Calculus

Mirek Nguyen

Contents

1 Limita **2**
1.1 Limita s nekonečnem v podílu 2
1.2 Asymptoty racionálních funkcí 2

2 Derivace **3**
2.1 Derivace složené funkce 3
2.2 Tečna a normála 3
2.3 Monotonie 3
2.3.1 Monotonie - příklady 4
2.4 Lokální extrémy 4
2.4.1 Lokální extrémy - příklady 4
2.5 Globální (absolutní) extrémy 5
2.6 Konvexita, konkávita 5

3 Integrace **7**
3.1 Určitý integrál pomocí přímé metody 7
3.2 Určitý integrál pomocí substituce 7
3.3 Diferenciální rovnice 7

1 Limita

1.1 Limita s nekonečnem v podílu

- platí pro $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{x^2-1}{x^3+1}) = \frac{mensi}{vetsi} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{-x^4+x}{4+x-2x^4}) = \frac{stejny}{stejny} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{x^{11}-x^5}{1-x^{11}}) = \frac{stejny}{stejny} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{2x^4-3x+5}{1-x^3}) = \frac{vetsi}{mensi} = \frac{2*\infty}{-1} = -\infty$$

1.2 Asymptoty racionálních funkcí

- počítají se v krajních bodech $D(f)$

1. Definiční obor
2. Limita dané funkce (pomocí nul. bodu)
3. Do jakého ∞ se blíží
   - $zprava^+$ nebo $zleva^-$ (vybrat si)
   - je to důkaz, že je asymptotou
4. Vypočítat šikmou asymptotu typu $y = kx + q$

2 Derivace

2.1 Derivace složené funkce

$$f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{6x+7}' &= f'(g(x)) * g'(x) \\
&= \sqrt{g(x)}' * g'(x) \\
&= \frac{1}{2 * \sqrt{g(x)}} * g'(x) \\
&= \frac{1}{2 * \sqrt{6x+7}} * (6x+7)' \\
&= \frac{3}{\sqrt{6x+7}}
\end{aligned}$$

2.2 Tečna a normála

1. Dopočítat souřadnici pro tečný bod
2. Derivace směrnice tečny a normály
   - zderivuju celou (zadanou) rovnici
3. Dosadit směrnici do rovnice
4. Převést do tvaru rovnice

$$\begin{aligned}
y &= mx + b && \text{m je směrnice} \\
t : y - y_t &= k_n * (x - x_t) && \text{rovnice tečny} \\
n : y - y_t &= k_t * (x - x_t) && \text{rovnice normály} \\
k_t &= f'(x) && \text{tečna} \\
k_n &= -\frac{1}{f'(x)} && \text{normála}
\end{aligned}$$

2.3 Monotonie

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body - znaménko $\pm$
4. Intervaly, uzavřenost nul. bodů
   - rostoucí
   - klesající

2.3.1 Monotonie - příklady

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{x*(x+4)}{(x+2)^2}$$

rostoucí na $(\infty; -4\rangle$ a $(0; \infty)$
klesající na $\langle -4; -2)$ a $(-2; 0\rangle$

2.4 Lokální extrémy

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body
   (a) dosadit do derivace
   (b) znaménko
4. pouze v nul. bodech jsou extrémy
   - může jich být více
   - ostré lokální maximu, minimum

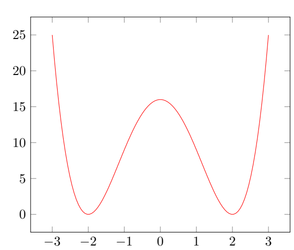
2.4.1 Lokální extrémy - příklady

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \tag{1}$$

Podmínky: $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 16 = 4x*(x^2-4) = 0$$
$$\text{nulové body} \begin{vmatrix} 4x = 0 & x_1 \rightarrow \ \ 0 \\ x^2 - 4 = 0 & x_2 \rightarrow \pm 2 \end{vmatrix}$$

ostré lokální maximum v $x = 0$
ostré lokální minimum v $x = -2$
ostré lokální minimum v $x = 2$

