resumen → filtrado digital

TRASFORMADA Z

Los sistemas de procesamiento digital de señales transforman secuencias de señales de entrada $x[n]$ en una salida $y[n]$.
Uno de los sistemas más utilizados son los LTI

$x[n] \rightarrow \boxed{\text{SISTEMA LTI}} \rightarrow y[n]$

• Linealidad → permite representar el sistema como la suma lineal de sus términos (escalados)

• Invarianza en el tiempo → Las características no cambian con el tiempo. Una señal desplazada producirá una salida igualmente desplazada

Filtrado lineal → se basa en el diseño de filtros que se comportan como sistemas LTI.

Un sistema LTI puede ser descripto en su totalidad por su respuesta al IMPULSO.

¿Qué implica esto? Es la salida del sistema cuando aplicamos un impulso a la entrada. La respuesta al impulso puede determinarse como la convolución de la entrada.

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$ → impulso δ (dirac)

$$\boxed{y[n] = h[n] * x[n]}$$

$$\boxed{y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{-\infty} x[k]\, h[n-k]}$$

Podemos clasificar a los sistemas LTI según cómo sea su respuesta al impulso:

→ Respuesta al impulso finita (FIR):

$h[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$

donde N es el número de coeficientes del filtro.

→ Respuesta al impulso infinita (IIR)

$h[n] > 0 \quad \forall n$.

Ecuación general que describe un filtro:

$$\boxed{y[n] = \sum_{+\infty}^{\infty} b_i\, x[n-i] + \sum_{-\infty}^{\infty} a_i\, y[n-i]}$$

Por ...

Para analizar estos filtros se utiliza la transformada z.
Como sabemos, de los filtros analógicos, para ver su comportamiento en frecuencia se usaba la DFT, que nos transportaba el sistema al dominio complejo de Laplace.
La transformada z es el análogo discreto de la transformada de Laplace; nos permite transformar sistemas discretos al dominio complejo facilitando el análisis y respuesta a frecuencia.

¿Qué hace la transformada z?

La DFT evalúa la señal en un conjunto finito de números sobre el círculo unitario. Toma:

$$z_\omega = 1 \cdot e^{j\omega n}$$

$$X[\omega] \triangleq \sum x[n]\, e^{-j\omega n}$$

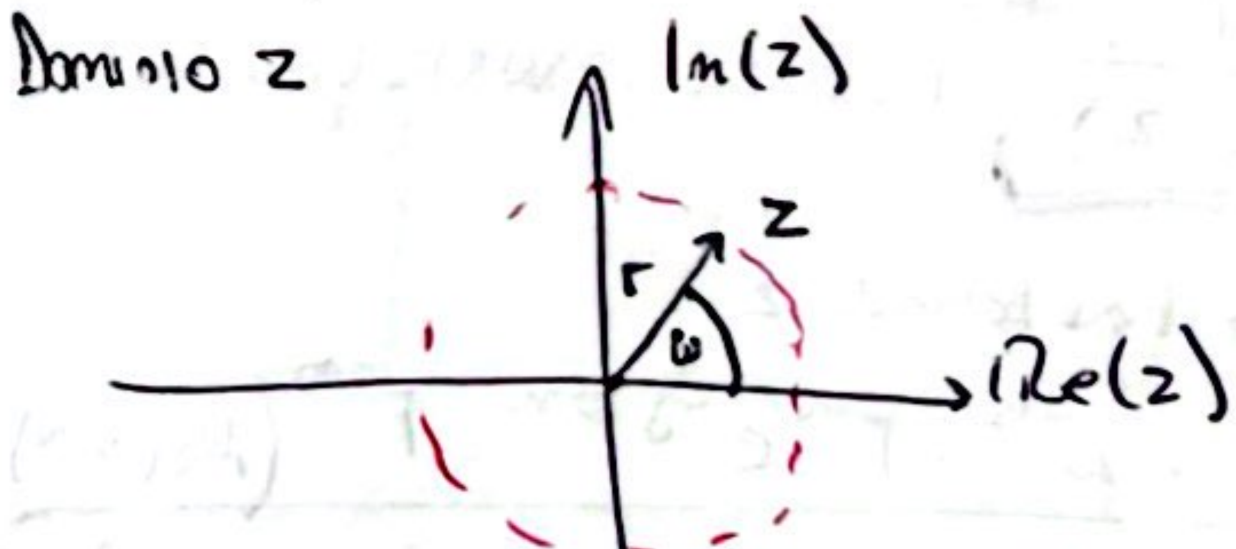
En cambio, la transformada z es una secuencia INFINITA que utiliza el número complejo z de radio variable.

$$H(\omega, r) = \sum h(n)\, e^{-j\omega n}\, r^{-n}$$

$$H(\omega, r) = \sum h(n)\, (\underbrace{e^{j\omega n}\, r}_{})^{-n}$$

$$\boxed{H(z) \triangleq \sum_{\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}} \qquad \boxed{z = r e^{j\omega}}$$

Dominio Z



z es un número complejo que en el plano imaginario se representa como una circunferencia de radio variable.

Generalmente, esta transformada está definida para sistemas causales. Por eso, surge otra, la transformada bilineal, que permite representar cualquier señal discreta no sólo causales. Surge de aplicar una serie de potencias generalizadas.

$$\boxed{X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

Como toda serie, tiene regiones de convergencia y divergencia. Por eso es muy importante establecer y garantizar que converja para que el sistema sea estable.

↳ región de convergencia → ROC

ROC (región de convergencia)

Generalmente para ecuaciones finitas, la ROC es todo el plano z (excepto 0 y ∞)

Se define que:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty}$$

Es decir, si su respuesta al impulso es sumable.

~~Estabilidad~~ → IMPLICA CONVERGENCIA.

Por la transformada z, si la ROC incluye al círculo unitario $|z| = 1$:

$$\boxed{H(e^{jw}) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}}}$$ existe y converge.

Si no converge dentro del círculo unitario, NO tiene transformada z, no se puede analizar la respuesta en frecuencia, no es estable.

(Además también tenemos en cuenta los polos pero se va a hablar después:)

$H(z)$ es una función típicamente RACIONAL.

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

A esto se lo conoce como FUNCIÓN TRANSFERENCIA.

Interpretación de la transformada z.

- $z = r e^{j\omega}$
- $z^{-n} = r^{-n} e^{-j\omega n} = r^{-n}(\cos(wn) - j\,\mathrm{sen}(wn))$

$$\boxed{X(z) = \sum x[n]\, r^{-n} (\cos(wn) - j\,\mathrm{sen}(wn))}$$

- $\mathrm{Re}(z) = \sum x[n]\, r^{-n} \cos(wn)$
- $\mathrm{Im}(z) = \sum x[n]\, r^{-n} \mathrm{sen}(wn)$

Propiedad del desplazamiento temporal:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-n_0}}\ y(n) = x(n-n_0)$$

$$y(n) = x(n-n_0)$$

$$Y(z) = \sum y(n) z^{-n} = \sum x(n-n_0) z^{-n}$$

cambio de variables

$$m = n - n_0$$
$$n = m + n_0$$

$$Y(z) = \sum x(m)\, z^{-m-n_0}$$

$$Y(z) = \Big(\underbrace{\sum x(m)\, z^{-m}}_{\text{transformada.}}\Big) z^{-n_0}$$

$$\boxed{Y(z) = X(z)\, z^{-n_0}}$$

Filtros

Los sistemas son causales, es decir, su salida en un instante depende de la entrada en ese instante $x[n]$ o de entradas anteriores. (o salidas)

→ Los sistemas necesitan tiempo para procesar la información, no pueden producir una salida antes de que la entrada haya ocurrido

$$x[n];\ x[n-1];\ \dots$$

o salidas $y[n];\ y[n-1]\ \dots$

esto se define como RETARDO. Todos los filtros tienen retardo, algunos tienen un retardo lineal (todos se desplazan lo mismo en el tiempo) otros no.

Los filtros tienen la típica forma:

$$\boxed{y[n] = \sum b_i\, x[n-i] + \sum a_i\, y[n-i]}$$

ecuación de diferencias.

ACÁ B Podemos clasificar los filtros en 2 tipos según su ecuación de diferencias:

Filtros FIR: Son filtros los cuales su respuesta al impulso es FINITA. Suelen ser no recursivos, es decir, que su salida sólo depende de la entrada anteriores y no de salidas por lo que $a_i = 0$

$$\boxed{y[n] = \sum x[n-i]\, b_i}$$

Los filtros FIR son siempre estables. Ya que al desarrollarlos todos sus polos caen en 0. Además, estos filtros se caracterizan por no contar con distorsión de fase. ¿Eso que implica? Que la fase es lineal, y su demora constante. (En el desarrollo se ve mejor)

Filtros IIR: son filtros con respuesta al impulso INFINITA. Se caracterizan por ser recursivos, es decir, que su salida depende de entradas anteriores tanto como de salidas anteriores.

$$\boxed{y[n] = \sum b_i\, x[n-i] + \sum a_i\, y[n-i]}$$

Con $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$

Este tipo de filtros no necesariamente son estables. Esto depende de la ubicación de los polos, deben estar dentro del círculo unitario sino no son estable.

Por ello, su diseño puede ser más riguroso.

Son de fase NO lineal, es decir, que a diferentes frecuencias se experimentan distintos tipos de retardos, causando distorsión de fase.

IIR → Infinite Impulse Response

Buscamos la transformada:

$$y[n] = \sum b_i\, x[n-i] - \sum a_i\, y[n-i]$$

$$Y(z) = X(z)\sum b_i z^{-i} - Y(z)\sum a_i z^{-i}$$

$$Y(z) + Y(z)\sum a_i z^{-i} = X(z)\sum b_i z^{-i}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\overbrace{\sum b_i z^{-i}}^{P(z)}}{\underbrace{1+\sum a_i z^{-i}}_{Q(z)}} = H(z)}$$

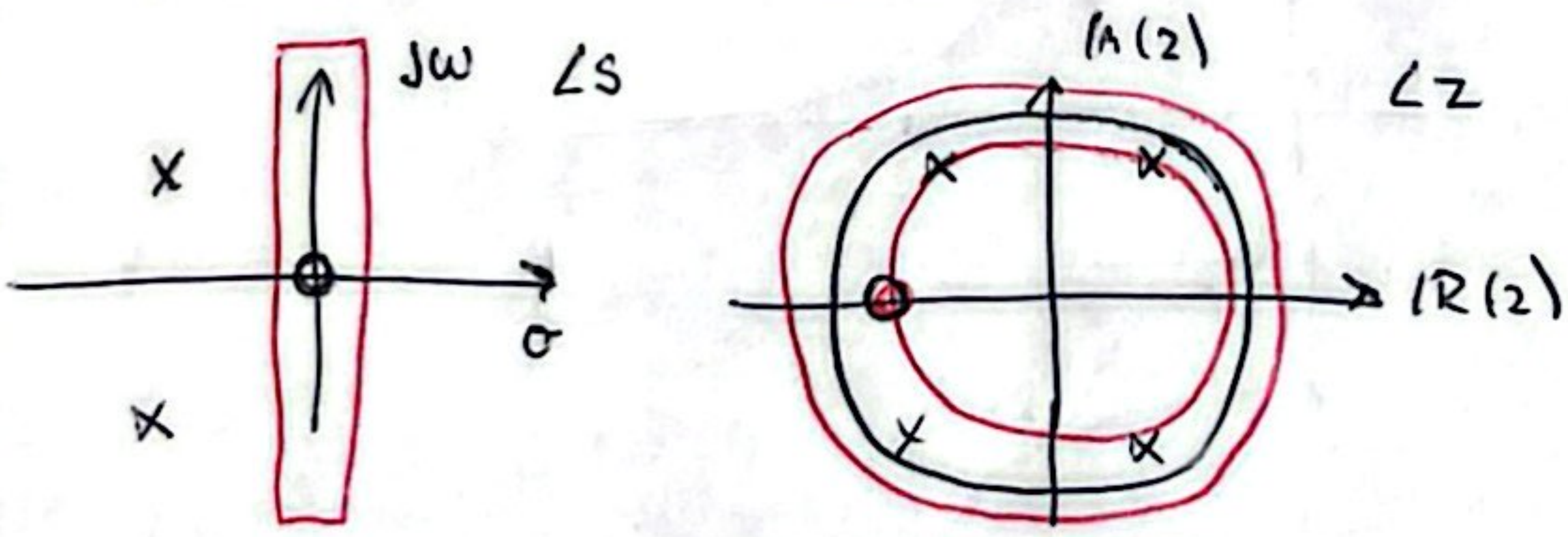
En este caso, los polos están dados por las raíces del polinomio $Q(z)$, y los ceros por las raíces del polinomio $P(z)$. Los polos pueden tener ubicaciones distintas de 0, lo que compromete su estabilidad.

Una herramienta para el diseño de filtros IIR es la del diseño de su contraparte analógica. Ya que los filtros IIR son el resultado directo de la discretización de circuitos filtros analógicos.

Se diseñan prototipos (generalmente pasabajos y luego se ajustan) analógicos, se determina su función transferencia $H(s)$ y se la transforma al dominio de z por métodos como la transformada bilineal (existen otros como la invarianza al impulso).

La transformada bilineal es una técnica que permite transformar los filtros analógicos al mapear el plano complejo del dominio de Laplace al plano complejo de z.

Convierte los polos del plano s a polos dentro del círculo unitario en el plano z



Se logra sustituyendo: $\boxed{s = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}}$

Sin embargo, esta transformación tiene una fuerte implicancia sobre la fase. El mapeado implica una distorsión de frecuencias, ya que la conversión no es lineal. Esto afecta directamente donde caen las frecuencias de corte, banda de paso y eliminación.

→ Filtrado de fase NO nulo: si no trabajamos con la señal a tiempo real se puede hacer un filtrado bidireccional con el cual se anula la fase.

- Duplica orden del filtro (es como 2 filtros en cascada)
- Pierde causalidad

Por naturaleza, los filtros IIR tienen fase NO lineal. Esto significa que a diferentes componentes de frecuencia en la señal de entrada, se experimentan diferentes retardos de grupo lo que puede distorsionar la forma de la señal.

¿Qué es el retardo de grupo?

Es la derivada negativa de la fase con respecto a la frecuencia. Si esto NO es constante (como suele pasar con los IIR) tenemos retardo de grupo (función distorsionada)

$$\boxed{T_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}}$$

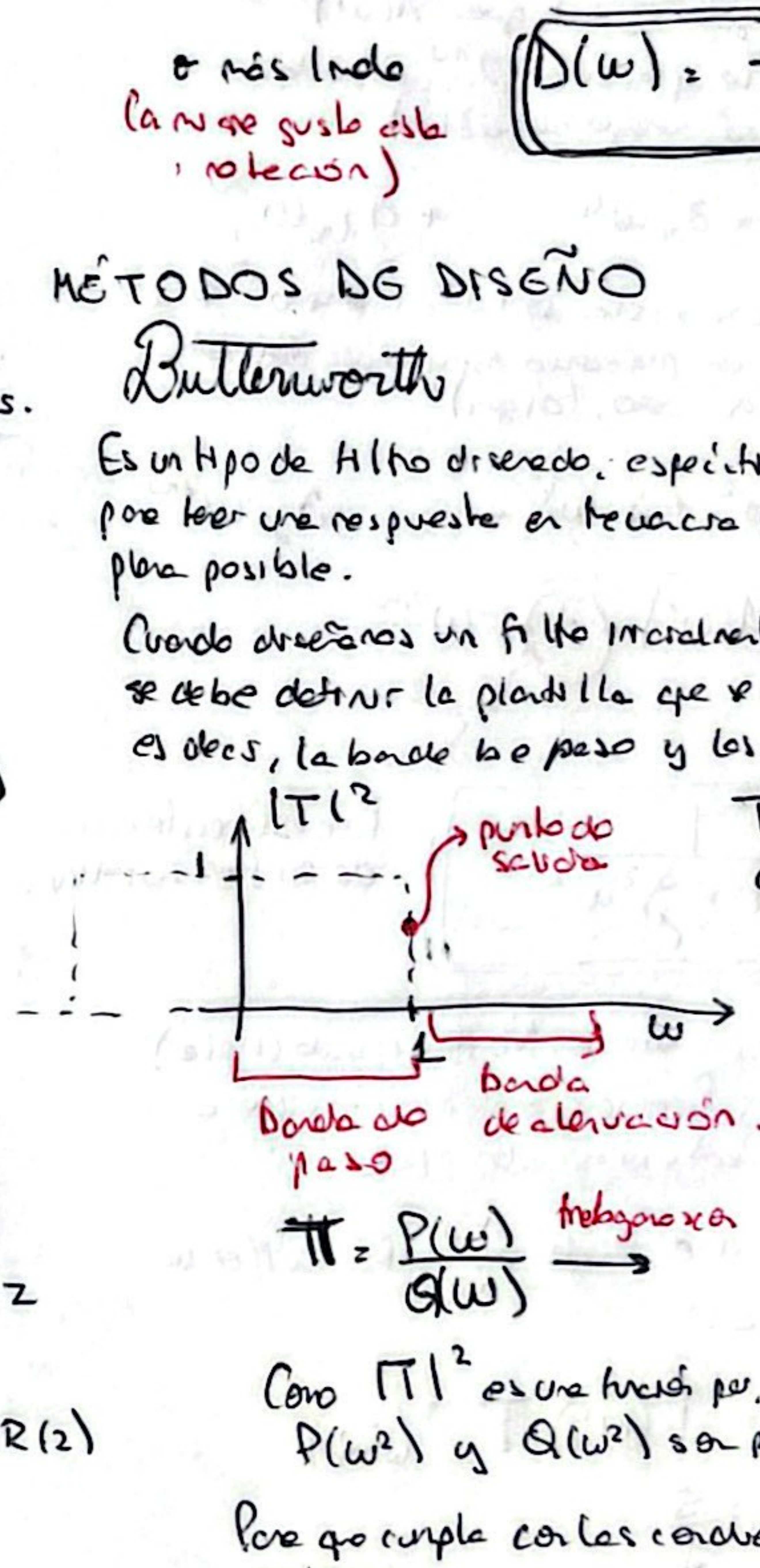
o más lindo (a mí me gusta esta notación) $\boxed{D(\omega) = \frac{-d\,\Delta H(\omega)}{\omega}}$

MÉTODOS DE DISEÑO

Butterworth

Es un tipo de filtro diseñado específicamente para tener una respuesta en frecuencia lo más plana posible.

