«Система стабилизации положения трёхмерного объекта с циклическими органами управления.»

Автор: Н.Ф. Сорокин

23 декабря 2019 г.

1 Возможность обобщения теории автоматического управления к решению задач управления динамическими системами в изотропном 3-мерном пространстве.

Классический подход теории управления при решении задачи управления динамическими процессами в трёхмерном пространстве, такими как движение летательных, космических аппаратов, позиционеров, манипуляторов и т.д., состоит в разбиении управляющего воздействия по набору управляющих каналов, и независимому решению задачи стабилизации в каждом отдельно взятом канале. Этот подход замечательно работает вблизи выбранных опорных режимов, вблизи которых проведена линеаризация уравнений движения объекта, но его применимость для решения задачи управления эволюциями объекта управления в общем случае вызывает вопросы.

На примере идеальной модели объекта управления рассмотрим возможность построения системы управления, используя в качестве сигналов данные о положении, скоростях и прочих параметрах, выразив их в тензорном виде.

2 Объект

Представим висящий в безвоздушном пространстве объект, на поверхности которого системно или же хаотично расположен набор реактивных или иной природы движителей. Двигатели создают силу или момент (или их пару) в направлении одной какой-либо оси. Оси двигателей в общем случае могут быть направлены в любых направлениях относительно центра масс шара. Подавая сигналы управления на двигатели шар может перемещаться в различных направлениях в пространстве, или же задавать себе вращательное движение, причем, если, двигатели расположены в достаточной степени разнообразно, то для выполнения любого желаемого набора главных векторов сил и момента всегда найдётся необходимая комбинация управляющих воздействий. В противном, вырожденном случае расположения движителей, шар может совершать только ограниченный набор эволюций.

Действие двигателей на положение объекта относительно неподвижного наблюдателя, очевидно, зависит от текущей ориентации объекта, то есть тот двигатель, что позволял минуту назад лететь вверх, после поворота объекта станет задавать силу, направленную вправо и так далее. Можно сказать, что в общем случае оси тяги и положения движителей могут изменяться даже в рамках собственной системы координат объекта. Предположим, например, что двигатели имеют ноги, бегают по поверхности шара и всячески крутят осями тяги. Даже в условиях такого непотребства, если двигателей достаточно, а объект имеет хороший вычислитель и знания о том, как расположены в текущий момент времени его двигатели и он сам в пространстве наблюдателя, он может найти и задать искомое управляющее воздействие. В случае вырожденного случая положения двигателей, управляющее воздействие должно соответствовать возможностям объекта управление.

Назовём систему двигателей или органов управления, обладающую описанными выше свойствами циклической, что отражает их способность брать на себя работу предшественников по мере изменения ориентации, как бы передавая свои обязанности по кругу.

Описанный сферический в вакууме конь, есть идеальная модель для множества разномастных систем и объектов управления, совершающих перемещения себя или части своих органов в пространстве. К числу таких объектов в первом приближении относятся роботы манипуляторы и дроны всех видов и расцветок (подводные, воздушные, космические). Все эти объекты характеризуются достаточно возможностью изменять положение и ориентацию в пространстве, а также большим набором неспециализированных исполнительных органов, влияние которых на положение зависит от текущей конфигурации объекта в пространстве.

3 Идеальный дрон. Управление силами и моментами.

Рассмотрим идеальный, абсолютно твёрдый объект имеющий безинерциальные органы управления, расположенные и организованные таким образом, что в совокупности, после приведения к центру масс объекта, могут создать пару главного вектора сил и главного вектора момента любого номинала и направления. Объект, разумеется, находится в безвоздушном пространстве, а все гравитационные силы скомпенсированы.

В рамках настоящей статьи мы не будем рассматривать уравнения движения объекта управления, поскольку удобный способ описания спинорной компоненты положения в контексте предлагаемой системы требует введения неклассической операции дифференцирования, связывающей тензор поворота с угловой скоростью объекта и введения дополнительного формализма, что несколько выходит за рамки настоящей статьи. Оставив эти выкладки для отдельной статьи, рассмотрим систему стабилизации положения объекта управления в трёхмерном пространстве.

Пусть объект находящийся в текущем P абсолютном положении требуется переместить в положение уставки U. Тензор положения P объекта состоит из линейной x_p и спинорной θ_p компонет. Расчитаем для текущего момента времени ошибку E, состоящую из линейной x_e и спинорной θ_e ошибок позиционирования.

