

Dispensa per il secondo compitino di Analisi II

Studenti vari

31 gennaio 2012

Indice

1	Successioni e Serie di Funzioni	1
1.1	Definizioni	1
1.2	Criteri di convergenza	1
1.2.1	Successioni	1
1.2.2	Serie	2
1.3	Convergenza Uniforme e Continuità	2
1.4	Convergenza Uniforme e Integrabilità	2
1.5	Convergenza Uniforme e Differenziabilità	2
1.6	Serie di potenze	3
1.6.1	Teoria	3
1.7	Come risolvere gli esercizi	4
1.7.1	Successioni	4
1.7.2	Serie	6
1.7.3	Serie di potenze	8
2	Intermezzo	8
2.1	Contrazioni in spazi metrici	8
2.2	Lipschitzianità	8
3	Equazioni differenziali ordinarie	9
3.1	Teoria	9
3.1.1	Esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni	9
3.1.2	Matrice wronskiana	11
3.2	Principali tipi di equazioni differenziali	11
3.2.1	Sistemi lineari omogenei	11
3.2.2	Sistemi lineari non omogenei	11
3.2.3	Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti	12
3.2.4	Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti	13
3.2.5	Equazioni di ordine n a coefficienti costanti	13
3.3	Risoluzione esercizi	13
3.3.1	Grafici delle soluzioni	13
3.3.2	Metodo di variazione delle costanti arbitrarie	14
3.3.3	Equazioni lineari	14
3.3.4	Equazione di Bernoulli	14
3.3.5	Equazione di Riccati	15
3.3.6	Variabili separabili	15
3.3.7	Un'altro tipo di equazioni omogenee	15
3.3.8	Equazioni lineari di ordine n	16
3.3.9	Oscillatori armonici	16
3.4	Equazioni differenziali esatte	17
3.4.1	Altre cose da trovare	17
4	Curve in \mathbb{R}^n	18
4.1	Definizioni principali	18

5	1-forme differenziali	19
5.0.1	Definizioni	19
5.0.2	Forme chiuse, forme esatte	19
5.0.3	Relazione tra 1-forme differenziali e campi vettoriali	20
5.0.4	Gauss Green	21
5.0.5	Rotore, gradiente, divergenza	21
5.0.6	Teorema di Stokes	22
6	Altro	22
6.1	Norme	22
6.2	Calcoli vari	23

1 Successioni e Serie di Funzioni

1.1 Definizioni

Definizione 1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un medesimo $D \subseteq \mathbb{R}$. $\{f_n\}$ **converge puntualmente** o semplicemente su $E \subseteq D$ se $\forall x \in E$, $\{f_n(x)\}$ converge in \mathbb{R} (o nel caso complesso \mathbb{C}). Chiamiamo funzione limite puntuale la funzione definita su E nel modo seguente:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E$$

Similmente, se $\forall x \in E \subseteq D$ la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in \mathbb{R} (o \mathbb{C}) allora diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in E . La funzione

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E$$

si dirà somma puntuale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Osservazione Utilizzando un'altra scrittura, la definizione di convergenza puntuale diviene:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definizione 2. Sia $\{f_n\}$ come sopra. Essa **converge uniformemente** su $E \subseteq \mathbb{R}$ alla funzione limite f se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Similmente diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq \mathbb{R}$ alla funzione limite $s(x)$ se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - s(x) \right| = 0$$

Osservazione Utilizzando un'altra scrittura, la definizione di convergenza uniforme diviene:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$$

1.2 Criteri di convergenza

1.2.1 Successioni

Teorema 1 (Condizione di Cauchy). Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori reali (o complessi). Allora $\{f_n\}$ converge uniformemente in E se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \quad \forall x \in E$ si ha che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme di una successione è quindi condizione **necessaria e sufficiente** per verificare il criterio di Cauchy.

Teorema 2. *Sia f_n una successione di funzioni definite su K compatto, $f_n \in \mathcal{C}(K)$; sia f_n convergente puntualmente a f , $f \in \mathcal{C}(K)$. Se*

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots$$

allora f_n converge a f uniformemente.

1.2.2 Serie

Teorema 3 (Criterio di Weierstrass). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni su E . Sia*

$$M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x)|$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente.

1.3 Convergenza Uniforme e Continuità

Teorema 4 (Successioni di funzioni continue). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue definite in E uniformemente convergenti a f . Allora f è continua.*

1.4 Convergenza Uniforme e Integrabilità

Teorema 5. *Sia f_n una successione di funzioni R -integrabili in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, uniformemente convergente a f in $[a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_a^b f$$

1.5 Convergenza Uniforme e Differenziabilità

Teorema 6. *Sia f_n una successione di funzioni differenziabili in $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che esista un $x_0 \in [a, b]$ per il quale la successione numerica $f_n(x_0)$ converga e che $f'_n(x)$ converga uniformemente in $[a, b]$. Allora f_n converge uniformemente in $[a, b]$ a una funzione f e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

1.6 Serie di potenze

1.6.1 Teoria

Definizione 3 (Serie di potenze). *Una serie di potenze è una serie di funzioni della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato, c_n è una successione di numeri reali e x una variabile reale.

