f(p) fakultät physik

technische universität dortmund

4. Übungsblatt zum Vorkurs Physik - Lösungen

Wintersemester 2020/21
Für den 22.10.2020

Prof. Dr. Carsten Westphal
Prof. Dr. Jan Kierfeld

Aufgabe 1: Erstes Mal Taylor-Entwicklung

Gegeben ist $f(x) = \sqrt[3]{2x+2}, \quad x \geq -1$.

a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der Funktion f.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+2)^{1/3} \\ f'(x) &= \frac{1}{3}(2x+2)^{-2/3} \cdot 2 &&= \frac{2}{3}(2x+2)^{-2/3} \\ f''(x) &= \frac{2}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)(2x+2)^{-2/5} \cdot 2 &&= -\frac{8}{9}(2x+2)^{-2/5} \end{aligned}$$

b) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

$$T_2(x, x_0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

Funktionen auswerten:

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt[3]{8} = 2 \\ f'(3) &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^2 = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6} \\ f''(3) &= -\frac{8}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^5 = -\frac{8}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{36} \\ T_2(x, 3) &= 2 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2 \end{aligned}$$

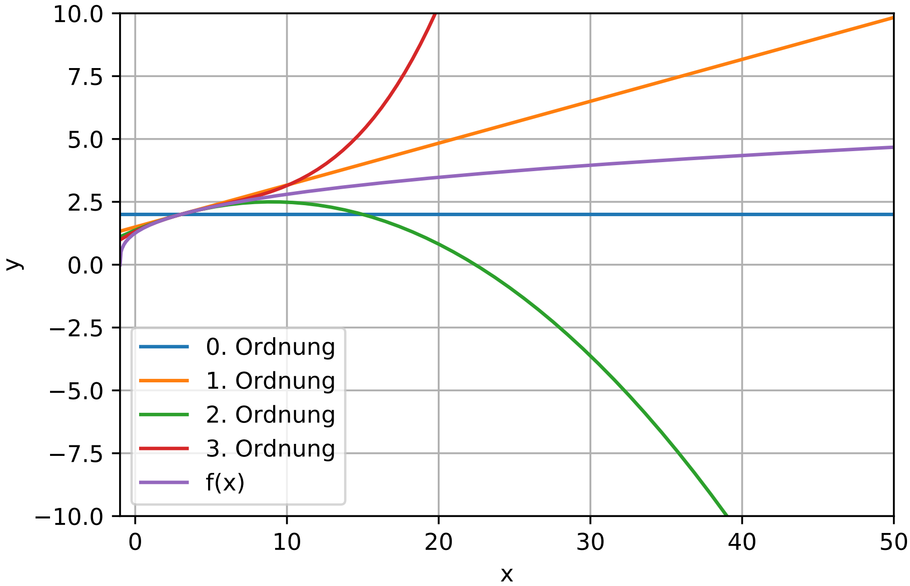


Abbildung 1: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

Aufgabe 2: Von Taylor-*Entwicklung* zu Taylor*reihe*

Berechnen Sie alle Ableitungen $f^{(n)}$ mit $n = 0, 1, 2, ...$ der Funktion f und geben Sie damit die Taylorreihe für f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an,

a) $f(x) = \sin(3x),\ x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sin(3x) \\
f'(x) &= 3 \cdot \cos(3x) = \sin(3x + \frac{\pi}{2}) \\
f''(x) &= 3^2 \cdot \sin(3x + 2\frac{\pi}{2}) \\
f^{(k)}(x) &= 3^k \sin(3x + k\frac{\pi}{2}) \\
f(x) = \sin(3x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k sin(k\frac{\pi}{2})}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = \sqrt{1+x},\ |x| \leq 1$.

