

# APS

Transformada de Fourier

→ Delta de Dirac  $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \quad (\infty \text{ grande}) \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Es utilizada para modelar impulsos instantáneos.

→ Señales de energía:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 dt \quad \text{con esto podemos trabajar}$$

$$[E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{(t)}|^2 dt] \text{ (discreto)}$$

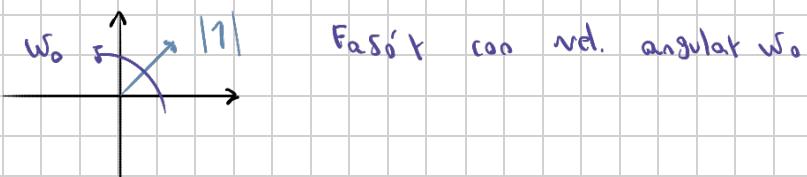
$$\rightarrow \text{Potencia: } P_x = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{T_0}^{+\infty} |X_{(t)}|^2 dt \cdot \frac{1}{T_0}$$

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_{(w)} \cdot e^{-jw t} dt = X_{(jw)}$$

Permite analizar señales en el dominio de la frecuencia.

$$e^{-jw t} = \cos(w t) - j \sin(w t)$$



Véamos:

$$Y_{(jw)} = H_{(jw)} \cdot X_{(jw)}$$

$$|Y| e^{j\phi_y} = |H| e^{j\phi_H} \cdot |X| e^{j\phi_X}$$

$$P_y = P_H \cdot P_X$$

$$|Y| = |H| + |X|$$

la transformada de  $\mathcal{F}$  nos permite analizar en qué frecuencia está concentrada la energía de una señal



→ Prop. Demota

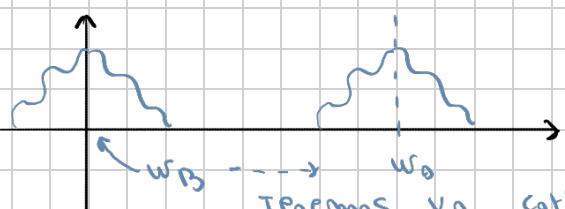
$$\mathcal{F}\{X_{(t-t_0)}\} = X_{(jw)} \cdot e^{jw t_0}$$

↑ Demota

Multiplicamos por una fase

→ Modulación

$$x e^{jw_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_{(j(w-w_0))}$$

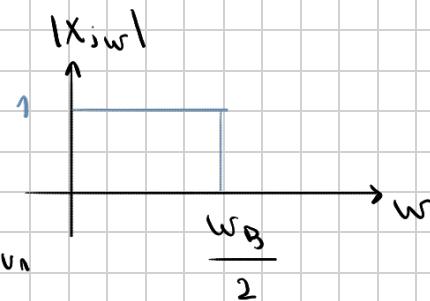


Tenemos un cointamiento en frecuencias

## → Función Sinc

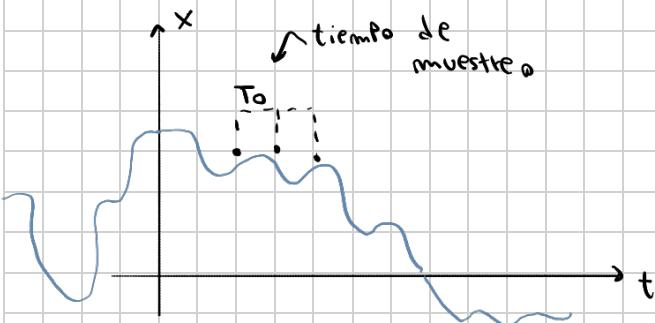
Definimos  $x = \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} = \text{sinc}(\omega t)$

Veamos que  $X(t) = \frac{w_B}{\pi} \cdot \text{sinc}(\frac{w_B \cdot t}{\pi})$   
 $\Rightarrow X(j\omega) = \text{Box}(\omega_B)$



Esto es de gran importancia, ya que es un interpolador ideal, ventana cuadrada.

## Transformada discreta de Fourier (DFT)



$$\xrightarrow{\mathcal{F}} T_F$$

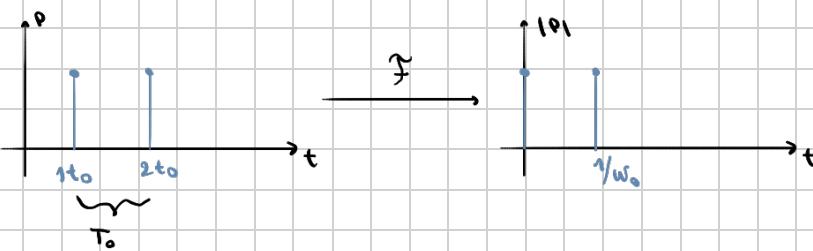


Definimos  $X[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$

•  
•  
•

Muestread es multiplicado por un tren de pulsos, donde  $\delta=1$  solo cuando  $n=k$

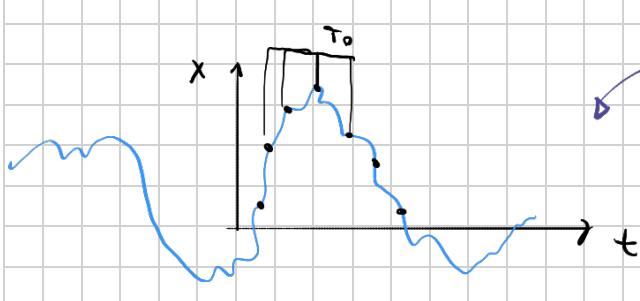
Si pasarmos a una señal discreta  $x[n] = x(nT)$



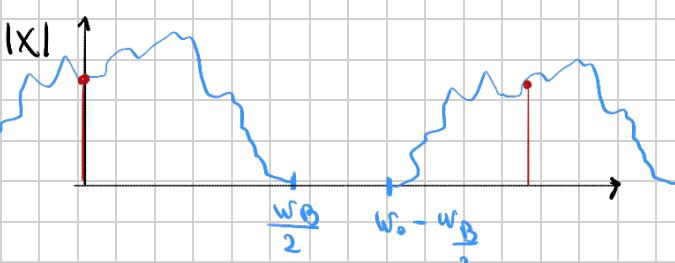
Veamos que  $w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Definimos la DFT entonces como:  $X(j\omega) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$  con  $k=0, 1, \dots, N-1$

Donde  $x$  es  $N$  (ctd. de muestras) periódica



$$\xrightarrow{\mathcal{F}} T_F$$



## Más claro ...

→ Al muestrear una función, al transformarla P/ analizar en frecuencia la volveremos periódica.

