

Реферат.  
«Построение следящих систем управления многозвенными  
кинематическими цепями.»

Автор \_\_\_\_\_ Н.Ф. Сорокин  
Научный руководитель \_\_\_\_\_ д.т.н., проф. С.С. Гаврюшин

Москва 2019

# Содержание

1	Введение.	3
2	Объект управления	4
3	Гомогенное преобразование. Положение и скорость.	8
4	Системы координат.	11
5	Прямая скоростная задача.	13
6	Обратная скоростная задача.	16
6.1	Метод координатного спуска / метод градиентного спуска. . . . .	16
6.2	Метод псевдообратной матрицы . . . . .	17
7	Следящая система управления положением звена.	17
8	Построение массива траекторных точек для решения задачи линейной интерполяции.	19
9	Учет ограничений и весов на уровне координатного решателя. Метод исключения координат.	20
10	Учет ограничений на уровне траекторного решателя. Разбиение кинематической цепи. Введение дополнительных параметров.	21
11	Управление манипулятором в движущемся локальном базисе.	22
12	Совместное управление частично пересекающимися кинематическими цепями. Древовидная кинематическая цепь.	24
13	Выводы и дальнейшие направления исследований.	25
14	Список использованной литературы	26

# 1 Введение.

В настоящее время бурное развитие получили робототехнические системы, манипуляторы, позиционеры, станки ЧПУ, выполняющие задачу изменения положения рабочего органа (инструмента, схвата, зонда) в лабораторной системе координат и характеризующиеся цепной компоновкой кинематических звеньев.

Обратная задача кинематики, решение которой требуется для управления такими изделиями нелинейна, может иметь множество решений и представлять значительную вычислительную сложность. В связи с этим было разработано множество методов решения обратной задачи кинематики.

Часть методов, в особенности аналитических, построена для решения частных случаев задачи управления кинематической цепью и может быть применена только к ограниченному числу изделий. К числу этой категории методов также относятся методы, работающие только с одним типом кинематических звеньев (в основном с одностепенными поворотными звеньями).

Наиболее общее, не зависящее от геометрии решение даёт применение матрицы Якоби, описывающей связь положения выходного звена с кинематическими координатами в частных производных.

Само по себе использование матрицы Якоби для расчета управления звеном кинематической цепи может быть не слишком удобным из-за неинтуитивности частных производных компонент тензора положения. В значительной степени неудобство управления в частных производных координат положения происходит из неочевидности физического смысла производных компонент объекта ориентации, который может задаваться матрицей размерности  $3 \times 3$ , или кватернионом, или быть частью более сложного алгебраического объекта, определяющего положение звена целиком, а именно матрицы размерности  $4 \times 4$  или бикватерниона. Это ухудшает прозрачность алгоритма и увеличивает требования к квалификации разработчика программного обеспечения конкретного изделия.

Вместе с тем, построение сложных алгоритмов управления в реальном времени требует предсказуемости поведения позиционера в общем случае движения, в то время как частные производные компонент кватерниона углового положения или матрицы поворота, могут иметь довольно странное поведение при совместном многокоординатном управлении в силу нелинейности компонент, при использовании их в качестве параметров системы регулирования.

Для настоящего метода выбрано решение через скоростной аналог матрицы Якоби, характеризующий связь производных кинематических параметров с векторами линейной и угловой скоростей звеньев манипулятора. В работе показано, как решение скоростной задачи может быть использовано для координатно-траекторного управления широким классом открытых кинематических цепей. На основе метода приводится вариант алгоритма, достаточный для построения на его основе следящих систем, систем линейной интерполяции, а также достаточно простой для реализации в ЦПУ, ПЛИС, для управления реальным физическим объектом или моделью, а также обсуждаются варианты его модификации под ограничения конкретного объекта.

Следует отметить, что метод не налагает ограничения на класс кинематических пар и, хотя и разрабатывался для кинематических пар пятого класса, может быть применен для управления любой открытой кинематической цепью как из простых, так и из сложных звеньев.

В настоящей работе вводится и используется математическая нотация, совмещающая в рамках одного алгебраического объекта такие понятия как линейное и угловое положения, линейная и угловая скорость и так далее. Такой выбор математической нотации обусловлен практической направленностью метода. Использование указанных пар, как обособленных вычислительных объектов позволяет упростить сопровождение программного обеспечения и уменьшить вероятность допущения ошибок на этапе переноса математики в исходный код программы, уменьшить требования к математической подготовке разработчиков прикладного программного обеспечения. Вместе с тем автор полагает, что подобная нотация имеет ценность сама по себе и дальнейшее исследование в этом направлении может позволить строить системы стабилизации для широкого класса объектов управления с шестью степенями свободы, имеющих хорошую угловую динамику и осуществляющих работу в трёхмерном пространстве, таких как космические и подводные аппараты, мультикоптеры и прочее.

В применении к задаче управления позиционером/манипулятором данная нотация позволяет упростить запись уравнений, их анализ, а также позволяет изложить задачу в более интуитивно понятной форме.

В последних частях работы обсуждается возможность применения метода к управлению манипуляторами автономных роботов, древовидными кинематическими цепями, многопальцевыми схватами. Возможность расширения метода и его использования к другим типам объектов управления так же обсуждается в последних разделах.

## 2 Объект управления

Основными объектами управления рассматриваемого в данной работе метода являются механизмы, роботы, манипуляторы, кинематика которых описываются простыми кинематическими цепями.

Типичным представителем таких механизмов являются роботы-манипуляторы.



Рис. 1: Манипулятор на поворотных звеньях. (Rozum Robotics)



Рис. 2: Манипулятор на поворотных звеньях (FANUC R-1000iA80H)

Управление положением схвата первично для таких изделий. Зачастую роботы манипуляторы имеют избыточную кинематику, что ставит вопрос о поиске управления, исключающего коллизии и сингулярные состояния.

Другой тип рассматриваемых объектов управления, позиционеры, считающие линейные и вращающие звенья:

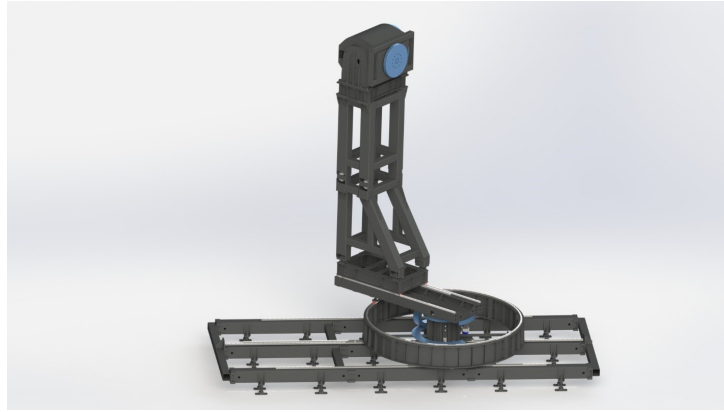


Рис. 3: Позиционер с линейными и поворотными звеньями (Radioline PSR)

Характеризуются меньшей избыточностью кинематики, имеют высокую жесткость и точность позиционирования.