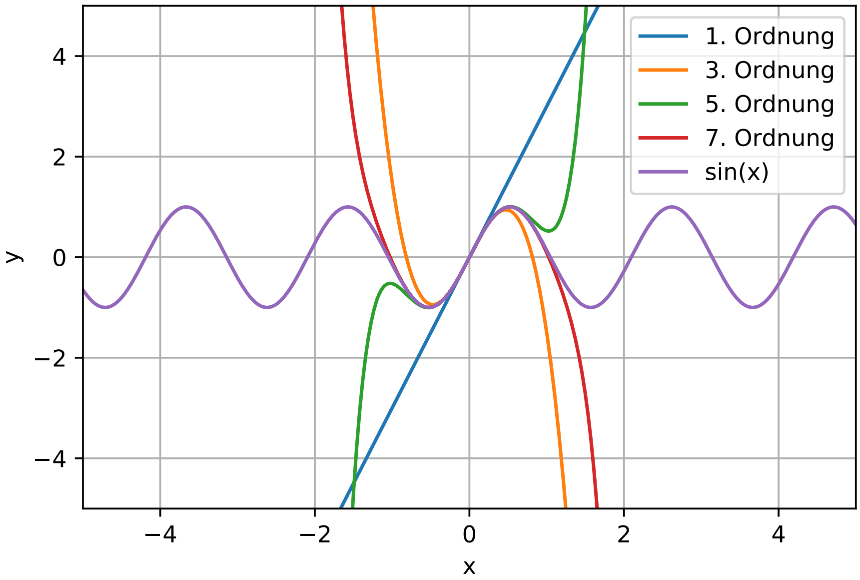


Abbildung 2: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2} \\
f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k} = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k} \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k
\end{aligned}
$$

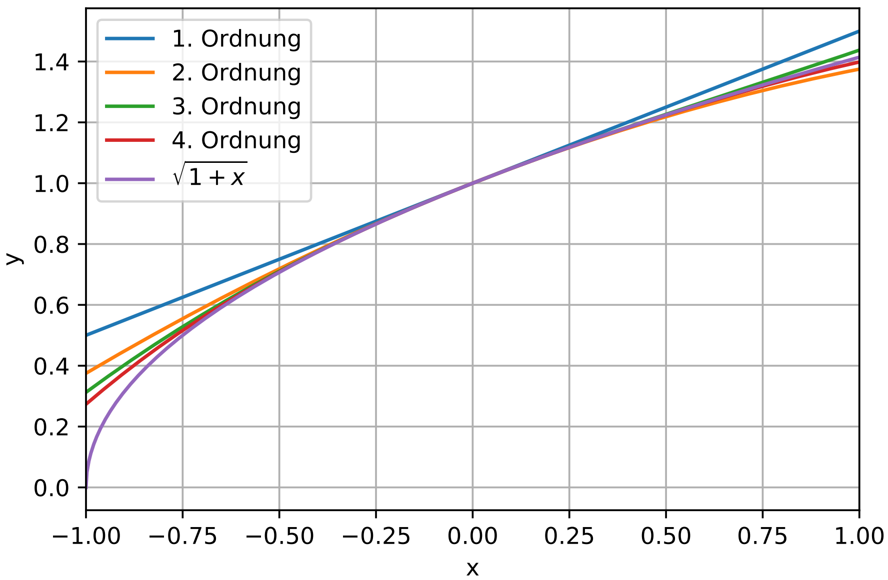


Abbildung 3: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

Aufgabe 3: Taylor-Entwicklung die Zweite

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f(x) = e^{\sin(x)}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Weg 1:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= e^{\sin(x)}, f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{\sin(x)} \cdot \cos(x), f'(0) = 1 \\
f''(x) &= (e^{\sin(x)} \cdot \cos^2(x)) + (e^{\sin(x)} \cdot (-\sin(x)), f'(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^{\sin(x)} \cdot \cos^3(x) + e^{\sin(x)} \cdot 2\cos(x)(-\sin(x)) + e^{\sin(x)} \cos(x) \cdot (-\sin(x)) + e^{\sin(x)}(-cos(x)), \\
f'''(0) &= 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$T_3(x,0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Weg 2:
Taylor-Reihe dritten Grades der e-Funktion bei $x_0 = 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
Taylor-Reihe dritten Grades des Sinus $x_0 = 0$: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 \\
&= 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{6} + \frac{x^6}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2\left(\frac{x^3}{6}\right) + 3x\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(\frac{x^3}{6}\right)^3\right) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{72} - \frac{x^9}{6^4} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

