UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anna Sakovich

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2017-01-11
F1, ES1, Q1, MatemI

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad.
Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För godkänd tentamen krävs minst 18 poäng, inklusive bonuspoäng från redovisningsuppgifterna. LÖSNINGARNA SKALL VARA VÄLSKRIVNA OCH INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Beräkna

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1+\sin^2 x}, \qquad \text{(b)} \quad \int x^2 \ln x \, dx.$$

2. Rita kurvan $y(x) = x - 2\arctan x$ i stora drag. Bestäm speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

3. Bestäm ekvationen för tangenten i punkten $(x, y) = (-3, 1)$ till kurvan

$$2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2).$$

(Kurvan kallas Bernoullis lemniskata och ser ut som oändlighetssymbolen ∞.)

4. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^{\infty} \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)} \, dx.$$

5. Ett visst fjädrande och dämpat system beskrivs av begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\cos t, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

Lös detta problem.

6. Undersök om serierna är konvergenta eller divergenta:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{7^n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-2}\right).$$

Är serien i (b) absolutkonvergent?

VAR GOD VÄND!

7. Funktionen f definieras av

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \cos x}{x} & \text{om } x \neq 0, \\ a & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 0$.

(b) Undersök om $f'(0)$ existerar för detta val av a.

8. En vattenreservoar som har förorenats av ett giftigt ämne innehåller 5000 m^3 förorenat vatten. I början är koncentrationen av det giftiga ämnet 20%. En naturlig rening sker genom att rent vatten rinner in i reservoaren med en hastighet av 100 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ samtidigt som förorenat vatten rinner ut i samma takt. Under hela förloppet sker omröring i reservoaren, så man kan anta att vätskan är fullständigt blandad. Hur lång tid tar det innan föroreningens koncentration gått ner till 5%?

LYCKA TILL!!

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}H_1(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}H_2(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}H_3(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}H_4(x) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}H_5(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^{n+1}H_6(x)
\end{aligned}$$

Funktionerna $H_1, H_2, \ldots, H_6$ är begränsade i något intervall kring $x = 0$.