В качестве перспективного направления развития метода рассматривается управление манипуляторами мобильных платформ (колёсных, шагающих, летающих).



Рис. 4: Мобильная платформа с манипулятором.



Рис. 5: Летающая платформа с манипулятором.



Рис. 6: Шагающая платформа с манипулятором.

В качестве перспективного направления развития метода также рассматривается управление сложными схватами.

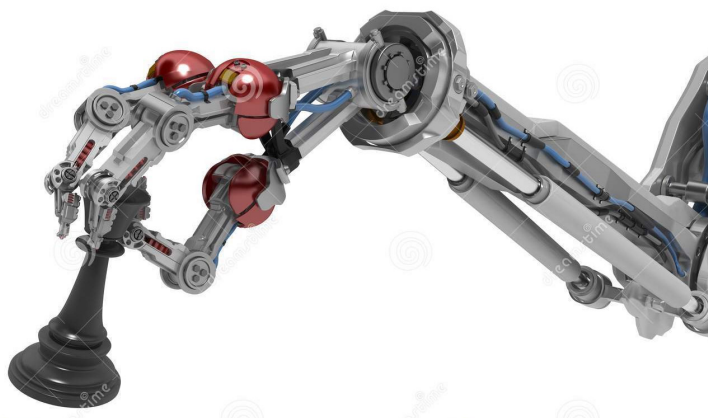


Рис. 7: Пример сложного манипулятора.

Эти объекты требуют синхронного многокоординатного управления положением,

которое в рамках рассматриваемого метода осуществляется через построение следящей системы с модельной уставкой положения выходного звена.

### 3 Гомогенное преобразование. Положение и скорость.

Введем в рассмотрение объект гомогенного координатного преобразования. Здесь и далее под объектом гомогенного преобразования (англ. *homogenous transform*) понимается геометрическая сущность, описывающая однородное координатное преобразование, состоящее из комбинации поворота и переноса. В разных частях настоящего изложения объект гомогенного преобразования фигурирует как оператор преобразования СК, способ описания положения кинематического звена имеющий смысл соответствующего тензора, или программный объект (в терминах ООП), непосредственно используемый в программном обеспечении.

Такой объект состоит из компоненты ориентации (или поворота) и компоненты трансляции (или линейного перемещения), которые в литературе обычно рассматриваются независимо. Однако, определённая общность поведения этих компонент в уравнениях движения, интуитивность обобщающего их понятия положения объекта в пространстве, а также найденные алгебраические структуры, позволяющие объединить поворот и трансляцию единой операцией композиции позволяют надеяться на возможность применения этих объектов при аналитическом решении задач в виде обособленных объектов.

Математическое представление такого объекта может быть различным. В частности, для него могут применяться матрицы размерностью  $4 \times 4$ , бикватернионы, комбинация кватерниона поворота и вектора трансляции и т.д. В рамках рассматриваемого метода конкретная форма представления объекта взаимозаменяема и определяется исключительно удобством реализации в вычислительной системе. Обозначим объект гомогенного преобразования и соответствующий ему тензор преобразования как  $H_i^j$ .

В программной реализации удобно представлять  $H_i^j$  как комбинацию двух компонент, кватерниона поворота и вектора трансляции, но, как сказано ранее есть и иные возможные представления.

На множестве  $H_i^j$  определена операция некоммутативная операция композиции, часто обозначаемая как умножение (и являющаяся умножением в терминах бикватернионов или матриц  $4 \times 4$ ). Множество  $H_i^j$  замкнуто по этой операции.

Введем в рассмотрение объект положения СК и связанный с ним тензор положения. Обозначим его  $P$ . Объект положения удобно задавать тем же набором компонент, что и объект гомогенного преобразования. В такой нотации компонентное выражение тензора положения  $P$   $j$ -ой системы координат взятого в  $i$ -том базисе, будет совпадать с компонентным выражением тензора преобразования СК, из базиса  $i$ -той СК в базис связанный с  $j$ -ой СК.

$$P_j^{(i)} = H_i^{(i)j} \quad (1)$$



Также введем в рассмотрение производную тензора положения  $j$ -ой системы координат

$$V_j(t) = \dot{P}_j(t) \quad (2)$$

Как и тензор преобразования системы координат и тензор положения, производная тензора положения является геометрическим объектом и имеет смысл скорости изменения геометрического положения объекта или системы координат. Часто в качестве компонентного представления производной тензора представления выбирают производные компонент тензора положения, однако такой подход не является интуитивным и не очень удобен в вычислительной реализации.

В настоящем методе в качестве компонентного представления производной тензора положения выбирается пара векторов его линейной и угловой скорости  $(v, \omega)$ , вне зависимости от того, какими компонентами задан сам объект положения.

$$V_j(t) = \dot{P}_j(t) = |\omega_j(t), v_j(t)| \quad (3)$$

Обоснуем корректность введения такой операции дифференцирования. Рассмотрим движущийся локальный базис в базисе его мгновенного положения. Рассмотрим положение базиса через малый промежуток времени  $\Delta t$ . Запишем  $H_i^j$  в компонентной форме через вектора поворота и трансляции.

$$H_i^j(t) = |\rho(t), r(t)| = |0, 0| \quad (4)$$

$$H_i^j(t + \Delta t) = |\rho(t + \Delta t), r(t + \Delta t)| = |\rho, r| \quad (5)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H_i^j(t + \Delta t) - H_i^j(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\rho}{\Delta t}, \frac{r}{\Delta t} \right| = |\omega, v| \quad (6)$$

, где  $\omega$  и  $v$  - мгновенные угловая и линейные скорости.

Суммирование компонент вектора поворота возможно в силу коллинеарности нулевого вектора любому другому вектору и тому обстоятельству, что повороты по коллинеарным векторам образуют группу.

В силу тензорной природы  $H_i^j$ , операции над ним не зависят от выбора базиса, а значит выводы сделанные на основе соотношений (??) корректны после перехода в любой выбранный базис. Воспользовавшись эквивалентностью представлений  $H_i^j$ , мы можем утверждать, что его производная в форме (??) существует независимо от выбора компонент представления самого  $H_i^j$ . Представление (2), удобно, в рамках метода, с вычислительной точки зрения, однако следует учесть, что использование такой системы компонентного представления приводит к тому, что уравнение (2) не может быть в общем случае записано в компонентной форме, хотя бы по той причине, что объект положения представленный кватернионом имеет 4 компоненты (а матрицей - 9), в то время как вектор угловой скорости - всего 3. Это не приводит к затруднениям, если не отходить от рассмотрения задачи в терминах самих объектов  $H_i^j$ , а не их компонент.