Cuando diseñamos un filtro inicialmente, se debe definir la plantilla que se va a utilizar, es decir, la banda de paso y las bandas de rechazo.



Típicamente, definimos una "brickwall" va a ser una ventana cuadrada sin ganancia (1)

$$T = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \xrightarrow{\text{trabajamos con}} |T|^2 = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)}$$

Como $|T|^2$ es una función par, directamente $P(\omega^2)$ y $Q(\omega^2)$ son pares.

Para que cumpla con las condiciones de contorno:

- $\omega \to 0 \longrightarrow |T| = 1$
- $\omega \to \infty \longrightarrow |T| = 0$

Diseñamos un filtro con máxima planeidad. Queremos que su ganancia $|T| = 1$ para que sea lo más plano posible en la banda de paso.

El grado de Q debe ser mayor a P para que esto ocurra.

Q $\longrightarrow$ polinomio completo

Q y P $\longrightarrow$ deben incluir el grado 0

Si el grado P es mayor a Q vamos a introducir atenuaciones de frecuencias que pueden caer en la banda de paso.

$\longrightarrow$ ceros en banda NO

Entonces definimos $P = 1$

$$\boxed{|T|^2 = \frac{1}{1 + A(w)}}$$

✓ Cumple condiciones de contorno.

Para definir $A(w)$ usamos máxima planicidad. es decir, garantizamos que $A(w)$ es derivable y nos deja 2^n derivadas (máximamente derivable)

$$A(w^2) = a_2 w^2 + a_4 w^4 \dots + a_{2n} w^{2n}$$

Queremos que coexista sólo el término de 2^n para que sea un polinomio máximamente derivable a cero. (origen)

$$A(w^2) = \cancel{a_2 w^2} + \cancel{a_4 w^4} + \dots\ a_{2n} w^{2n}$$

$$A(w^2) = a_{2n} w^{2n} \qquad a_{2n} \to \xi^2$$

$$\boxed{|T|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 w^2}}$$

Función transferencia de Butterworth.

Tiene una transición suave. No tiene rizado (riple) ni ondulaciones. Requiere ordenes altos para garantizar transiciones abruptas.

Para determinar el orden de un filtro Butter se hace lo siguiente:

$$|T(jw)|^2 = T(jw)\, T^*(jw)$$

Si $w = \frac{s}{j}$

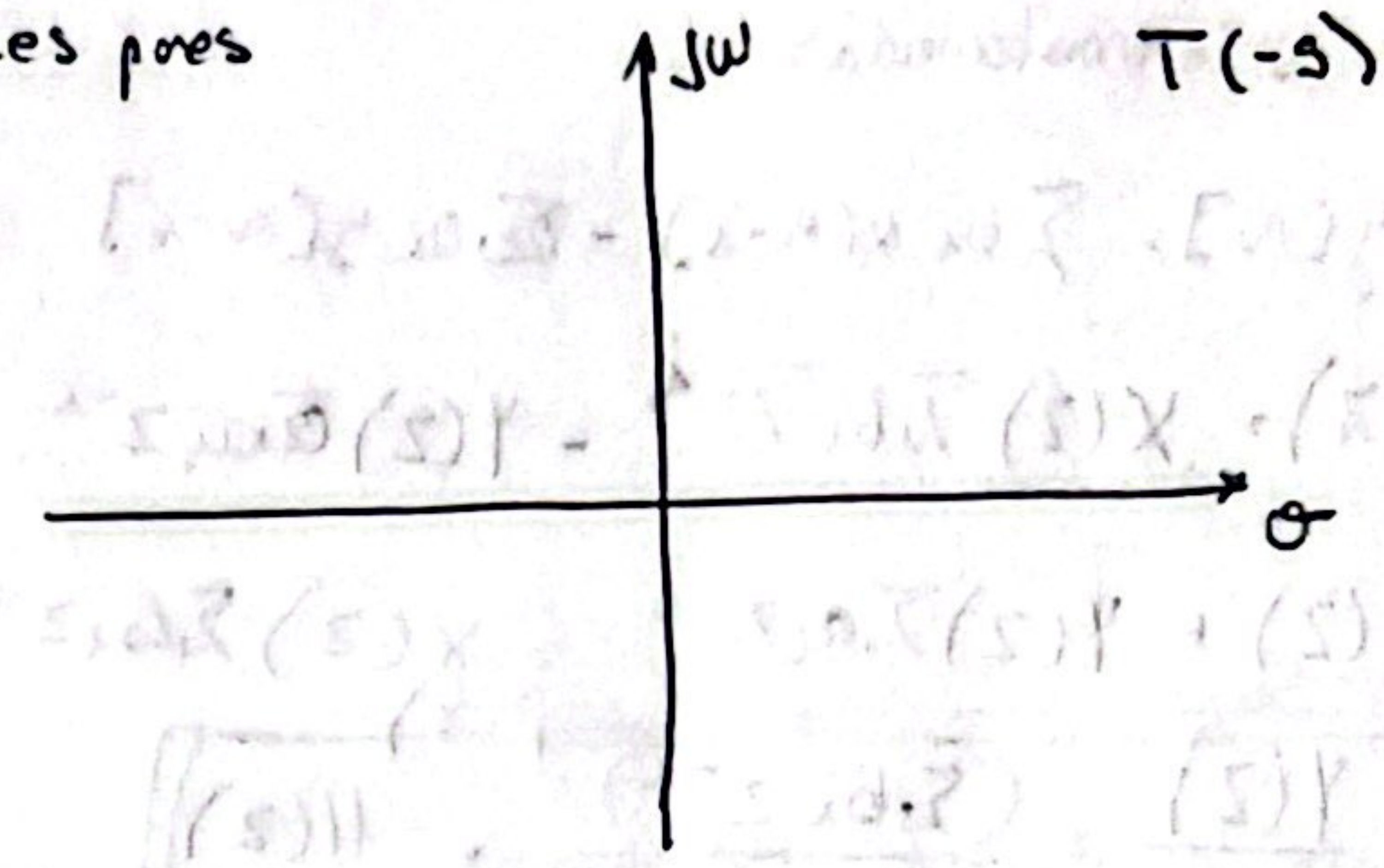
$$T(jw)\,T^*(jw)\Big|_{w=\frac{s}{j}} = T(s)\,T(-s)$$

$$\frac{1}{1 + \xi^2 \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + \xi^2 s^{2n} (-j)^{2n}}$$

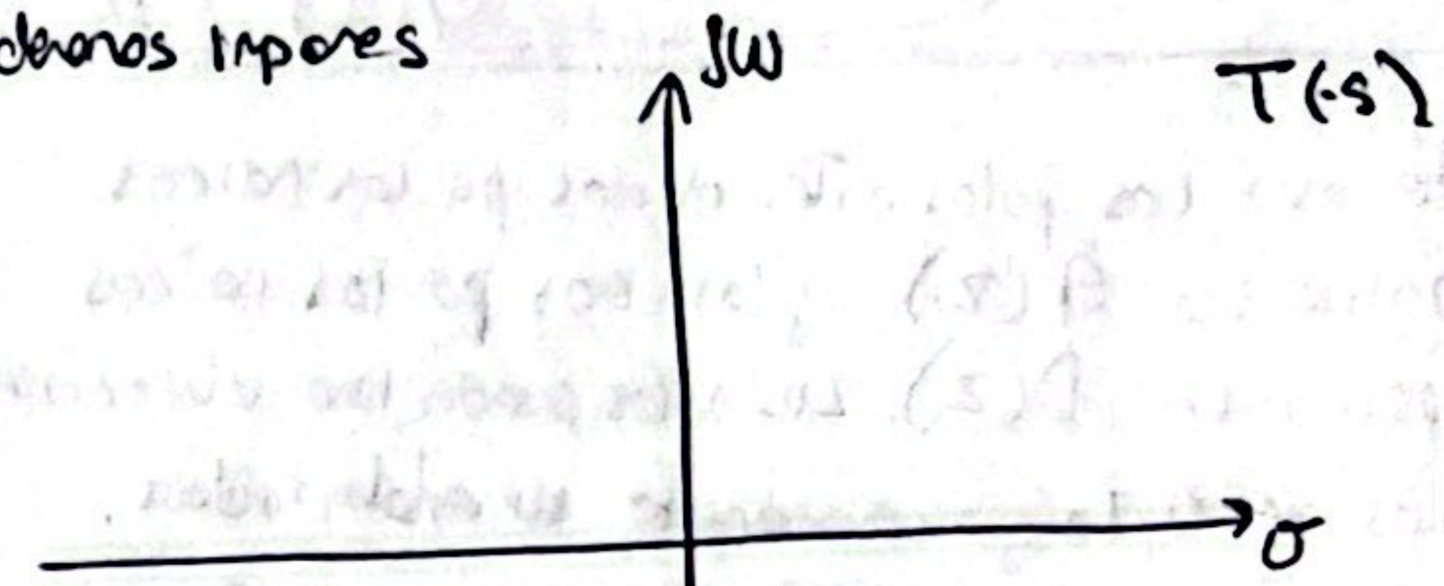
$$\begin{cases} n \text{ pares} \longrightarrow 1 + \xi^2 s^{2n} = 0 \\ n \text{ impares} \longrightarrow 1 - \xi^2 s^{2n} = 0 \end{cases}$$

