УДК 62.50

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А.П. Крищенко
МГТУ им. Н.Э.Баумана
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5
E-mail: apkri@bmstu.ru

Ключевые слова: аффинные системы, матрица управляемости, канонический вид, квазиканонический вид, стабилизация, управляемость, линеаризация обратной связью, орбитальная линеаризация.

Аннотация: Обратная задача динамики известна из теоретической механики как задача нахождения сил действующих на тело по известной траектории его движения. Этот подход послужил основой для разработки в теории управления методов исследования нелинейных систем и синтеза алгоритмов управления. Он используется как в теоретических исследованиях, так и при решении задач планировании траекторий движения летательных аппаратов, мобильных роботов и других объектов и систем.

1. Введение

Обратная задача динамики (ОЗД) известна из теоретической механики как задача нахождения сил действующих на тело по известной траектории его движения [1]. В теории управления идея ОЗД используется достаточно давно. Некоторые ранние работы в этом направлении были отражены в обзоре [2]. Следует отметить большой вклад в развитие концепции ОЗД в теории управления П.Д.Крутько [3–5]. Концепция ОЗД использовалась в целом ряде работ при решении различных задач теории управления, в том числе при планировании траекторий движения летательных аппаратов [6, 8, 9].

Реализация стандартной схемы концепции ОЗД при решении задачи управления для объекта

(1) $$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m$$

предполагает два основных этапа: формирование траектории $x = x_d(t), t \in T = [t_0, t_*]$ и нахождение реализующего ее управления. С математической точки зрения траектория $x_d(t)$ не может быть задана произвольно, поскольку ее реализуемость зависит от разрешимости системы уравнений $\dot{x}_d(t) = f(x_d(t), u)$ относительно управлений. Поскольку обычно $n > m$, то даже в случае линейности уравнений объекта по управлениям, т.е. когда система уравнений относительно управлений имеет вид

$\dot{x}_d(t) = a(x_d(t)) + b(x_d(t))u$, возникает проблема ее совместности. Эта проблема существенно упрощается, если уравнения объекта заданы в переменных вход – выход. Например, пусть уравнения для объекта с m выходами y_i, $i = \overline{1,m}$ и m управлениями u_j, $j = \overline{1,m}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&y_1^{(n_1)} = f_1(\overline{y}) + \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(\overline{y})u_j,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_m^{(n_m)} = f_m(\overline{y}) + \sum_{j=1}^{m} g_{mj}(\overline{y})u_j,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $n_1 + \ldots + n_m = n$, а

$$\overline{y} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{y}_i = (y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, \ldots, y_i^{(n_i-1)}),\ i = \overline{1,m}.$$

В этом случае при задании изменения выходов объекта

$$y_i = y_{id}(t), \quad i = \overline{1,m},$$

для нахождения управлений, реализующих эти выходы, получаем квадратную систему линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_{1d}^{(n_1)}(t) = f_1(\overline{y}_d(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{1j}(\overline{y}_d(t))u_j,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{md}^{(n_m)}(t) = f_m(\overline{y}_d(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{mj}(\overline{y}_d(t))u_j.
\end{aligned}
$$

Эта система совместна и имеет единственное решение, если в точках заданной фазовой кривой $\overline{y} = \overline{y}_d(t)$ матрица коэффициентов при управлениях $G(\overline{y}) = (g_{ij}(\overline{y}))$ является невырожденной.

Для нахождения системы уравнений объекта в виде (2) можно использовать не только заданные выходы, но и любые другие функции состояния. В результате возникла задача преобразования уравнений (1) в области определения в эквивалентную систему типа вход – выход вида (2), которая строится с помощью некоторых функций состояния $\varphi_i(x)$, $i =]ovl1, m$, рассматриваемых в качестве (виртуальных) выходов объекта и подлежащих нахождению [11–17]. Эта задача оказалась тесно связанной с задачами линеаризации нелинейной листемы обратной связью в окрестности фиксированного состояния системы и построения нормальной формы системы с выходом [18–21]. Полученные в этих направлениях результаты, формально не связанные с концепцией ОЗД, позволили продвинуться в вопросах исследования нелинейных систем и решении ряда задач теории управления. Часть этих результатов для аффинных систем приведена разделе 3, причем для простоты изложения рассмотрен случай стационарных систем с одним управлением. Нестационарный случай и случай векторного управления можно найти в цитированной литературе. Используемые определения и обозначения введены в разделе 2. В разделе 4 рассмотрены подходы, позволяющие исследовать множества достижимости, управляемость и находить решения терминальных задач для нелинейных систем.

2. Определения и обозначения

Далее рассматриваются гладкие стационарные аффинные системы с одним управлением

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^{\mathrm{T}}$, $B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^{\mathrm{T}}$, $a_i(x), b_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Системе (3) на множестве Ω взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4}$$

со столбцами координат $A(x)$ и $B(x)$.