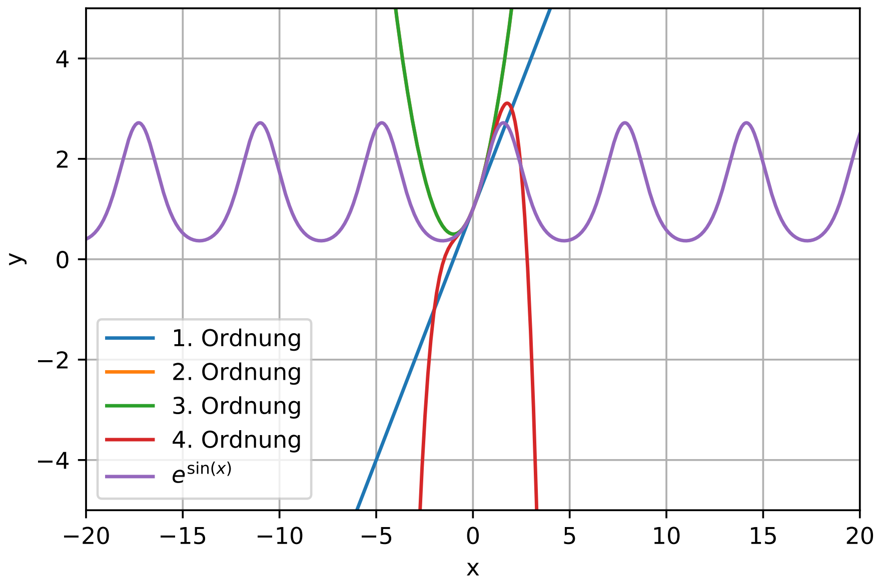


Abbildung 4: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

Aufgabe 4: Taylor-Entwicklung die Letzte

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion

a) * $f(x) = \sin(x)$ mit $x_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x), & f'(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(0) &= -1 \\
f^4(x) &= \sin(x), & f^4(0) &= 0 \\
f^5(x) &= \cos(x), & f^5(0) &= 1 \\
T_5(x,0) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = x\ln(x)$ mit $x_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x\ln(x), & f(1) &= 0 \\
f'(x) &= \ln(x) + 1, & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= \frac{1}{x}, & f'(0) &= 1 \\
f'''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f'''(0) &= -1 \\
T_3(x,1) &= (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3
\end{aligned}
$$