UBICACIÓN DE POLOS Y CEROS

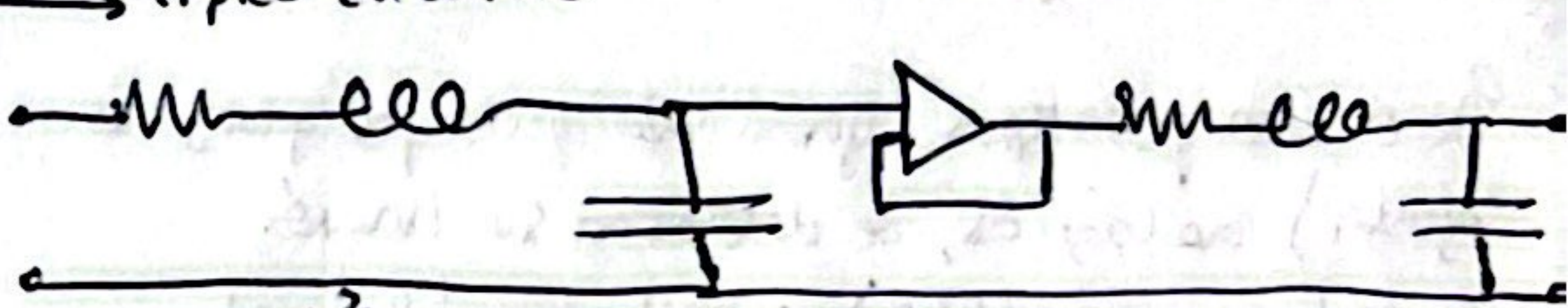
ordenes pares

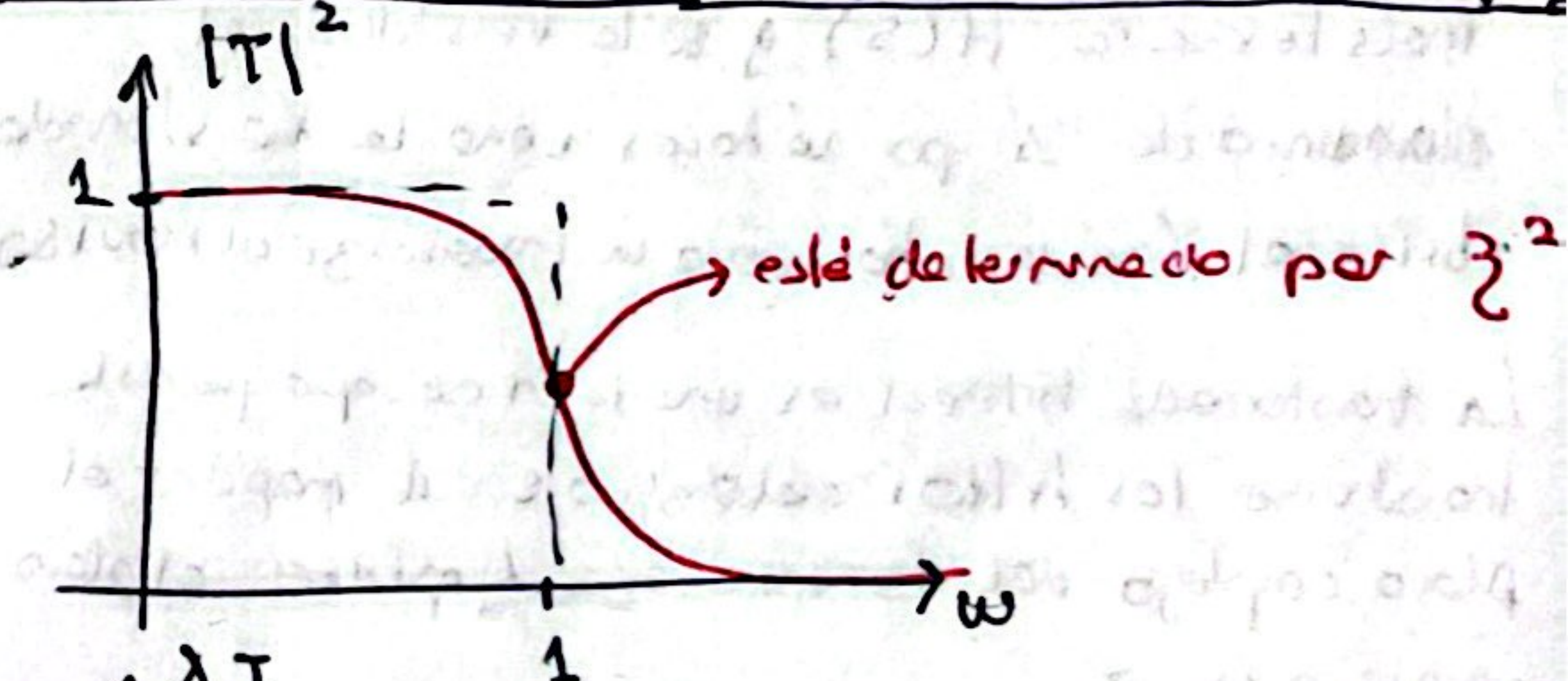


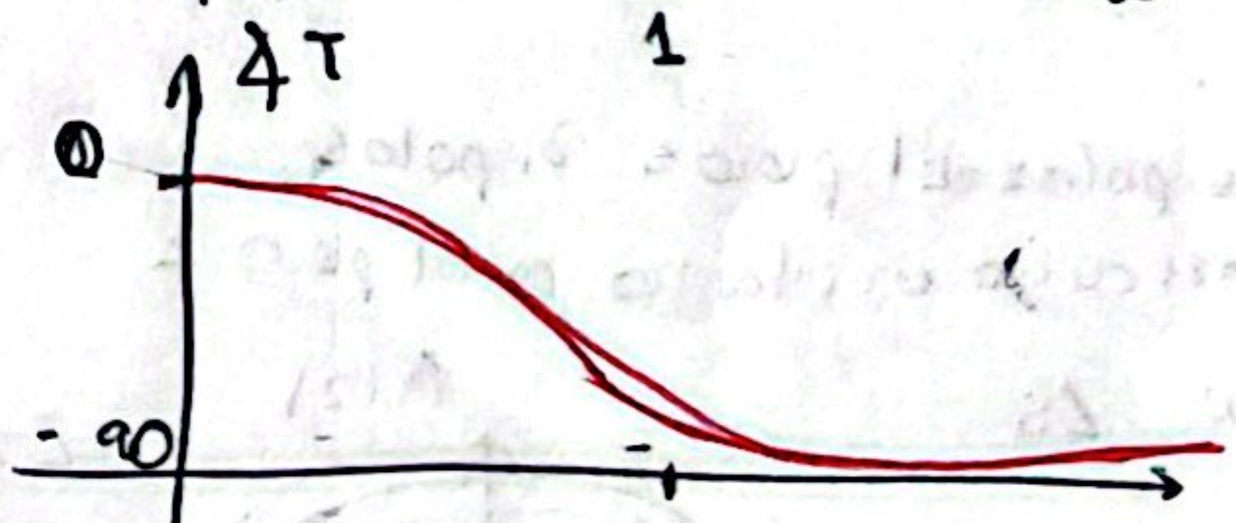
ordenes impares

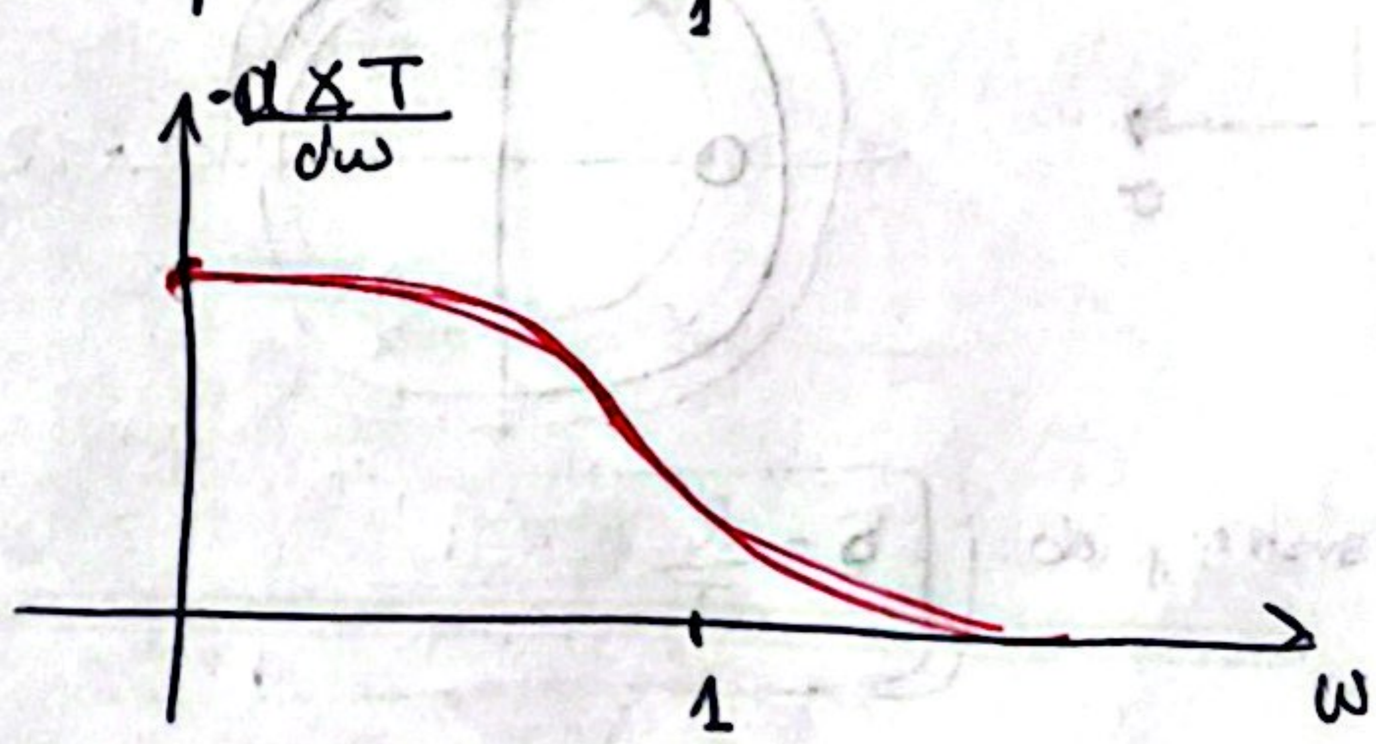


$\longrightarrow$ típico circuito









Chebyshev.

→ TIPO I: tiene ripple (ondulación) en la banda de paso. Pero una transición más abrupta y atenuación monótona en la banda de stop.

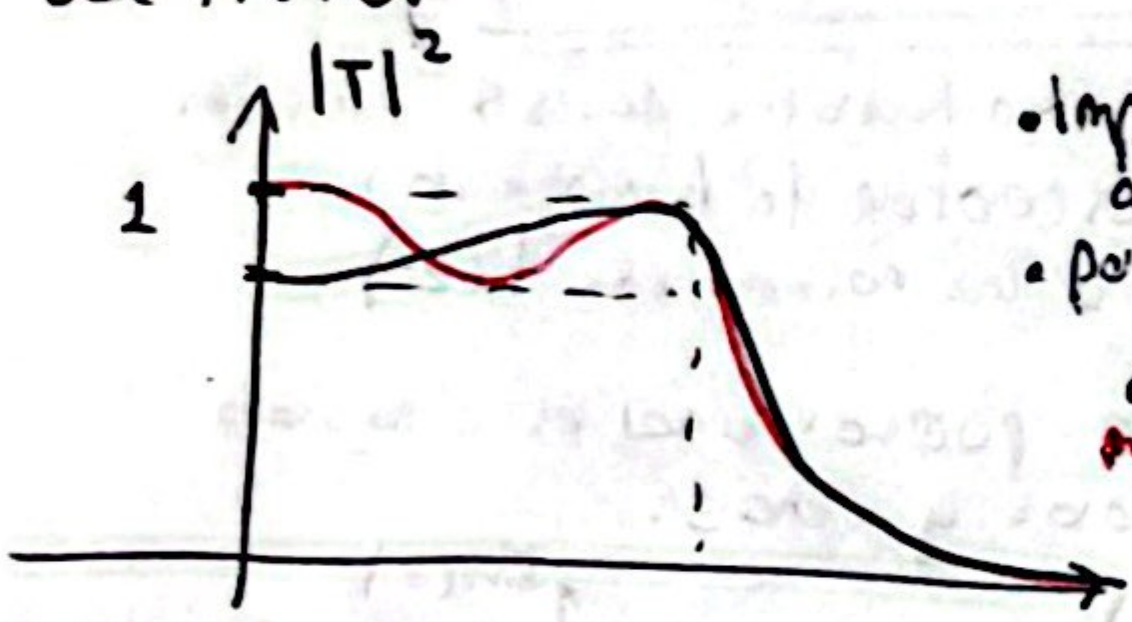
$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\delta^2\cosh^2(n\cosh^{-1}(\Omega))}$$

Para banda de paso: $\cos^2(n\cosh^{-1}(\Omega))$

2 grados de libertad → δ
→ n.

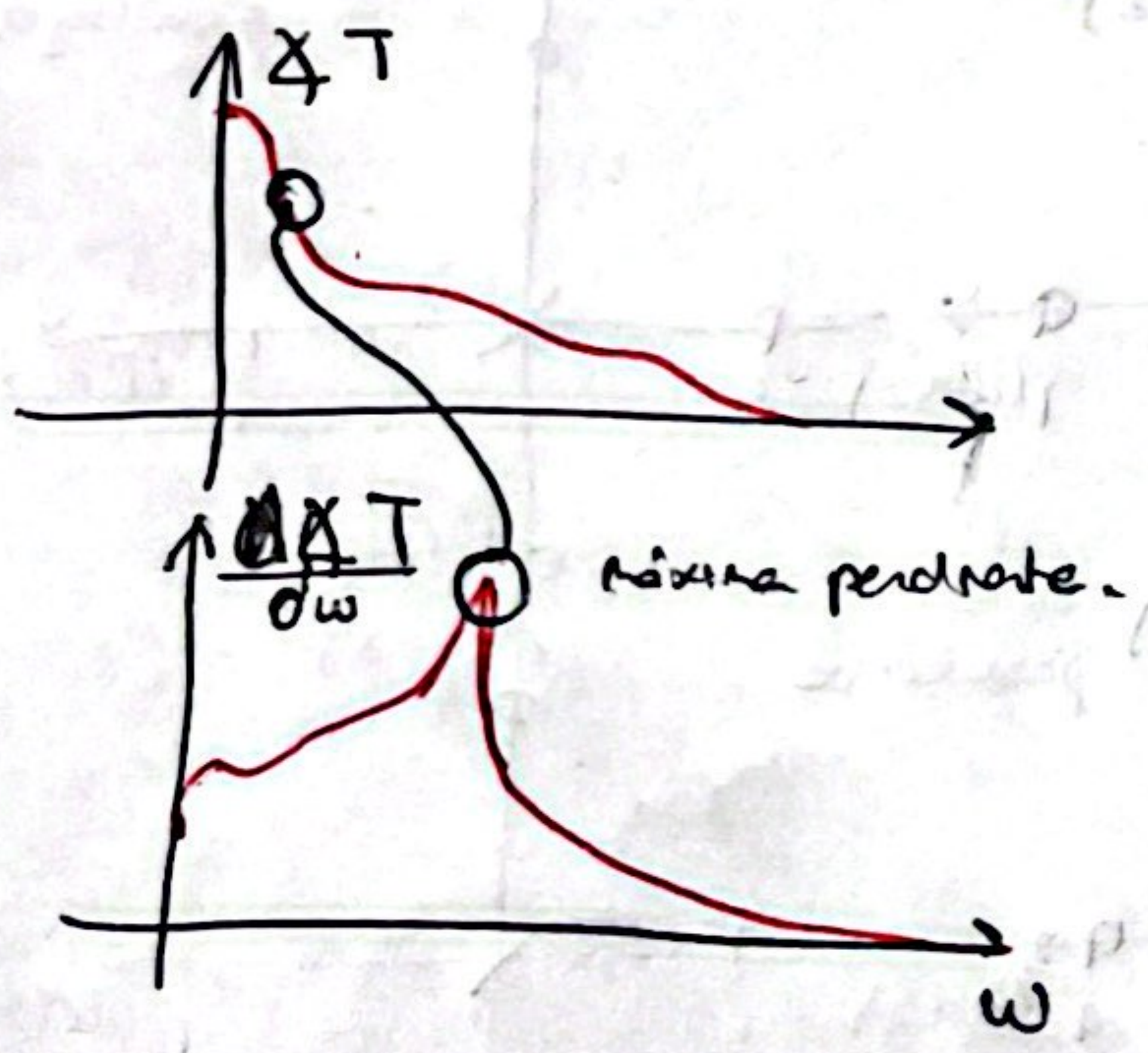
→ TIPO II presenta ondulaciones en la banda de atenuación con una banda de paso más plana. Logra también una transición más abrupta.

La pendiente de la función transferencia está determinada enteramente por el orden del filtro.

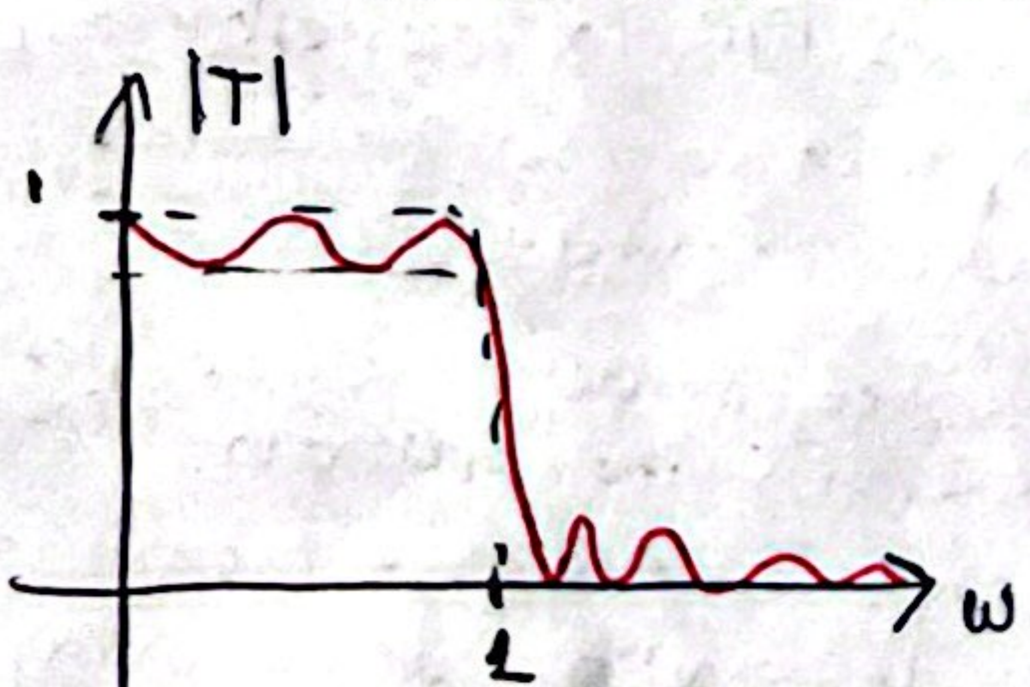


• Impar arranca de arriba
• Par arranca de abajo.

$m = 1$
$m = 3$

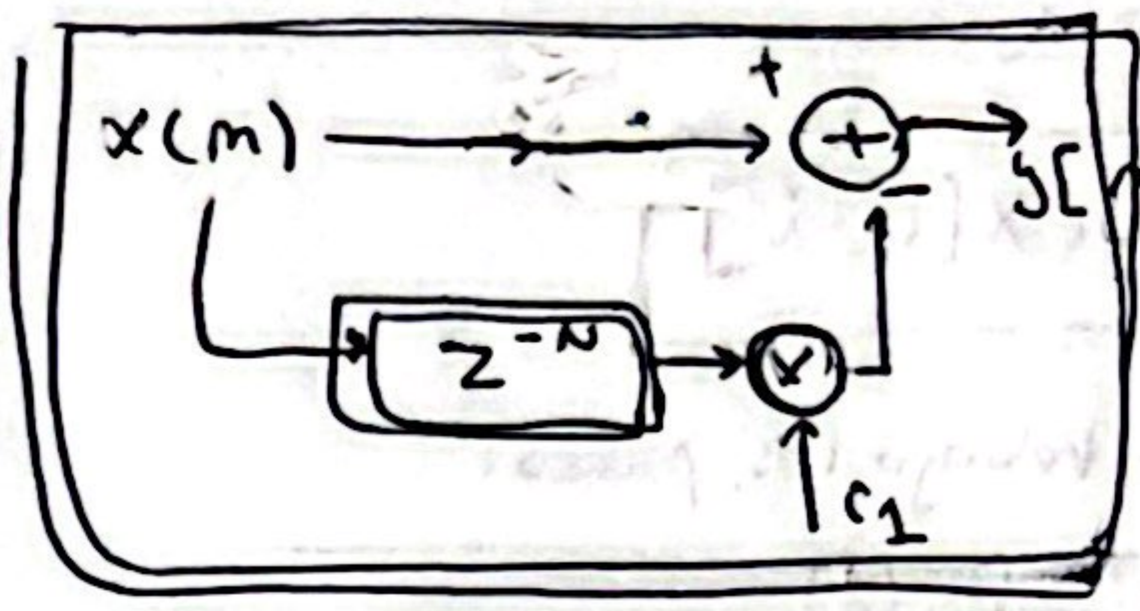


Elíptico → ofrece la transición más abrupta posible para un orden dado, pero a cambio introduce rizado tanto en banda de paso como de atenuación. Son los filtros de menor orden.



