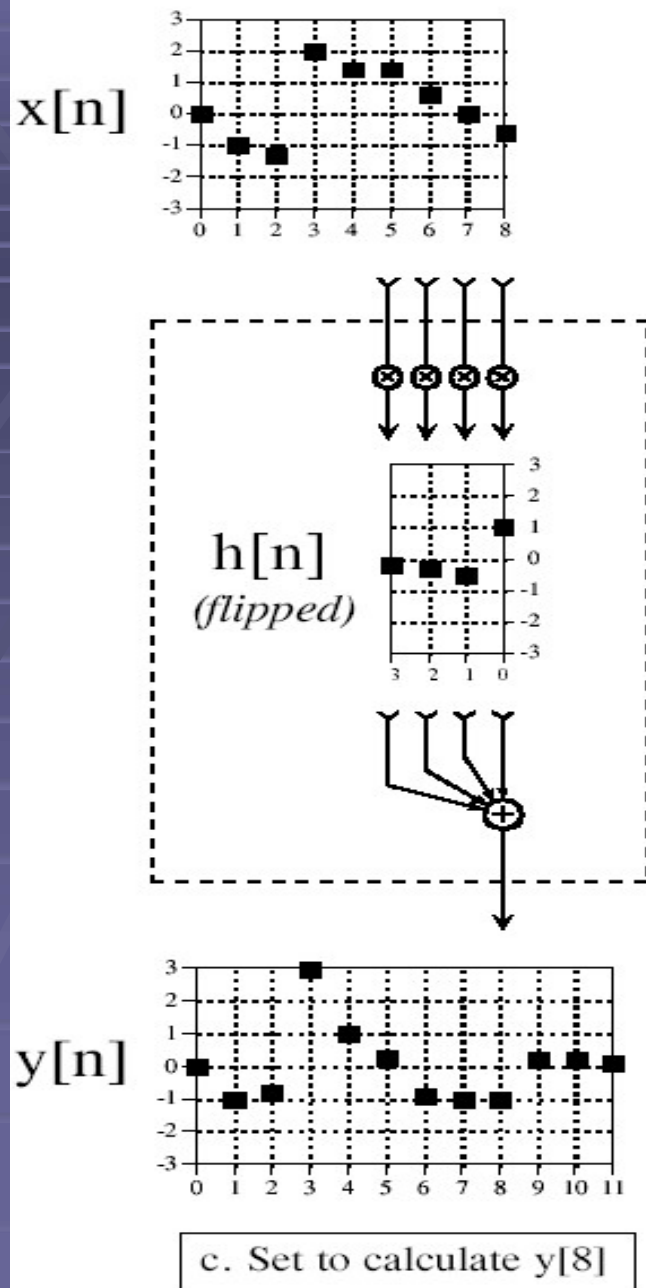




a. Set to calculate $y[0]$



b. Set to calculate $y[3]$



```

100 'CONVOLUTION USING THE INPUT SIDE ALGORITHM
110      '
120 DIM X[80]      'The input signal, 81 points
130 DIM H[30]      'The impulse response, 31 points
140 DIM Y[110]     'The output signal, 111 points
150      '
160 GOSUB XXXX      'Mythical subroutine to load X[ ] and H[ ]
170      '
180 FOR I% = 0 TO 110      'Zero the output array
190   Y(I%) = 0
200 NEXT I%
210      '
220 FOR I% = 0 TO 80      'Loop for each point in X[ ]
230   FOR J% = 0 TO 30    'Loop for each point in H[ ]
240    Y[I%+J%] = Y[I%+J%] + X[I%] * H[J%]
250   NEXT J%
260 NEXT I%      '(remember, * is multiplication in programs!)
270      '
280 GOSUB XXXX      'Mythical subroutine to store Y[ ]
290      '
300 END

```