UPPSALA UNIVERSITET — Tentamen i matematik
MATEMATISKA INSTITUTIONEN — ALGEBRA 1
DAN STRÄNGBERG — 2016-12-16

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt A och B vara två utsagor. Undersök sanningsvärdet för utsagan

$$(A \vee \neg B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \;\Rightarrow\; B).$$

(2 poäng)

   (b) Låt $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 16\}$ och $N = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$. Bestäm $M \cap N$. (3 poäng)

2. (a) Visa att den Diofantiska ekvationen $520x - 216y = 4$ saknar lösningar. (2 poäng)

   (b) Lös den Diofantiska ekvationen $520x - 216y = 8$ fullständigt. (3 poäng)

3. (a) Låt a vara ett heltal sådant att $4 \mid a + 1$. Visa att $8 \mid a^2 - 1$. (3 poäng)

   (b) Skriv talet $(2131)_5$ i bas 10. (2 poäng)

4. På mängden av reella tal införs en relation R som ges av $aRb \Leftrightarrow |a - b| < 4$. Bestäm vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, transitiv som relationen R uppfyller. (5 poäng)

5. Visa med induktion att $(n + 1)^2 \leq n^3$ för alla naturliga tal $n \geq 3$. (5 poäng)

6. Låt M vara mängden av jämna heltal och låt funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ges av $f(n) = \frac{n}{2}$. Visa att $f(M) = \mathbb{Z}$ och att f ger en bijektion mellan M och $\mathbb{Z}$. (5 poäng)

7. Polynomet $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 12x - 6$ har ett imaginärt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

8. Bestäm ett reellt tal a sådant att ekvationen $2x^3 - (4 + 3i)x^2 - (4 - 6i)x + ai = 0$ har en nollskild imaginär rot. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)