E' sempre possibile ricondursi al caso $x_0 = 0$ con un opportuno cambio di variabili. L'insieme di convergenza di una serie è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converge. L'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un **intervallo**.

Teorema 7 (della convergenza semplice). *Data la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

poniamo

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} \quad e \quad R := \frac{1}{\alpha}$$

La serie di potenze converge se $|x| < R$ e non converge se $|x| > R$.

La definizione si può banalmente estendere in casi particolari:

$$\text{Se } \alpha = +\infty \quad \text{allora } R := 0$$

$$\text{Se } \alpha = 0 \quad \text{allora } R = +\infty$$

Definizione 4 (Raggio di convergenza). *R definito come sopra viene anche detto raggio di convergenza della serie.*

Teorema 8 (della convergenza uniforme). *Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x)^n$ converga per $|x| < r$. Poniamo:*

$$\forall t \in (-r, r) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[-r + \varepsilon, r - \varepsilon]$. Inoltre $f \in \mathcal{C}^\infty((-r, r))$

Si trova un'utile forma per il calcolo di ogni derivata di questa funzione (in $(-r, r)$). In particolare, la derivata di ordine k di f è uguale a

$$\forall x \in (-r, r) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! c_n}{(n-k)!} x^{n-k}$$

E ovviamente, in 0

$$f^{(k)}(0) = c_k k!$$

Definizione 5 (Serie di Taylor). *La serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ si chiama serie di Taylor di f .*

Condizione necessaria affinché la serie di Taylor di f converga in x è che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] = 0$$

1.7 Come risolvere gli esercizi

1.7.1 Successioni

Solitamente gli esercizi sulle successioni di funzioni richiedono, data la successione f_n , di studiarne la convergenza (puntuale e uniforme) in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ e, nel caso f_n non converga uniformemente in E , di trovarne gli intervalli di convergenza. Vediamo come procedere.

Dominio Data la successione f_n la prima cosa da fare è studiarne il dominio. Questo aiuterà poi a restringere l'insieme di convergenza uniforme. Ovviamente poiché le f_n dipendono anche dalla n si potranno avere diversi domini D_n in dipendenza da n . Ma poiché il dominio deve valere per tutte le funzioni f_n , $\forall n \in \mathbb{N}$, si avrà

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

Convergenza puntuale Per studiare la convergenza puntuale è sufficiente eseguire il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Eseguendo questo limite si potrà eventualmente notare come f_n converga puntualmente solo per alcuni valori di $x \in D$, restringendo così l'intervallo di convergenza a un insieme $B \subseteq D$ in cui f_n converge puntualmente alla funzione f .

Casi costanti Può succedere che per alcuni valori particolari di $x \in D \subseteq E$ si trovino dei casi costanti rispetto a n . Siano essi ad esempio $x_i \in D$, per i quali quindi si ha che $f_n(x_i) = k \quad \forall n$ ove $k \in \mathbb{R}$. In tal caso allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

allora ovviamente f_n converge puntualmente a k in x_i .

Convergenza uniforme Per studiare la convergenza uniforme si procede applicando la definizione di convergenza uniforme sull'insieme B di convergenza puntuale, ossia si procede verificando la seguente uguaglianza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Il calcolo dell'estremo superiore può non essere facile. Tuttavia se B è chiuso, e $f_n, f \in \mathcal{C}(B)$, per il teorema di Weierstrass la funzione $\varphi := |f_n - f|$ avrà un minimo e in particolare un massimo in B . Ovviamente questo massimo coincide con l'estremo superiore della medesima funzione. Sarà quindi sufficiente trovare il massimo di tale funzione, che potrà essere facilmente trovato studiando il segno della derivata prima.

Restrizione dell'insieme di convergenza uniforme Può accadere che f_n non converga uniformemente a f in B , insieme di convergenza puntuale, ossia che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$$

Sia ora x_m tale che $\sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in B} \varphi(x) = \varphi(x_m)$. Allora è possibile che restringendo anche di poco l'insieme B a un insieme $\overline{B} \subseteq B$, questo x_m non sia più contenuto in \overline{B} , e si abbia un nuovo punto di massimo \overline{x}_m di \overline{B} per cui

$$\sup_{x \in \overline{B}} |f_n(x) - f(x)| = \varphi(\overline{x}_m) \rightarrow 0$$

Allora si avrà che f_n converge uniformemente in \underline{B} .

Esempio Facciamo un piccolo esempio pratico: Sia

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n \quad \forall x \in I := [0, 1]$$

Studiamo prima di tutto la convergenza puntuale. Si ha che $f_n(0) = f_n(1) = 0 \forall n$, mentre se $0 < x < 1$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx(1 - x^2)^n = 0$$

poiché prevale l'esponenziale $(1 - x^2)^n := k^n$ ove $k < 1$. Quindi f_n converge puntualmente alla funzione f tale che $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$. Studiamo la convergenza uniforme: dobbiamo calcolare la quantità

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x)$$

poiché $f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$ e $f_n(x) \geq 0 \forall x \in [0, 1]$.