Filtros FIR: especiales

• FILTRO PEINE (comb)

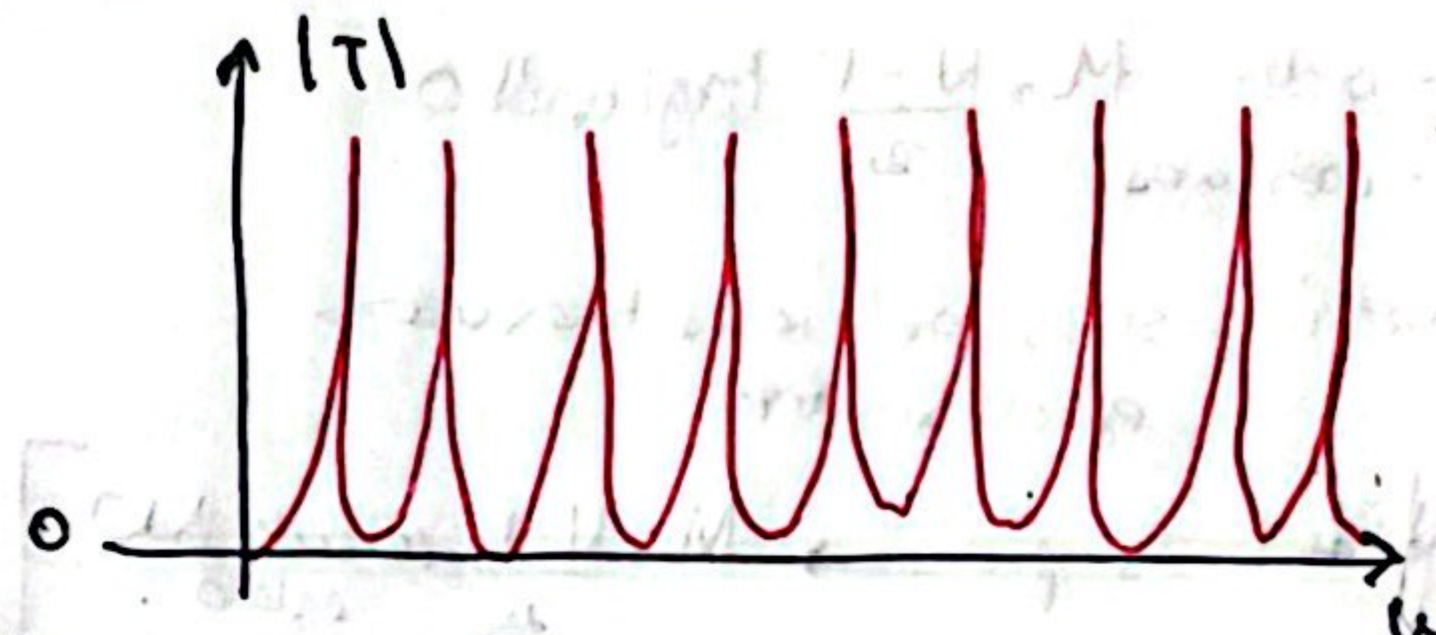


Suma o resta una señal y una copia retardada N muestras.

$$\boxed{y[n] = x[n] - c_1 x[n-N]}$$

$$P(z) = X(z)z^0 - c_1 X(z) z^{-N}$$

$$\boxed{\frac{P(z)}{X(z)} = 1 - c_1 z^{-N}}$$ Función transferencia



¿Para qué sirve?
Elimina o refuerza frecuencias PERIÓDICAS.
Por ejemplo, elige una frecuencia y TODOS sus armónicos.

• FILTROS FIR implementados de manera recursiva

$$\boxed{A(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{5}\,\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}}$$

$$Y(z)(1-z^{-1}) = \frac{1}{5}(1-z^{-5})X(z)$$

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} = \frac{1}{5}X(z) - \frac{1}{5}z^{-5}X(z)$$

antitransformo.

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{5}x[n] - x[n-5]$$

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{5}x[n] - x[n-5] + y[n-1]}$$

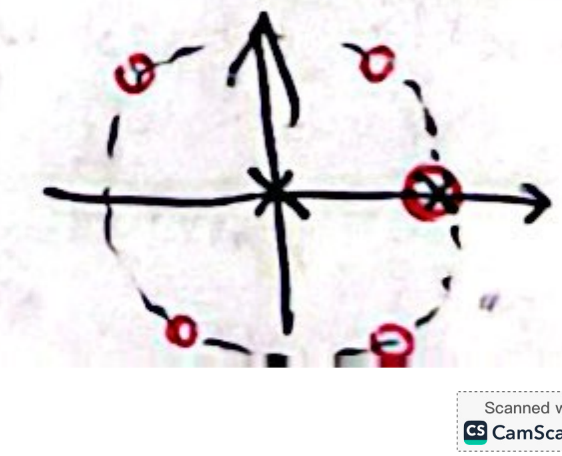
↳ Filtro FIR implementado de manera RECURSIVA

¿Cómo sabemos que es FIR?
Si hacemos: respuesta finita.

$x[0] = 1$ | $y[0] = 1/5$
$x[1] = 0$ | $y[1] = 1/5$
$x[2] = 0$ | $y[2] = 1/5$
⋮ | $y[3] = 1/5$
 | ⋮
 | $y[5] = 0$
 | ⋮

$$T(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$T(z) = \frac{z^N - 1}{(z-1)z^{N-1}}$$



Filtros FIIR

Los filtros FIR se diseñan y analizan DIRECTAMENTE en el dominio DIGITAL.
No tienen contraparte analógica.

$$\boxed{y[n] = \sum b_i \, x[n-i]}$$

Hay varias maneras de trabajarlos, podemos:

→ analizar sus coeficientes (1)
→ buscar función transferencia analizar polos y ceros. (2)

(1) Coeficientes:

Los coeficientes determinan principalmente qué tipo de filtro representa según su retardo.
Existen 4 tipos de filtros FIR según la simetría de sus coeficientes:

⊙ N = orden $M = \frac{N-1}{2}$; retardo

→ Simetría: si los coeficientes tienen un eje de simetría

- Si N es par → $M = \frac{N-1}{2}$ retardo NO entero.
- Si N es impar → $M = \frac{N-1}{2}$ retardo entero.

(b)

Que el retardo sea entero implica que la fase es lineal exacto, NO hay distorsión temporal.

→ sumadores (simétrico impar) (integradores)

$h = [1,1,1] \longrightarrow y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$

Suma valores adyacentes, reduce componentes de altas frecuencias. Se comportan como promediadores o integradores discretos.
Filtro pasabajos.

$h = (1,2,2,1)$ (simétrico par)

Tiene fase lineal pero su retardo es fraccional NO es causal, complica a la hora de análisis en tiempo real.
PROCESAMIENTO ESPACIAL.

pone ceros a nyquist B

→ Antisimetría: implica que son a signo opuesto alrededor de un eje de simetría.
Sigue teniendo fase lineal (derivadores)

$h = [2,0,-1] \longrightarrow y(n) = x(n) - x(n-2)$

Calcula la diferencia entre puntos, como una pendiente. Resalta cambios bruscos, es decir, componentes de alta frecuencia. Derivadores discretos para altas o pasabanda.

(2) Función transferencia

transformo

$$y[n] = \sum b_i \, x[n-i]$$

$$Y(z) = \sum b_i \, z^{-i} X(z)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = \sum b_i \, z^{-i} = H(z)}$$

Si reescribimos la ecuación de otra forma.

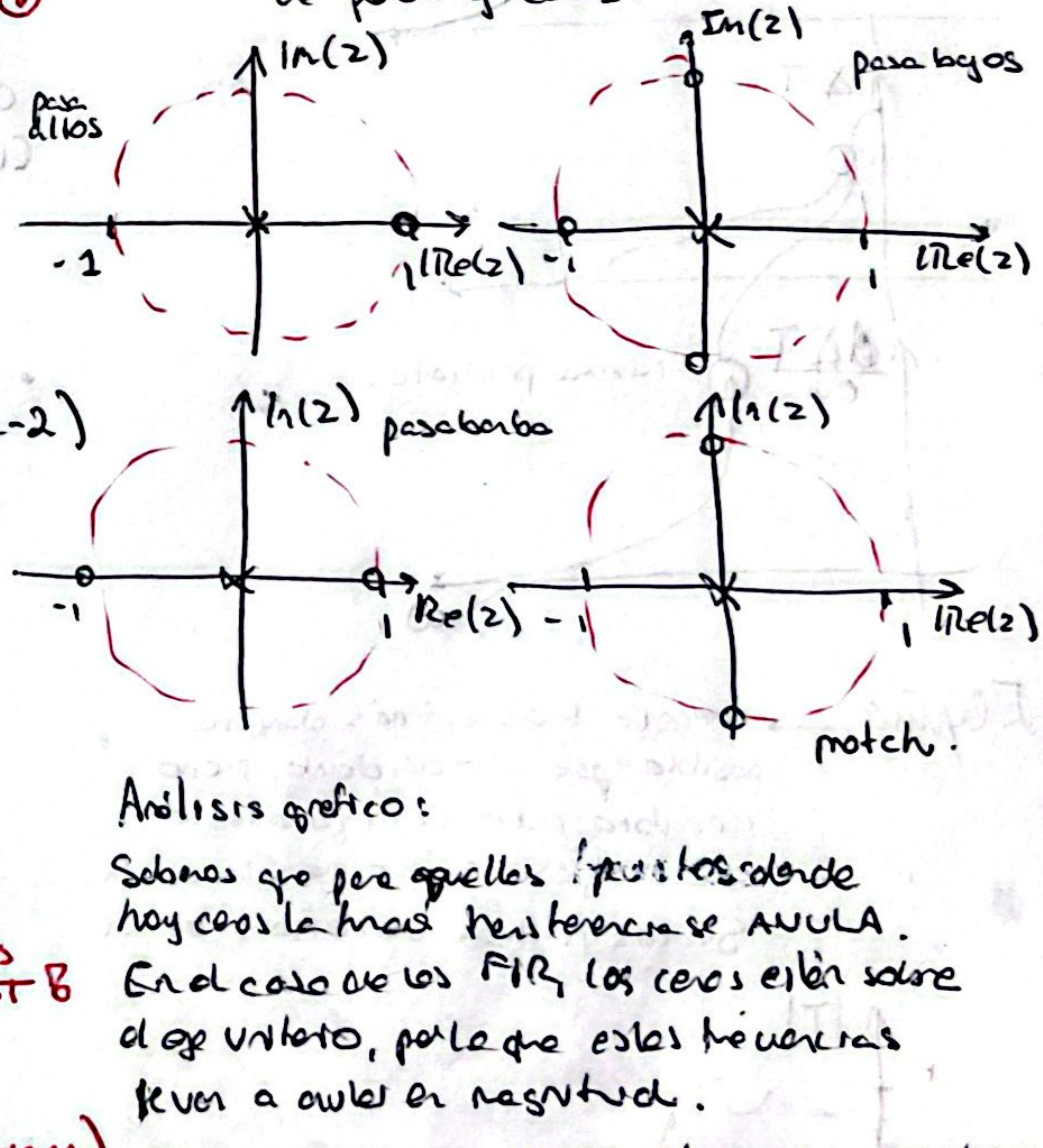
$$H(z) = \frac{\sum b_i}{z^{-i}}$$

$$H(z) = b_0 z^{n-1} + \dots b_{n-1} z^{-(n-1)}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{b_0 z^{n-1} \dots b_{n-1}}{z^{n-1}}} \quad \begin{matrix} P(z) \\ Q(z) \end{matrix}$$

Se puede identificar como todos los polos se encuentran en 0. Los ceros de la función están dados por las raíces de P(z).

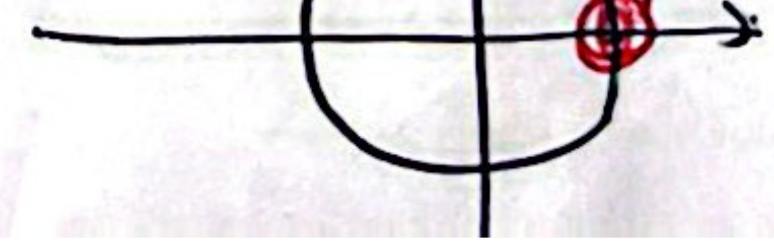
De esta manera podemos armar el diagrama de polos y ceros:



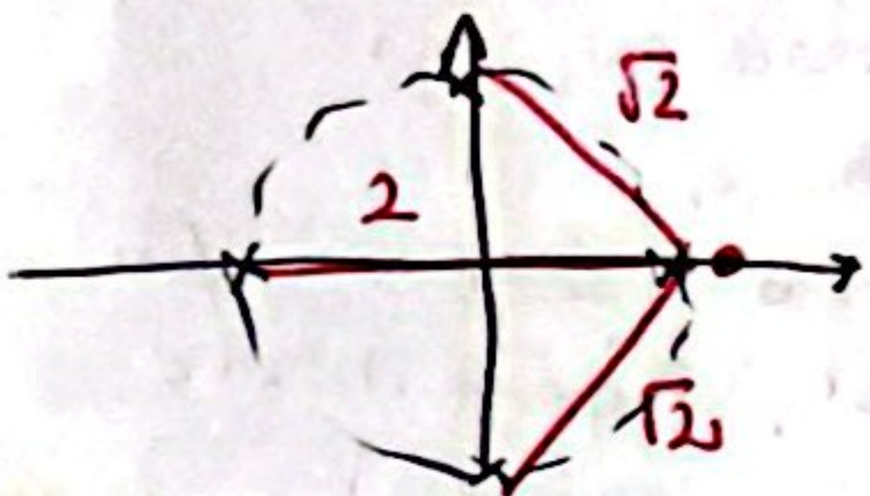
Análisis gráfico:

Sabemos que para aquellas frecuencias donde hay ceros la función transferencia se ANULA. En el caso de los FIR los ceros están sobre el eje unitario, por lo que estas frecuencias llevan a ceros en magnitud.

Siempre se arranca desde el eje positivo (derecho) y se recorre en sentido antihorario.
A medida que nos acercamos a un cero esta anula la magnitud, cuando nos alejamos CRECE.



Otra cosa que se puede analizar con el método gráfico es la magnitud total (lineal)



$|T| = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$

$\omega \to 0$

Método analítico:

evaluamos en el círculo UNITARIO

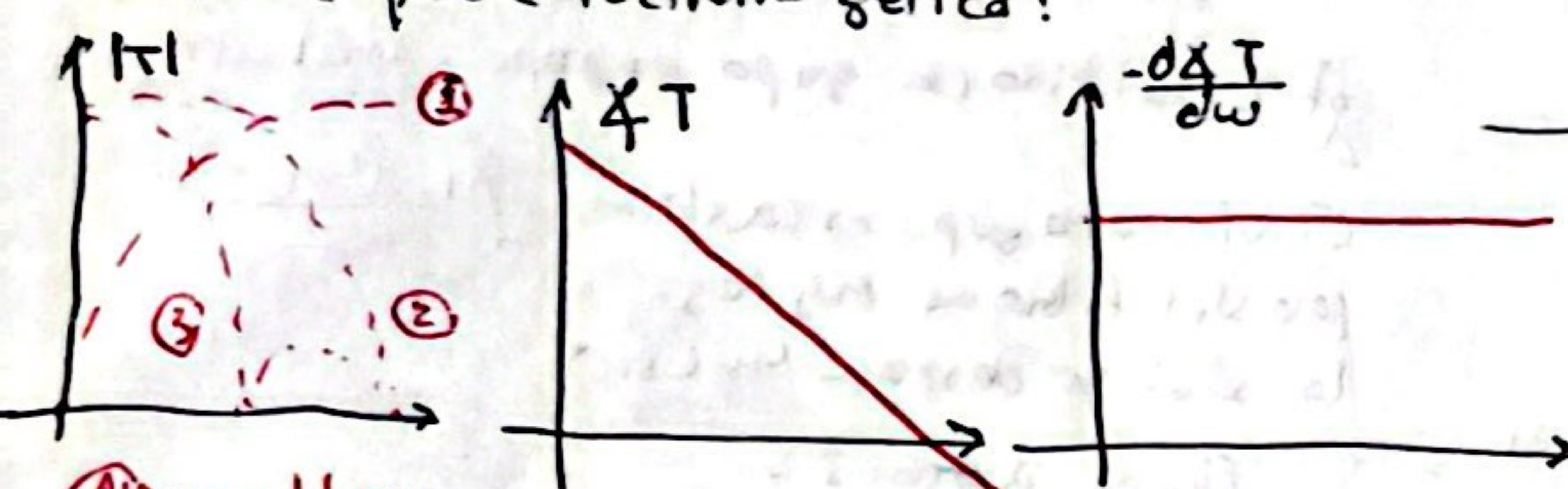
$$\boxed{H(j\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}}$$

una vez reemplazamos vamos a llegar a una expresión de tipo:

$$\boxed{H(j\omega) = |H_R(\omega)| \measuredangle H(\omega)}$$

$\to \boxed{|H(j\omega)| = H_R(\omega)}$

Con esto se puede fácilmente graficar:



① pasa altos

② pasa bajos $m=1$

③ pasa bajos orden 2

MÉTODOS DE DISEÑO

→ ventanas

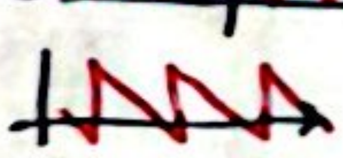
Se trunca la respuesta al impulso con UNA VENTANA (rectangular)

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \ldots M-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$\boxed{h(n) = hd(n)\,w(n)}$$

