

Отчет по практикуму на ЭВМ
Султанов Миргурбан Миркалиб оглы, 411 группа

1 Постановка задачи.

Для краевой задачи в единичном квадрате

$$-\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = \alpha \quad (1)$$

2 Метод решения. Построение схемы.

Для простоты решения задачи возьмем $\alpha = 0$.

Положим $h = \frac{1}{N}$, $x_k = kh$, $y_m = mh$, $f_{km} = f(x_k, y_m)$. Введем сетку:

$$w_h = \{(x_k, y_m, k, m = \overline{0, N})\}$$

$$w'_h = \{(x_k, y_m, k, m = \overline{1, N-1})\}$$

$$w_h^* = w_h / w'_h$$

Далее построим разностную схему данной задачи.

$$-\frac{u_{k-1,m} - 2u_{k,m} + u_{k+1,m}}{h^2} - \frac{u_{k,m-1} - 2u_{k,m} + u_{k,m+1}}{h^2} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1} \quad (2)$$

$$u_{k,m} = 0 \text{ на } w_h^*$$

Обозначим

$$-\frac{u_{k-1,m} - 2u_{k,m} + u_{k+1,m}}{h^2} = \Lambda_1 u_{k,m}^n$$

$$-\frac{u_{k,m-1} - 2u_{k,m} + u_{k,m+1}}{h^2} = \Lambda_2 u_{k,m}^n$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

В итоге уравнение (2) будет иметь следующий вид:

$$\Lambda_1 u_{k,m}^n + \Lambda_2 u_{k,m}^n = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1} \quad (3)$$

Будем решать построенную разностную задачу с помощью метода переменных направлений. Рассмотрим двухслойную разностную схему:

$$\frac{u_{k,m}^n - u_{k,m}^{n-1}}{\tau} + \Lambda u_{k,m}^n = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$u_{k,m}^n = 0$$

Так же рассмотрим двухслойную разностную схему переменных направлений:

$$\frac{u_{k,m}^{n-1/2} - u_{k,m}^{n-1}}{0.5\tau} + \Lambda_1 u_{k,m}^{n-1/2} + \Lambda_2 u_{k,m}^{n-1} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\frac{u_{k,m}^n - u_{k,m}^{n-1/2}}{0.5\tau} + \Lambda_1 u_{k,m}^{n-1/2} + \Lambda_2 u_{k,m}^n = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Чтобы решить уравнение (5), умножим его на $-\tau/2$ и перепишем в следующем виде:

$$\frac{\tau}{2 * h^2} u_{k-1,m}^{n-1/2} - (1 + \frac{\tau}{h^2}) u_{k,m}^{n-1/2} + \frac{\tau}{2 * h^2} u_{k+1,m}^{n-1/2} = F_{k,m}^{n-1/2} \quad (7)$$

Где $F_{k,m}^{n-1/2} = \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u_{k,m}^{n-1} - f_{k,m}) - u_{k,m}^{n-1}$. Так же краевые условия $u_{0,m}^{n-1/2} = 0$, $u_{N,m}^{n-1/2} = 0$

Разностная задача (7) распадается на $N1$ независимых трехточечных разностных схем, каждая из которых решается отдельно методом прогонки при каждом m . После того, как нашли все неизвестные $u_{k,m}^{n-1/2}$, переносим их в разностное уравнение (7), так же преобразовываем его.

$$\frac{\tau}{2 * h^2} u_{k-1,m}^n - (1 + \frac{\tau}{h^2}) u_{k,m}^n + \frac{\tau}{2 * h^2} u_{k+1,m}^n = F_{k,m}^n \quad (8)$$

Где $F_{k,m}^n = \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u_{k,m}^{n-1/2} - f_{k,m}) - u_{k,m}^{n-1/2}$. С другими краевыми условиями $u_{0,m}^n = 0$, $u_{N,m}^n = 0$

Которое так же распадается на $N - 1$ краевую задачу, которые решаются методом прогонки. В нашем случае для решения задачи берем $\tau = \frac{h}{2 \sin(\pi h)}$

3 Реализация задачи и результаты.

Зададим функцию $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

Тогда точное решение задачи будет иметь вид $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

График функции

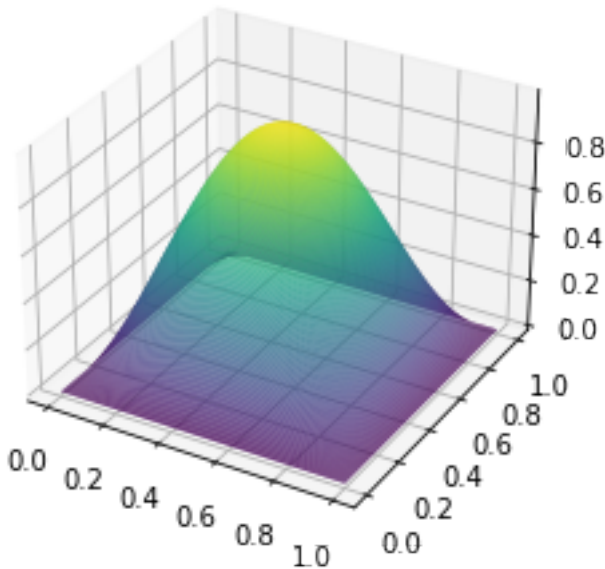
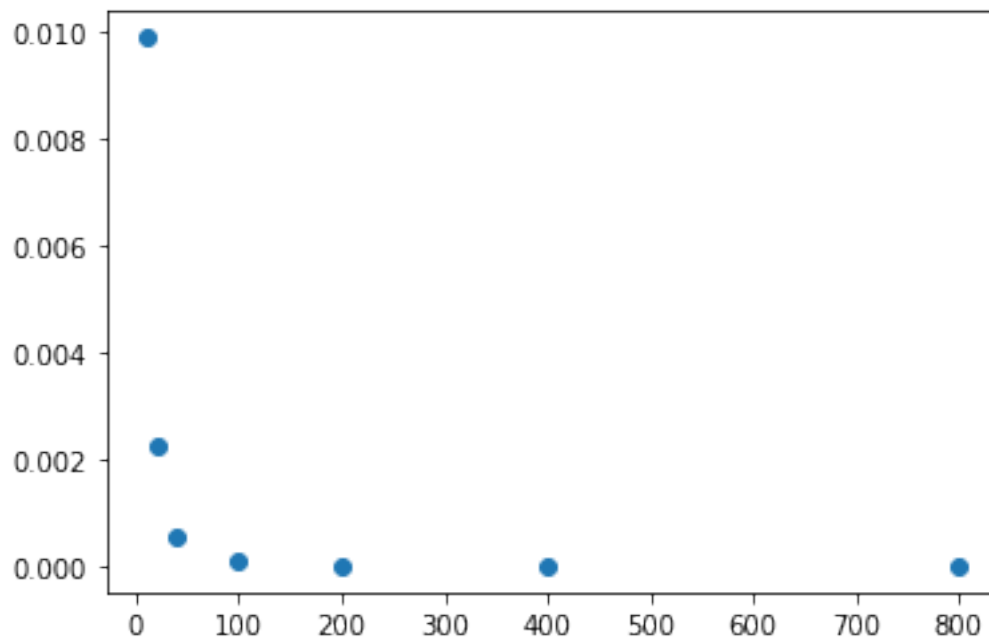


График погрешностей



10 0.00990802

20 0.00226586

40 0.000540039

100 8.38998e-05

200 2.0768e-05

400 5.17859e-06

800 1.54984e-06

Как мы можем видеть, погрешность убывает в 4 раза с увеличением количества точек в два раза