Studiamo la derivata prima f'_n per trovare il massimo in I .

$$f'_n(x) = n(1 - x^2)^{n-1}(1 - (1 + 2n)x^2) \geq 0 \quad \wedge \quad x \in I$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 2n}}$$

posto

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n}}$$

avremo

$$\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = f(x_m) \rightarrow +\infty$$

Quindi f_n non convergerà uniformemente in I . Tuttavia possiamo notare come $x_m \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, e come $f_n(x)$ sia decrescente in $[x_m, 1]$. Poiché $x_m \rightarrow 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists n_0$: $\forall n > n_0$ $x_m < \delta$, quindi nell'insieme $[\delta, 1] := \bar{I} \subseteq I$ il massimo di f_n non sarà più in corrispondenza di x_m . Inoltre poiché $f_n(x)$ è decrescente in $[x_m, 1]$, a maggior ragione $f_n(x)$ decresce in \bar{I} .

Quindi si avrà che

$$\sup_{x \in [\delta, 1]} f_n(x) = f_n(\delta) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

. Quindi f_n convergerà uniformemente in $\bar{I} = [\delta, 1]$

1.7.2 Serie

Osservazione Per risolvere gli esercizi sulle serie bisogna comunque tenere conto che quanto visto per le successioni continua a valere ancora per le serie. Infatti presa una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ essa può essere vista come

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$$

ove F_n è la successione delle somme parziali

$$F_k := \sum_{n=1}^k f_n$$

Solitamente gli esercizi sulle serie di funzioni richiedono, data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, di studiarne la convergenza (puntuale e uniforme) in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ e, nel caso $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non converga uniformemente in E , di trovarne gli intervalli di convergenza. Vediamo come procedere.

Dominio La prima cosa da fare è studiarne il dominio della serie. Questo aiuterà poi a restringere l'insieme di convergenza uniforme. Ovviamente poiché varrà lo stesso ragionamento fatto per le successioni per le f_n ; si avrà quindi il dominio D

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

Convergenza puntuale Per studiare la convergenza puntuale è sufficiente eseguire il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$$

ove F_k successione delle somme parziali, ossia per studiare la convergenza puntuale è sufficiente lo studio della convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in D$. Effettuando questo studio si potrà eventualmente notare come $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga puntualmente solo per alcuni valori di $x \in D$, restringendo così l'intervallo di convergenza a un insieme $B \subseteq D$ in cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente alla funzione s .

Criteri di convergenza per serie numeriche Poiché lo studio della convergenza puntuale richiede lo studio di serie numeriche è utile ricordare alcuni criteri di convergenza delle serie numeriche.

Convergenza assoluta

Definizione 6. Si dice che una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Teorema 9. Se una serie numerica converge assolutamente allora converge.

Criterio della radice

Teorema 10. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numerica definitivamente positiva. Esista α tale che

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

allora:

- Se $0 \leq \alpha < 1$, allora la serie numerica converge
- Se $\alpha > 1$ allora la serie diverge.

Criterio della rapporto

Teorema 11. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numerica definitivamente positiva. Esista α tale che

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora:

- Se $0 \leq \alpha < 1$, allora la serie numerica converge
- Se $\alpha > 1$ allora la serie diverge.

Osservazione In entrambi i casi nulla si può dire se $\alpha = 1$

Criterio di Leibniz

Teorema 12. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serie numerica tale che:

- $a_n > 0$ per ogni n
- a_n successione non crescente
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Allora la serie converge.

Corollario 1. Se a_n verifica le ipotesi del teorema di Leibniz, sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergente al valore s . Allora si ha la seguente formula per l'errore

$$E_n = \left| s - \sum (-1)^n a_n \right| \leq a_{n+1}$$

Convergenza Uniforme Per studiare la convergenza uniforme può essere vantaggioso procedere applicando prima di tutto il Criterio di Wierstrass. In tal modo si riduce lo studio della convergenza uniforme allo studio della convergenza di una serie numerica (vedi Criterio di Weierstrass), risolvibile per mezzo dei criteri prima enunciati. In alternativa si può applicare il Criterio di Cauchy, o, in alternativa, cercare di verificare la convergenza dalla definizione, così come si faceva per le successioni.

La verifica attraverso la definizione risulta molto utile per serie a segni alterni del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$$

convergenti puntualmente a una funzione s per il criterio di Leibniz. Infatti applicando il corollario del criterio e la definizione di convergenza assoluta si ha che:

$$\sup_{x \in B} \left| s - \sum (-1)^n f_n(x) \right| \leq f_{n+1}(x)$$

Ma poiché è applicabile il criterio di Leibniz $f_{n+1}(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e, di conseguenza, la serie converge uniformemente poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \left| s - \sum (-1)^n f_n(x) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = 0$$

1.7.3 Serie di potenze

2 Intermezzo

2.1 Contrazioni in spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $\varphi : X \rightarrow X$.

Definizione 7 (contrazione). *Si dice che φ è una **contrazione** di X in sé quando:*

$$\exists c < 1 : d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq c d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Definizione 8 (punto fisso). *Si dice che $\bar{x} \in X$ è **punto fisso** per φ se:*

$$\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$$

Esiste un interessante teorema sulle contrazioni

Teorema 13 (di Banach-Caccioppoli). *Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $\varphi : X \rightarrow X$ una contrazione. Allora φ ha un unico punto fisso.*

2.2 Lipschitzianità

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto.

