**UPPSALA UNIVERSITET**
Matematiska institutionen
Hania Uscka-Wehlou

Tentamen i matematik
**Linjär algebra och geometri 1**
3 januari 2018
STS, X, K, KeKand, Lärare

*Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori.*

**1.** (**Ej för dem med godkänd dugga.**) Avgör för vilka värden på konstanten $p$ ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + px_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = p \\ 2x_1 - x_2 + px_3 = 0 \end{cases}$$

a) har exakt en lösning

b) har oändligt många lösningar

c) saknar lösningar (är inkonsistent).

Bestäm även rangen till koefficientmatrisen för varje $p \in \mathbb{R}$.

**2.** Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0.$$

**3.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Martiserna $P_1, P_2, P_3$ kallas *permutationsmatriser*). Vi undersöker följande matriser som uppstår genom matrismultiplikation: $AP_1, AP_2, AP_3, P_1A, P_2A, P_3A$.

a) Räkna ut dessa sex matriser och beskriv med ord hur de skiljer sig från matrisen $A$.

b) Om $\det(A) = k$, vad är determinanterna till de sex matrisprodukterna? Motivera.

c) Om matrisen $A$ är inverterbar, vad kan du säga om inverterbarheten av de sex matriserna? Motivera.

**Var god vänd!**

**4.** Tre linjer i $\mathbb{R}^3$, $l_1$, $l_2$ och $l_3$, formar en triangel. Bestäm triangelns area och längden på alla tre höjder om linjernas ekvationer är:

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \quad l_2 : (x, y, z) = (3, 3 - 3t, 3 - 6t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$l_3 : \begin{cases} x = \phantom{-}3 + 3s \\ y = \phantom{-}0 \\ z = -3 - 3s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$$

**5.** Linjerna $l_1$, $l_2$ och $l_3$ från uppgiften 4 (ovan) ligger i samma plan.

a) Hitta planets ekvation i parameterform och i standardform (normalekvation).

b) Ange en riktningsvektor till varje linje. Vad kan du säga om dessa vektorer i termer av att vara linjärt beroende / oberoende? Skriv gärna ner en lämplig linjärkombination som bekräftar ditt svar.

c) Vilket resultat förväntar du dig att få om du skulle beräkna trippelprodukten av de tre vektorerna? Motivera ditt svar genom att ge en geometrisk tolkning. Testa din hypotes med en lämplig beräkning.

**6.** Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^3$.

a) Avgör om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

b) Avgör vilka av dessa vektorer som är ortogonala mot linjen

$$k : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ \phantom{x + 2}y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

**7.** Beräkna (kortaste) avståndet mellan linjen

$$k : (x, y, z) = (-10 + 3s, 3 - s, s),\ s \in \mathbb{R}$$

och linjen

$$l : (x, y, z) = (1 + 3t, 5, 2 + 2t),\ t \in \mathbb{R}$$

samt ange koordinater till de punkterna på linjerna $k$ och $l$ som ligger närmast varandra.

**8.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara symmetrin (speglingen) enligt planet $x + y + z = 0$. Beräkna $T$:s matris samt hitta bilden av punkten $(0, 1, 3)$ under avbildningen $T$.

**Lycka till!**