Calculus

Mirek Nguyen

Contents

1 Limita

1.1 Limita s nekonečnem v podílu

- platí pro $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{x^2-1}{x^3+1}) = \frac{mensi}{vetsi} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{-x^4+x}{4+x-2x^4}) = \frac{stejny}{stejny} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{x^{11}-x^5}{1-x^{11}}) = \frac{stejny}{stejny} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{2x^4-3x+5}{1-x^3}) = \frac{vetsi}{mensi} = \frac{2*\infty}{-1} = -\infty$$

1.2 Asymptoty racionálních funkcí

- počítají se v krajních bodech $D(f)$

1. Definiční obor
2. Limita dané funkce (pomocí nul. bodu)
3. Do jakého ∞ se blíží
   - $zprava^{+}$ nebo $zleva^{-}$ (vybrat si)
   - je to důkaz, že je asymptotou
4. Vypočítat šikmou asymptotu typu $y = kx + q$

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-6}{x+2}$$

Podmínky: $D(f) = \mathbb{R}$

$$-2 = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$$

Důkaz

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{\frac{3x^2+5x-6}{x+2}}{x} = \frac{12-10-6}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -4 * \frac{1}{0^+}$$
$$= -4 * \infty = -\infty$$
$$\Rightarrow x = -2$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2+5x-6}{x+2}}{x} = \frac{3x^2+5x-6}{x*(x-2)} = \frac{3x^2+5x-6}{x^2-2x} = 3$$

1.3 L'Hospitalovo pravidlo

Pravidlo: $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 = ||\frac{0}{0}||$$

nebo

$$\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty = \text{jmenovatel je } \infty$$

1. Dosadím x_0 do rovnice
2. Vyjde mi $\frac{0}{0} \to$ zderivuju a dosadím hodnoty

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x+4}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{2-x}$$

2 Derivace

2.1 Derivace složené funkce

$$f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

2.1.1 Derivace složené funkce - příklady

$$\begin{aligned}
\sqrt{6x+7}' &= f'(g(x)) * g'(x) \\
&= \sqrt{g(x)}' * g'(x) \\
&= \frac{1}{2 * \sqrt{g(x)}} * g'(x) \\
&= \frac{1}{2 * \sqrt{6x+7}} * (6x+7)' \\
&= \frac{3}{\sqrt{6x+7}}
\end{aligned}$$

2.2 Tečna a normála

1. Dopočítat souřadnici pro tečný bod
2. Derivace směrnice tečny a normály
   - zderivuju celou (zadanou) rovnici
3. Dosadit směrnici do rovnice
4. Převést do tvaru rovnice

$$\begin{aligned}
y &= mx + b && \text{m je směrnice} \\
t : y - y_t &= k_n * (x - x_t) && \text{rovnice tečny} \\
n : y - y_t &= k_t * (x - x_t) && \text{rovnice normály} \\
k_t &= f'(x) && \text{tečna} \\
k_n &= -\frac{1}{f'(x)} && \text{normála}
\end{aligned}$$

2.2.1 Derivace složené funkce - příklady

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce v bodě T

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4 - x^2 \\
T &= [-1; ?] = [x_t; y_t]
\end{aligned}$$

$$y_t : f(-1) = (4 - x^2)' = 3 \rightarrow T[-1;3]$$

$$\begin{aligned} k_t &= f'(x) = (4 - x^2)' = -2x \\ &= f'(-1) = -2 * (-1) = 2 \\ n_t &= -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rovnice tečny} : y - y_t &= k_t * (x - x_t) \\ y - 3 &= 2 * (x - (-1)) \\ &=> 2x - y + 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rovnice normály} : y - y_t &= k_n * (x - x_t) \\ y - 3 &= -\frac{1}{2} * (x + 2) \\ &=> x + 2y - 5 = 0 \end{aligned}$$

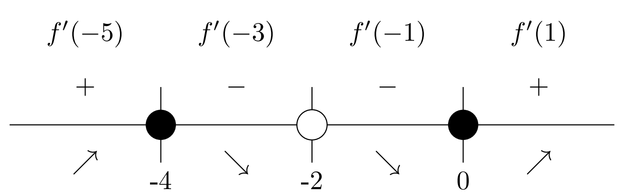
2.3 Monotonie

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body - znaménko $\frac{+}{-}$
4. Intervaly, uzavřenost nul. bodů
   - rostoucí
   - klesající

2.3.1 Monotonie - příklady

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{x * (x+4)}{(x+2)^2}$$



rostoucí na $(\infty; -4\rangle$ a $(0; \infty)$
klesající na $\langle -4; -2)$ a $(-2; 0\rangle$

2.4 Lokální extrémy

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body
   (a) dosadit do derivace
   (b) znaménko
4. pouze v nul. bodech jsou extrémy
   - může jich být více
   - ostré lokální maximu, minimum

2.4.1 Lokální extrémy - příklady

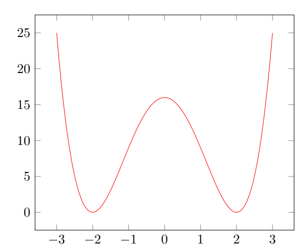
$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \tag{1}$$

Podmínky: $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 16 = 4x * (x^2 - 4) = 0$$

$$\text{nulové body} \left| \begin{array}{rl} 4x = 0 & x_1 \rightarrow \ \ 0 \\ x^2 - 4 = 0 & x_2 \rightarrow \pm 2 \end{array} \right|$$

ostré lokální maximum v $x = 0$
ostré lokální minimum v $x = -2$
ostré lokální minimum v $x = 2$



$f'(-3)$		$f'(-1)$		$f'(1)$		$f'(3)$
-		+		-		+
$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