↳ Multiplicar en el tiempo equivale a convolucionar en frecuencia.

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} [X_n = P(t) \cdot X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(t) S(t - kT_s)]$$

$$[X_{jw} = P(jw) * X(jw) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jw - kT_s)]$$

el espectro se vuelve periódico

se generan "copias espectrales" de la señal en frecuencia.

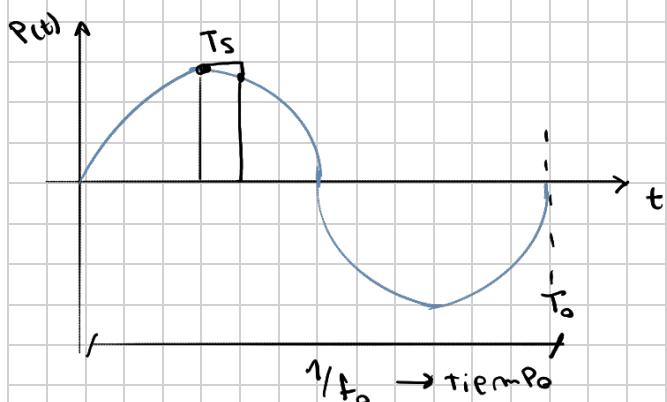
$$[\text{Donde } f_0 = \frac{1}{T_s}]$$

ad.  $\Rightarrow$  tiempo entre muestras muestras

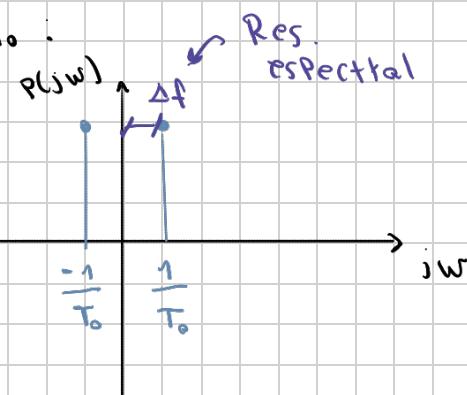
Basicamente  $\frac{1}{T_s}$

## Teoría del muestreo

Si se desea muestrear una senoidal por ejemplo:



⇒



$$\text{Véase que } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

↑ Frecuencia

$$\Rightarrow [T_s = \frac{1}{f_s}] \rightarrow \text{Tiempo y Frec. de muestreo}$$

$$T_0 = N_s \cdot T_s \rightarrow N_s = \frac{T_0}{T_s} \quad [N_s = \frac{f_s}{f_0}]$$

↑ ctd. de muestreo

$$[\Delta f = \frac{f_s}{N_s} = \frac{1}{N_s \cdot T_s}] \rightarrow \text{Res. espectral}$$

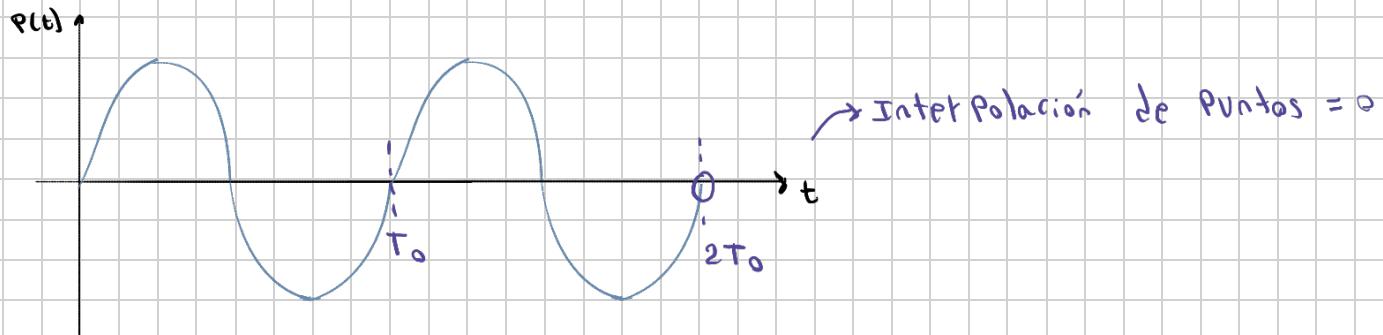
Véase que si aumentan la ctd. de muestras o el tiempo de muestreo  $\Delta f \ll \rightarrow$  mayor res. espectral.

→ Para lograr un sampleo correcto, sin perder información, la  $f_s$  debe ser un múltiplo de  $f_0$ . Y estar por debajo de la  $f$  de Nyquist.