Обозначим через $[X, Y]$ коммутатор векторных полей X и Y. Коммутатор векторных полей X и Y, заданных на множестве Ω, тоже является векторным полем на множестве Ω. Столбец его координат вычисляется с помощью столбцов координат векторных полей X и Y. Так столбец координат коммутатора $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ равен $B'(x)\,A(x) - A'(x)\,B(x)$, где $A'(x)$, $B'(x)$ — матрицы Якоби. Далее $X\varphi(x)$ используется для обозначения производной Ли функции $\varphi(x)$ по векторному полю X, например, $\mathbf{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}$.

Понятие коммутатора позволяет сопоставить векторным полям $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ векторные поля $\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$, $k = 0, 1, \dots$, определяемые рекуррентно равенствами: $\mathrm{ad}^0_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{B}$; $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ при $k = 1$ и $\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathrm{ad}^{k-1}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}]$ при $k > 1$.

Пусть $U^k(x)$ — столбец координат векторного поля $(-1)^k \mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Из этих n столбцов можно составить квадратную матрицу порядка n

$$U(x) = (U^0(x), U^1(x), \dots, U^{n-1}(x)), \tag{5}$$

которую называют матрицей управляемости аффинной системы (3) [11].

3. Преобразование аффинных систем

3.1. Канонический вид

Среди аффинных систем (3) выделяют системы канонического вида. Это системы типа вход – выход, которые в переменных $z = (z_1, \dots, z_n)^{\mathrm{T}} \in Z \subset \mathbb{R}^n$ имеют вид

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dots,\ \dot{z}_{n-1} = z_n,\ \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \tag{6}$$

а в фазовых переменных $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, записываются в виде

$$y^{(n)} = f(\overline{y}) + g(\overline{y})u, \quad \overline{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^{\mathrm{T}} \in Y \subset \mathbb{R}^n \equiv \mathrm{F}^n. \tag{7}$$

Систему канонического вида называют регулярной на некотором множестве, если коэффициент g при управлении на этом множестве не обращается в ноль.

Теорема 1. *[11–17] Для того, чтобы для аффинной системы (3) в множестве Ω существовали переменные в которых она имеет канонический вид (7) необходимо и достаточно чтобы существовала функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющая двум условиям:*

1) эта функция в Ω является решением системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\varphi(x) = 0, \quad k = \overline{0, n-2}; \tag{8}$$

2) соотношения

$$y^{(i)} = \mathbf{A}^i\varphi(x), \quad i = \overline{0, n-1} \tag{9}$$

являются гладкой невырожденной заменой переменных в Ω, $\overline{y} = \Phi(x)$.

В системе (7) канонического вида

$$f(\overline{y}) = \mathbf{A}^n\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\overline{y})}, \qquad g(\overline{y}) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\overline{y})}, \tag{10}$$

где $x = \Phi^{-1}(\overline{y})$ обратная замена переменных, $\overline{y} \in Y = \Phi(\Omega)$.

Желание получить существенно более простой критерий эквивалентности аффинной системы и системы канонического вида приводит к известному локальному условию существования в некоторой окрестности точки $x_* \in \mathbb{R}^n$ решений у системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Это условие сразу приводит к необходимым и достаточным условиям линеаризации аффинной системы обратной связью [18–21], которые для аффинной системы (3) состоят в том, что система уравнений (8) в окрестности точки x_* полная, а матрица управляемости (5) в точке x_* невырождена. При их выполнении эквивалентная система канонического вида регулярна в точке x_*. В случае вырожденности матрицы управляемости в точке x_* эквивалентной системой канонического вида может быть только нерегулярная в этой точке система.

3.2. Квазиканонический вид

Среди аффинных систем (3) выделяют также системы квазиканонического вида, которые имеют вид

$$y^{(r)} = f(\overline{y}, \eta) + g(\overline{y}, \eta)u, \quad \dot{\eta} = q(\overline{y}, \eta), \tag{11}$$

где $\overline{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(r-1)})^{\mathrm{T}}$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-r})^{\mathrm{T}}$, $q(\overline{y}, \eta) = (q_1(\overline{y}, \eta), \ldots, q_{n-r}(\overline{y}, \eta))^{\mathrm{T}}$, $(\overline{y}, \eta)^{\mathrm{T}} \in O \subset \mathbb{R}^n$.

Систему квазиканонического вида называют регулярной на некотором множестве, если коэффициент g при управлении на этом множестве не обращается в ноль.

Теорема 2. *[12, 17] Для того, чтобы для аффинной системы (3) в множестве Ω существовали переменные в которых она имеет квазиканонический вид (11) необходимо и достаточно чтобы существовали функции $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, n-r}$ удовлетворяющие трем условиям:*

1) функция $\varphi(x)$ в Ω является решением системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\varphi(x) = 0, \quad k = \overline{0, r-2}; \tag{12}$$

2) функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n-r}$ *в* Ω *являются решением линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка*

$$\mathbf{B}\varphi_i(x) = 0; \tag{13}$$

3) соотношения

$$y^{(i)} = \mathbf{A}^i\varphi(x), \quad i = \overline{0, r-1}, \quad \eta_j = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, n-r} \tag{14}$$

являются гладкой невырожденной заменой переменных в Ω, $(\overline{y}, \eta) = \Phi(x)$.