Definizione 9 (lipschitzianità semplice). *Si dice $f(x)$ lipschitziana se $\exists L > 0$ t.c*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Definizione 10 (lipschitzianità uniforme). Si dice che $f(t, v)$ è lipschitziana rispetto a v , uniformemente rispetto a t , su Ω se $\exists L > 0$ t.c.

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w| \quad \forall (t, v), (t, w) \in \Omega$$

In altre parole, fissata la variabile t , $f_t(v)$ è lipschitziana.

Definizione 11 (lipschitzianità locale). Si dice che $f(t, v)$ è **localmente lipschitziana** rispetto a v , uniformemente rispetto a t , se

$$\exists U((t, v), r) : f(t, v)|_U \in Lip_t(v) \quad \forall (t, v) \in \Omega$$

(esiste un intorno U di (t, v) tale che la funzione ristretta a quell'intorno sia lipschitziana rispetto a v , uniformemente rispetto a t).

3 Equazioni differenziali ordinarie

3.1 Teoria

Definizione 12 (problema di Cauchy). Siano $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0) \in \Omega$. Il problema di Cauchy (PC) è il sistema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Una soluzione del problema di Cauchy è una coppia (ϕ, I) costituita da una funzione $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in I tale che:

- $t_0 \in I$ e $\phi(t_0) = y_0$
- $(t, \phi(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I$
- $\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I$

Se (ϕ, I) risolve il problema di Cauchy, allora è una soluzione continua dell'equazione di Volterra:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

3.1.1 Esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni

Teorema 14 (di esistenza e unicità in piccolo o locale). Siano date le definizioni come in precedenza. Allora:

- Se $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ allora il (PC) associato ha almeno una soluzione.
- Se $f \in \mathcal{C}(\Omega) \cap Lip_x^{loc}(\Omega)$, allora il (PC) associato ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di t_0 .

Ricorda: una funzione di classe \mathcal{C}^n con $n \geq 1$ è localmente lipschitziana.

Teorema 15 (di esistenza e unicità in grande o globale). Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $I := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}$. Sia $f \in C(\Omega) \cap Lip_y^{loc}(\Omega)$, con crescita al più lineare in y , cioè:

$$\exists a, b : |f(t, y)| \leq a + b|y|$$

Allora la soluzione del (PC)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

esiste ed è unica.

(ove (t_0, y_0) è un punto qualunque di I), è definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

Teorema 16 (di prolungamento delle soluzioni). Sia $K \subset \Omega$ compatto.

Sia $I := (t_{min}, t_{max})$ un intervallo tale che la coppia (ϕ, I) sia la soluzione massimale di (PC). Siano inoltre

$$f \in C(\Omega) \cap Lip_x^{loc}(\Omega) \quad e \quad (t_0, x_0) \in \Omega$$

Allora il grafico di ϕ esce definitivamente da K per $t \rightarrow t_{min}^+$ e $t \rightarrow t_{max}^-$.

Esempio La soluzione di

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

è

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

In questo caso $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La soluzione è definita in $-\infty < t < 1$. Per $t \rightarrow 1^-$, il grafico di $x(t)$ esce ogni sottoinsieme chiuso e limitato di Ω . Quindi, la soluzione di un PC può essere definita su un intervallo (a, b) dove $b = +\infty$ o il grafico della soluzione esce ogni sottoinsieme chiuso e limitato di Ω per $x \rightarrow b$ (e similmente per a).

Teorema di esistenza e unicità in grande o globale Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}$. Sia $f \in C(\Omega) \cap Lip_x^{loc}(\Omega)$ con crescita al più lineare in x , cioè

$$\exists a, b : |f(t, x)| \leq a + b|x|$$

allora l'unica soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove (t_0, x_0) è un punto qualunque in S , è definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

3.1.2 Matrice wronskiana

Siano ϕ_1, \dots, ϕ_n funzioni a valori su \mathbb{R}^n definite in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 13 (matrice wronskiana). Si chiama **matrice wronskiana** di ϕ_1, \dots, ϕ_n la matrice:

$$W(t) := [\phi_1 \dots \phi_n]$$

Definizione 14 (wronskiano). Si chiama altresì **wronskiano** di ϕ_1, \dots, ϕ_n :

$$w(t) := \det W(t)$$

Osservazione l'annullarsi del wronskiano è condizione necessaria (ma non sufficiente) per la dipendenza lineare di ϕ_1, \dots, ϕ_n . Condizione necessaria e sufficiente affinché n soluzioni su I di una medesima equazione lineare omogenea siano linearmente indipendenti è che:

$$w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

~~~~~ b4a89dcc6722d483f9023c180270c67c47bc1d60

## 3.2 Principali tipi di equazioni differenziali

### 3.2.1 Sistemi lineari omogenei

Un sistema lineare omogeneo (LO) di equazioni differenziali è un sistema della forma:

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x}$$

ove

$$A(t) \in M_n(\mathbb{R}) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

e  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)^t$

#### Osservazioni

- Lo spazio delle soluzioni di LO è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .
- Il PC associato a LO ha una e una sola soluzione definita su tutto  $I$ .
- $A(t)\underline{x}$  ha crescita al più lineare.
- Se  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sono soluzioni di LO, queste sono linearmente indipendenti se e solo se  $w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

### 3.2.2 Sistemi lineari non omogenei

Un sistema lineare non omogeneo (LNO) di equazioni differenziali è un sistema della forma:

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$$

#### Osservazioni

- Lo spazio delle soluzioni di (LNO) non è uno spazio vettoriale, se  $\underline{b} \neq \underline{0}$ .
- Sia  $\Psi^*$  un soluzione di (LNO). Tutte e sole le soluzioni di (LNO) sono allora del tipo

$$\Psi(t) = \phi(t) + \Psi^*(t) \quad \forall t \in I$$

dove  $\phi$  è una soluzione qualunque dell'(LO) associato ( $\underline{b} = \underline{0}$ ).

- Se  $A(t), \underline{b} \in \mathcal{C}(I)$ , allora  $\forall t_0 \in I$  il (PC) ha una e una sola soluzione.
- Se  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sono soluzioni di (LO), queste sono linearmente indipendenti se e solo se  $w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

**Definizione 15** (Integrale generale). *L'integrale generale è una equazione che rappresenta tutte e sole le soluzioni di una equazione differenziale.*

Ad esempio, l'integrale generale, o soluzione generale, di un'equazione differenziale lineare non omogenea è data dalla somma tra una funzione soluzione dell'omogenea associata e una soluzione dell'equazione non omogenea. In questo caso, la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è anche detta **integrale particolare**. Parlare di integrare un'equazione differenziale è equivalente a parlare di risolvere un'equazione differenziale.

### 3.2.3 Sistemi lineari omogeni a coefficienti costanti

Un sistema lineare omogeneo a coefficiente costante (LOCC) è un sistema

$$\underline{x}' = A\underline{x}$$

dove  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ . Possiamo esprimere le soluzioni di questo sistema mediante l'esponenziale della matrice  $tA$ , ove  $t$  è uno scalare. L'esponenziale di matrici gode delle seguenti proprietà:

- $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$
- $\det e^{tA} = e^{t \cdot \text{tr}(A)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$

**Teorema** Per ogni (vettore colonna)  $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ , la funzione

$$\underline{\varphi}(t) = e^{tA}\underline{c}$$

è soluzione dell'eq (LOCC) su tutto  $\mathbb{R}$ .

### 3.2.4 Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti

Un sistema lineare non omogeneo (a coefficienti costanti) di equazioni differenziali è un sistema del tipo

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}(t)$$

Ove  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $b$  continua, allora, per ogni punto  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\Psi^*(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \underline{b}(s) ds$$

è una soluzione particolare dell'equazione sopra. Per orttenere una soluzione più specifica, ad esempio ponendo una condizione iniziale quale

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

Allora si ha che

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A} \underline{x}_0 + \Psi^*(t)$$

ovvero si somma alla soluzione generale del sistema omogeneo associato la soluzione particolare trovata in precedenza. Vedi anche il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

### 3.2.5 Equazioni di ordine n a coefficienti costanti

Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ : la funzione  $e^{\lambda t}$  è soluzione di (ELOCC) se e solo se  $\lambda$  è uno zero del polinomio caratteristico di (ELOCC) definito da:

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

**Osservazione** Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono complessi a due a due distinti, allora

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

sono funzioni linearmente indipendenti.

## 3.3 Risoluzione esercizi

In generale, risolvere (integrare) un'equazione differenziale consiste principalmente nel riconoscere un tipo di equazione, ed applicare procedimenti noti. Vediamone qualcuno.

### 3.3.1 Grafici delle soluzioni

todo marco

### 3.3.2 Metodo di variazione delle costanti arbitrarie

Questo metodo (alternativo, e un pochino più semplice) viene utilizzato se conosciamo un sistema fondamentale di soluzioni di un (LO), e cerchiamo almeno una soluzione di un (LNO). Siano  $\phi_1, \dots, \phi_n$  soluzioni di un (LO)  $y' = A(t)y$ , e sia  $W(t)$  la corrispondente matrice wronskiana. Ricerchiamo ora una soluzione di (LNO) della forma