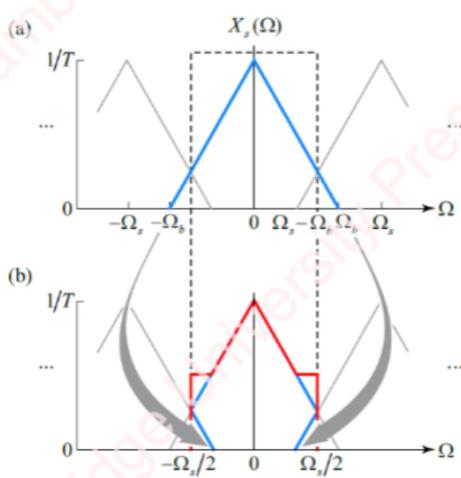
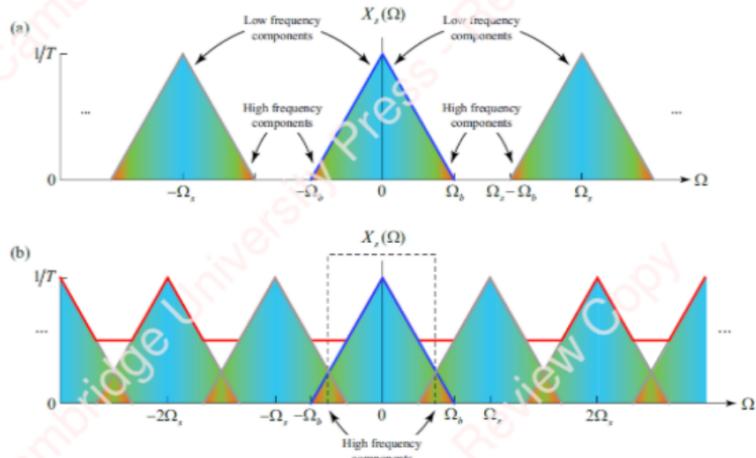
$$f_s \gg 2 \cdot f_0 /$$

↑ f. de Nyquist

- Veamos que si  $f_s = 2 \cdot f_0$  estatiamos sampleando exactamente en los cuadros con 0.

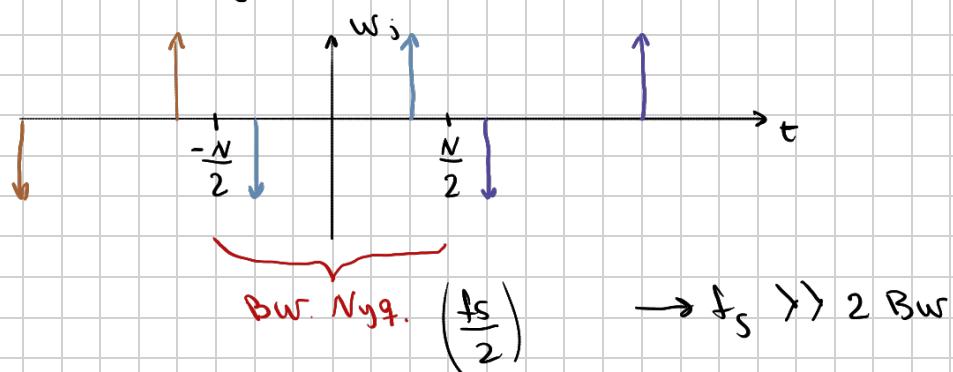


- Luego, para  $f_s << 2 \cdot f_0$  empezaremos a ver un efecto de aliasing. Las replicas de la señal comienzan a solaparse en las componentes de alta frecuencia, podemos ver distintos efectos, tales como perdida o pliegues en el espectro de la señal.



Solapamiento y Plegado de los componentes de alta frecuencia

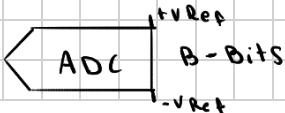
Veamos que llaman  $X_s(\Omega)$  al ancho de banda de Nyquist, por lo que las replicas que "salen" de este BW vuelven a estar dentro del BW replicadas y distorsionadas



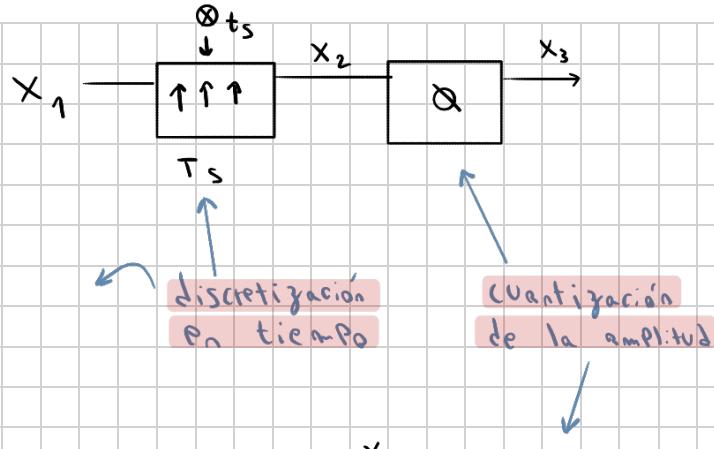
Este solapamiento también sucede cuando muestramos una señal la cual no es N periódica, las frecuencias que excedan el ancho de banda volverán a entrar de manera distorsionada. Esto se puede solucionar atenuando con ventanas.

## Cuantización

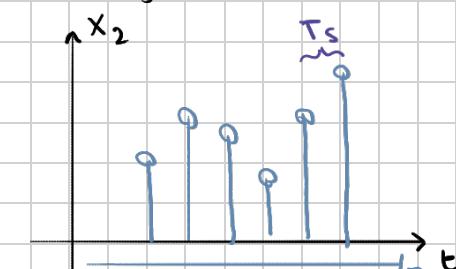
Cuantizar, discretizar señal en tiempo y amplitud, para esto usamos un ADC (analogic - digital converter)



Dentro de un ADC:



Pulsos de delta



Separados por un  $T_S$

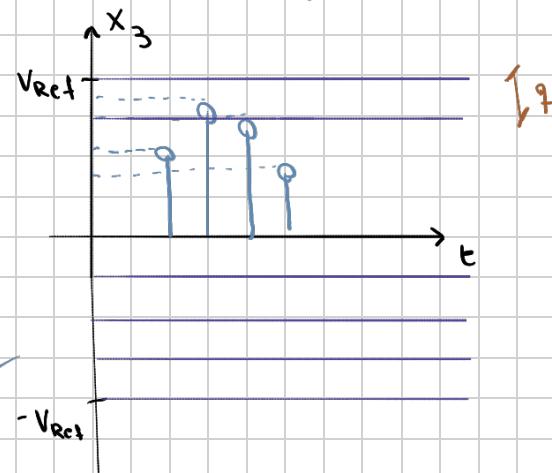
$$\rightarrow f_S = 1/T_S$$

$$\rightarrow T_0 = T_S \cdot N$$

$$\rightarrow \Delta_f = \frac{f_S}{N} = \frac{1}{N \cdot T_S}$$

discretización en tiempo

cuantización de la amplitud



En un ADC de B-bits, tenemos  $2^B$  valores posibles (máxima ctd. de valores binarios representable)

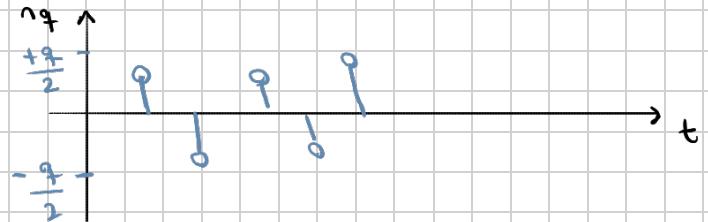
Se traduce a niveles de voltaje

Vemos que todos los valores quedan comprendidos entre  $\pm q/2$  y  $\pm q/2$ , con  $2V_{ref} = \text{Amplitud de la señal}$

amplitud

$$\text{Entonces: } q = \frac{V_{ref}}{2^{B-1}} \text{ [v]}$$

ctd. de divisiones



Esto induce un efecto de cuantización debido a que la amplitud no cae exactamente en  $\pm q/2$

$\pm q$

$\pm q$

$$q \cdot X_3 + n_q = X_2$$

cuantización + efecto de cuantización = valores reales iniciales.

a) ctd. de bits  $\rightarrow$  resolución  $\rightarrow$  ctd. de escalones

Efecto de cada paso de cuantización está dado por una distribución uniforme, todos los valores tienen la misma probabilidad.

$$n_q \sim U(-q/2, q/2)$$

$$E\{n_q\} = 0 \leftarrow \text{Valor esperado} = 0, \text{ misma } P \text{ para todos los valores.}$$

$$\text{Desviación estandar: } \sigma = \frac{q}{\sqrt{12}}$$

$$\text{Varianza }\{n_q\}: \sigma^2 = \frac{q^2}{\sqrt{12}} \rightarrow \text{Al aumentar BW, como } q \text{ es fijo, } n_q \text{ es incorrrelada}$$

→ Normalizar nº: Ajustar el rango o escala

↳ Normalizar por desvío estandar:  $X_n = \frac{X}{\sigma} \rightarrow$  nos aseguramos que la  $n = 1$  ??

↳ Normalizar por amplitud máxima:  $X_n = \frac{X}{X_{\max}}$  Escalamos la amplitud para que  $X_n \in [-1, 1]$

→ Potencia: Energía promedio de una señal

Para señales de media  $\approx 0$   $[P = \sigma^2 = 1]$

$$Var(x) = E[(x(t) - \mu)^2]$$

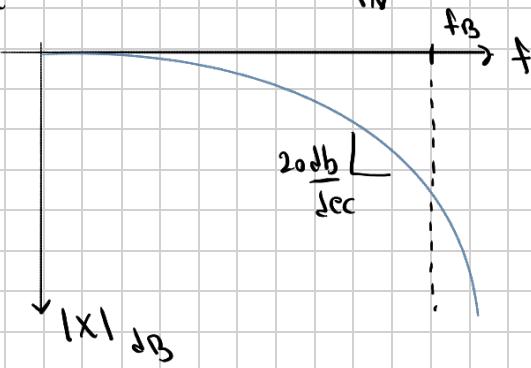
Estas relaciones facilitan los cálculos de la relación señal-ruido (SNR) y facilita la conversión logarítmica ya que se trabaja con un alto rango dinámico.

Si  $\mu$  (media) = 0  $Var = E[X_{(t)}^2] = P$

↳ Debido a que tenemos dif. de ratios ordenes de magnitud, usamos  $dB$  ~

$$[X_{dB}(f) = 20 \log_{10}(|X(f)|) \rightarrow 20 dB = 1 \text{ decade}$$

Def. en ~  $[dB \triangleq 10 \log \frac{P_s}{P_N}$



Al poder ver tan cerca del 0, esto nos permite analizar el ruido.

$f_B$  es una frecuencia de corte tomada a conveniencia, esta determina el BW del sistema (usualmente al tener un 0,707 de la amplitud máxima, = -3dB). Esta freq. de BW puede ser impuesta por circuitos, mediciones, std. de Bits, etc.

→ Definimos el piso de ruido como la potencia del ruido de fondo debido a componentes, interacciones, etc. Este está estrechamente vinculado con el BW del sistema  $\rightarrow P_{ruido} = N_0 \cdot BW$

densidad espectral de potencia de ruido

Por lo que a  $\oplus$  BW,  $\oplus$  rango de freq. medidas,  $\oplus$  energía acumulada de ruido.

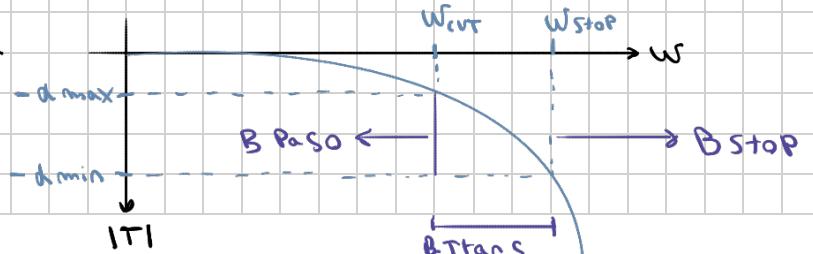
$$[SNR \text{ (signal noise ratio)} = \frac{P_s}{P_N} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Pot. señal} \\ \text{Pot. ruido} \end{array}]$$

Si nuestra señal de entrada tiene un piso de ruido menor que el piso de nuestro sistema, el piso de ruido predominante será el del sistema, "Tapando" a la señal original. También viceversa.