↳ respuesta deseada (ideal) ⌈ con respuesta al impulso infinita

El espectro de una ventana rectangular → sync 

Con una fase lineal ~~debe~~ a trozos. → 

$$\boxed{Hd(\omega) = \sum hd(n) e^{-j\omega n}}$$

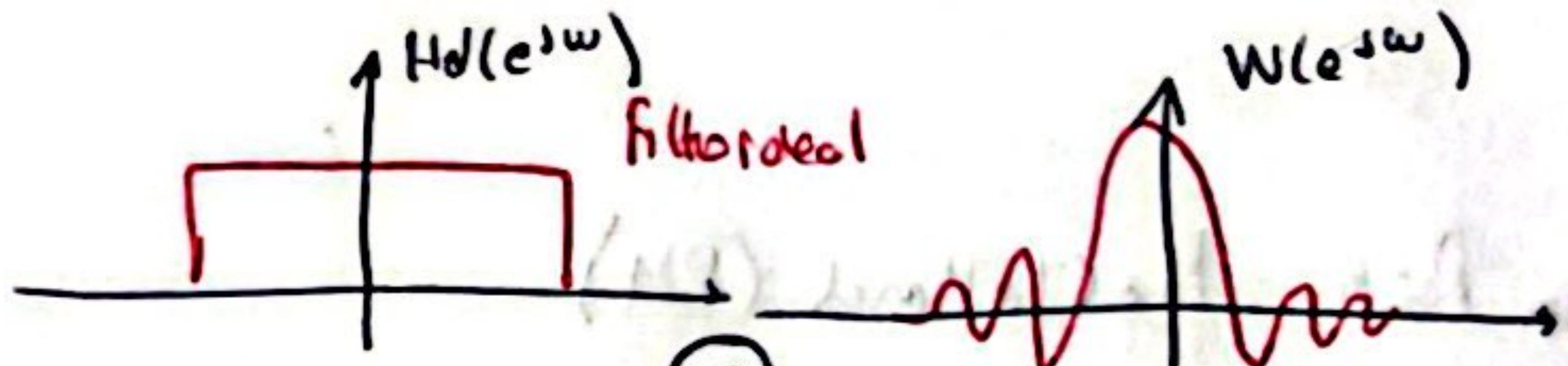
Elección de ventanas:

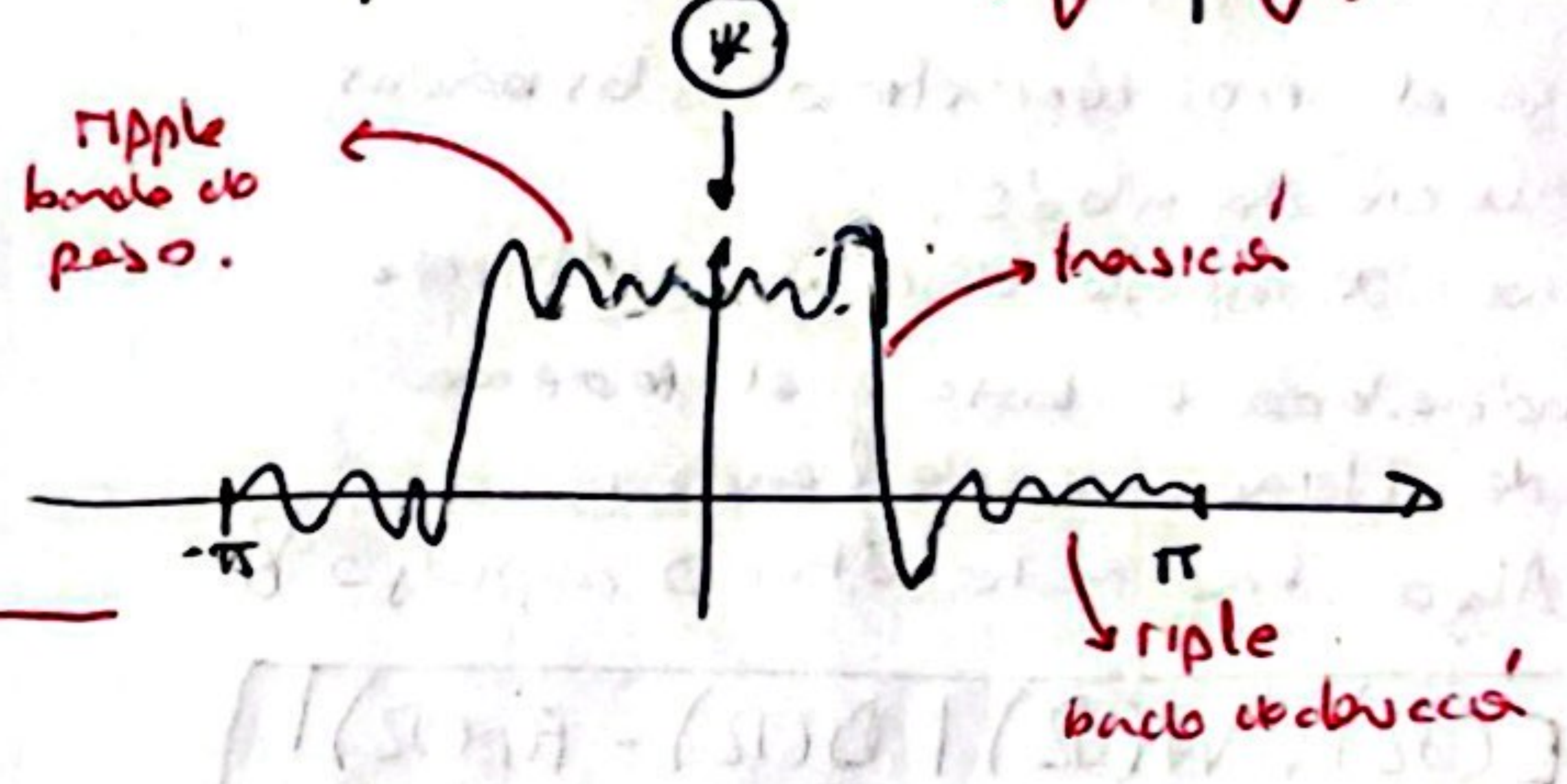
- rectangular: recorte directo, anchos lóbulos laterales, más ripple.
- Hamming: más atenuación lateral, transición ancha B
- Diferentes compromisos entre transición y atenuación lateral

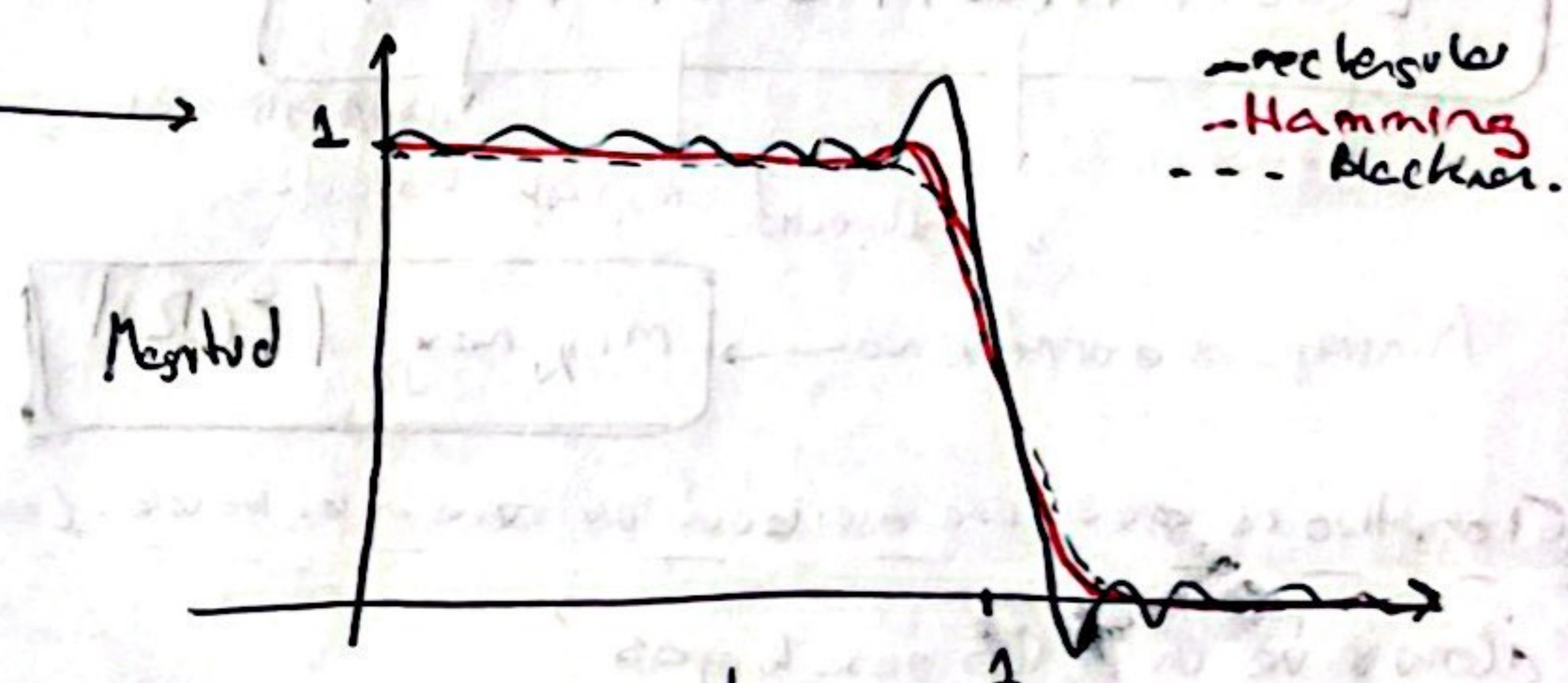
COMPROMISOS VENTANAS

VENTANA	Transición	Ripple banda de paso	Atenuación
Rectangular	abrupta	Alto	-20 dB
Hamming	más suave	Bajo	-53 dB
Hanning	más suave	Más ripple	-44 dB
Blackman	suave/lenta	Bajo	-74 dB
Kaiser	"ajustable"	"Ajustable"	Ajustable

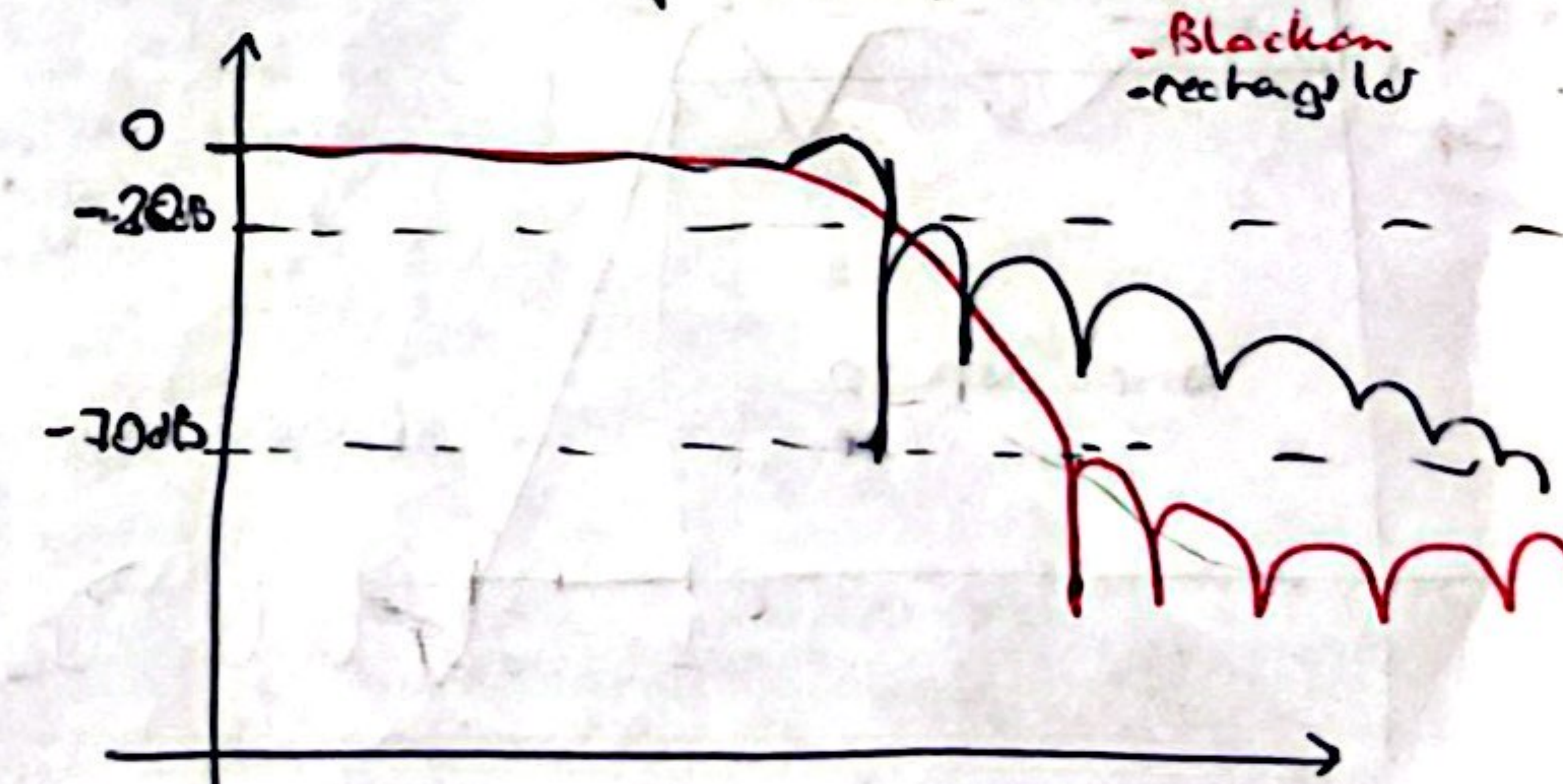
recordar:







en (dB) pasabajos.



Altura de lóbulos → atenuación mínima en banda de bajo.

ancho de lóbulo principal → ripple (más angosto → ripple

→ Cuadrados Mínimos.

Definimos nuevamente una respuesta al impulso ideal $hd(n)$ (deseada) y $Hd(z)$ su función transferencia.

El objetivo es MINIMIZAR el error cuadrático medio entre la respuesta deseada y la real

$$\boxed{|E(w)|^2 = \sum |Hd(w) - Hr(w)|^2}$$

Definimos $\boxed{Hr(\Omega) = \sum h[k] e^{-jwk} = H(w)}$

→ Parks - McClelland (PM)

Minimiza el error cuadrático en las bandas de tolerancia de interés.

Error: de respuesta deseada y obtenida

Su fundamentación se basa en el teorema de alternancia de Remez.

Algoritmo matemático complejo

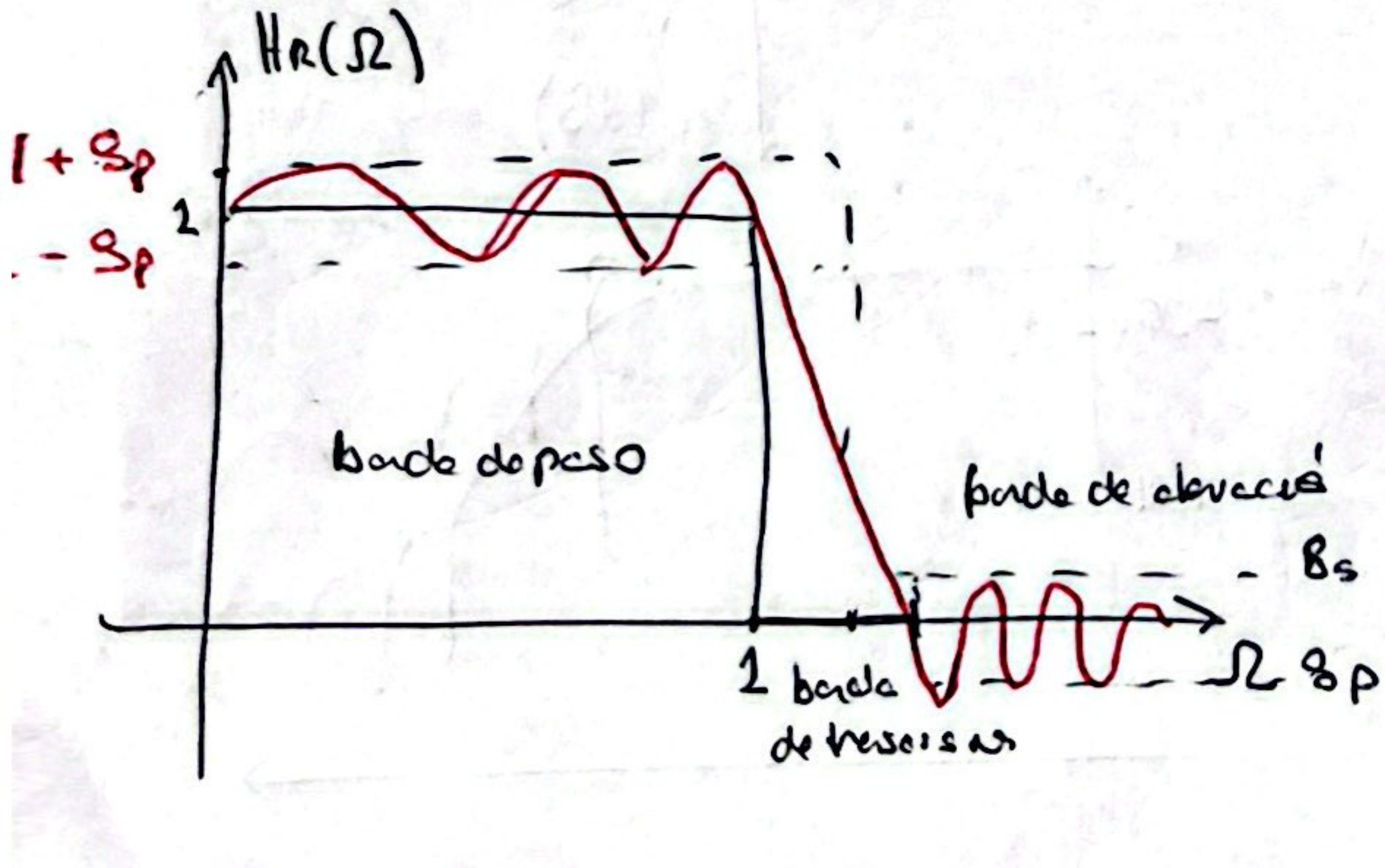
$$\boxed{E(\Omega) = W(\Omega) \, | D(\Omega) - Hr(\Omega) |}$$

↓ error ↓ función de ponderación ↓ respuesta deseada ↓ respuesta real

Minimiza el error máximo → $\boxed{\min_x \max_\Omega |E(\Omega)|}$

El objetivo es generar una oscilación uniforme en las bandas (equiripple)

¿Cómo se ve un filtro pasabajos?