$$\Psi^*(t) = W(t)\underline{c}(t)$$

ove le nostre incognite sono le varie componenti della funzione  $\underline{c}(t)$  Ricordando che vale la formula:

$$\frac{dW(t)}{dt} = A(t)W(t)$$

(per verifica diretta) si trova che, chiamando  $V(t) = W^{-1}(t)$ , e imponendo che

$$\underline{c}'(t) = V(t)\underline{b}(t)$$

si trova l'integrale particolare cercato:

$$\Psi^*(t) = W(t) \int_{t_0}^t V(s)\underline{b}(s)ds$$

### 3.3.3 Equazioni lineari

Con un'equazione di forma:

$$y'(t) = P(t)y + Q(t)$$

Allora

$$y(t) = e^{\int P(t)dt} \left( c_1 + \int Q(t)e^{-\int P(t)dt} dt \right)$$



### 3.3.4 Equazione di Bernoulli

Con un'equazione di forma:

$$y'(t) = P(t)y + Q(t)$$

con  $\alpha \neq 0, 1$ . Allora, si impone:

$$z(t) = y(t)^{1-\alpha}$$

si risolve l'equazione lineare in  $z$ :

$$z'(t) = (1 - \alpha)P(t)z(t) + Q(t)$$

e, trovata  $z(t)$  con la formula sopra, si ricava  $y(t)$ .

### 3.3.5 Equazione di Riccati

$$y'(t) = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Conoscendo una soluzione particolare  $\Psi(t)$ , allora applico la sostituzione

$$y(t) = \Psi(t) + \frac{1}{z(t)}$$

e con un po' di passaggi si dimostra che alla fine

$$z'(t) = -[2\Psi(t)P(t) + Q(t)]z(t) - P(t)$$

che è lineare.

### 3.3.6 Variabili separabili

Se invece

$$y'(t) = f(t)g(y)$$

Allora ovviamente si risolve ricordando che

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt + c$$

### 3.3.7 Un'altro tipo di equazioni omogenee

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Allora si sostituisce

$$z = \frac{y}{t}$$

da cui

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{f(z) - z}{t}$$

e dunque

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dt}{t} + c$$

sicché alla fine:

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \log |t| + c$$

Risostituendo e risolvendo rispetto a  $y$  si ottiene la soluzione cercata.

### 3.3.8 Equazioni lineari di ordine $n$

Sia

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0$$

ove le funzioni  $a_j \in C(I)$  Allora il sistema è equivalente al sistema:

$$\underline{Y}' = A(t)\underline{Y}$$

ove  $\underline{Y} = (y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$  (ogni componente è trattata come componente a sé stante, e non esplicitamente come derivata) e

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

che si risolve come un (LO) qualunque.

### 3.3.9 Oscillatori armonici

**Oscillazioni libere** Data un'equazione di forma

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

la soluzione è del tipo

$$\psi(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

oppure

$$\psi(t) = c'_1 \sin(\omega t) + c'_2 \cos(\omega t)$$

a seconda della base scelta.

**Caso 2** Invece, data un'equazione di forma

$$x'' - \omega^2 x = 0$$

questa ha soluzioni reali, più precisamente del tipo

$$\psi(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

**Oscillazioni smorzate** Nel terzo caso, abbiamo un'equazione del tipo

$$x'' - 2x' + x = 0$$

la cui soluzione è del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 t + e^t$$

(check)

**Casi non omogenei** In un caso del tipo

$$x'' + \omega^2 x = b(t)$$

bisogna sommare una soluzione particolare. Si scopre facilmente che tutte e sole le soluzioni sono fatte

$$\varphi(t) = c'_1 \sin(\omega t) + c'_2 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2} t$$

o equivalentemente scegliendo una base complessa, la soluzione particolare da sommare è  $\Psi^*(t) = \frac{1}{\omega^2} t$ .

### 3.4 Equazioni differenziali esatte

Un'equazione differenziale esatta è una equazione del tipo

$$y'(t) = \frac{P(t, y)}{Q(t, y)} \quad (1)$$

Per risolvere questa equazione bisogna trovare una 1-forma differenziale  $\omega$  esatta. Chiamando  $F$  la funzione di cui  $\omega$  è differenziale, si trova che:

$$\omega = Q(t, y)dy - P(t, y)dt = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = dF$$

che è vero se e solo se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -P(t, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= Q(t, y) \end{aligned}$$

a questo punto l'equazione

$$F(t, y(t)) = \text{costante}$$

definisce in maniera implicita tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale (1).

Nota: condizione necessaria per cui (1) abbia soluzione è che

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

#### 3.4.1 Altre cose da trovare

A volte capita che bisogna trovare una funzione  $g(x, y)$  tale che  $g \cdot \omega$  (ove il punto indica la moltiplicazione semplice) sia ancora una forma esatta. In questo caso:

$$P \frac{\partial g}{\partial y} + Q \frac{\partial g}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

che è molto complicato. Se  $g = g(t)$ , allora si può riscrivere come:

$$\frac{\partial_t g}{g} = -\frac{1}{Q}(\partial_y P + \partial_t Q)$$

e se  $g = g(y)$

$$\frac{\partial_y g}{g} = -\frac{1}{P}(\partial_y P + \partial_t Q)$$

**Esempio** Sia ad esempio

$$y' = -\frac{y + 2xy^3}{x + 3x^2y^2}$$

In questo caso

$$\partial_x Q = 1 + 6xy^2 \quad \partial_y P = -1 - 6xy^2$$

Se

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -P = y + 2xy^3$$

allora

$$F(x, y(x)) = \int (y + 2xy^3) dx = yx + y^2x^2 + g(y)$$