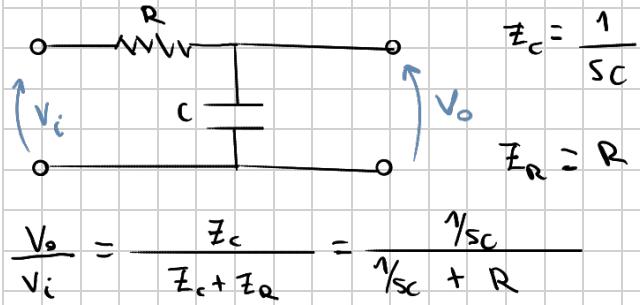
## Filtros

⇒ Filtro real:

Un filtro realiza un recorte o atenuación de frecuencias para una señal dada.



## Filtro Pasa - Bajo RC

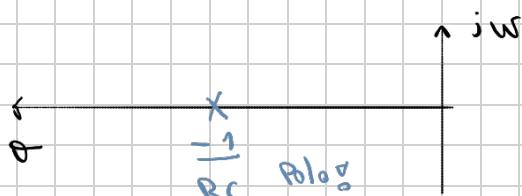


$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_Q} = \frac{\gamma_{SC}}{\gamma_{SC} + R}$$

$$\{ s = \theta + j\omega \}$$

$$\text{Función Transferencia } T = \frac{1}{1 + SCR} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{RC}}$$

Si graficamos  $S$  en modulo y polo fase podemos ver

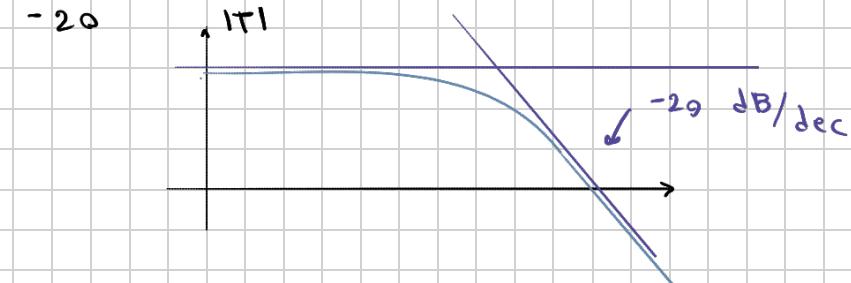


$$T(j\omega) = \frac{1}{R_C} \cdot \frac{1}{j\omega + 1/R_C}$$

$$\left| T(j\omega) \right|^2 = \frac{1}{(R_C)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + (\gamma_{RC})^2}$$

$$\text{Veamos que} \\ \text{el límite } \lim_{w \rightarrow \infty} |H|^2 = \frac{1}{w^2} \rightarrow -20 \log(w) \quad [\text{dB}]$$

[Filtro 1º orden] → Si asignas  $10 \text{ W} \rightarrow 1 \text{ W}' \rightarrow -20 \text{ dB}$ , se puede aproximar el filtro como una f. lineal de pendiente



## Filto segundo - orden RLC

Tenemos como función transferencia

$$(H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)})$$

Como llego a este resultado  
→ Método gráfico

$$T(s) = \frac{s w_0 / Q}{(s - \rho_1)(s - \rho_1^*)}$$

Polos EC  
 ↓  
 1/e^j

$$T(s) = \frac{S}{S^2 + SW_0 + W_0^2}$$

$Q = \text{factor}$   
 $\downarrow$   
de calidad  
(adimensional)

freg. natural  
del sistema

$$BW = \frac{w_0}{Q}$$

Analizaremos el estado estacionario y e que nos impone el comportamiento periódico.

$$\rightarrow w_0 = ct$$

$$S = iw$$

círculo radio 1

$$T(jw) = \frac{w_0/Q \cdot w_j}{(jw)^2 + jw \frac{w_0}{Q} + w_0^2} = \frac{w_0/Q \cdot w_j}{w_0^2 - w^2 + jw \frac{w_0}{Q}}$$

$$|T(jw)| = \frac{w \cdot w_0/Q}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{w \cdot w_0}{Q}\right)^2}}$$

- A bajas frecuencias  $w \ll w_0$

$$|T(jw)| = \frac{w}{Q w_0}$$

- En resonancia  $w = w_0$

$$|T(jw)| = 1$$

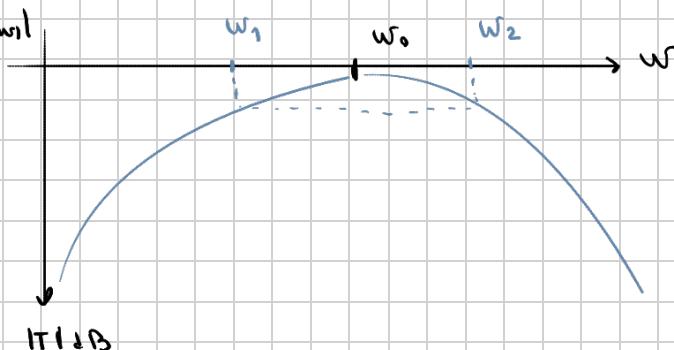
- A altas frecuencias  $w \gg w_0$

$$|T(jw)| = \frac{w_0}{Q w}$$

Tamb. podemos definir  
 $|T(jw)| = \frac{\text{Producto distancias a cero}}{\text{Producto distancias a Polos}}$