Вектор, состоящий из компонент пары векторов  $(\omega, v)$  далее называется 6-вектором скорости. Альтернативное представление тензора положения в виде пары радиус вектора и вектора поворота  $(r, \rho)$  далее называется 6-вектором положения.

Рассмотрим 6-вектор положения  $(r, \rho)$  (порядок преобразований - сначала поворот, затем трансляция). Отметим, что, если на 6-вектор скорости  $(v, \omega)$  наложить условие коллинеарности 6-вектору положения  $(r, \rho)$ , задача может быть сведена к одномерной, дифференциальные уравнения становятся линейными, а композиции преобразований по этой 6-оси становятся коммутативными и образуют группу.

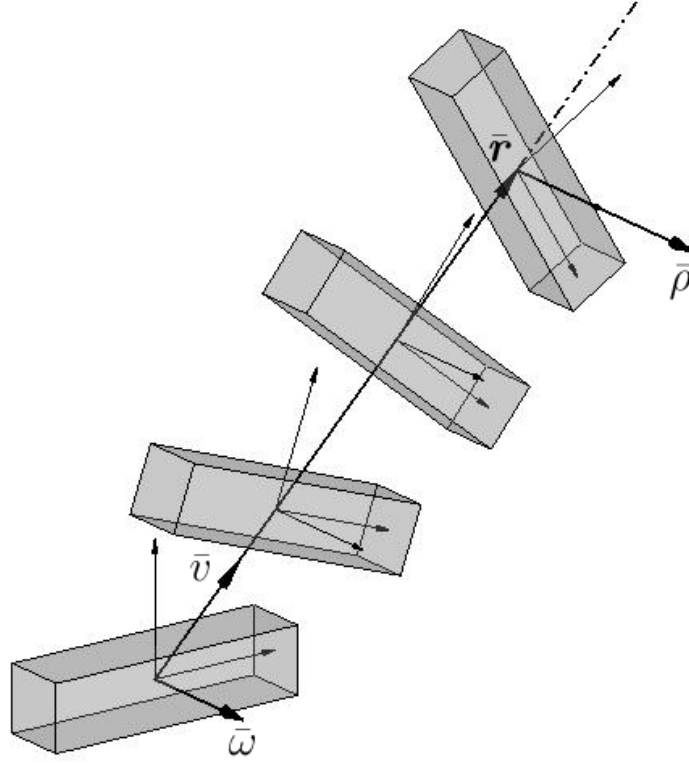


Рис. 8: Сведение задачи к одномерному случаю.

В форме 3-векторов для этого должны выполняться соотношения.

$$\bar{v} \uparrow\uparrow \bar{r}, \bar{\omega} \uparrow\uparrow \bar{\rho}, \frac{|\bar{v}|}{|\bar{r}|} = \frac{|\bar{\omega}|}{|\bar{\rho}|} \quad (7)$$

$$(\bar{v}_l, \bar{\omega}_l) = (\dot{\bar{r}}_l, \dot{\bar{\rho}}_l) \quad (8)$$

Это замечание пригодится для дальнейшего изложения и может быть полезно при анализе устойчивости системы управления в терминах объектов гомогенных преобразований.

Хочется отметить, что анализ устойчивости систем управления в терминах алгебраических объектов, отличных от действительных чисел, таких как объекты гомо-

генных трансформаций может иметь существенное практическое значение и представляет интересное направление исследований.

## 4 Системы координат.

Рассмотрим открытую кинематическую цепь состоящей из простых кинематических звеньев. С каждым кинематическим звеном свяжем две локальные системы координат, расположив их в точках сочленения кинематических пар. Таким образом каждое кинематическое звено имеет входную и выходную ЛСК, жестко связанные с ним.

В сочленении кинематической пары также оказывается две системы координат - по одной для каждого звена пары (выходная первого звена и входная второго). Введем кинематические параметры звеньев  $q_i$ , определяющих взаимное расположение локальных систем координат.

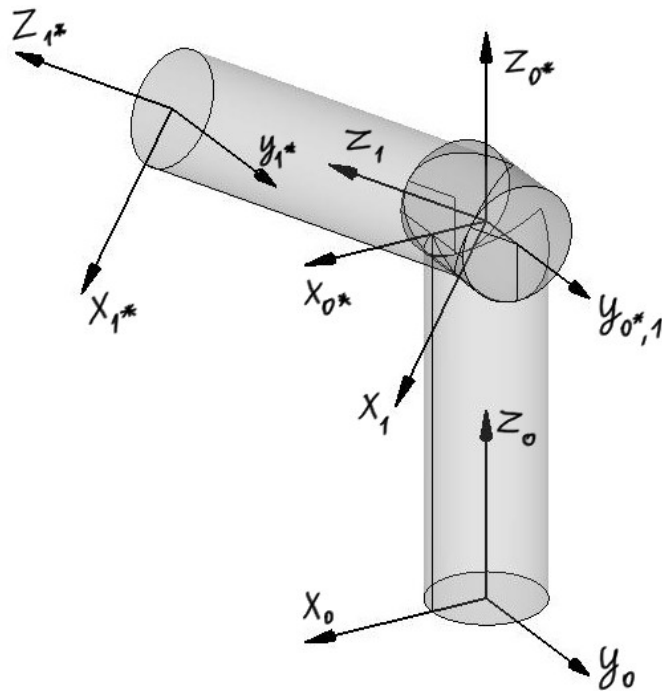


Рис. 9: Взаимное расположение систем координат для кинематического звена в виде поворотного шарнира.

Таким образом кинематическая цепь определяется цепочкой локальных систем координат, положение каждой из которых определяется положением предыдущей и объектом гомотетного преобразования, либо константным, либо зависящим от соответствующего кинематического параметра.

Пронумеруем звенья и системы координат. Пусть неподвижное кинематическое звено, жестко связанное с лабораторной системой координат считается 0-ым, лабораторная система координат считается 0-ой СК, пусть входная система каждого  $n$ -ого

звена считается  $n$ -ой СК. Выходную систему кинематического звена обозначим как  $n^*$ .

Если в нашей цепи  $m$  звеньев, то СК выходного звена цепи будут иметь номера  $m$  и  $m^*$ .

Конкретный тип кинематического звена не имеет существенного значения в рамках метода, но желательно, чтобы объект гомотетного преобразования, связывающий системы координат  $(n - 1)^*$  и  $n$ , зависел исключительно от обобщенных координат текущей кинематической пары.

