# Hoe lang duurt een potje memory?

*Hoe lang duurt een potje en wat is de optimale strategie? Wie geen goed geheugen heeft maar wel van wiskunde houdt kan zijn hart ophalen met het nadenken over memory.*

Dit jaar hielp ik mee met de koningsspelen op  de school van mijn zoontje. Hij zit in groep 1. Alle ouders die hielpen verzamelden net na de bel van half 9 en kregen te horen wie welk spelletje ging begeleiden. Ik was ingedeeld bij koningsdagmemory op het digibord. Bij de koningsspelen dacht ik meer aan zaklopen of blikken omgooien, maar we zouden kunnen wisselen na de pauze. Bij nader inzien was het toch niet de slechtste plek. Bij het touwtrekken op stenen vielen regelmatig slachtoffers, en het geheel duurde voor iedereen net wat te lang. Rustig op een stoel kunnen zitten was ook wel fijn.

**Varianten van memory**

De meeste mensen weten wel hoe memory werkt, maar toen ik me ging verdiepen in het onderwerp bleken er toch nog enkele varianten te zijn. Er liggen kaartjes met de plaatjes naar beneden op tafel, of in dit geval, staan ze op het digibord. Twee spelers mogen om de beurt twee kaartjes omdraaien. Als je twee dezelfde kaartjes omdraait heb je een punt. Als ze niet hetzelfde zijn draai je de kaarten weer om. Ik dacht altijd dat je dan door mocht gaan, maar in deze versie ging de beurt dan gelijk naar de andere speler. Ook las ik in een paper over de optimale strategie bij memory dat je ook kunt kiezen om één of geen kaart om te draaien. Daarover later meer. Het spel op het digibord had 20 kaarten en je moest er altijd 2 omdraaien. Hieronder zie je een voorbeeld met twee kaarten omgedraaid.


*Figuur 1: Koningsspelen op het digibord. Bron: teacher.gynzy.com*

**Strategieën**

Aan  mij de taak om het memory enigszins in goede banen te leiden,  maar dat ging grotendeels al vanzelf. Het digibord houdt de score bij. Af en toe werd er wel heel fanatiek op de kaartjes gedrukt en was niet meer duidelijk wie nu team 1 of team 2 was, of sloot een nieuw kind halverwege aan, maar dat maakt voor de pret niet uit.  Zo nu en dan dwaalden m’n gedachten wat af. Hoe lang zou het duren voordat het spelletje klaar was, als je willekeurig kaartjes omdraaide zonder ze te onthouden? Dit leek de strategie van sommige kleuters. En hoe lang duurt een potje als je een perfect geheugen hebt?

**De optimale strategie**

Ik ben uiteraard niet de enige die hierover na heeft gedacht. Zo hebben Velleman en Warrington (2013) berekend hoe lang een potje éénpersoons-memory duurt als je een perfect geheugen hebt. Zonder tegenstander is de optimale strategie om in zo min mogelijk beurten alle kaartjes weggespeeld te hebben duidelijk. Je draait een nieuwe kaart om. Als je het bijbehorende kaartje al eerder hebt omgedraaid, dan draai je die opnieuw om. Als dat niet zo is, dan draai je nog een nieuw kaartje om. In 19 pagina's laten ze zien dat als er n kaarten op tafel liggen (dus n/2 paren), dit naar verwachting 0,8n beurten kost.

Zwick en Paterson (1993) hebben juist gekeken naar de optimale strategie als er wel een tegenstander is en je ook mag kiezen om maar één of geen kaart om te draaien. Soms kan het verstandig zijn om je tegenstander geen nieuwe informatie te geven die hij kan gebruiken in de volgende beurt. Ze optimaliseren de kans om het volgende punt te scoren, en dus niet de kans om het spelletje te winnen. Waarom kan het verstandig zijn om maar één of geen kaart om te draaien?

Stel er liggen nog 4 kaarten die allemaal nog niet eerder omgedraaid zijn. Je bent aan de beurt en draait twee kaarten om. De kans dat twee dezelfde zijn is 1/3. Als dat niet het geval is kan de tegenstander de volgende beurt met zekerheid een match maken, en heeft dus 2/3 kans om een punt te maken. Ook als je maar 1 kaart omdraait is dit gunstig voor de tegenstander. Hij draait vervolgens een andere kaart om, die met 1/3 kans een match is met de bekende kaart. Maar vervolgens mag hij, als dat niet het geval is, nog een kaart omdraaien. Er liggen dan nog twee onbekende kaarten waarvan één gelijk is aan de eerste kaar. Dit brengt de totale kans op 2/3 (1/3+2/3*1/2). Het is dus het beste om geen kaart om te draaien. Maar als je tegenstander dat vervolgens ook niet doet, dan heb je een soort patstelling. Daar wordt het ook niet leuker van.

**Kansrekening en Simulaties**

We simuleren de twee situaties die hierboven beschreven zijn. Dat geeft naast het verwachte aantal beurten ook inzicht in de variatie. We voegen aan het willekeurig omdraaien en de optimale strategie nog een derde mogelijkheid toe: het alleen onthouden van de vorige beurt. Dat is voor mij het maximaal haalbare, mits ik goed geslapen heb.

***Willekeurig omdraaien***

Stel er liggen nog n kaarten. Je draait de eerste om. Er zijn nog n-1 kaarten over. De kans dat het tweede kaartje dat je omdraait de goede is is dus 1/(n-1). Vervolgens zijn er nog n-2 kaarten over en is de kans 1/(n-3), etc. Het verwachte aantal benodigde beurten is dus (n-1) + (n-3) +… 3 +1= 1/4n^2.