Nuestros polos  $P_1$  y  $P_1^*$   
 determinan  $w_1$  y  $w_2$  de nuestra

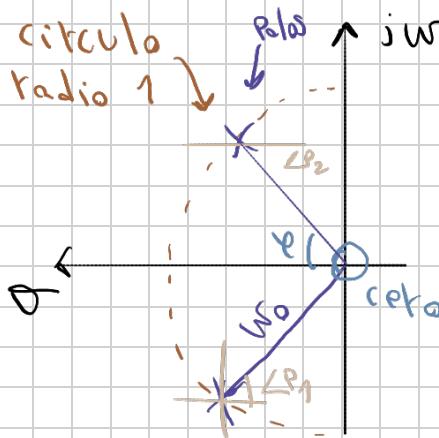
$$|T(jw)|$$



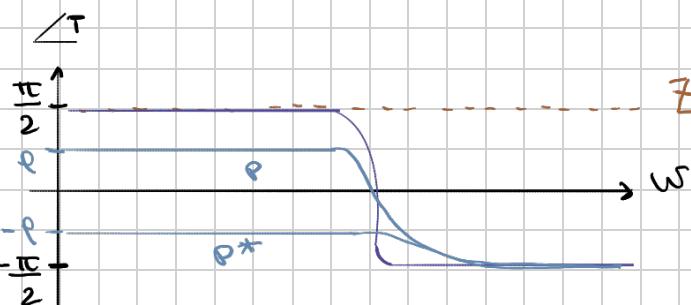
### → Análisis de fase

$$T(s) = s \frac{w_0/Q}{(s - P_1)(s - P_1^*)}$$

aporta  $\frac{\pi}{2}$   
 apotta  $-\frac{\pi}{2}$   
 polos en  $\infty$   
 $1/e^{j\phi}$



Veamos que cuando  $w \rightarrow \infty$  cada polo aporta  $-\pi/2$  a la fase y el cero aporta  $\pi/2$



$$\rho = \cos^{-1}(1/2Q)$$

Al tender a  $w \rightarrow \infty$   
 los polos quedan en  $-\frac{\pi}{2}$

### Método analítico

$$T(jw) = |T| e^{j\angle T}$$

$$\angle T = \angle P - \angle Q$$

$$\angle P = T_g^{-1} \left( \frac{\text{Im}(P)}{\text{Re}(P)} \right)$$

$$\angle Q = T_g^{-1} \left( \frac{\frac{w_0 \cdot w}{Q}}{w_0^2 - w^2} \right)$$

## FFT y Propiedades

FFT: Algoritmo eficiente para calcular DFT. Se divide esta en muchas FFT más pequeñas, aprovechando las propiedades matemáticas de la DFT.

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad W_N^{kn} \triangleq e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Dividimos en términos pares e impares

$$\text{FFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{(2n)} W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{(2n+1)} W_{\frac{N}{2}}^{kn}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$        $\underbrace{\hspace{10em}}$

DFT  $\frac{N}{2}$       DFT  $\frac{N}{2}$

$$\cdot x(k) = x_p(k) + W_N^k \cdot x_I(k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{reducimos } N \text{ a la mitad} \\ \text{④ rápido} \end{array} \right\}$$

$\uparrow$                      $\uparrow$   
DFT Pár            DFT Impar

## Propiedades Transformada de Fourier:

### 1) Demora

$$Y(k) = X(n - n_0)_N$$

Desplazamiento en el tiempo (muestreo)

$$\mathcal{F}\{y\} = X(n) \cdot e^{\frac{j2\pi n_0}{N}}$$

Desplazamiento en el tiempo = rotación en los componentes de frecuencia

### 2) Convolución

$$\text{discreta} \quad y[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot h[n-m]$$

### 3) Convolución

$$\text{circular} \quad X(n) * Y(n) = X(k) \cdot Y(k) \quad \text{ya que consideramos dominios periódicos}$$

Esto se utiliza en la DFT, asume señales periódicas de longitud  $N$ . Las señales fuera del dominio vuelven al ppo!

$$(x * h)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k][N]$$

## Ventana

Cuando se muestrea en el tiempo (DTFT), existe un problema, tenemos  $\infty$  muestras con  $\infty$  frecuencias. Si trabajamos con una señal de longitud infinita, una herramienta es aproximar la señal a una de longitud finita. Esto se hace multiplicando la señal  $x(n)$  por una ventana  $w(n)$ .

$$Y(n) = X(n) w(n)$$

$$\mathcal{F}\{Y(n)\} = X(k) * W(k)$$

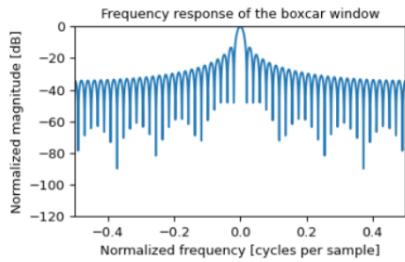
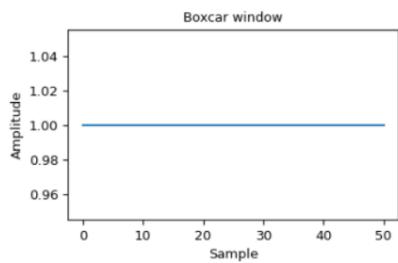
Convolución circular

