

# Calculus

Mirek Nguyen

## Contents

<b>1</b>	<b>Limita</b>	<b>2</b>
1.1	Limita s nekonečnem v podílu . . . . .	2
1.2	Asymptoty racionálních funkcí . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Derivace</b>	<b>3</b>
2.1	Derivace složené funkce . . . . .	3
2.2	Tečna a normála . . . . .	3
2.3	Monotonie . . . . .	3
2.3.1	Monotonie - příklady . . . . .	4
2.4	Lokální extrémy . . . . .	4
2.4.1	Lokální extrémy - příklady . . . . .	4
2.5	Globální (absolutní) extrémy . . . . .	5
2.6	Konvexita, konkávita . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Integrace</b>	<b>6</b>
3.1	Určitý integrál pomocí přímé metody . . . . .	6
3.2	Určitý integrál pomocí substituce . . . . .	6
3.3	Diferenciální rovnice . . . . .	6

# 1 Limita

## 1.1 Limita s nekonečnem v podílu

- platí pro  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}\right) = \frac{\textit{mensi}}{\textit{vetsi}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{-x^4 + x}{4 + x - 2x^4}\right) = \frac{\textit{stejný}}{\textit{stejný}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x^{11} - x^5}{1 - x^{11}}\right) = \frac{\textit{stejný}}{\textit{stejný}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2x^4 - 3x + 5}{1 - x^3}\right) = \frac{\textit{vetsi}}{\textit{mensi}} = \frac{2 * \infty}{-1} = -\infty$$

## 1.2 Asymptoty racionálních funkcí

- počítají se v krajních bodech  $D(f)$

1. Definiční obor
2. Limita dané funkce (pomocí nul. bodu)
3. Do jakého  $\infty$  se blíží
  - $\textit{zprava}^+$  nebo  $\textit{zleva}^-$  (vybrat si)
  - je to důkaz, že je asymptotou
4. Vypočítat šikmou asymptotu typu  $y = kx + q$

## 2 Derivace

### 2.1 Derivace složené funkce

$$f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{6x+7}' &= f'(g(x)) * g'(x) \\ &= \sqrt{g(x)}' * g'(x) \\ &= \frac{1}{2 * \sqrt{g(x)}} * g'(x) \\ &= \frac{1}{2 * \sqrt{6x+7}} * (6x+7)' \\ &= \frac{3}{\sqrt{6x+7}}\end{aligned}$$

### 2.2 Tečna a normála

1. Dopočítat souřadnici pro tečný bod
2. Derivace směrnice tečny a normály
  - zderivuju celou (zadanou) rovnici
3. Dosadit směrnici do rovnice
4. Převést do tvaru rovnice

$y = mx + b$	m je směrnice
$t : y - y_t = k_n * (x - x_t)$	rovnice tečny
$n : y - y_t = k_t * (x - x_t)$	rovnice normály
$k_t = f'(x)$	tečna
$k_n = -\frac{1}{f'(x)}$	normála

### 2.3 Monotonie

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body - znaménko  $\pm$
4. Intervaly, uzavřenost nul. bodů
  - rostoucí
  - klesající

### 2.3.1 Monotonie - příklady

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{x * (x+4)}{(x+2)^2}$$

rostoucí na  $(-\infty; -4)$  a  $(0; \infty)$   
klesající na  $(-4; -2)$  a  $(-2; 0)$

## 2.4 Lokální extrémy

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body
  - (a) dosadit do derivace
  - (b) znaménko
4. pouze v nul. bodech jsou extrémy
  - může jich být více
  - ostré lokální maximum, minimum

### 2.4.1 Lokální extrémy - příklady

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \tag{1}$$

---

Podmínky:  $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 16 = 4x * (x^2 - 4) = 0$$

$$\text{nulové body} \left| \begin{array}{ll} 4x = 0 & x_1 \rightarrow 0 \\ x^2 - 4 = 0 & x_2 \rightarrow \pm 2 \end{array} \right|$$

ostré lokální maximum v  $x = 0$   
ostré lokální minimum v  $x = -2$   
ostré lokální minimum v  $x = 2$

## 2.5 Globální (absolutní) extrémy

1. Definiční obor (může být zadán na intervalu)
2. Derivace
3. Nulové body derivace  $f'(x) = 0$ 
  - (a) vypočítat
  - (b) vyjde konkrétní výsledek
  - (c) musí být v intervalu  $D(f)$
4. K nul. bodům  $D(f)$  přidáme hodnotu z  $f'(x) = 0$
5. Do funkce  $f(x)$  zadáváme hodnoty  $x$  z nul. bodů

$$f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} \quad (2)$$

---

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2+x}}{2 * \sqrt{2+x} * \sqrt{6-x}} = 0 \\ &= \sqrt{6-x} - \sqrt{2+x} = 0 \\ x &= 2 \in \langle -2; 6 \rangle \end{aligned}$$

## 2.6 Konvexita, konkávita

1. Definiční obor
2. 1. derivace a 2. derivace
3. Nulové body
  - podezřelé z inflexe (mění se zde znaménko)
  - zkontrolovat, zda leží v  $D(f)$
4. Znaménko nulových bodů
  - $\cup$  konvexní (+)
  - $\cap$  konkávní (-)
5. Interval konvexity, konkávity
6. Inflexe - inflexní body
  - změna konvexity, konkávity
  - definovaná, spojitá v bodě
  - $I_1[x_1; y_1]$

### 3 Integrace

#### 3.1 Určitý integrál pomocí přímé metody

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F'(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (3)$$

1. Převést na primitivní funkci
  - rozdělit zlomek na dva (o stejném jmenovateli)
2. Integrace (abych se zbavil  $F'(x) \rightarrow$  negace)
3. Dosadit  $\rightarrow$  budu mít 2 funkce
4. Odečíst

#### 3.2 Určitý integrál pomocí substituce

- pro složené funkce

$$\int_a^b f(g(x)) * g'(x) dx = \left| \begin{array}{ll} g(x) = t & a \rightarrow g(a) \\ g'(x) dx = dt & b \rightarrow g(b) \end{array} \right| =$$
$$\text{I. způsob} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \left[ F(t) \right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$
$$\text{II. způsob} = \int_{?}^{?} f(t) dt = \left[ F(t) \right]_{?}^{?} =$$
$$= \left[ F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

zde existuje mez, vrátím substituci

#### 3.3 Diferenciální rovnice

1. Převést na formu  $y=...$
2. Přepsat  $y \rightarrow \frac{dy}{dx}$
3. Vynásobím L a P rovnici "dx"

$$y' = f(x) * g(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$y' = \frac{dy}{dx}$$