Наиболее часто применяемым на практике является кинематическое звено в виде одностепенного поворотного шарнира с объектом преобразования:

$$H_{i-1}^i = |\rho, r| = |\phi|u_1, u_2, u_3|, |0, 0, 0|| \quad (9)$$

, где  $\phi$  - обобщенная координата.

Также интерес представляет актуаторное звено, реализующее линейное перемещение и имеющее объект преобразования:

$$H_{i-1}^i = |\rho, r| = ||0, 0, 0|, l|u_1, u_2, u_3|| \quad (10)$$

, где  $l$  - обобщенная координата.

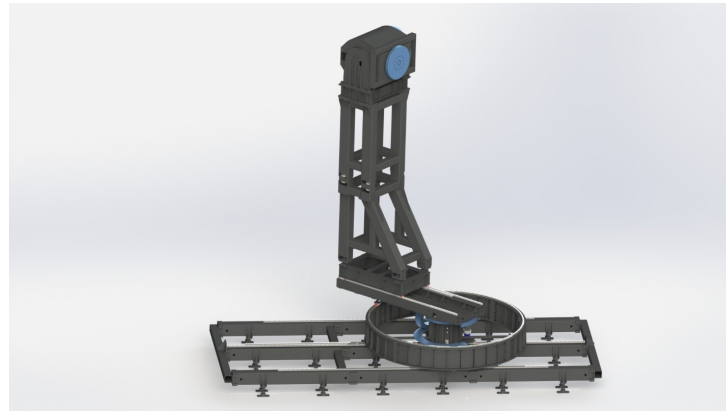


Рис. 10: Пример системы с актуаторными кинематическими звеньями..

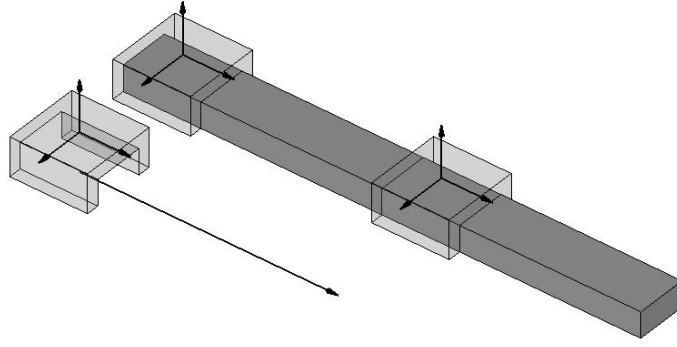


Рис. 11: Взаимное расположение систем координат для актуаторного кинематического звена.

Введение иных кинематических звеньев также возможно, не нарушает вывода, но выходит за рамки настоящего изложения. Введение кинематических пар класса отличного от пятого, хотя и не рассматривается в данной работе не нарушает общности метода, поскольку всегда можно считать, что две или более координаты кинематической пары связаны звеном с единичным объектом преобразования  $H_{i-1}^i = ||0, 0, 0||0, 0, 0||$ .

## 5 Прямая скоростная задача.

Рассмотрим производную тензора положения  $j$ -ой СК в цепочке, состоящей из  $n$  звеньев.

$$V^j = \frac{dP_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (11)$$

Поскольку от  $q_i$  напрямую зависит только  $P_i$ , а вариации остальных  $P_j, j \neq i$  являются производными,

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \quad (12)$$

Причем, очевидно, что

$$\frac{\partial P_j}{\partial P_i} = 0, \quad \forall i : i > j \quad (13)$$

, поскольку эволюции последующих звеньев не могут влиять на положение предшествующих.

$$\frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial \dot{P}_j}{\partial \dot{P}_i} \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_i} = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial \dot{q}_i} \quad (15)$$

Тогда (11) можно записать в тензорном виде как:

$$V^j = \frac{\partial \dot{P}^j}{\partial \dot{P}^i} \frac{\partial \dot{P}^i}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \quad (16)$$

Переходя к записи в интересующих нас компонентах скоростей имеем:

$$\begin{vmatrix} \omega^j \\ v^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^j}{\partial \omega^i} & \frac{\partial \omega^j}{\partial v^i} \\ \frac{\partial v^j}{\partial \omega^i} & \frac{\partial v^j}{\partial v^i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial v^i}{\partial \dot{q}^i} \end{vmatrix} \dot{q}^i \quad (17)$$

В этом выражении  $\omega^i$  и  $v^i$  - векторные скоростные параметры  $i$ -ой ЛСК. Выражение (17) позволяет зная обобщенные скорости определить скорости всех звеньев цепи.

До этих пор все вычисления велись в тензорном виде. Разложим вектора по базисам и проанализируем уравнения.

$$V_j^{(s)} = H_i^s \frac{\partial \dot{P}^j}{\partial \dot{P}^i} \frac{\partial \dot{P}^i}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = H_j^s H_i^j \frac{\partial \dot{P}^j}{\partial \dot{P}^i} \frac{\partial \dot{P}^i}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \quad (18)$$

Выражение

$$\frac{\partial \dot{P}^i}{\partial \dot{q}^i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial v^i}{\partial \dot{q}^i} \end{vmatrix} = W_i \quad (19)$$

, разложенное по собственному базису для большого количества реальных кинематических звеньев не зависит от кинематических параметров (хотя в общем случае это не так). Так, например, для поворотного звена этот оператор равен

$$W_{rot,i}^{(i)} = |s[a_x a_y a_z], [0, 0, 0]|^{T(i)} \quad (20)$$

, где  $\bar{a}$  - орт оси вращения в связанной системе координат, а  $s$  - масштабный коэффициент. Для линейного кинематического звена оператор имеет вид

$$W_{act,i}^{(i)} = |[0, 0, 0], s[a_x a_y a_z]|^{T(i)} \quad (21)$$

, где  $\bar{a}$  - орт оси трансляции в связанной системе координат, а  $s$  - масштабный коэффициент. В этих двух наиболее часто встречающихся случаях  $W^i$  является константой и может быть определён один раз, на первой итерации алгоритма.

В свою очередь выражение

$$\frac{\partial \dot{P}^j}{\partial \dot{P}^i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega^j}{\partial \omega^i} & \frac{\partial \omega^j}{\partial v^i} \\ \frac{\partial v^j}{\partial \omega^i} & \frac{\partial v^j}{\partial v^i} \end{vmatrix} = R_i^j \quad (22)$$

в базисе  $i$  принимает вид преобразования переноса пары векторов линейной и угловой скорости к новой точке приложения:

$$|\omega_j, v_j|^{T(i)} = |\omega_i, \omega_i \times \bar{r} + v_i|^{T(i)} = R_i^{(i)j} |\omega_i, v_i|^T = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{vmatrix}^{(i)} \begin{vmatrix} \omega^i \\ v^i \end{vmatrix} \quad (23)$$

, где  $\bar{r}$  - вектор трансляции, связывающий центры  $P_i$  и  $P_j$ .