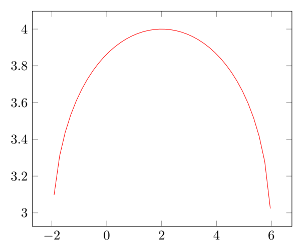


2.5 Globální (absolutní) extrémy

1. Definiční obor (může být zadán na intervalu)
2. Derivace
3. Nulové body derivace $f'(x) = 0$
   (a) vypočítat
   (b) vyjde konkrétní výsledek
   (c) musí být v interavalu D(f)
4. K nul. bodům D(f) přidáme hodnotu z $f'(x) = 0$
5. Do funkce f(x) zadáváme hodnoty x z nul. bodů

$$f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2+x}}{2 * \sqrt{2+x} * \sqrt{6-x}} = 0 \\ &= \sqrt{6-x} - \sqrt{2+x} = 0 \\ x &= 2 \in \langle -2; 6 \rangle \end{aligned}$$



2.6 Konvexita, konkávita

1. Definiční obor
2. 1. derivace a 2. derivace
3. Nulové body
   - podezřelé z inflexe (mění se zde znaménko)
   - zkontrolovat, zda leží v D(f)
4. Znaménko nulových bodů
   - $\cup$ konvexní (+)
   - $\cap$ konkávní (-)
5. Interval konvexity, konkávity

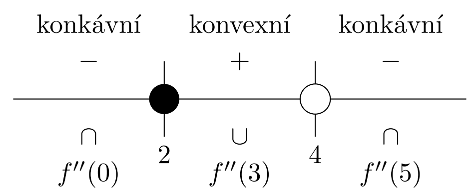
6. Inflexe - inflexní body

- změna konvexity, konkávity
- definovaná, spojitá v bodě
- $I_1[x_1; y_1]$ a $I_2[x_2; y_2]$

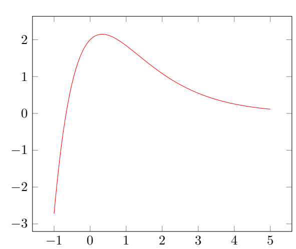
$$f(x) = -\frac{x^4}{12} + x^3 - 4x^2 - 10x + 210$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x - 10$$
$$f''(x) = -(x^3 - 6x + 9) = -(x-4) * (x-2)$$
$$\text{nulové body} \left| \begin{array}{ll} x - 4 = 0 & x_1 \rightarrow 4 \\ x - 2 = 0 & x_2 \rightarrow 2 \end{array} \right|$$



Konvexní na $\langle 2; 4\rangle$
Konkávní na $(-\infty; 2\rangle$ a $\langle 4; \infty)$
Inflexe v $x = 2$ a $x = 4$
$I_1[2; f(2)]$ a $I_2[4; f(4)]$



3 Integrace

3.1 Určitý integrál pomocí přímé metody

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F'(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{3}$$

1. Převést na primitivní funkci
   - rozdělit zlomek na dva (o stejném jmenovateli)
2. Integrace (abych se zbavil $F'(x) \to$ negace)
3. Dosadit $\to$ budu mít 2 funkce
4. Odečíst

3.2 Určitý integrál pomocí substituce

- pro složené funkce

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x)) * g'(x)\,dx = &\left| \begin{matrix} g(x) = t & a \to g(a) \\ g'(x)\,dx = \ dt & b \to g(b) \end{matrix} \right| = \\
\text{I. způsob} = &\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)) \\
\text{II. způsob} = &\int_?^? f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_?^? = \\
= &\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \\
&\text{zde existuje mez, vrátím substituci}
\end{aligned}$$

3.3 Diferenciální rovnice

1. Převést na formu y=...
2. Přepsat y $\to \frac{dy}{dx}$
3. Vynásobím L a P rovnici ”dx”

$$\begin{aligned}
y' = f(x) * g(x) &= \frac{dy}{dx} \\
y' &= \frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$