Уравнения динамики относительно ошибки позиционирования в системе координат наблюдателя в тензорном виде могут быть записаны следующим образом.

$$\frac{dv_p}{dt} = F_p + \omega_o \times v_p \tag{1}$$

$$\frac{dx_e}{dt} = v_u - v_p + \omega_o \times x_e \tag{2}$$

$$\frac{dK_p}{dt} = M_p + \omega_o \times K_p \tag{3}$$
$$\omega_p = I^-1 * K_p \tag{4}$$
$$\frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)(\omega_u - \omega_p) + \omega_o \times \theta_e \tag{5}$$

В этих уравнениях ω_o - угловая скорость системы наблюдателя, $Z(\theta)$ - тензор Жилина.

Для более простого случая, когда положение уставки и система наблюдателя неподвижны,

$$\frac{dv_p}{dt} = m^{-1} * F_p$$
$$\frac{dx_e}{dt} = -v_p$$
$$\frac{d\omega_p}{dt} = I^{-1} * M_p$$
$$\frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)(-\omega_p)$$

Предположим, что мы умеем так расчитать управление на исполнительные органы, чтобы создать искомые векторы F_p и M_p, что в условиях предположения их безинерциальности позволяет нам интерпретировать их, как сигналы управления. Замкнём контур управления через тензоры положения и угловой скорости.

(Учитывая, что $v_p = -v_e$ и $\theta_p = -\theta_e$)

$$\frac{dx_e}{dt} = v_e \tag{6}$$
$$\frac{dv_e}{dt} = m^{-1} * (-K_1 * x_e - K_2 * v_e) \tag{7}$$
$$\frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)(\omega_e) \tag{8}$$
$$\frac{d\omega_e}{dt} = I^{-1} * (-K_1 * \theta_e - K_2 * \omega_e) \tag{9}$$

Если динамика компоненты линейного положения тривиальна, то динамика спинорной компоненты нелинейна, однако в предположении малости ошибки и в ситуации, когда угловая скорость направлена близко к вектору угловой ошибки, то есть в рабочих режимах системы управления, тензор жилина практически равен единичной матрице, а потому не вносит существенного вклада в динамику.

Рассмотрим передаточные функции СУ, линеаризованной по главным каналам - 3ём линейным и 3ём угловым, соответствующим главным инерциальным осям объекта. Учтём, что циклический характер органов управления позволяет независимо генерировать управляющие воздействия в каждом из главных каналов при отсутствии сингулярностей. Общий вид будет одинаков:

$W_1 = 1/A * s^2$ $W_2 = K_2 s + K_1$

$W = W_1 * W_2 / W_1 * W_2 + 1$

$W = K_1 s + K_2 / A * s^2 + K_1 s + K_2$ $W = K_1/K_2 s + 1/A/K_2 s^2 + K_1/K_2 s + 1$

Здесь A - инерционный параметр, то есть, или масса или один из главных моментов инерции. Мы видим, что линейные каналы идентичны, а спинорные различаются инерционным параметром.

Выравнивание передаточных функций каналов. Частотная картина контура управления будет тем проще, а поведение объекта тем предсказуемее, чем меньший разброс постоянных времени будут иметь каналы.

Докажем, что при равенстве постоянных времени и декрементов передаточные функции в прочих (неглавных) каналах будут идентичными. Построим неглавный канал путём взвешенного сумирования трёх главных.

Т.к. $\theta_i = W_i u_i$:

$$c_x\theta_x + c_y\theta_y + c_z\theta_z = c_x W_x u_z + c_y W_y u_y + c_z W_z u_z \tag{10}$$

Поскольку $W_x = W_y = W_z$:

$$c_x\theta_x + c_y\theta_y + c_z\theta_z = W_x(c_x u_z + c_y u_y + c_z u_z) \tag{11}$$

Если c_i - направляющие косинусы, то передаточная функция на любом неглавном канале будет иметь аналогичный вид.

$$\theta_l = W_l u_l \tag{12}$$

Таким образом в нашем векторном выражении (?) коэффициенты регулятора K_1, K_2, K_3, K_4 заданы диагональными матрицами, а расчет их производится по результату синтеза параметров переходного процесса.

4 Распределение управляющих воздействий между органами управления

В изложенном выше выводе был опущен вопрос о том, как рассчитать вклады органов управления в расчитанный управляющий сигнал.