Problemas con los FIR:

Como sabemos los filtros FIR tienen fase lineal, por lo que el retardo de grupo es constante. Sin embargo, si el filtro no es perfectamente simétrico, la fase puede no ser lineal, lo que cambiaría la morfología de la señal.

Este problema, más que nada aparece cuando las bandas son muy estrechas o están muy cercanas.

Para transiciones muy rápidas se necesitan MUCHOS coeficientes órdenes muy altos.

Transiciones angostas → requieren filtros LARGOS.

porque cuanto más angosta es MÁS RÁPIDO tiene que cambiar el filtro.

en tiempo implica → más coeficientes

MÁS ORDEN → MÁS RETARDO.

El retardo de grupo es proporcional al ORDEN

El retardo de grupo es constante $M = \frac{N-1}{2}$

pero si el filtro es muy largo la señal se desplaza MUCHO

Ocurren 2 problemas:

- Si necesitamos tener una transición angosta sin subir el orden aparecen oscilaciones.
  → afecta la ganancia.

  Este retardo NO implica distorsión de fase por lo que no se puede corregir con un filtrado bidireccional.
- Si el filtro no es perfectamente simétrico puede ocurrir que se genere también una distorsión de fase

→ Filtros antisimétricos:

en 0 o en Nyquist ($fs/2$) la magnitud de la respuesta vale 0.

No podríamos diseñar un filtro pasabajo que pase por 0.

Para corregir esto:

Cascadeado de filtros. Duplicamos el orden del filtro, y tenemos un mayor control sobre las bandas de transición. Si cada etapa es simétrica tiene comportamiento de fase.

Problemas principales → pasabanda y Notch

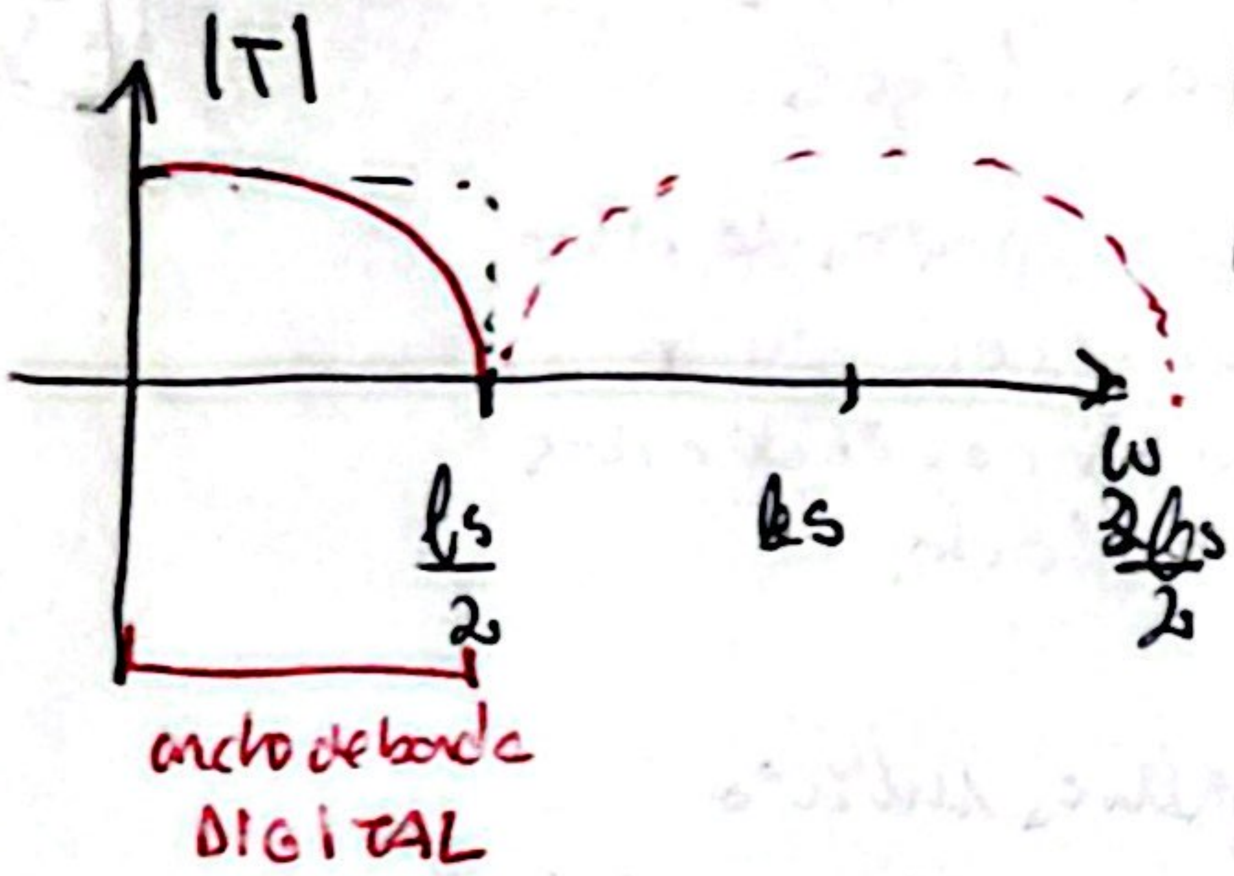
↳ simetría - antisimetría.

↳ pasabajos.

↳ pasaaltos.

Frecuencias digitales

$\Delta \longrightarrow$ plano espectral digital



f_s = frecuencia de muestreo.

$f_s/2$ = Nyquist.

Las señales analógicas SIEMPRE quedan normalizadas respecto a la frecuencia de muestreo.

señal $\longrightarrow \omega \longrightarrow$ digital $= \omega = \dfrac{2\pi}{f_s}$

$$\boxed{\omega \in [0;\pi] \longrightarrow f \in [0, f_s/2]}$$

↓ Nyquist.

$[0; f_s/2] \longrightarrow$ ancho de banda máximo obtenido útil SIN aliasing.

Cuando diseñamos un filtro ponemos ceros en ciertas frecuencias dependiendo de lo que queremos lograr.

Existen dos tipos de ceros:

$\longrightarrow$ Estructurales: son los ceros propios del sistema. Son exclusivos DE LA FORMA del filtro.
Determinados por: simetría y antisimetría.
Los ponemos nosotros según lo que queremos, también se pueden agregar con métodos de ventanas ~~o~~ interpolaciones.
Aparecen en frecuencias específicas: 0 y π dependiendo de los coeficientes pares o impares. B (Tengo que ver coeficientes)

$\longrightarrow$ Topológicos: aparecen por la ubicación INTENCIONAL, es decir por el tipo de filtro que quiero yo los ubico. generalmente para suprimir ciertas frecuencias.

Podemos determinar ceros estructurales SÓLO en filtros FIR, ya que los filtros IIR no cuentan con simetría entonces no tienen ceros estructurales.

TABLA TÍPICA B

muchos usos (ceros topológicos)

Tipo 1 $\longrightarrow$ Simetría, longitud impar $\longrightarrow$ no hay ceros estructurales

Tipo 2 $\longrightarrow$ Simetría, longitud par $\longrightarrow$ cero en $\omega = \pi \longrightarrow$ (Pasa bajos)

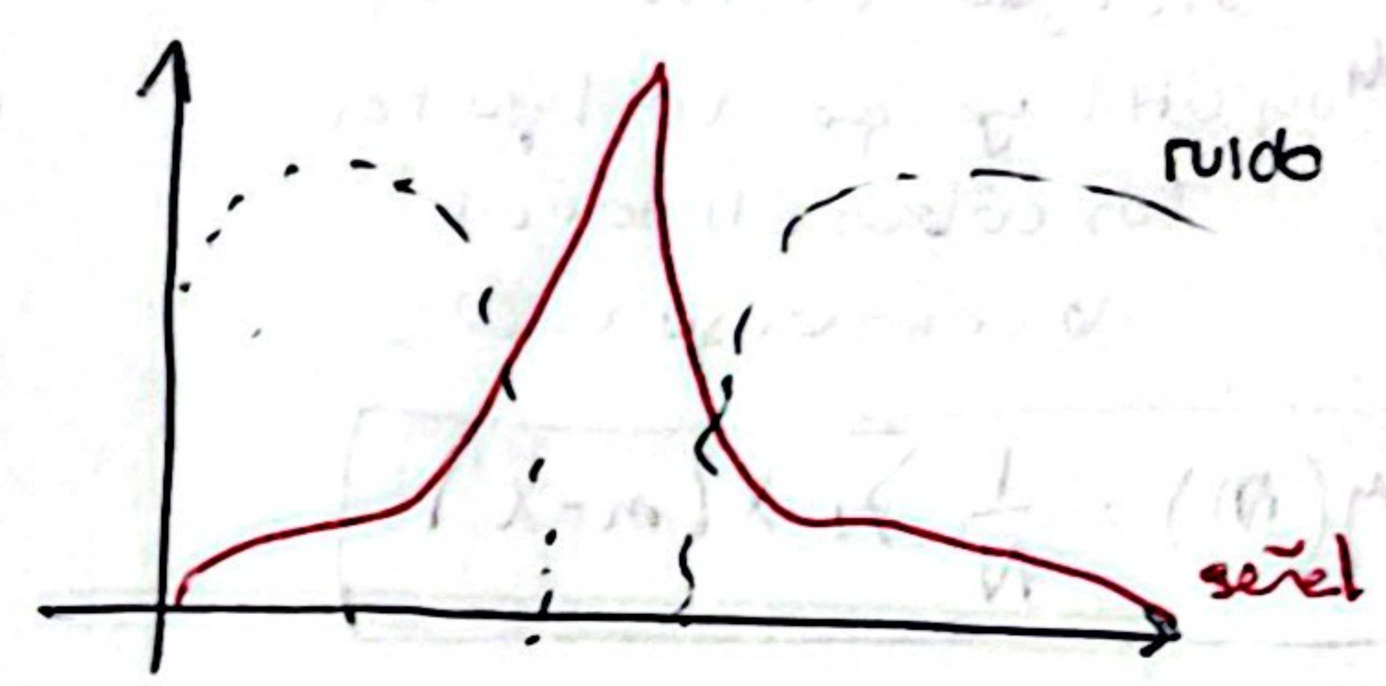
Tipo 3 $\longrightarrow$ Antisimétrica, longitud impar $\longrightarrow$ cero en $\omega = 0 \longrightarrow$ (Pasa altos)

Tipo 4 $\longrightarrow$ Antisimétrica, longitud par $\longrightarrow$ cero en $\omega = 0$ " " $\pi \longrightarrow$ (Pasa altos)

Filtrado NO Lineal

El problema con el filtrado lineal asume que la interferencia y el ruido están disjuntos, es decir son "linealmente no separables en frecuencia", es por ello que puede hacerse un filtrado lineal.

Pero si el ruido comparte frecuencias con la señal deseada, el filtrado va a deteriorar la señal. En la vida real, los espectros suelen estar solapados.



Esto suele ocurrir, cuando el ruido no es gaussiano y presenta picos en su espectro. o impulsos en el dominio del tiempo.

Usualmente no se conoce la naturaleza intrínseca de este tipo de ruido, por lo que se utilizan técnicas de estimación y sustracción de estos ruidos.

$$\boxed{\hat{y} = s - \hat{b}}$$

$\hat{b} \longrightarrow$ estimación del ruido

$s \longrightarrow$ señal contaminada

$\hat{y} \longrightarrow$ señal filtrada estimada.

Al estimar el ruido lo que hacemos es identificar la forma o tendencia de las interferencias construyendo la señal lo más parecido posible al ruido y luego restarlo a la original.

Esto permite cancelarlo de manera más efectiva.

$\longrightarrow$

FILTROS NO LINEALES

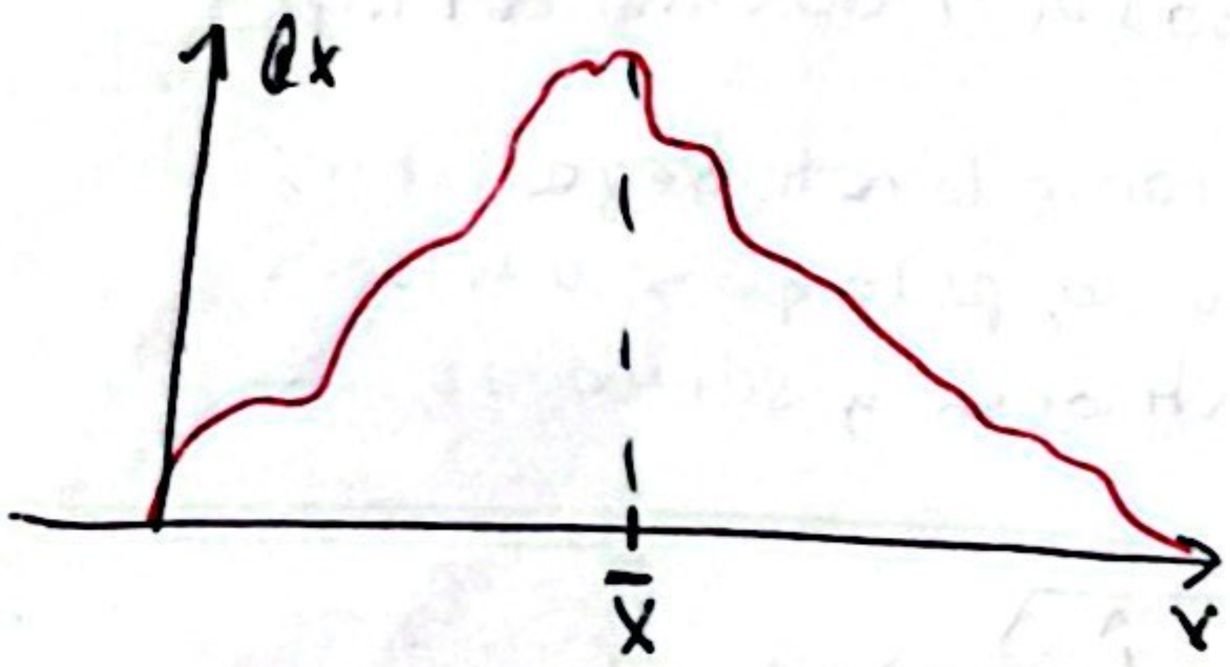
Filtro de mediana:

→ El filtro de mediana trabaja sobre una ventana deslizante de muestras. Para cada punto de salida se ordenan muestras dentro de la ventana y el valor de la mediana se convierte en la salida.

Mediana → buena centralidad
respeta la distribución
busca el valor donde el área sea igual a ambos lados.
Muy útil ya que no importan los valores atípicos, no cambian su valor.

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{N} \sum_i x(n-i)}$$

1° → ordenamos $x \to x'$
2° → buscamos $x'_{1/2} = \bar{x}$



Sin embargo, con este mismo método podemos tener en cuenta y calcular con distintos percentiles, en vez de sólo 50, siempre se calcula el valor por debajo del cual esté el % de los datos

→ %50 → mediana $\bar{x}$
→ %25 → valor $\bar{x}'$ 25% de datos
→ %75 → valor $\bar{x}''$ 75% de datos

Estos filtros se llaman filtros de PERCENTIL
¿Para qué sirve cada uno?

percentil 50 → útil para eliminar picos (oscilaciones aisladas) suaviza los bordes → preserva mejor.] bueno para cambios bruscos

percentiles bajos → suprime más los valores atípicos o picos altos.

percentiles altos → elimina valles, porque sube la señal hacia valores que llegan casi al tope de la ventana. Suaviza caídas.