multiplicar  $\rightarrow$  convolucionar en dominio

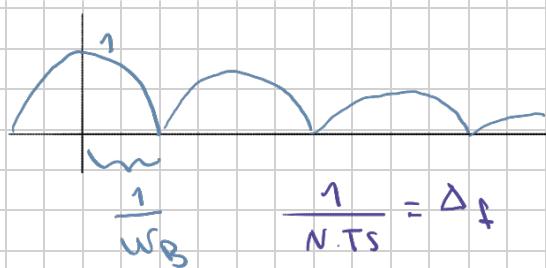
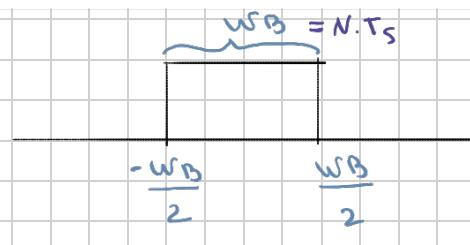
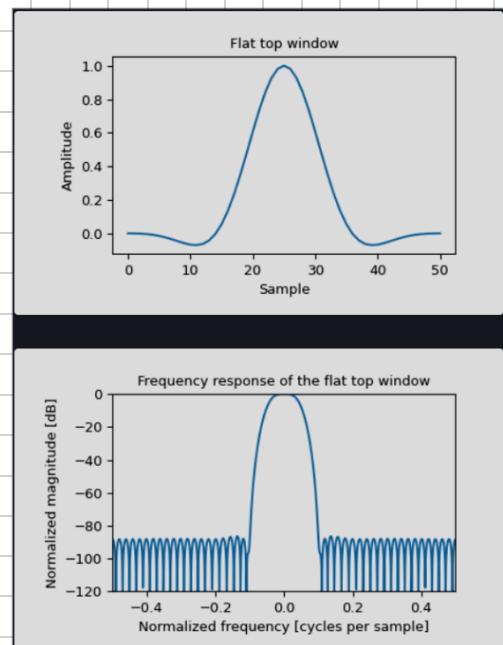
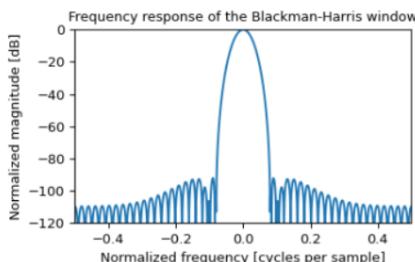
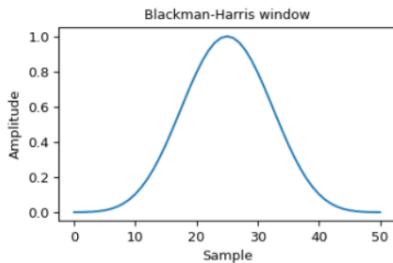
frecuencia

La forma del espectro resultante es una especie de "copia" de la señal suavizada, filtrada por la ventana.

Rectangular o Sinc



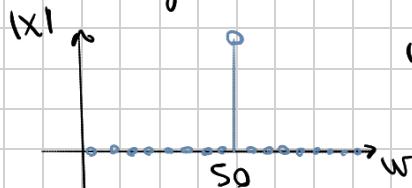
Blackman Harris



Vemos que si aumentamos  $N$ , aumentamos el tamaño de esta "caja" y aumenta la freg. espectral ( $\text{menor } \Delta_f$ ). El ancho del lóbulo central nos dice la freg. en frecuencia.

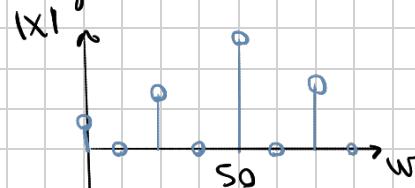
Leakage → Si cortamos una señal en un punto en el cual no completa su ciclo, la representación espectral se ensucia. Empiezan a aparecer frecuencias "falsas" alrededor de la frecuencia verdadera. Debido a que la DFT asume dominios periódicos, asumen que la señal es de periodo  $N$  (tamaño de la ventana). Llamamos leakage a cuando la energía debería estar concentrada en una freg. espectral pero se dispersa hacia otras frecuencias.

EJ: Sen 50 Hz Ideal:

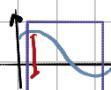


(ventana cuadrada)

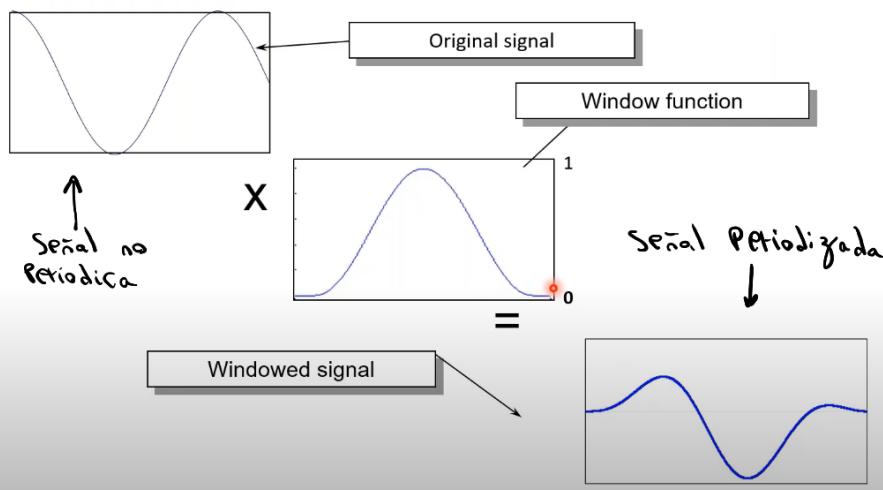
Sen 50 Hz mal ventaneado



Por lo que si la ventana no cae exactamente en la periodicidad de la señal, es decir que tenemos una discontinuidad en muchas frecuencias para poder ser desparramado de energía al rededor de este impulso que viene representado, generando una señal.



Para solucionar esto, implementamos ventanas con atenuaciones en las altas y bajas frecuencias.



Sí bien esto mejora el efecto de leakage al trabajar con lobulos centrales más angostos, disminuimos la res. espectral (menos N).

Un lobulo central más ancho en tiempo es un lobulo más ancho en frecuencia (menos res.). Por eso la ventana con mejor resolución es la cuadrada, lobulo muy ancho en tiempo, muy angosto en frecuencia.