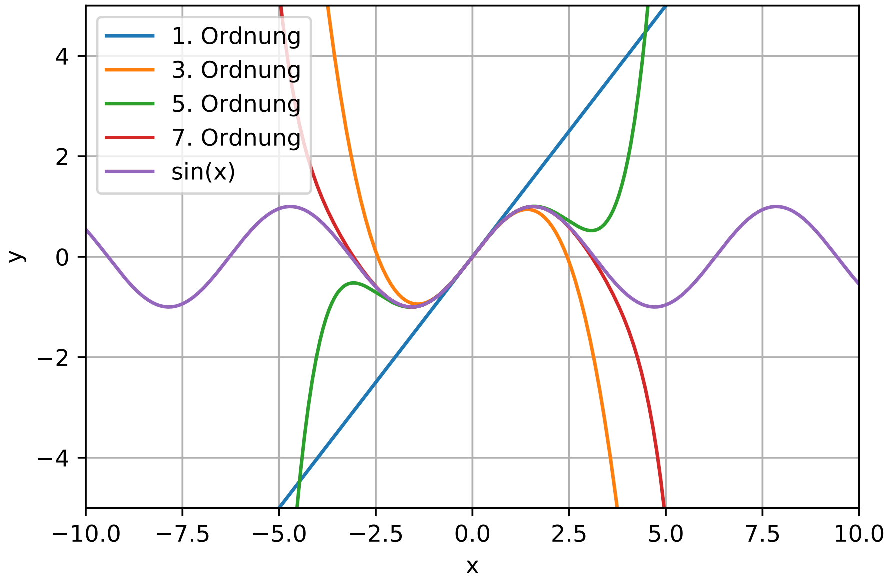


Abbildung 5: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

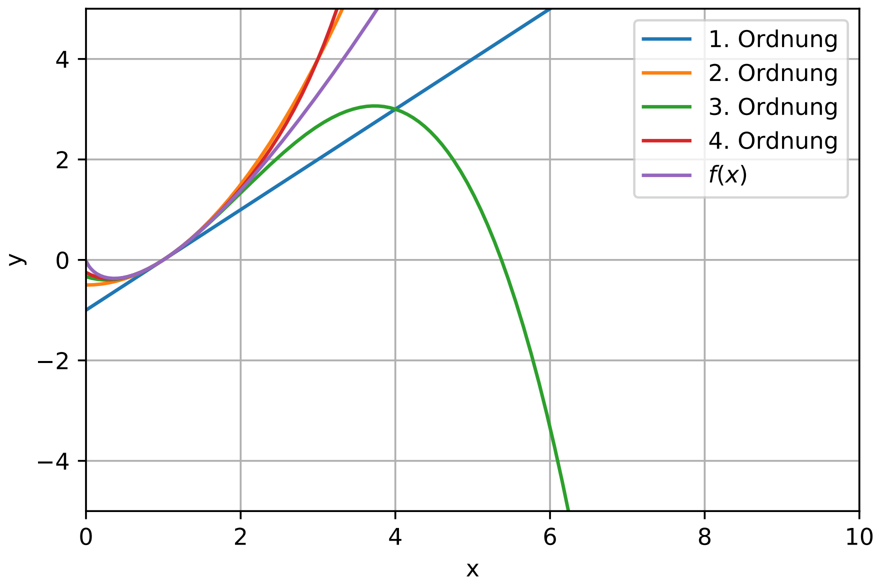


Abbildung 6: Taylor-Entwicklungen bis zur 3. Ordnung zur Funktion $\sqrt[3]{2x+2}$ mit $x \geq -1$.

Aufgabe 5: Kurvendiskussion

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.

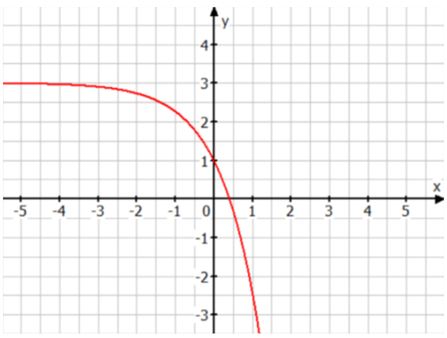
Bestimmung der Ableitungen: $f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$, $f''(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$ (immer größer Null)
Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^{-x} = 0| \cdot e^x \Leftrightarrow 2e^{3x} – 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln(0.5) = -0.231$
Da f“ $>$ 0 (linksgekrümmt), liegt ein Tiefpunkt vor: Tiefpunkt T(-0.231|2.52) .

b) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion f mit $f(x) = (x - 1) \cdot e^x$.

Bestimmung der Ableitungen: $f'(x) = e^x + (x - 1) \cdot e^x = (1 + x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x$, $f''(x) = e^x + x \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x$
Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$f''(0) = 1 > 0$, $f''(-2) = -e^{-2} < 0 \Rightarrow$ VZW von f von + nach - an der Stelle -1
Wendepunkt W(-1|-0.736)

Aufgabe 6: Und weil’s so schön war Kurvendiskussion

a) Die Funktion f hat das nebenstehende Schaubild und die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot e^x + b$ mit (a,$b \in \mathbb{R}$) mit der Nullstelle N mit $N = \ln(\frac{3}{2})$. Bestimmen Sie die Werte von a und b. Tipp: Betrachten Sie den Verlauf der Funktion.



Weg 1:
Betrachte Asymptotik des Graphen: mit $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow b = 3$.
Aus f(0) = 1 folgt a = -2.

Weg 2:
mit $f(0) = 1$ und $f(\ln(\frac{3}{2})) = 0$

$$
\begin{aligned}
&1 = a \cdot e^0 + b \\
&0 = a \cdot e^{\ln(\frac{3}{2})} + b \\
\Leftrightarrow\ &a = 1 - b \\
\Leftrightarrow\ &0 = (1 - b) \cdot \frac{3}{2} + b \\
\Leftrightarrow\ &b = 3 \\
\Leftrightarrow\ &a = 1 - 3 = -2
\end{aligned}
$$

b) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{1-x} + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{1+x}$. Geben Sie die waagrechte Asymptote der Funktion f an und bestimmen Sie die Stelle, an der f und g die gleiche Steigung haben.

Betrachte Verhalten für $+\infty$ und $-\infty \Rightarrow$ f(x) hat die waagrechte Asymptote y = 3.
Bestimmung der Ableitungen:
$f(x) = (1-x)^{-1} + 3$, $f'(x) = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$
$g(x) = -(1+x)^{-1}$, $g'(x) = (1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2}$
Ableitungen gleichsetzen:
$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow (1+x)^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow 2x = -2x \Leftrightarrow x = 0$