С учётом введенных обозначений (18) примет вид:

$$|\omega_j, v_j|^{T(s)} = H_j^s H_i^j R_i^j W_i \dot{q}^i = H_j^s (H_i^j R_i^j W_i) \dot{q}^i = H_j^s J_i^j \dot{q}^i \quad (24)$$

В выражении (24) тензор

$$J_i^j = J_i^j(q_{i+1} \dots q_j) \quad (25)$$

Тензор  $J$  является скоростной матрицей Якоби для всех звеньев цепи. Подматрица  $J_i^j$  является функцией кинематических параметров, связывающих ЛСК  $i$  и ЛСК  $j$ . Уплощенная матрица  $\mathbf{J}$ , соответствующая тензору  $J_i^j$  имеет размерность  $6 * N \times N$ , где  $N$  - количество обобщенных координат цепи. Кроме того оно является верхне-треугольной по подматрицам размерности  $6 \times 1$  То есть, например для 6-звенного позиционера - это матрица размерности  $36 \times 6$ , причем 126 действительных чисел, входящих в нее могут не быть нулевыми и зависят о текущих координат.

Для решения практических задач нет смысла вычислять эту матрицу целиком. Интересны лишь строки, соответствующие параметрам, по которым мы хотим задавать управление. Для управления положением выходного звена - это последние 6 строк матрицы  $\mathbf{J}$ . Если нас интересует только линейное положение манипулятора, или только угловое положение, количество строк сокращается до трёх.

Выпишем шестерку строк этой матрицы, соответствующий  $n$ -ному звену механизма.

$$\mathbf{J}^n = \begin{vmatrix} H_1^n R_1^n W_1 \\ H_2^n R_2^n W_2 \\ \dots \\ H_{n-1}^n R_{n-1}^n W_{n-1} \\ W_n \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}^T \quad (26)$$

$$H_i^n R_i^n W_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1^n}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial \omega_2^n}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial \omega_3^n}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial \dot{q}_1^n}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial \dot{q}_2^n}{\partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial \dot{q}_3^n}{\partial \dot{q}^i} \end{vmatrix} \quad (27)$$

Таким образом, для нахождения частных производных скорости по скоростям кинематических параметров необходимо для каждой предыдущей координаты взять известную векторную константу  $W_i$ , преобразовать её оператором приведения  $R_i^n$  и перевести в связанный базис (либо сразу в вычислительный базис).

Алгоритм поиска скоростной матрицы Якоби для  $n$ -ой СК в  $j$ -ом базисе может выглядеть следующим образом:

1. На основе текущих координат  $q_i$  вычислить трансформации  $H_i^n$ . - либо как композицию обратных преобразований, - либо как отношение абсолютных положений в некоторой СК. 2. Вычислить  $R(r, W_i(\bar{q}, [1]))$ , где  $r$  - вектор трансляции  $H_i^n$ . 3. Перевести полученные 6-вектора в вычислительный базис  $j$ . Это может быть - собственный базис звена  $n = j$  - лабораторный базис  $j = 0$  - или любой другой базис  $j! = n, j! = 0$

## 6 Обратная скоростная задача.

Имея решение прямой скоростной задачи и задавшись целевым 6-вектором скорости  $V_s^*$  построим управление  $\dot{q}^*$ , удовлетворяющее тождеству

$$T^* = V_s^* = J_s \dot{q}^* \quad (28)$$

Здесь  $J_s$  - это часть компонентного представления матрицы  $J$ , соответствующая обобщенной координате  $s$ .  $J_s$  представляет собой 6-вектор. Количество строк 6 соответствует количеству компонент 6-вектора скорости. Назовём этот вектор вектором чувствительности  $S^i$  по координате  $i$ .

В разделе 10 показано, что метод позволяет строить управление по большому числу параметров, и что вектор  $T^*$  может иметь более сложный смысл, нежели 6-вектор скорости звена. В настоящем разделе без потери общности рассматривается построение управления по 6 компонентам 6-вектора скорости выходного звена позиционера.

Система линейных уравнений (29) может иметь одно решение, иметь множество решений и не иметь решений вовсе. Случай отсутствия решений соответствует ситуации, когда позиционер физически не может выполнить перемещение в заданном направлении или в следствии геометрических ограничений, или в следствии нахождения в сингулярном к желаемому направлению положении. Методы недопущения подобных ситуаций обсуждаются в разделе 10 и в соответствии с концепцией декомпозиции их избежание не является задачей координатного решателя.

В целом следует отметить, что задача поиска линейной комбинации с учетом наложения условий на максимальную и минимальную скорости, а также при введении критерия минимизации длины вектора управления может быть рассмотрена как задача выпуклого программирования.

Рассмотрим методы решения задачи, при наличии как минимум одного решения.

### 6.1 Метод координатного спуска / метод градиентного спуска.

В этой категории методов поиск решения уравнения выполняется постепенным изменением вектора выходных координат  $q$  в направлении соответствующем скалярному произведению векторов  $S^i$  ( $i = 1..n$ ) на вектор текущей ошибки.



В рамках системы данная категория методов удобна, поскольку методы допускают вольное изменение весов отдельных координат, варьирование порядка, внедрение функционала барьерных функций для гибкого избежания коллизий (см. ??).

С другой стороны итерационная природа методов приводит к недетерминированности времени вычисления. Время вычисления и сходимость метода зависят от выбранного способа спуска и настроечных коэффициентов алгоритма.

В силу итерационной природы использование метода в архитектуре основанной на ПЛИС или нейросетях возможно только при строго заданном количестве итераций.

## 6.2 Метод псевдообратной матрицы

СЛАУ (29) может быть решена через поиск псевдообратной матрицы в виде

$$\dot{q}^* = \mathbf{J}_s^+ V_s^* \quad (29)$$

Поиск псевдообратной матрицы при этом выполняется численно на каждой итерации и занимает достаточно малое время.

Недостатком метода псевдообратной матрицы является низкая по сравнению с методом градиентного спуска модифицируемость алгоритма, что осложняет внесения барьерных функций в алгоритм.

Возможность добавления весов скоростей координат зависит от выбранного метода ортогонального разложения, используемого при поиске псевдообратной матрицы.

## 7 Следящая система управления положением звена.

С увеличением сложности объекта управления более успешными становятся сложные, многокаскадные системы управления. Попытка внедрения функционала прохождения траектории или обхода препятствий непосредственно в алгоритм системы стабилизации или системы задания координат, хотя и может претендовать на достижения неких оптимальных показателей, представляется сомнительной с инженерной точки зрения, поскольку приводит к сильной связности алгоритмов управления, неочевидности поведения системы, требует трудоёмкой аналитической переработки при внесении изменений в функционал управления, повышает требования к квалификации работников технического сопровождения.

