

Matematiska institutionen
UPPSALA UNIVERSITET
Gunnar Berg, Staffan Rodhe,
Robert Algervik

Prov i matematik
Baskurs i matematik
Diverse program
2013-08-26

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt på A-delen 1 poäng, på B-delen 2 poäng och på C-delen 5 poäng, totalt 40 poäng. För betyget tre fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. För B- och C-delarna accepteras endast välskrivna och tydliga lösningar för rättning.

A-del (endast svar krävs!)

1. Beräkna värdet av $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$.

2. Beräkna $(2^{-12} - 4^{-7})(2^{12} - 8^3)$.

3. Förenkla

$$\frac{3x}{3x+1} - \frac{1-3x}{9x^2-1} - 1.$$

4. Illustrera i komplexa talplanet de punkter z som uppfyller $|z+1| < 2$.

5. Lös ekvationen $\cos(3x) = \cos(4\pi)$.

6. Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln $y^2 + x^2 - 4y = 5$.

7. Beräkna summan $\sum_{k=2}^{11} \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k} \right)$.

8. Uttryck det komplexa talet $2 - 2i$ på polär form.

B-del (Fullständiga lösningar krävs!)

9. Vilka reella tal uppfyller olikheten

$$x - 2 \leq |x|.$$

10. Visa med induktion att för alla naturliga tal $n \geq 2$ gäller

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

FLER UPPGIFTER PÅ NÄSTA SIDA!

11. De tre syskonen Adrup, Bedrup och Cedrup står i en kö tillsammans med fyra andra personer. På hur många sätt kan denna kö bildas så att Adrup står före Bedrup som i sin tur står före Cedrup? (Obs: De fyra andra personerna i kön kan stå mellan syskonen.)

12. Lös ekvationen $z^3 + 1 = (z + 1)^2$.

13. Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $x^2 - 7x + 3y + 5 = 0$ och linjen $y = x - 2$.

14. Lös ekvationen

$$\lg x - \lg \left(\frac{1}{x} \right) = 4 \text{ .}$$

C-del (Fullständiga lösningar krävs!)

15. Lös den trigonometriska ekvationen

$$\cos(2x) + \sin x = 0 \text{ .}$$

16. Lös den binomiska ekvationen

$$z^4 = -16i$$

och illustrera rötternas läge i komplexa talplanet.

17. Bestäm alla tal x som uppfyller

$$1 \leq \frac{x+1}{3-x} < 3.$$

18. Polynomet $z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 10z + 15$ har nollstället $z = 1 + i\sqrt{2}$. Bestäm de övriga nollställena.

LYCKA TILL!