

Calculus

Mirek Nguyen

Contents

1	Limita	2
1.1	Limita s nekonečnem v podílu	2
1.2	Asymptoty racionálních funkcí	2
2	Derivace	3
2.1	Derivace složené funkce	3
2.2	Tečna a normála	3
2.3	Monotonie	3
2.3.1	Monotonie - příklady	4
2.4	Lokální extrémy	4
2.4.1	Lokální extrémy - příklady	4
2.5	Globální (absolutní) extrémy	5
2.6	Konvexita, konkávita	6
3	Integrace	7
3.1	Určitý integrál pomocí přímé metody	7
3.2	Určitý integrál pomocí substituce	7
3.3	Diferenciální rovnice	7

1 Limita

1.1 Limita s nekonečnem v podílu

- platí pro $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}\right) = \frac{\textit{mensi}}{\textit{vetsi}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{-x^4 + x}{4 + x - 2x^4}\right) = \frac{\textit{stejný}}{\textit{stejný}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{x^{11} - x^5}{1 - x^{11}}\right) = \frac{\textit{stejný}}{\textit{stejný}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2x^4 - 3x + 5}{1 - x^3}\right) = \frac{\textit{vetsi}}{\textit{mensi}} = \frac{2 * \infty}{-1} = -\infty$$

1.2 Asymptoty racionálních funkcí

- počítají se v krajních bodech $D(f)$

1. Definiční obor
2. Limita dané funkce (pomocí nul. bodu)
3. Do jakého ∞ se blíží
 - \textit{zprava}^+ nebo \textit{zleva}^- (vybrat si)
 - je to důkaz, že je asymptotou
4. Vypočítat šikmou asymptotu typu $y = kx + q$

2 Derivace

2.1 Derivace složené funkce

$$f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{6x+7}' &= f'(g(x)) * g'(x) \\ &= \sqrt{g(x)}' * g'(x) \\ &= \frac{1}{2 * \sqrt{g(x)}} * g'(x) \\ &= \frac{1}{2 * \sqrt{6x+7}} * (6x+7)' \\ &= \frac{3}{\sqrt{6x+7}}\end{aligned}$$

2.2 Tečna a normála

1. Dopočítat souřadnici pro tečný bod
2. Derivace směrnice tečny a normály
 - zderivuju celou (zadanou) rovnici
3. Dosadit směrnici do rovnice
4. Převést do tvaru rovnice

$y = mx + b$	m je směrnice
$t : y - y_t = k_n * (x - x_t)$	rovnice tečny
$n : y - y_t = k_t * (x - x_t)$	rovnice normály
$k_t = f'(x)$	tečna
$k_n = -\frac{1}{f'(x)}$	normála

2.3 Monotonie

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body - znaménko \pm
4. Intervaly, uzavřenost nul. bodů
 - rostoucí
 - klesající

2.3.1 Monotonie - příklady

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{x * (x+4)}{(x+2)^2}$$

rostoucí na $(-\infty; -4)$ a $(0; \infty)$
klesající na $(-4; -2)$ a $(-2; 0)$

2.4 Lokální extrémy

1. Definiční obor
2. Derivace
3. Nulové body
 - (a) dosadit do derivace
 - (b) znaménko
4. pouze v nul. bodech jsou extrémy
 - může jich být více
 - ostré lokální maximum, minimum

2.4.1 Lokální extrémy - příklady

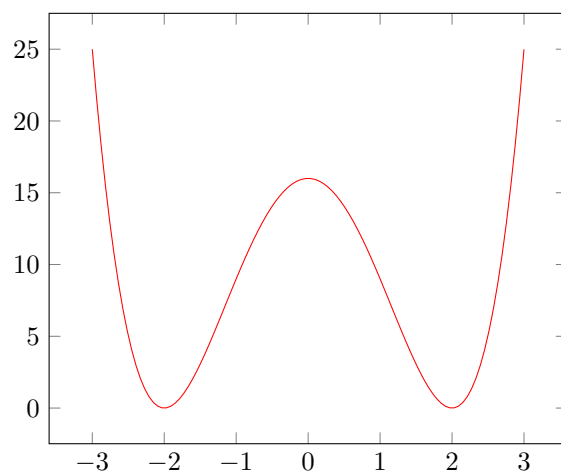
$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \tag{1}$$