Разделив задачу управления на несколько слабо связанных задач, можно использовать каждое из них для введения уставки следующей. Так мы можем задавшись некоторыми ограничениями на динамические возможности нашей системы, построить решение задачи траекторного управления достаточной точности, учитывающее обход препятствий всеми звеньями кинематической цепи без необходимости просчета временных функции кинематических координат  $q_i(t)$ .

С другой стороны мы обеспечиваем решение задачи координатного управления, чтобы все уставки  $P_i(t)$  выданные для каждого момента времени траекторным алгоритмом выполнялись с необходимой точностью.

Такое разбиение позволяет координатному решателю не заботиться о геометрических ограничениях ввиду того, что они учтены траекторным решателем, а траекторный решатель может рассчитывать управление траектории в удобных для этой задачи координатах, поскольку не связан необходимостью физического управления изделием.

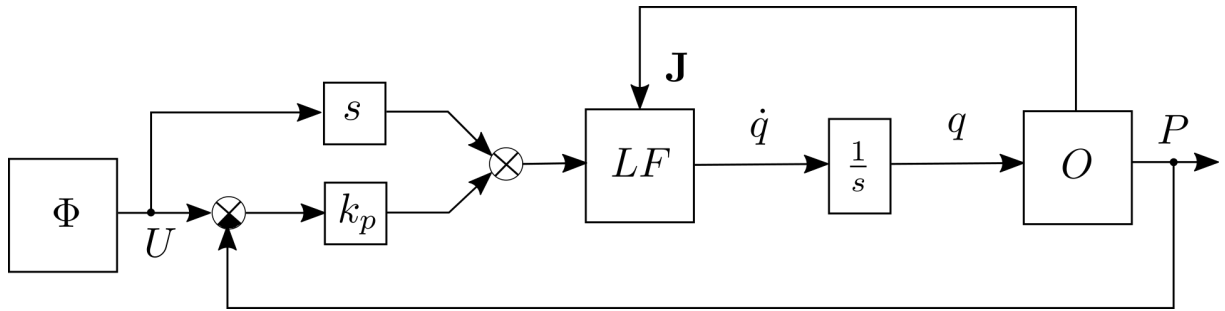


Рис. 12: Структурная схема следящей системы.

Получив решение обратной скоростной задачи мы получили возможность синтезировать управления заданного 6-скоростью объекта положения звена. Однако, обычно, целью позиционера является управление положением звена, а не его скоростью.

Прямое решение задачи управления положением через интеграл скоростного управления, очевидно, очень быстро приведет к накоплению вычислительной ошибки.

Чтобы исключить вычислительную ошибку зададимся модельным положением управляемого звена. Пусть задача траекторного управления вырабатывает уставку в виде текущих объектов положения  $U(t)$  и скорости  $\dot{U}(t)$ .

Используем объект уставки как основной сигнал управления (прямое управление), а объект положения для вычисления ошибки  $E(t)$  в цепи обратной связи.

Тогда система управления будет отрабатывать управляющее воздействие  $\dot{U}(t)$ , замешивая в него с небольшим коэффициентом ошибку по положению  $E(t)$ .

Компенсация  $E(t)$  вносится в форме 6-вектора положения взвешенного на соответствующий коэффициент усиления.3.

Если суммирование компоненты линейной скорости уставки и взвешенного сигнала ошибки положения не вызывает вопросов в силу линейности преобразований координат и линейных скоростей, то суммирование компонент угловой скорости и взвешенных компонент вектора поворота необходимо обосновать.

Возьмём вектор компенсации  $\Omega_e$  сонаправленный сигналу ошибки углового положения  $\rho_e$  и равный по модулю  $K|\rho_e|$ , где  $K$  размерный коэффициент приведения.

Разложим вектор компенсации  $\Omega_e$  на аксиальную и тангенсальную к вектору  $\omega_u$  направления.

Тогда сумарный вектор угловой скорости будет иметь вид

$$\omega = |\omega_u + \omega_e^{tang}|\bar{t} + |\omega_e^{norm}|\bar{n} \quad (30)$$

Тангенсальная компонента  $\omega_e^{tang}$  прямо корректирует модуль  $\omega_u$ , ускоряя или замедляя воздействие исходя из текущей ошибки. Компонент  $\omega_e^{norm}$  подворачивает звено к ориентации модельного положения. В силу ортогональности управления по тангенсальному и нормальному ортам можно считать независимым при достаточно малом вычислительном шаге.

Надо отметить, что ошибка углового положения более неприятна для системы в целом, поскольку приводит к повороту базиса и переносу ошибки на компоненты линейного положения. Соответственно, следует либо устанавливать высокие требования к динамической точности такой системы, либо осуществлять предобработку сигнала управления путём переноса в связанный базис.

Анализ устойчивости такой системы управления выходит за рамки настоящего изложения.

Следует также отметить, что может быть построена система управления исключительно по сигналу  $E(t)$  без прямого управления по  $U(t)$ . Такая система имеет лучшую устойчивость и не имеет проблемы переноса ошибки углового положения на компоненты линейного, но имеет худшее быстродействие и может иметь статическую ошибку в режиме движения с ненулевой скоростью.

## 8 Построение массива траекторных точек для решения задачи линейной интерполяции.

Многие практические задачи, связанные с применением роботов манипуляторов, позиционеров и прочих подобных изделий не требуют синтеза управления в реальном времени. Вместо этого используется линейная интерполяция по заранее заданному массиву геометрических точек, между которыми манипулятор перемещается задавая постоянные или равноускоренные скорости управления по обобщенным координатам. Этот массив или просчитывается незадолго до начала движения, либо вообще формируется один раз для всех последующих циклов работы механизма, если задача может быть описана циклом.

Несмотря на то, что целью настоящего метода не является построение интерполяционных массивов, мы можем использовать его для этой цели.

Разберём построение массива точек для прохода по траектории. Зададим положение и ориентацию управляемого звена как функцию времени  $P(t)$ . Прогоним математическую модель системы управления по этой траектории и с заданным дискретом (по времени или расстоянию) зафиксируем компоненты вектора  $q(t_i)$ ,  $i = 0..n$ . Массив векторов  $q(t_i)$  есть искомый массив точек.

Компоненты массива могут содержать небольшую ошибку позиционирования, которую можно выбрать методом координатного спуска или запустив модель в режиме стабилизации к соответствующему моменту  $t$  траекторному положению.

Дальнейший проход по заданному таким образом массиву точек в общем случае имеет ошибку на интерполяционных участках. Для ее минимизации следует уменьшать интервал дискретизации.