## Estimación espectral

En la teoría con el espectro dado por una T.F. uno puede conocer exactamente todas las frecuencias que se desee. En la práctica, solo podemos medir en un tiempo finito y tomar muestras discretas. Por lo que se tiene que estimar el espectro.

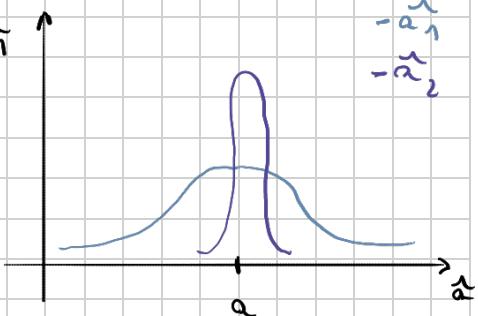
- No se puede saber exactamente el contenido espectral ya que una señal real es finita y ruidosa.
- Se aplican métodos matemáticos para realizar la mejor suposición.

Si llamamos  $\hat{a}_1$  a nuestro estimador para  $a_1$ :

$$\begin{aligned} \text{Sesgo } E\{\hat{a}_1 - a_1\} &= 0 \\ \text{Varianza } \text{Var}\{\hat{a}_1\} &= E\{(\hat{a}_1 - a_1)^2\} \end{aligned}$$

En un estimador ideal esperaríamos no tener sesgo y la menor varianza posible

Siempre debemos priorizar la varianza a la hora de estimar ya que el sesgo es sencillamente corrigeable.



## Correlación y auto-correlación Medida de similitud

Correlación (Vanta relación hay entre dos señales o una señal y una versión espejada de sí misma.

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t+\tau) dt \rightarrow \text{Únicamente se desplaza una señal en el tiempo.}$$

Autocorrelación correlación de una señal con sí misma

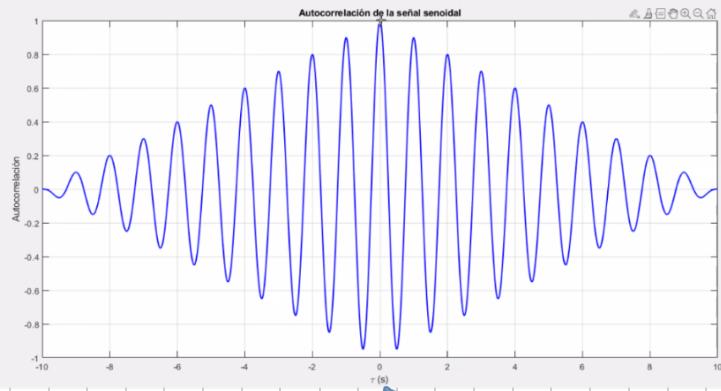
$$R_{xx}[l, N] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] x[n-l]$$

discreta

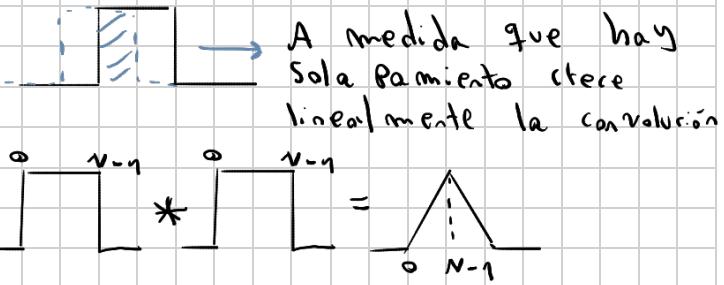
continua  $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t+\tau) dt$

Simétrica respecto al origen

$$\text{Ej: } x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$



Veamos que estamos convolucionando dos rectangulares, por lo que veemos un efecto de ventana triangular.



Veamos que  $R = 1$  únicamente para  $\tau = 0$

### Métodos de estimación

$$|X(e^{j\omega})|^2 = \hat{P}(e^{j\omega})$$

↑ Densidad  
espectral de Potencia

$$E\{\hat{a}_n\} = a_n$$

↑ Esto afirma que es un buen estimador

Un método de estimación muy básico es el Periodograma:

$$\hat{P}_x(f) = \frac{1}{N} |\text{FFT}(X[n])|^2$$

donde el sesgo es casi nulo pero tenemos una altísima varianza.

### → Método de Bartlett

Ganamos estabilidad (Varianza) a cambio de perdida de resolución.

- Se divide la señal en  $K$  segmentos:  $N = K \cdot L$   
y se promedian los periodogramas de cada bloque.

$$\hat{P}_{\text{Bart}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_x^{(k)}(e^{j\omega})$$

↑ ctd. de muestras  
 ↑ ctd. de bloques  
 ↓ por bloque

### → Método de Welch

Mejora sobre Bartlett, mejorando la varianza, un poco de mejor resolución y poco leakage por el uso de ventanas.

Este realiza solo pañamientos y aplica ventanas.

- Se dividen las  $N$  muestras en  $K$  bloques con sobreapilamiento entre ellos.
- Cada segmento se multiplica por una ventana reduciendo el leakage.
- Calculamos el periodoograma para cada segmento ventanado y promediamos

$$\hat{P}_{\text{Welch}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{P}_x^{(k)}(e^{j\omega}) * \text{Window}$$

donde cada segmento tiene  $\frac{M}{X}$  muestras del anterior

## → Método de Blackman - Tukey

Para ventana , pero puede introducir más sesgo

- Estima la autocorrelación de la señal, aplica una ventana y después calcula Fourier.

$$\rightarrow \hat{P}_{B-T}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\hat{R}_{xx}(n) W[k]\}$$
$$\hat{R}_{xx}(n) = \sum_{i=N+1}^{N-1} X_{(i)} X_{(i+n)} \quad n = (-N+1, N-1)$$