Podmínky: $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 16 = 4x * (x^2 - 4) = 0$$

$$\text{nulové body} \left| \begin{array}{ll} 4x = 0 & x_1 \rightarrow 0 \\ x^2 - 4 = 0 & x_2 \rightarrow \pm 2 \end{array} \right|$$

ostré lokální maximum v $x = 0$
ostré lokální minimum v $x = -2$
ostré lokální minimum v $x = 2$

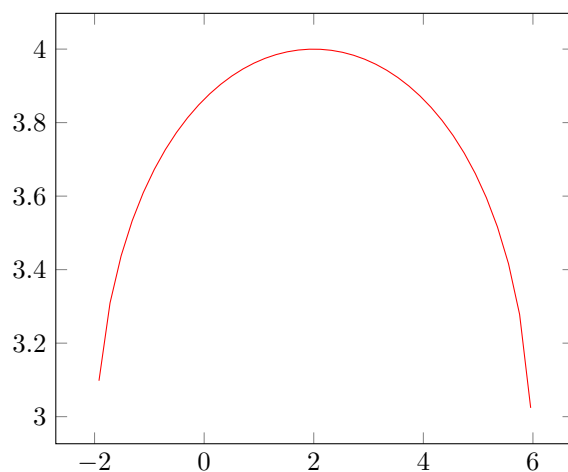


2.5 Globální (absolutní) extrémy

1. Definiční obor (může být zadán na intervalu)
2. Derivace
3. Nulové body derivace $f'(x) = 0$
 - (a) vypočítat
 - (b) vyjde konkrétní výsledek
 - (c) musí být v intervalu $D(f)$
4. K nul. bodům $D(f)$ přidáme hodnotu z $f'(x) = 0$
5. Do funkce $f(x)$ zadáváme hodnoty x z nul. bodů

$$f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2+x}}{2 * \sqrt{2+x} * \sqrt{6-x}} = 0 \\
 &= \sqrt{6-x} - \sqrt{2+x} = 0 \\
 x &= 2 \in \langle -2; 6 \rangle
 \end{aligned}$$



2.6 Konvexita, konkávita

1. Definiční obor
2. 1. derivace a 2. derivace
3. Nulové body
 - podezřelé z inflexe (mění se zde znaménko)
 - zkontrolovat, zda leží v $D(f)$
4. Znaménko nulových bodů
 - \cup konvexní (+)
 - \cap konkávní (-)
5. Interval konvexity, konkávity
6. Inflexe - inflexní body
 - změna konvexity, konkávity
 - definovaná, spojitá v bodě
 - $I_1[x_1; y_1]$

3 Integrace

3.1 Určitý integrál pomocí přímé metody

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F'(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (3)$$

1. Převést na primitivní funkci
 - rozdělit zlomek na dva (o stejném jmenovateli)
2. Integrace (abych se zbavil $F'(x) \rightarrow$ negace)
3. Dosadit \rightarrow budu mít 2 funkce
4. Odečíst

3.2 Určitý integrál pomocí substituce

- pro složené funkce

$$\int_a^b f(g(x)) * g'(x) dx = \left| \begin{array}{ll} g(x) = t & a \rightarrow g(a) \\ g'(x) dx = dt & b \rightarrow g(b) \end{array} \right| =$$
$$\text{I. způsob} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \left[F(t) \right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$
$$\text{II. způsob} = \int_{?}^{?} f(t) dt = \left[F(t) \right]_{?}^{?} =$$
$$= \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

zde existuje mez, vrátím substituci

3.3 Diferenciální rovnice

1. Převést na formu $y=...$
2. Přepsat $y \rightarrow \frac{dy}{dx}$
3. Vynásobím L a P rovnici "dx"

$$y' = f(x) * g(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$y' = \frac{dy}{dx}$$