Отчет по практикуму на ЭВМ
Султанов Миргурбан Миркалиб оглы, 411 группа

1 Постановка задачи.

Для краевой задачи в единичном квадрате

$$-\triangle u = f, u \mid_{\partial\Omega} = \alpha \tag{1}$$

2 Метод решения. Построение схемы.

Для простоты решения задачи возьмем $\alpha = 0$.
Положим $h = \frac{1}{N}, \quad x_k = kh, \quad y_k = mh, \quad f_{km} = f(x_k, y_m)$. Введем сетку:
$w_h = \left\{(x_k, y_m, k, m = \overline{0, N})\right\}$
$w'_h = \left\{(x_k, y_m, k, m = \overline{1, N-1})\right\}$
$w_h* = w_h / w'_h$
Далее построим разностную схему данной задачи.

$$-\frac{u_{k-1,m} - 2u_{k,m} + u_{k+1,m}}{h^2} - \frac{u_{k,m-1} - 2u_{k,m} + u_{k,m+1}}{h^2} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1} \tag{2}$$

$u_{k,m} = 0$ на w_h*
Обозначим
$-\frac{u_{k-1,m} - 2u_{k,m} + u_{k+1,m}}{h^2} = \Lambda_1 u^n_{k,m}$
$-\frac{u_{k,m-1} - 2u_{k,m} + u_{k,m+1}}{h^2} = \Lambda_2 u^n_{k,m}$
$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$
В итоге уравнение (2) будет иметь следующий вид:

$$\Lambda_1 u^n_{k,m} + \Lambda_2 u^n_{k,m} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1} \tag{3}$$

Будем решать построенную разностную задачу с помощью метода переменных направлений.Рассмотрим двухслойную разностную схему:

$$\frac{u^n_{k,m} - u^{n-1}_{k,m}}{\tau} + \Lambda u^n_{k,m} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{4}$$

$$u^n_{k,m} = 0$$

Так же рассмотрим двухслойную разностную схему переменных направлений:

$$\frac{u^{n-1/2}_{k,m} - u^{n-1}_{k,m}}{0.5\tau} + \Lambda_1 u^{n-1/2}_{k,m} + \Lambda_2 u^{n-1}_{k,m} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5}$$

$$\frac{u^n_{k,m} - u^{n-1/2}_{k,m}}{0.5\tau} + \Lambda_1 u^{n-1/2}_{k,m} + \Lambda_2 u^n_{k,m} = f_{k,m}, \quad k, m = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{6}$$

Чтобы решить уравнение (5), умножим его на $-\tau/2$ и перепишем в следующем виде:

$$\frac{\tau}{2 * h^2} u^{n-1/2}_{k-1,m} - (1 + \frac{\tau}{h^2}) u^{n-1/2}_{k,m} + \frac{\tau}{2 * h^2} u^{n-1/2}_{k+1,m} = F^{n-1/2}_{k,m} \tag{7}$$

Где $F^{n-1/2}_{k,m} = \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 u^{n-1}_{k,m} - f_{k,m}) - u^{n-1}_{k,m}$. Так же краевые условия $u^{n-1/2}_{0,m} = 0, \qquad u^{n-1/2}_{N,m} = 0$

Разностная задача (7) распадается на $N1$ независимых трехточечных разностных схем, каждая из которых решается отдельно методом прогонки при каждом m. После того, как нашли все неизвестные $u_{k,m}^{n-1/2}$, переносим их в разностное уравнение (7), так же преобразовываем его.

$$\frac{\tau}{2*h^2}u_{k-1,m}^n - (1 + \frac{\tau}{h^2})u_{k,m}^n + \frac{\tau}{2*h^2}u_{k+1,m}^n = F_{k,m}^n \tag{8}$$

Где $F_{k,m}^n = \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 u_{k,m}^{n-1/2} - f_{k,m}) - u_{k,m}^{n-1/2}$. С другими краевыми условиями $u_{0,m}^n = 0, \qquad u_{N,m}^n = 0$

Которое так же распадается на N 1 краевую задачу, которые решаются методом прогонки. В нашем случае для решения задачи берем $\tau = \frac{h}{2sin(\pi h)}$

3 Реализация задачи и результаты.

Зададим функцию $f(x, y) = 2(x - x^2 + y - y^2)$

Тогда точное решение задачи будет иметь вид $u = x(1 - x)y(1 - y)$

При N = 100 максиамльное отклонение равно 2.98681e-06