e derivando  $F$  rispetto a  $y$ , questa deve soddisfare la relazione

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \quad (= x + 3x^2y^2)$$

Dunque

$$x + 3x^2y^2 + g'(y) = x + 3x^2y^2$$

Quindi in particolare  $g'(x) = 0$  e dunque  $g(x)$  è una costante. L'integrale generale è dunque

$$F(x, y(x)) = yx + x^2 + c$$

## 4 Curve in $\mathbb{R}^n$

### 4.1 Definizioni principali

**Curva, sostegno** Una curva in  $\mathbb{R}^n$  è una funzione continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Il suo sostegno è l'immagine di  $[a, b]$  tramite  $\gamma$ . Viene anche detto “parametrizzazione”.

**Velocità vettoriale** Sia  $\gamma$  una curva in  $\mathbb{R}^n$ . Allora la velocità vettoriale  $\underline{v}(t)$  è definita come

$$\underline{v}(t) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

**Regolarità** Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice regolare se è di classe  $C^1$ . Si dice invece regolare a tratti se esiste una partizione  $\{x_j\}$  di  $[a, b]$  tale che  $\gamma|_{[x_j, x_{j+1}]}$  è regolare.

**Equivalenza** Due curve regolari  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dicono equivalenti se esiste una funzione  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $f \in C^1([a, b])$ , suriettiva, tale che  $\forall x : f'(x) \neq 0$ , e tale che

$$\gamma(t) = \delta(f(t))$$

**Lunghezza** In modo simile a quanto si farebbe in Fisica, si ottiene la lunghezza di una curva integrando il modulo della sua velocità vettoriale. Essendo  $\gamma$  una curva definita su  $[a, b]$ :

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} dt$$

**Superfici** ...

## 5 1-forme differenziali

### 5.0.1 Definizioni

Una 1-forma differenziale è una funzione del tipo

$$\omega := \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$$

In questo esempio, i vari  $a_j(x)$  si chiamano coefficienti della 1-forma differenziale. Una nota 1-forma differenziale è ad esempio il differenziale di una funzione.

**Definizione 16** (integrale di una 1-forma differenziale). *Sia  $\gamma$  una curva regolare, di estremi  $a$  e  $b$ . Si definisce l'integrale di una 1-forma differenziale su  $\gamma$*

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \sum_{j=1}^n \langle a_j(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

ove l'operatore  $\langle, \rangle$  sia il prodotto scalare standard.

**Definizione 17** (esattezza). *Una forma differenziale  $\omega$ , definita in un aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , si dice **esatta** se è il differenziale di un'altra funzione.*

Più esplicitamente, la forma è esatta se esiste  $f$  tale che:

$$\forall j \in \{1 \dots n\} : a_j(x) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_j}$$

### 5.0.2 Forme chiuse, forme esatte

Altre proprietà delle 1-forme differenziali:

**Teorema 17.** *Sia  $\omega$  una 1-forma differenziale. Se  $\gamma$  e  $\varphi$  sono curve equivalenti, allora*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\varphi} \omega$$

*se  $\alpha$  e  $\omega$  hanno lo stesso verso. Altrimenti*

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\varphi} \omega$$

*se hanno versi opposti.*

**Definizione 18.** *Siano  $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A$  connesso. Definiamo  $\Gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$  come l'insieme delle curve regolari a tratti che congiungono  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$  regolari a tratti, tutte contenute in  $A$ .*

**Osservazione** È equivalente dire che:

- Una 1-forma differenziale  $\omega$  è esatta su  $A$
- $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$
- $\int_{\gamma} \omega = 0 \quad \forall \gamma \subset A$  chiusa e regolare a tratti.

**Definizione 19** (forma chiusa). Una forma  $\omega = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$  per cui,  $\forall j \neq k$ , valga

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

si dice chiusa.

**Teorema 18.** Sia  $\omega$  esatta. Vale

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

**Corollario 2.** Sia  $\omega$  una forma esatta. Allora  $\omega$  è chiusa. Non vale il viceversa.

**Definizione 20** (insieme stellato). Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.  $A$  si dice **stellato** se esiste  $\underline{x}_0 \in A$  tale che  $\forall \underline{x} \in A$  il segmento  $[\underline{x}_0, \underline{x}]$  è tutto contenuto in  $A$ .

**Osservazione**

$A$  convesso  $\Rightarrow A$  stellato (ma non vale il viceversa).

**Teorema 19.** Sia  $\omega \in \mathcal{C}^1(A)$ , sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto stellato. Allora  $\omega$  chiusa  $\Leftrightarrow \omega$  esatta.

### 5.0.3 Relazione tra 1-forme differenziali e campi vettoriali

Forme 1-differenziali e campi vettoriali hanno molto in comune. Ogni 1-forma definisce implicitamente un campo vettoriale, e viceversa. Infatti un campo vettoriale è una n-upla di funzioni  $V_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se abbiamo ad esempio una 1-forma  $\omega$

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$$

a questa associamo il campo

$$\underline{V}(\underline{x}) = (a_1(\underline{x}), \dots, a_n(\underline{x}))$$

e viceversa.