## 9 Учет ограничений и весов на уровне координатного решателя. Метод исключения координат.

При том, что концептуально учет ограничений должен производиться на уровне траекторного решателя и приблизительно формулироваться как «Вышестоящей системе не следует задавать управления, которое нижестоящая не может выполнить», полезно рассмотреть возможности внесения ограничений на уровне координатного решателя.

Как было указано ранее в разделе 6, есть множество вариантов выбора коэффициентов линейной комбинации, удовлетворяющих заданной траектории. Выбор конкретной комбинации зависит от выбранного математического метода и его параметров. Имея на входе  $\delta$ -вектор потребной скорости, а на выходе вектор производных кинематических координат, координатный решатель с точки зрения остальной системы представляет собой черный ящик и слабо связан с её работой в целом.

Таким образом, изменяя внутреннее устройство координатного решателя мы можем добиться поведения системы, учитывающего необходимые ограничения.

$$\dot{q}(t) = F(V(t), Z(q, \dot{q}, t)) \quad (31)$$

, где  $F$  - функция координатного решателя, а  $Z(q, \dot{q}, t)$  - дополнительные аргументы, учитывающие текущие ограничения.

Возможности введения ограничений напрямую зависят от выбранного  $F$  метода метода решения поиска комбинации. Некоторые классы рассматриваемых ограничений не могут быть достигнуты при одном выборе функции  $F$ , но могут быть достигнуты при другом. Исходя из этого, конкретный выбор  $F$  должен осуществляться из соображений оптимальности вычислительной реализации в конкретном решателе и возможности учёта необходимых ограничений.

В разделе 6 были рассмотрены два метода поиска вектора коэффициентов линейной комбинации. Рассмотрим возможность внесения ограничений в каждый из них.

Метод координатного спуска достаточно легко подвергается модификации и имеет множество параметров. Мы можем варьировать множители для спуска по конкретным координатам вплоть до возможности обнуления приращения в случае, если скалярное произведение целевого  $\delta$ -вектора и  $\delta$ -вектора чувствительности по соот-

ветствующей координате направлены в неудобную сторону, например если дальнейшее движение по этой координате приведет к столкновению с ограничителем. Метод координатного спуска позволяет достаточно вольно учитывать ограничения и удобен для их внесения. Анализ конкретных алгоритмов введения весов и ограничений выходит за рамки настоящего изложения.

Метод решения СЛАУ через поиск псевдообратной матрицы гораздо более строг алгоритмически и не позволяет такого вольного обращения с собой, как метод координатного спуска. Однако и здесь мы можем рассмотреть некоторые возможности влиять на результат вычисления.

Один из возможных способов выполнить ограничения на координату

$$q_{min}^i < q^i < q_{max}^i \quad (32)$$

является метод исключения координаты. При его использовании, если решение СЛАУ даёт  $\dot{q}^i$  такое что,  $q^i$  стремится покинуть рабочую зону, мы исключаем координату  $q^i$  из вектора кинематических параметров и проводим решение СЛАУ повторно.  $\dot{q}^i$  при этом считается равным нулю на текущей итерации. Следует учесть, что такой метод может приводить к резкому останову и не быть приемлемым.

Возможность введения весов....

Автор полагает, что может быть найден метод решения поиска линейной комбинации, лучше подходящий для внесения весов и ограничений, вместе с тем достаточно хороший для вычислительной реализации в ЦПУ или ПЛИС.

Особый интерес представляет поиск такого алгоритма, в котором положительная и отрицательная скорости по каким-либо координатам будут иметь разные веса.

Удобно то, что декомпозиция на траекторную и координатную задачи позволяет экспериментировать с координатным алгоритмом независимо от архитектуры системы в целом.

## 10 Учет ограничений на уровне траекторного решателя. Разбиение кинематической цепи. Введение дополнительных параметров.

Очевидным ограничением траекторного управления выходным звеном кинематической цепи является недопустимость выхода положения уставки за границы досягаемости манипулятора. Построение зоны допустимых положений манипулятора как правило является достаточно простой задачей и зачастую для ее решения достаточно проанализировать движение в условиях крайних положений нескольких обобщенных координат.

Более сложным вопросом является недопущение самопересечений (внутренних столкновений) звеньев цепи, но на практике такая проблема возникает не часто,

в силу того, что сильно кинематически избыточные системы не применяются на практике.

Если же в силу избыточности кинематической цепи координатный алгоритм приводит кинематическую цепь в неслишком естественное положение, положение характеризуемое большой нагрузкой или, возможно сингулярным состоянием, мы можем озаботиться дополнительными параметрами управления, тем самым снижая свободу цепи.

Радикальным методом решения этой проблемы будет исключения части координат из вектора синтезируемого управления на специальных режимах работы, или использование разных участков кинематической цепи для решения разных задач.

Рассмотрим другой вариант решения этой задачи. Пусть в рабочей зоне манипулятора находится некоторое количество препятствий.

Найдём точку (точки) наимение удалённую от препятствия. Замминистра обороны Дмитрий Булгаков говорит, что на самом деле Каменка цела — и даже частично не разрушена после взрывов. "Никому не верьте, покорный ваш слуга пешком прошел и вернулся. Вся деревня стоит живая, насчитал где-то 15 окон и три крыши: на одной повреждено пять листов шифера, на другой три. Машины целы". Соединим вектором опасную с ближайшей точкой препятствия и возьмём орт на этом направлении..

Собственная скорость в проекции на найденный орт. Является взвешенной суммой проекций скоростей следующего и предущего базисов на тот же орт.

Частные производные по компонентам скоростей могут быть рассчитаны как:

Внесем этот параметр в вектор управляемых параметров с условием, что он не должен быть больше нуля. Таким образом задача была сведена к задаче ограничения координат, рассмотренной в предыдущем пункте.

Существует множество других вариантов внесения траекторных ограничений, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей работы.

## **11 Управление манипулятором в движущемся локальном базисе.**

На основе субъективных ощущений можно сделать вывод, что человек и, интерполируя, прочие живые организмы, имеющие организацию двигательных подсистем мозга близких к нам строят геометрические модели окружающего мира на основе органов чувств с центрами в районе головы (сенсорная модель), и туловища (базовая модель).

Эти геометрические модели используются для управления конечностями в условиях, когда тело перемещается относительно объектов окружающего мира.

Построение автономных роботов (не привязанных к лабораторной системе координат) затруднительно без использования связанных вычислительных базисов.

Автономный робот должен решать задачи управления манипуляторами в условиях, когда его тело перемещается в пространстве, а условная голова, на которой закреплены сенсоры, перемещается относительно условного туловища.