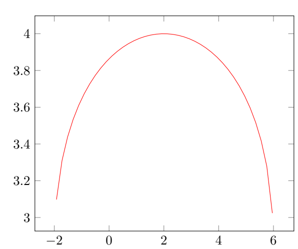
2.5 Globální (absolutní) extrémy

1. Definiční obor (může být zadán na intervalu)
2. Derivace
3. Nulové body derivace $f'(x) = 0$
   (a) vypočítat
   (b) vyjde konkrétní výsledek
   (c) musí být v interavalu D(f)
4. K nul. bodům D(f) přidáme hodnotu z $f'(x) = 0$
5. Do funkce f(x) zadáváme hodnoty x z nul. bodů

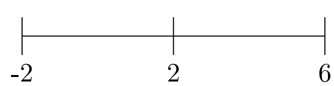
2.5.1 Globální extrémy - příklady

$$f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2+x}}{2 * \sqrt{2+x} * \sqrt{6-x}} = 0 \\ &= \sqrt{6-x} - \sqrt{2+x} = 0 \\ x &= 2 \in \langle -2; 6 \rangle \end{aligned}$$

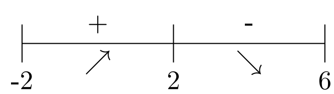


a) dosadím nulové body do funkce



$\nearrow$	$f(-2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{6-(-2)} = \sqrt{8}$	neostré absolutní minimum
$\searrow$	$f(2) = \sqrt{2+2} + \sqrt{6-2)} = 4$	ostré absolutní minimum
$\nearrow$	$f(6) = \sqrt{2+6} + \sqrt{6-6)} = \sqrt{8}$	neostré absolutní minimum

b) v případě, že mi vychází nevyčíslitelná hodnota



2.6 Konvexita, konkávita

1. Definiční obor
2. 1. derivace a 2. derivace
3. Nulové body
   - podezřelé z inflexe (mění se zde znaménko)
   - zkontrolovat, zda leží v D(f)
4. Znaménko nulových bodů
   - $\cup$ konvexní (+)
   - $\cap$ konkávní (-)
5. Interval konvexity, konkávity
6. Inflexe - inflexní body
   - změna konvexity, konkávity
   - definovaná, spojitá v bodě
   - $I_1[x_1; y_1]$ a $I_2[x_2; y_2]$

2.6.1 Konvexita, konkávita - příklady

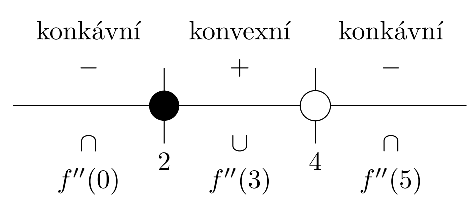
$$f(x) = -\frac{x^4}{12} + x^3 - 4x^2 - 10x + 210$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

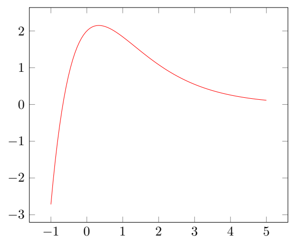
$$f'(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x - 10$$

$$f''(x) = -(x^3 - 6x + 9) = -(x - 4) * (x - 2)$$

$$\text{nulové body} \left| \begin{array}{ll} x - 4 = 0 & x_1 \rightarrow 4 \\ x - 2 = 0 & x_2 \rightarrow 2 \end{array} \right|$$



Konvexní na $\langle 2; 4 \rangle$
Konkávní na $(-\infty; 2\rangle$ a $\langle 4; \infty)$
Inflexe v $x = 2$ a $x = 4$
$I_1[2; f(2)]$ a $I_2[4; f(4)]$


2
1
0
−1
−2
−3
−1
0
1
2
3
4
5

3 Integrace

3.1 Určitý integrál pomocí přímé metody

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F'(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{3}$$

1. Převést na primitivní funkci
   - rozdělit zlomek na dva (o stejném jmenovateli)
2. Integrace (abych se zbavil $F'(x) \to$ negace)
3. Dosadit $\to$ budu mít 2 funkce
4. Odečíst

3.1.1 Určitý integrál pomocí přímé metody - příklady

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{2x+3}{5x}\,dx &= \int_1^e \Big(\frac{2x}{5x} + \frac{3}{5x}\Big)\,dx = \int_1^e \Big(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{1}{x}\Big)\,dx \\
&= \Big[\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} * \ln x\Big]_1^e = \Big(\frac{2}{5}e + \frac{3}{5}\ln e\Big) - \Big(\frac{2}{5} * 1 + \frac{3}{5}\ln 1\Big) = \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \Big(\frac{2}{5}e + \frac{3}{5}\Big) - \Big(\frac{2}{5} + 0\Big) \\
&= \frac{2}{5}e + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}e + \frac{1}{5} \\
&= \frac{2e+1}{5}
\end{aligned}$$

3.2 Určitý integrál pomocí substituce

- pro složené funkce

$$\int_a^b f(g(x)) * g'(x)\,dx = \begin{vmatrix} g(x) = t & a \to g(a) \\ g'(x)\,dx = dt & b \to g(b) \end{vmatrix} =$$

$$\text{I. způsob} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\text{II. způsob} = \int_?^? f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_?^? =$$

$$= \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

zde existuje mez, vrátím substituci

3.3 Diferenciální rovnice

1. Převést na formu y=...
2. Přepsat y $\rightarrow \frac{dy}{dx}$
3. Vynásobím L a P rovnici ”dx”

$$
\begin{aligned}
y' = f(x) * g(x) = \frac{dy}{dx} \\
y' = \frac{dy}{dx}
\end{aligned}
$$