***Kort geheugen (alleen de vorige beurt)***

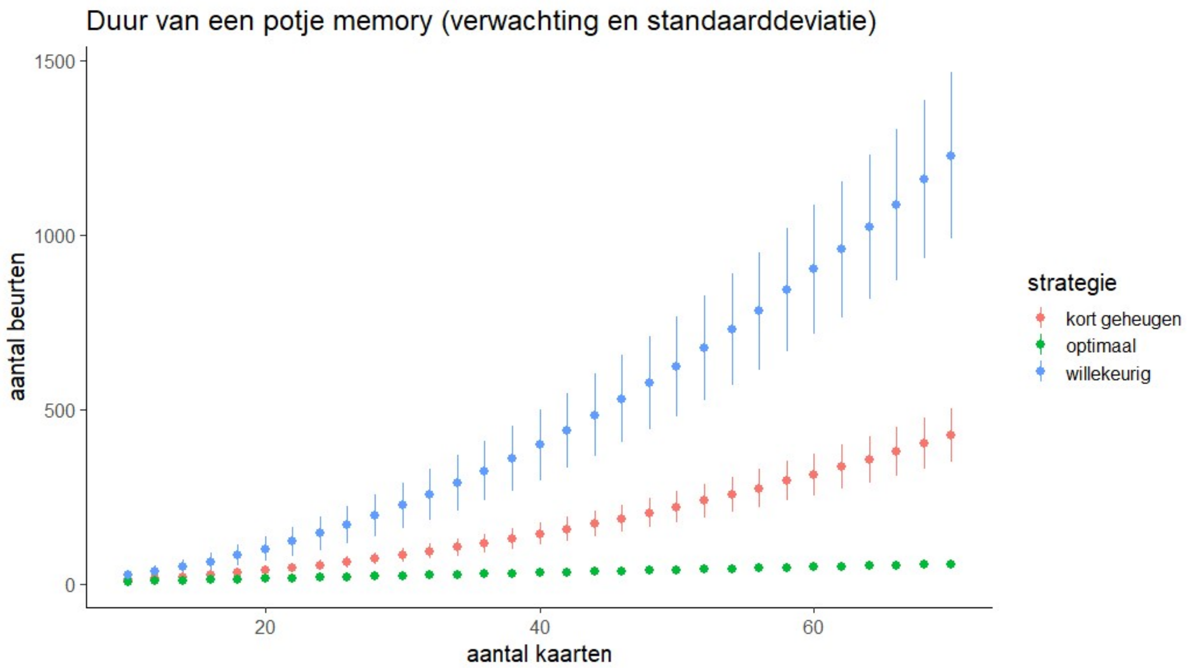
Als alle kaarten nog niet eerder omgedraaid zijn, omdat het de eerste beurt is, of omdat er in de vorige beurt twee kaarten gematcht zijn is de kans op twee dezelfde kaarten weer 1/(n-1). Als er wel 2 (verschillende) kaarten bekend zijn, en je draait een nieuw kaartje om, is de kans dat die gelijk is aan een van de twee bekende 2/(n-2) en kun je het bijbehorende kaartje omdraaien. Als dat niet het geval is, dan draai je een willekeurig tweede kaartje om (niet die al bekend zijn). De kans dat dat hetzelfde kaartje is is 1/(n-3).

***Optimale strategie***

Bij het simuleren van de twee situaties hierboven is gebruik gemaakt van de beschreven kansen. De optimale strategie is gesimuleerd door een rij fictieve kaartjes met getallen te genereren, een voor een om te draaien en bij te houden welke bekend zijn. De resultaten sloten aan bij de resultaten uit het paper van Velleman en Warrington.

**Resultaten**

In de figuur hieronder zien we hoe lang een potje gemiddeld duurt met de bijbehorende standaarddeviatie, afhankelijk van het aantal kaartjes en de strategie en het geheugen. Logischerwijs duurt het willekeurig omdraaien het langste (naar verwachting 1/4 n^2 beurten) en de optimale strategie het kortst (0,8n). Wat verder opvalt is dat de variatie in het aantal beurten het grootst  is bij het willekeurig omdraaien, maar bij de optimale strategie zo klein is dat die niet eens zichtbaar is in deze figuur. Als er 20 kaartjes liggen is het verwachte aantal beurten ongeveer 16 en de standaarddeviatie kleiner dan 1. Bij 20 kaarten kun je het verwachte aantal beurten van 100 bij willekeurig omdraaien drastisch laten dalen naar ongeveer 45 als je alleen de vorige beurt onthoudt.




*Figuur 2: de verwachte duur plus/min de standaarddeviatie van een potje memory, afhankelijk van het aantal kaarten en de strategie.*

**Wiskundig denken**

Nu is de grote vraag natuurlijk, hoe lang deden de kleuters erover? Dat heb ik helaas niet bijgehouden. Gemiste kans. Dus ik zal volgend jaar weer moeten helpen en vragen of ik weer bij het digibord mag staan. Een van de conclusies die ik trek uit dit onderzoek is dat memory veel mogelijkheden biedt om wiskunde en wiskundig denken te stimuleren en illustreren. Van eenvoudige tot complexe kansrekening en combinatoriek tot speltheorie, programmeren en simulatie. Persoonlijk kan ik concluderen dat ik nu meer tijd heb besteed aan het nadenken over memory dan aan het spelen ervan.

Velleman, D. J., & Warrington, G. S. (2013). What to expect in a game of memory. *The American Mathematical Monthly*, *120*(9), 787-805.

Zwick, U., & Paterson, M. S. (1993). The memory game. *Theoretical computer science*, *110*(1), 169-196.