В системе (11) квазиканонического вида

$$f(\overline{y}, \eta) = \mathbf{A}^r\varphi(x), \quad g(\overline{y}, \eta) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x), \quad q_j(\overline{y}, \eta) = \mathbf{A}\varphi_j(x), \ j = \overline{1, n-r}, \tag{15}$$

где $x = \Phi^{-1}(\overline{y}, \eta)$ *обратная замена переменных,* $(\overline{y}, \eta) \in Y = \Phi(\Omega)$.

Отметим, что если в точке x_* выполнено условие $B(x_*) \neq 0$, то в окрестности этой точки аффинная система (3) всегда эквивалентна системе квазиканонического вида.

4. Стабилизируемость, множества достижимости и управляемость

Пусть аффинная система (3) эквивалентна системе канонического вида (7), определенной в области $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Если система (7) канонического вида регулярна в области Y, то аффинная система (3) эквивалентна линейной стационарной системе с матрицей управляемости полного ранга при наличии ограничений $\overline{y} \in Y$ на состояние. Поэтому она стабилизируема (локально), а свойства достижимости, управляемости и стабилизируемости в области Y зависят от структуры этого множества.

Если система канонического вида (7) нерегулярна в области Y, то аффинная система (3) стабилизируема (локально) в состояниях, в которых система канонического вида регулярна. В нерегулярных состояниях вопрос о стабилизируемости требует дополнительного исследования [7]. Это же касается исследования множеств достижимости и управляемости, которые в данном случае зависят и от множества Y и от множества $Y \cap \{g = 0\}$ [12].

Рассмотрим случай, когда аффинная система (3) не эквивалентна системе канонического вида (7), но эквивалентна системе квазиканонического вида (11), определенной в области $Y \subset \mathbb{R}^n$.

Если система квазиканонического вида (11) регулярна в положении равновесия, то известно, что ее стабилизируемость зависит от свойств системы нулевой динамики. Для решения задачи стабилизации нерегулярного положения равновесия предложен ряд подходов в нескольких работах, связанных с аффинными системами, выход которых не имеет корректно определенного относительного порядка. Однако достаточно общие условия стабилизируемости в этом случае пока неизвестны.

В последнее время появились работы с анализом структуры множеств достижимости и исследования управляемости систем квазиканонического вида. Например, в [10, 22–25] получены достаточные условия достижимости и управляемости для аффинных систем, которые не линеаризуются обратной связью. В этих работах основная идея решения двухточечной задачи управления для регулярной системы канонического вида основана на концепции ОЗД и реализуется в следующем виде. Конструктивно строится параметрическое множество траекторий, удовлетворяющих граничным условиям по переменным $\overline{y}$, и указываются управления, реализующие эти траектории. Затем предлагается алгоритм подбора таких значений параметров, чтобы соответствующая траектория удовлетворяла граничным условиям по остальным переменным состояния. В рамках этого подхода удается получать достаточные условия управляемости, в том числе и при наличии ограничений на состояния системы, но идеи и методы доказательств соответствующих утверждений еще только формируются.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-07-00329 и 14-01-00424) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ 53.2014.1).

Список литературы

1. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука.1981, 144 с.
2. Жевнин А.А., Колесников К.С., Крищенко А.П., Толокнов В.И. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепции обратных задач динамики (обзор) // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 4. С. 178-188.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
4. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
5. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учебное пособие для втузов.М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
6. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Известия РАН Теория и системы управления. 2003. № 5. С. 156-163.
7. Емельянов С.В., Крищенко А.П. Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения, 2012. Т. 48, № 11, С. 1515-1524.
8. Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Известия РАН Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 155-162.
9. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51-64.
10. Емельянов С.В., Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Исследование управляемости аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 449, № 1. С. 15-18.
11. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805-809.
12. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
13. Крищенко А.П. Оптимальное управление нелинейными системами // Автоматика и телемеханика. 1982. № 11. С. 48-56.
14. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 30-36.
15. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 6. С. 108-112.
16. Крищенко А.П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем. Управляемые нелинейные системы. М.: ВНИИСИ. 1991. Вып. 2. С. 5-14.
17. Крищенко А.П., Клинковский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. № 11. С. 1945-1952.

18. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Preprints of VII World Congress IFAC. Oxford: Pergamon Press, 1978. Vol. 2. P. 1115-1120.
19. Hunt L.R., Su R., Meyer G. Design for multiinput nonlinear systems // Diff. Geometric Control Theory. Boston: BirkHauser, 1983. P. 24-30.
20. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer, 1995. 587 p.
21. Jacubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bul. L'acad Pol. Sciense. 1980. Vol. 28, No. 9-10. P. 517-522.
22. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Преобразования аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. №. 2. С. 3-16.
23. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 11, С. 1410-1420.
24. Крищенко А.П. Орбитальная линеаризация аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 453, № 6. С. 620-623.
25. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12-30.