Если представить генерируемую силу (или другой генерируемый органом управления параметр) винтом, то его вклад будет соответствовать винту перенесенному (согласно теореме о переносе винта) в расчетный центр (например, центр масс объекта).

$$H_i = u_i * Y_i \tag{13}$$

$$H* = sumu_i carry(Y_i, trans(P_i)) \tag{14}$$

Выражение (?) задаёт систему линейных уравнений, решив которую относительно вектора управления u можно построить искомое управление H*.

Интересно отметить, что при избыточности органов управления и наличии возможности отслеживания их состояния, алгоритм управления имеет определённый запас надёжности на случае выхода из строя части двигателей. Действительно, при потере движителя с точки зрения алгоритма его винт чувствительности может быть приравнен нуль-винту и алгоритм управления в рабочем порядке перераспределит его нагрузку на остальные движки. Отключение движителей допустимо до тех пор, пока остальные справляются с нагрузкой, или до появления недостижимых областей управления в зонах рабочих режимов.

5 Инерционность органов управления.

Как известно, все двигатели принципиально инерциальны и имеют определенную задержку отработки управляющего сигнала. Если по мере вращения объекта управляющее воздействие отрабатывается с запаздыванием, на режимах вращения, мы можем получить паразитную составляющую сигнала, приводящую к миграции сигналов генерируемых двигателями между главными каналами системы управления.

$$d(x)/dt = d(x)/dt + yx\omega_p - zx\omega_p \tag{15}$$

Если постоянные времени каналов управления и двигателей выравнены, можно исключить из рассмотрения отдельные драйверы и рассматривать перекрестные между главными каналами:

С этим эффектом довольно сложно бороться, поскольку он проявляется мгновенно, а управление имеет инерционность. Попытка предкомпенсировать этот эффект в общем случае невозможна (ибо приводит к необходимости генерировать управление в отрицательном времени). Тем не менее, в некоторых задачах, где эволюции системы более менее предсказуемы, влияние эффекта может быть учтено и в значительной степени компенсированно засчет своевременного анализа последующего. Эффект перетекания управления тем меньше проявляется, чем меньше постоянные времени двигателей.

6 Идеальный манипулятор. Скоростное управление.

Рассмотрим идеальный, абсолютно твёрдый объект, имеющим безинерциальные органы управления, расположенные и организованные таким образом, что в совокупности могут создать пару линейной и угловой скорости любого номинала и направления.

Такой объект соответствует идеальному выходному звену манипулятора, приводимому в движение набором кинематических звеньев. Управление осуществляется параметрами скоростей, поскольку подчинённые системы управления сервоприводов кинематических пар решают задачу силового управления самостоятельно, требуя уставку в виде сигнала скорости (инкремента позиции). Если динамические возможности сервосистем достаточны, их передаточные функции можно считать единичными, что приближает нас к описанному идеальному объекту.

Поскольку в этом варианте мы управляем первой производной выходного сигнала, система упрощается.

$$\frac{dx_e}{dt} = -v_p \tag{16}$$

$$\frac{d\theta_e}{dt} = -Z(\theta)\omega_p \tag{17}$$

где v_p и ω_p - величины, которыми мы непосредственно управляем.

Построим систему стабилизации

$$\frac{dx_e}{dt} = v_e \frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)\omega_e \tag{18}$$

$$\frac{dx_e}{dt} = K_1 * x_e \frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)\omega_e + K_2 * \theta_e \tag{19}$$

Данной системе соответствует апериодический переходный процесс. Соображения относительно ее поведения мало чем отличаются от выше изложенных.

Поиск векторов чувствительности органов управления и построение желаемого управления также выполняется аналогично.

Для решение задачи траекторного управления удобно использовать вариант этой системы с прямым управлением по скорости.

$$\frac{dx_e}{dt} = K_1 * x_e + v_u \frac{d\theta_e}{dt} = Z(\theta)\omega_e + K_2 * \theta_e + \omega_u \tag{20}$$

В этом режиме статическая ошибка движения по заранее заданной траектории равна нулю.

7 Выводы

Исходя из вышеизложенного, синтез желаемого управления путём перераспределения управляющих сигналов между органами управления и выравнивание динамических свойств циклических элементов системы даёт возможность применять методы класической теории управления к векторно-тензорным сигналам.

Построенные с применением этого приёма системы управления имеют достаточно предсказуемое поведение и сравнительно простое математическое описание.