Las ventanas se ajustan según los componentes del ruido que se desean eliminar:

[oscilaciones rápidas: ventanas cortas
oscilaciones lentas: ventanas largas

Por eso cuando tenemos componentes de alta frecuencia y de baja frecuencia se suelen usar ventanas cascadeadas para lograr el mejor efecto.

Interpolación splines cúbicos

La interpolación es una técnica para aproximar funciones suaves y continuas a partir del conjunto de puntos discretos.

Construye una curva continua que pase exactamente por los datos dados.

Una spline cúbica es una función con múltiples polinomios de tercer grado definidos por tramos.

Se conectan los puntos de tal forma que la resultante se asegura que:
→ continua en cada tramo
→ continua su primera y segunda derivada (suaves)

Una vez construida la ~~...~~ spline que interpola los puntos correspondientes al ruido, se remuestrea el spline a la misma fs que la señal original.

Se define un segmento de tiempo (ventana de lo que se va a muestrear)
→ dependiendo de qué queremos ver elegimos un valor de muestras (tiempo) al que queremos estimar ese ruido. Y luego se evalúa el spline en esos PUNTOS.

Así obtenemos una estimación del ruido, luego se le resta a la señal y obtenemos la señal filtrada.

→ Filtros adaptativos

Un filtro adaptativo, es un filtro que modifica sus coeficientes automáticamente a medida que procesa una señal.

"Aprendiendo" de la entrada y salida para cumplir un objetivo.

- → reduce ruido
- → identifica un sistema
- → predice una señal
- → cancela interferencias

Tiene:
- una entrada
- vector de coeficientes adaptables
- vector de muestras pasadas

salida estimada $\boxed{\hat{y}(n) = \sum a_k(n)\, x(n-k)}$

error de predicción → $\boxed{e(n) = d(n) - \hat{y}(n)}$

↳ señal ideal

→ Filtros adaptados

Son filtros diseñados específicamente para detectar ciertos patrones en una señal desconocida de una señal conocida inmersa en RUIDO.

Los matched filters maximizan la relación señal - ruido (SNR) en la salida cuando la señal esperada APARECE.

$\boxed{h(n) = s^*(-N+n)}$

↳ el filtro es la versión invertida de la señal que quiero detectar.

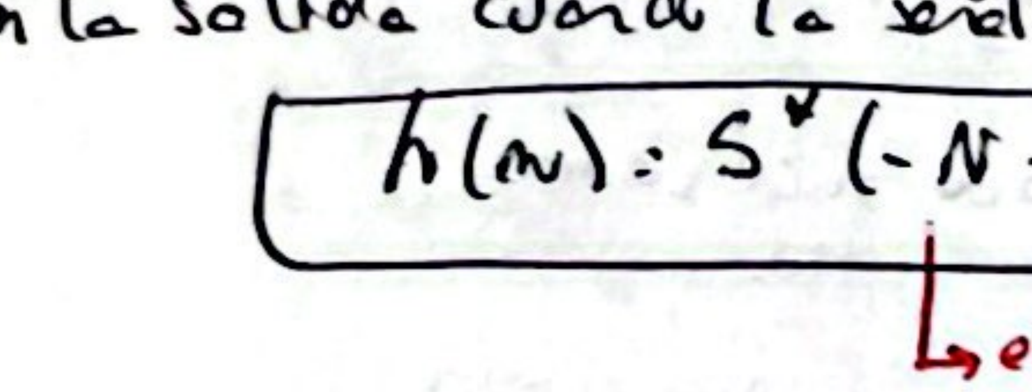
La señal de salida es la convolución de la señal de entrada $x[n]$ y el filtro $h[n]$

$\boxed{y[n] = x(n) * h(n)}$

Cuando la señal entra al patrón buscado, la salida tendrá un pico MÁXIMO.

Lo que queremos medir es qué tanto se parecen las señales de entrada a un patrón conocido.

Comparo una señal y voy desplazando la otra encima.



$\boxed{y(n) = \sum x(k)\, s^*(-N+n)}$

↳ versión invertida y conjugada.

Interpolación y diezmado:

Cambiar, por ejemplo, el contenido espectral de una señal puede ser útil para trabajar mejor con las señales antes de filtrar ⚠

Como sabemos, el filtrado y el diezmado están íntimamente relacionados.

↳ Los espectros se escalan con la tasa de muestreo.

Hay dos maneras de cambiar la tasa de muestreo:

→ Interpolación: aumentar tasa de muestreo. AGREGAMOS muestras.

Insertamos $(L-1)$ ceros entre muestras.

metemos réplicas espectrales en banda.

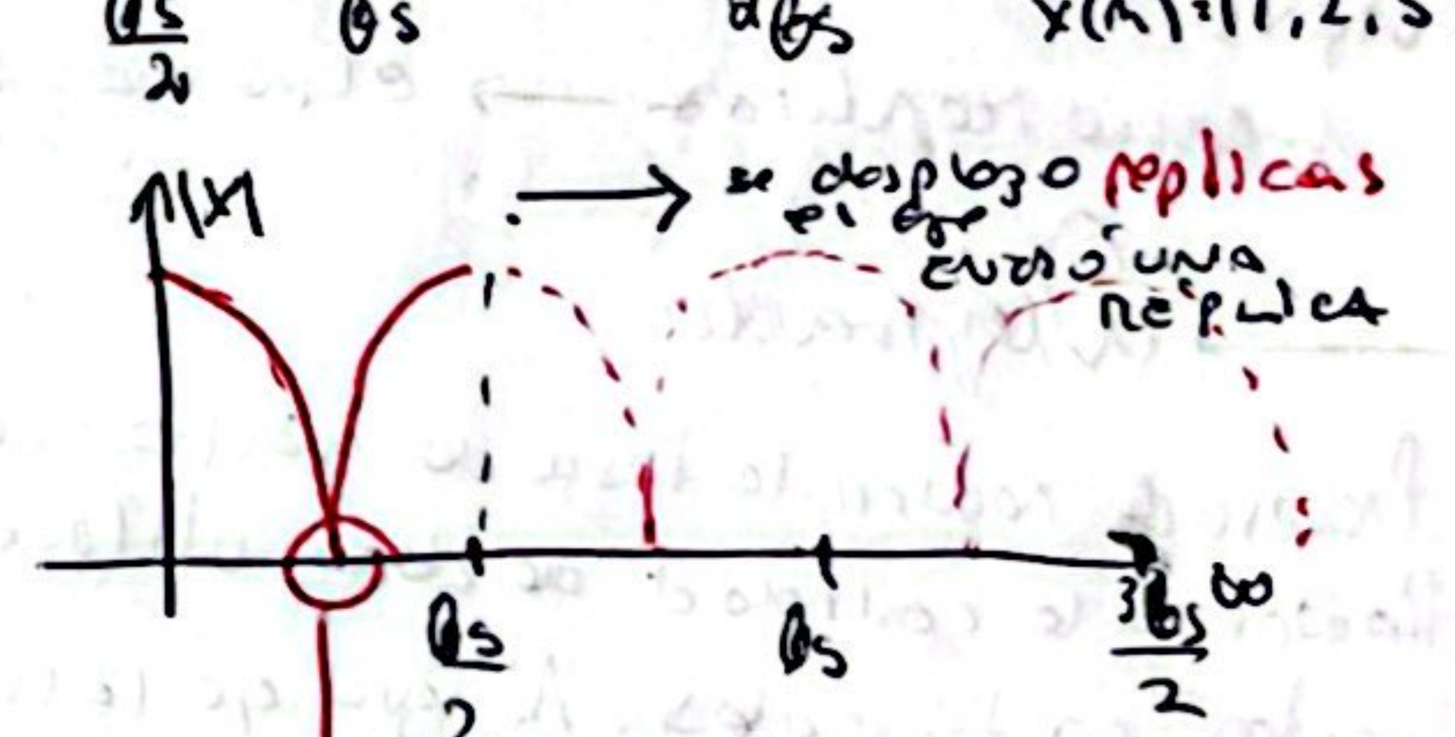
COMPRIMIMOS EN FRECUENCIA.

Aparecen ceros en el ancho de banda

→ ceros estructurales

⚠ Más muestras implica redistribuir el ruido ⚠

$x(n) = (1, 2, 3)$



mejoramos "resolución espectral" visualización.

pero cero ... ; también la f_s

La resolución no siempre mejora

$\boxed{\Delta f = \frac{f_s}{N}}$

Mientras más ceros metemos, más se comprime la señal.

Obviamente, esto no sirve si no filtramos ya que se distorsiona la señal

$x(n) \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow \boxed{w_c = 1/L}$

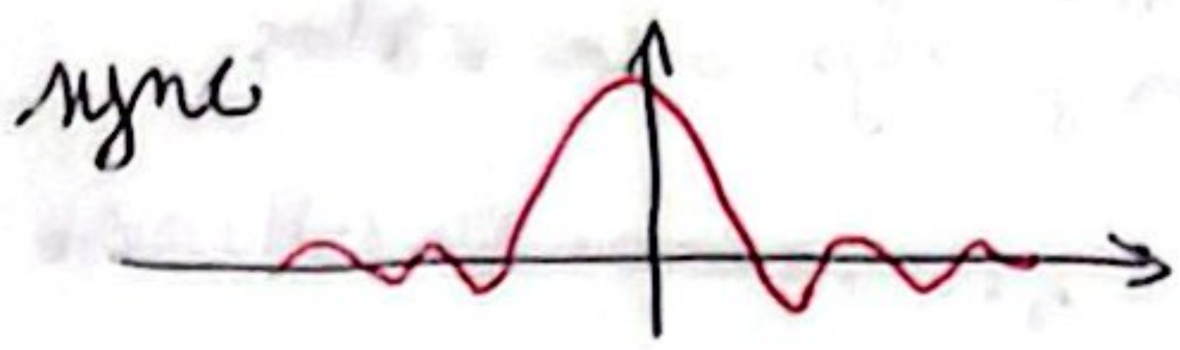
↳ pasabajos corte en el primer cero estructural

$f_s \approx N$

$2f_s \approx 2N$ aumentamos f_s.

FILTRO INTERPOLADOR

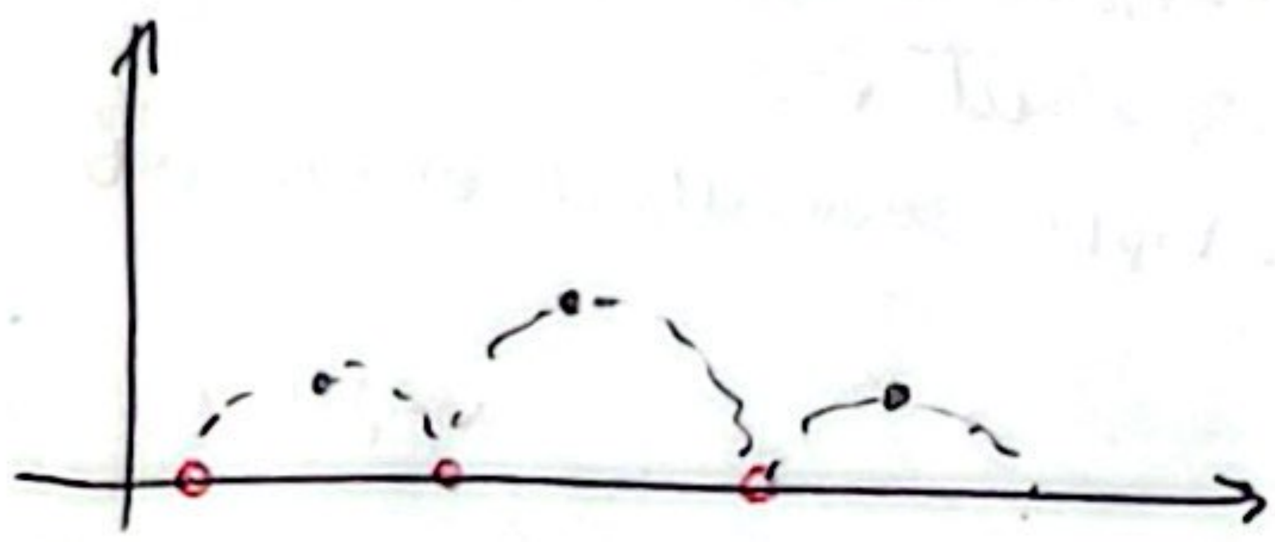
→ Pasabajos ideal: impulso ideal



Entonces cada muestra interpolada se obtiene como una convolución entre esa sync y todas las muestras originales.

Cada nuevo punto interpolado es la suma ponderada de las muestras originales ponderadas por una sync centrada en ese punto

$$\boxed{x_{int}(n) = \sum x(k)\, \mathrm{sinc}(n-k)}$$



Tiene la propiedad de pasar exactamente por cada punto original y suprimir todos los errores interpolados.

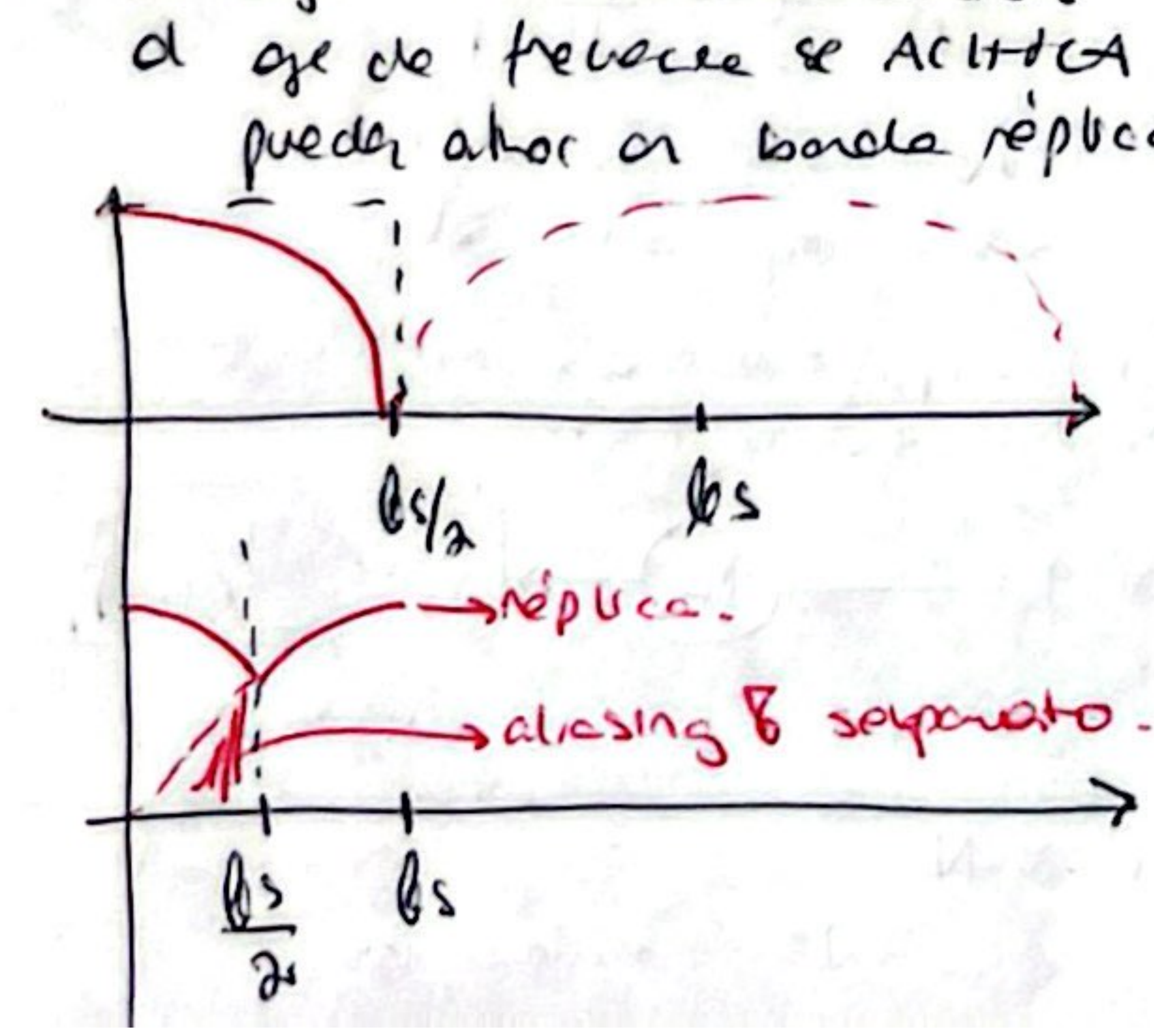
suprime réplicas → eliminamos ALIAS.