Valgono poi altre analogie, ad esempio i seguente teoremi.

**Teorema 20.** Un campo vettoriale è conservativo se e solo se la 1-forma differenziale associata è esatta.

**Teorema 21.** Un campo vettoriale è irrotazionale se e solo se la 1-forma differenziale associata è chiusa.

### 5.0.4 Gauss Green

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme.

**Definizione 21.** Il bordo di  $E$  ( $\partial E$ ) si dice orientato positivamente se esiste una parametrizzazione  $\gamma(t)$  di esso, tale che, percorrendo  $\gamma$  in senso antiorario, l'insieme  $E$  si trovi tutto alla sua sinistra. (nota:  $\gamma$  deve essere chiusa e semplice).

**Teorema 22** (Gauss Green). Sia  $\omega$  una 1-forma differenziale in  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , definita come

$$\omega = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad M, N \in \mathcal{C}(\bar{E})$$

Allora

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_E (N_x(x, y) - M_y(x, y)) dx dy$$

ove  $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$ ,  $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$  e  $\partial^+ E$  è il bordo orientato nel senso positivo di  $E$ .

### 5.0.5 Rotore, gradiente, divergenza

Sia  $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3)$  campo in  $\mathbb{R}^3$ .

**Definizione 22.** Si definisce **divergenza** di  $\underline{V}$  la quantità

$$\text{div} \underline{V} = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3$$

**Teorema 23** (teorema della divergenza). Sia  $d\sigma$  la quantità infinitesima di "area", e  $\nu$  vettore normale (e normalizzato) al bordo di  $E$ .

$$\int_E \text{div}(\underline{V}) = \int_{\partial E} \langle \underline{V}, \nu \rangle d\sigma$$

**Osservazione** In  $\mathbb{R}^2$

$$\int_E (\partial_x V_1 + \partial_y V_2) dx dy = \int_{\partial^+ E} \langle \underline{V}, \nu \rangle ds$$

Quest'ultima quantità si chiama flusso di  $V$  attraverso il bordo di  $E$

**Definizione 23** (insieme semplicemente connesso). Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto.  $A$  si dice **semplicemente connesso** se per ogni curva chiusa semplice contenuta in  $A$  l'interno della curva è anch'esso tutto contenuto in  $A$ .

**Osservazione** Se un insieme  $A$  è stellato,  $A$  è semplicemente connesso.

**Teorema 24.** Sia  $A$  semplicemente connesso,  $\omega$  definita in  $A$ , chiusa. Allora,  $\omega$  è esatta.

**Definizione 24** (rotore). Il rotore di  $V$  è il vettore definito come

$$\text{rot}(V) = \nabla \wedge V$$

### 5.0.6 Teorema di Stokes

Siano dati i seguenti oggetti:

- $K \subseteq \mathbb{R}^2$  compatto
- $A \subset K$  aperto
- $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  superficie regolare
- $\varphi = \psi|_A$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial A$  curva
- $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$
- $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
- $\Gamma : [a, b] \rightarrow \partial(\varphi(A))$
- $\Gamma = \varphi \circ \gamma$
- $\Gamma(t) = (x(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), y(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), z(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$
- $\underline{V} = (X, Y, Z)$  definito in una regione che contiene  $\varphi(\bar{A})$
- $\forall x_0 \in \varphi(A) \exists \nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$  vettore normale

**Teorema 25** (di Stokes). *Sotto le ipotesi precedenti, se  $\varphi(A) = S$ ,  $\varphi(\partial A) = \partial^+ S$ , allora*

$$\int_S \langle \text{rot}(V), \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ S} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{\partial^+ S} \langle V, \tau \rangle ds$$

## 6 Altro

### 6.1 Norme

**Definizione 25** (norma 1). *La **norma 1** è definita come:*

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|$$

**Norma  $\infty$**  La norma  $\infty$  sull'insieme  $E$  è definita come:

$$\|f(\underline{x})\|_{E, \infty} := \sup_{\underline{x} \in E} |f(\underline{x})|$$



## 6.2 Calcoli vari

**Esponenziale di una matrice** Ricordiamo la definizione di esponenziale di una matrice.

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Questa scrittura ci dà però pochi metodi pratici per il calcolo dell'esponenziale.

Sia allora  $D$  una matrice diagonale:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Si può mostrare facilmente che

$$e^{tD} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$$

Analizziamo ora il caso generale. Sia  $A$  una matrice di dimensione  $n$  con un sistema completo di autovettori (colonna)  $\underline{h}_1, \dots, \underline{h}_n$  riferiti a  $n$  autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Definiamo  $S$  come

$$S := [\underline{h}_1 \dots \underline{h}_n]$$

$A$  è ora ovviamente diagonalizzabile tramite  $S$ :

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

e

$$A = SDS^{-1}$$

Allora, con dei semplici passaggi si verifica che

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1}$$

e dunque il calcolo di esponenziale di una matrice qualunque viene ricondotto al calcolo di una matrice diagonale, appena risolto.

**Caso particolare: matrice non diagonalizzabile** write me, please.