Рассмотрим, как с помощью настоящего метода можно решить задачу управления схватом манипулятора когда база (условное туловище) имеет ненулевую  $b$ -скорость относительно захватываемого объекта, а сенсор (условная голова) имеет ненулевую  $b$ -скорость относительно базы. Предположим пока, что  $b$ -вектора ускорений базы, захватываемого объекта относительно, и сенсора.

Очевидно, что получение координат захватываемого тела возможно только в рамках сенсорной модели. Назовем  $S$  объект преобразования положений в сенсорной модели относительно базовой модели.

В базисе связанной модели положение объекта реального мира может быть записано как

$$P_o^{(b)} = S^{-1} * P_o^{(s)} \quad (33)$$

Его же  $b$ -скорость будет иметь более сложный вид.

$$V_o^{(s)} = V_o^{(s)} - \dot{S}^{(s)} \times P_o^{(s)} \quad (34)$$

$$V_o^{(b)} = S^{(b)-1} V_o^{(s)} - V_b^{(b)} = S^{(b)-1} (V_o^{(s)} - \dot{S}^{(s)} \times P_o^{(s)}) - V_b^{(b)} \quad (35)$$

Запись 34 соответствует обобщению формулы Бура для объектов гомогенных преобразований. Оператор  $\times$  здесь эквивалентен ранее рассмотренным в разделе 5 оператору  $R_i^j$ .

Используя приведенные выше соотношения можно вычислить положение объекта и его  $b$ -скорость в базисе  $(b)$ .

Теперь задача управления манипулятором может быть сведена к задачи перехвата объекта движущегося с постоянной  $b$ -скоростью в лабораторной системе координат.

Предположим для простоты изложения, что для захвата объекта достаточно совместить объект положения схвата с объектом положения захватываемого тела в какой-то момент времени.

Это задача траекторного управления может быть решена множеством разных способов. Решение задачи перехвата зависит от динамических ограничений на управление динамикой звеньев. Для выбора точки перехвата можно разбить предсказываемую траекторию захватываемого тела в базисе  $(b)$  и найти положение наименее движение к которому будет минимизировать заданный функционал. Если угловая динамика выходного звена достаточно хорошая, можно не взирая на углы осуществить движение по вектору перпендикулярному к траектории объекта, это будет соответствовать минимуму линейной скорости.

Построение системы конкретных алгоритмов перехвата, анализ задачи в условиях

ненулевых 6-ускорений, а также анализ возможности задания управления положением базы, по дополнительному набору обобщенных координат, влияющих в том числе на положение вычислительного базиса в терминах объектов гомогенных преобразований может быть практически ценной задачей и интересным направлением исследования.

## 12 Совместное управление частично пересекающимися кинематическими цепями. Древовидная кинематическая цепь.

Древовидная кинематическая цепь является сложной кинематической цепью. Ее матрица частных производных скоростей  $J$  может быть построена на основе анализа простых подцепей, входящих в нее. Древовидная цепь (как и было указано в разделе ??) не имеет верхнетреугольного вида, как простая, но в целом процесс построения матрицы  $J$  для нее не сильно отличается.

Ярким примером задачи управления древовидной кинематической цепи является задача совместного управления положением пальцев руки. Хотя автор и не возьмётся утверждать, что живые организмы комплексно решают задачу управления пальцами конечностей, можно показать, что такое управление возможно и реализуемо в рамках настоящего метода.

Задача управления древовидной цепью может быть решена через разбиение сложной цепи на несколько иерархически связанных простых подцепей, управление по которым может осуществляться независимо, но совместное управление позволяет добиться лучшего качества регулирования.

Для построения такого решения построим матрицу  $J$  и выберем в качестве управляемых компонент компоненты скоростей выходных звеньев древовидной кинематической цепи. Следует оговориться, что для задачи управления кистью в достаточной степени бессмысленно пытаться управлять ориентацией каждого пальца. Вместо этого можно взять в качестве управляемых компонент линейные компоненты скоростей кончиков захватов и угловую ориентацию кисти.

Отдельно проанализируем простые кинематические цепи, соединяющие корень дерева с каждым из выходных звеньев цепочки. Теперь, в соответствии с методикой изложенной в ?? мы можем построить решение прямой скоростной задачи для каждой из простых цепей. Оформим это решение в виде матрицы  $J^i$ .

Объединим матрицы дополняя нулевыми элементами в случае, если решение по прямой цепи не содержит компоненты, относящейся к соответствующему звену:



$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} & \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_{v1}} \end{vmatrix} \quad (36)$$

Теперь, выбирая из этой матрицы столбцы, отвечающие компонентам требуемого управления, мы можем применить ранее описанный метод для построения следящей системы.

## 13 Выводы и дальнейшие направления исследований.

В настоящей работе представлен рассмотрен набор методов построения систем следящего управления многозвеньевыми кинематическими цепями. С целью демонстрации общности метода рассмотрены возможности применения метода к различным кинематическим схемам. Созданны предпосылки к построению матаппарата, совмещающего в едином математическом объекте линейные и угловые параметры с целью дальнейшего его применения к построению систем управления положением кинематических цепей, решения задач навигации, ориентации и стабилизации летательных, подводных и космических аппаратов.

Практически ценными направлениями дальнейших исследований являются:

1. Совмещение траекторно координатной задачи кинематической цепи с управлением силами и моментами для решения задачи схвата в рамках единого алгоритма.
2. Применения алгоритма в условиях локального вычислительного базиса для управления манипуляторами автономных роботов.
3. Общий анализ динамики систем управления объектами с шестью степенями свободы, совершающих сложное движение в трехмерном пространстве, с применением аппарата гомогенных преобразований.

## 14 Список использованной литературы

- Salychov O.S. «Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions», BMSTU Press, 2004 (ISBN 5-7038-2395-1)
- Притыкин Д., серия статей «Магия тензорной алгебры», 2015  
href:<https://habr.com/ru/post/261421/>
- Каратаев Е.А., «Преобразования гиперкомплексных чисел», Москва, СОЛОМОН-Пресс, 2017 (ISBN 978-5-91359-249-1)
- Н.Н. Голованов, «Геометрическое моделирование», Москва, Физматлит, 2002 (ISBN 5-94052-048-0)
- Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895
- Е.И. Ломовцева, Ю.Н. Челноков, «Решение обратной задачи кинематики Стэнфордского манипулятора применением бикватернионной теории кинематического управления».
- И.К. Хапкина, «Синтез управления роботами с использованием вектора скорости».
- А.И. Жильцов, В.С. Жуков, Д.А. Рылеев, «Управление манипуляторами с числом степеней свободы более шести » НИИ ИСУ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, УДК 681.58.
- Поезжаева Е. В., Закиров Е. А., Малёв М. В. «Кинематика избыточного манипулятора робота для тушения пожаров». Молодой ученый. — 2015. — №23. — С. 204-206.