→ Diezmado

Proceso de reducir la tasa de muestreo de una señal. Reducimos la cantidad de datos, útil para optimizar costos computacionales. Al igual que la interpolación, la frecuencia de muestreo también cambia B

f_s se divide con M → nueva $\boxed{f_{s_M} = \frac{f_s}{M}}$

Se reduce la frecuencia de muestreo, al bajar la cantidad de muestras el eje de frecuencia se ACHICA. pueden entrar en banda réplicas ALIASING.



A diferencia de la interpolación, tenemos GRAN riesgo de aliasing, es necesario filtrar ANTES.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{w_c = 1/M} \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow$$

Al bajar la fs (por bajar M) las réplicas se superponen. es necesario filtrar antes así suprimimos todas las señales por encima de nyquist nueva.

Luego, diezmamos y quitamos muestras.

$x(n) = (1, \cancel{3/2}, 2, \cancel{5/2}, 3, \cancel{7/2}$

Transformada STFT

Sirve para analizar señales donde la frecuencia cambia con el tiempo, es decir NO estacionarias.

Analizar respuesta en frecuencia en el tiempo sin perder componentes.

→ Aborda esto dividiendo la señal en pequeñas ventanas de tiempo y aplicando una transformada de Fourier a cada ventana.

Asume que dentro de cada ventana la señal es estacionaria.

↳ Las ventanas se superponen para evitar que se pierda información.

> Estas ventanas se desplazan a lo largo del tiempo, y para cada posición calcula FT

$$\boxed{STFT(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \underbrace{w(\tau - t)}_{\text{función ventana}}\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}$$

en discreto...

$$\boxed{STFT\{x(n)\} = X(m,f) = \sum x(n)\, w(n-m)\, e^{-j2\pi f n}}$$

f también se discretiza → DSTFT

COMPROMISO TIEMPO-FRECUENCIA:

→ Ventanas cortas: buena resolución temporal pero pobre resolución espectral menor Δt.

→ ventanas largas: buena resolución espectral pero mala resolución temporal.

NO SE PUEDE TENER ALTA RESOLUCIÓN EN AMBOS DOMINIOS

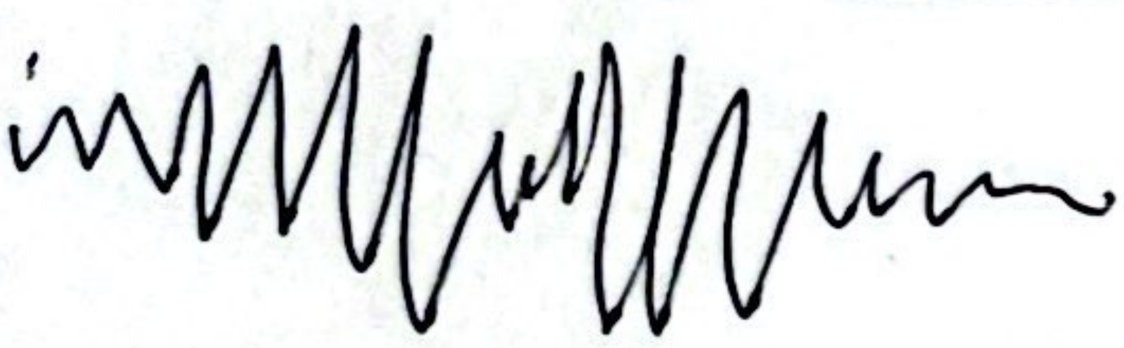
Dado que tenemos fijo la respuesta temporal,
NO podemos hacer análisis con resoluciones variables.
es FIJA para todas las frecuencias.

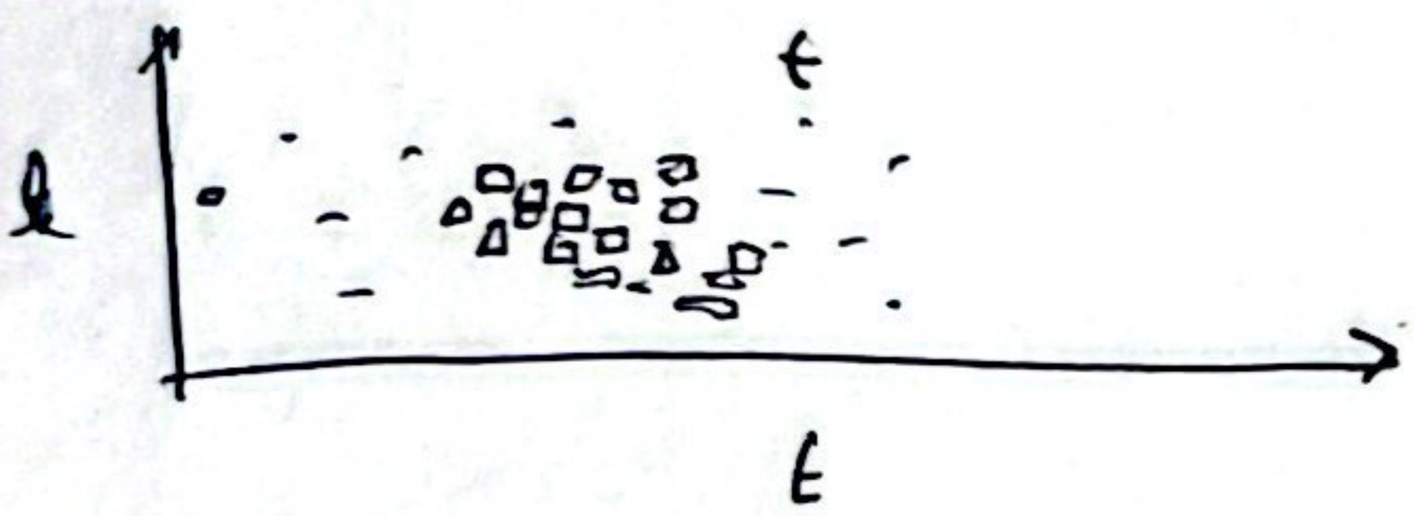
- eventos de corta duración → alta f
- " de larga duración → baja f

COMPROMISO

$$\boxed{\Delta f \Delta t \leq 1/2}$$

$\Delta f = \frac{f_s}{N}$ $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ $\boxed{\Delta f \Delta t = \frac{1}{N} \text{ cte}}$

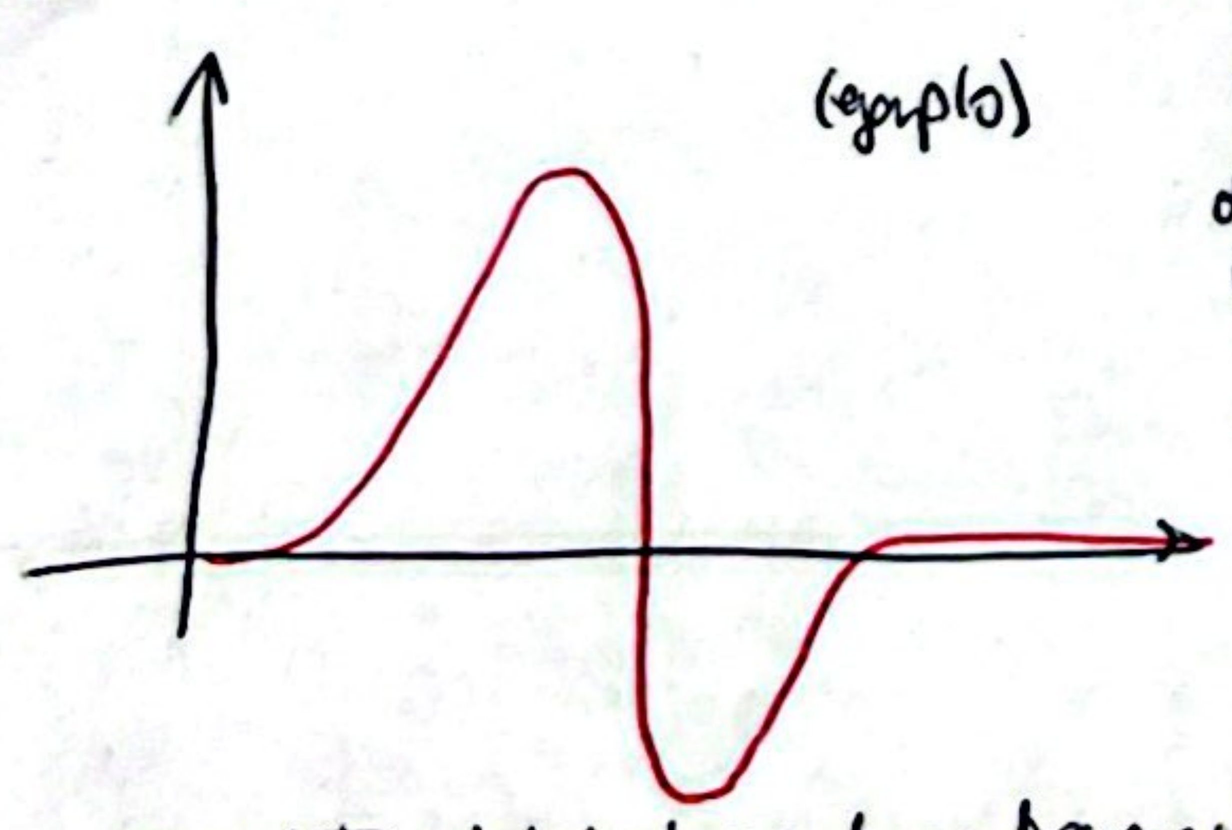




Transformada CWT (wavelets)

Se basa en el uso de ondas (ondas) que varía su desplazamiento τ y su parámetro de escala.
No son como senos y cosenos tiene otra forma.

$$\boxed{\psi_{s\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)}$$



Estas ondas se dilatan o comprimen y se trasladan en el tiempo para generar un grupo de funciones wavelets.

wavelets dilatadas: bajas frecuencias → buena resolución f, mala resolución t
" comprimidas: altas frecuencias → buena resolución t, mala resolución f

La CWT es una CORRELACIÓN entre la señal w(t) y la señal que analizamos.
Los picos se dan cuando se recorre un pico máximo de la señal y la correlación de la wavelet.

$$\boxed{CWT: \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt}$$

La CWT se puede interpretar como FILTRADOS ya que convoluciona una señal de entrada $x(t)$ por la wavelet $\psi(t)$

RELACIÓN MULTIESCALA
→ ventana de tiempo que se ADAPTA.
- bajas frecuencias: wavelet ancha s grande
- altas frecuencias: wavelet pequeña s pequeño

Es muy bueno para identificar picos transitorios rápidos y componentes de baja frecuencia sostenidos.

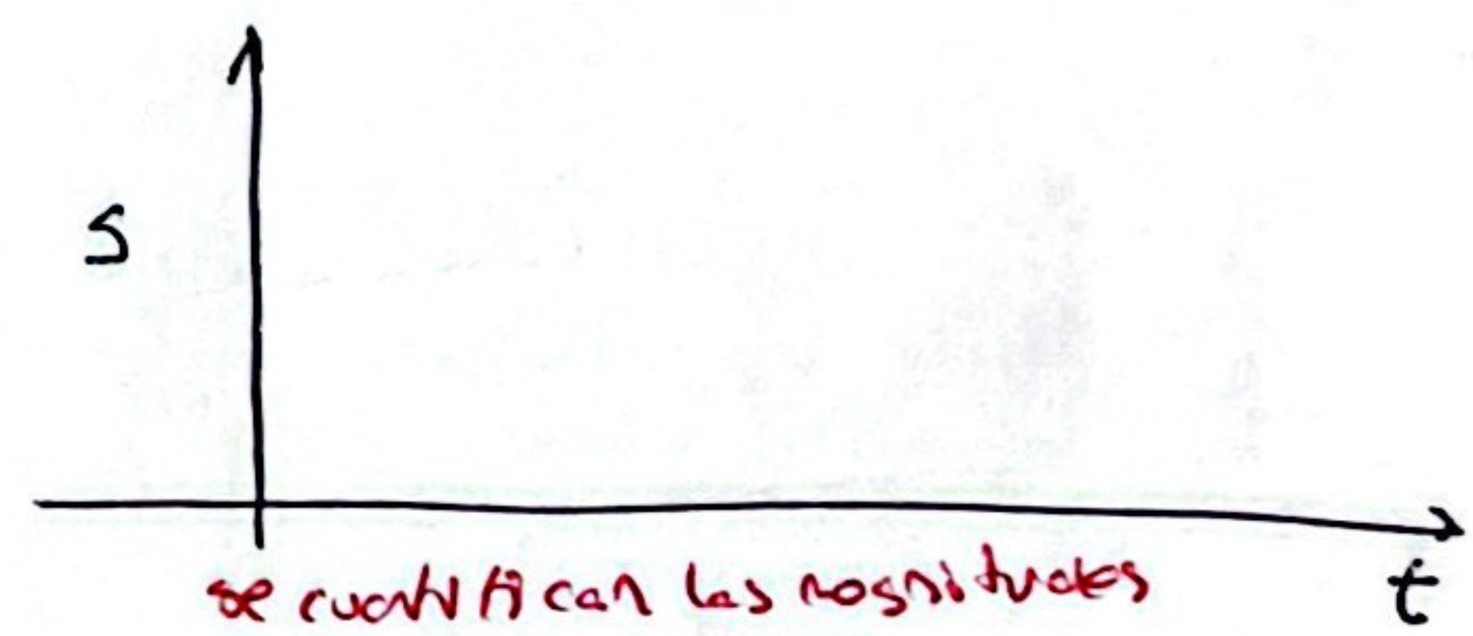
Existen muchos tipos de wavelets
- Morlet,
- Haar,
- Daubechies.

La elección de la wavelet depende de la naturaleza de la señal.

ESCALOGRAMA: representación visual de la CWT
Imagen 2D que muestra la energía distribuida de una señal de 2 variables.

$$\boxed{|W(\tau, s)|^2}$$

τ → tiempo. s → escala.



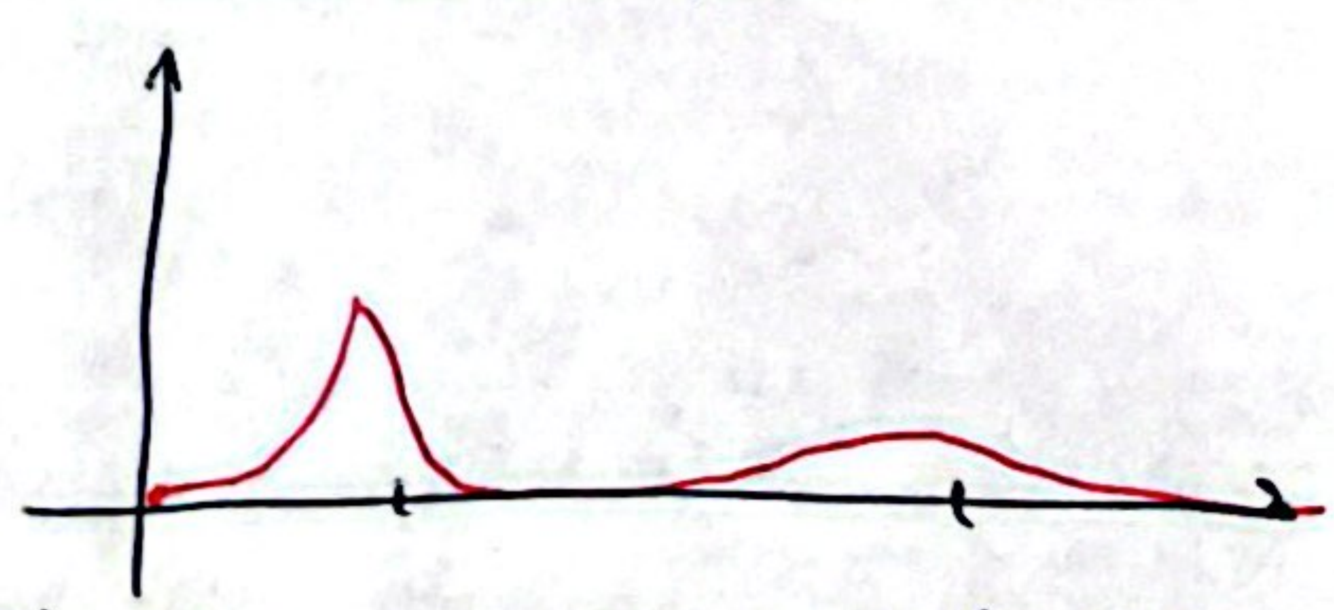
se cuantifican las magnitudes en COLORES

Cada color corresponde a una magnitud

Generalmente colores oscuros o intensos → gran módulo (escala)

Colores suaves o degradados → bajo módulo (escala)

Si recortamos una tira vemos:



Esto debería coincidir con las frecuencias de colores intensos.