UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson

Linjär algebra och geometri I
Tentamen
2018–03–12

Skrivtid: 08:00–13:00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Som mest kan tentan ge 40 poäng. Betygsgränserna för betygen 3, 4 och 5 är 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (Uppgiften behöver ej lösas för er som fick godkänt på duggan 2018-02-05) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \phantom{+ x_5} = a \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten $a$.

2. Finn alla matriser $X$ som uppfyller ekvationen

$$B^2XA = A,$$

där

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -13 & -27 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Punkterna $A : (-1, 1, 1)$, $B : (1, -1, -1)$ och $C : (0, 2, 3)$ utgör hörnen i en triangel. Bestäm
   (a) vektorerna $\overrightarrow{AB}$ samt $\overrightarrow{AC}$.
   (b) skalärprodukten $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (c) kryssprodukten $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
   (d) normen $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.
   (e) arean av triangeln.

5. De tre punkterna $A : (1, 0, 1), B : (1, 1, 0)$ och $C : (0, 1, 2)$ ligger i ett plan $\pi$. Bestäm det minsta avståndet mellan punkten $(2, 3, 4)$ och planet $\pi$ samt i vilken punkt i planet $\pi$ som avståndet antags.

6. Planen $\pi_1 : x - y + 2z = 4$ och $\pi_2 : x + y + z = 2$ skär varandra i en linje $l$. Planet $\pi_3$ går genom punkten $(1, 2, 1)$ och är ortogonal mot vektorn $\vec{v} = (2, -1, 1)$

   (a) Bestäm linjen $l$'s ekvation på parameterform.

   (b) Bestäm planet $\pi_3$'s ekvation på standardform (normalform).

   (c) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan planet $\pi_3$ och linjen $l$ eller motivera varför de inte finns.

7. Låt $\vec{v_1} = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v_3} = (-1, -1, 1, 1)$, $\vec{v}_4 = (3, 2, 1, 0)$ och $\vec{v}_5 = (1, 1, 1, -1)$. Avgör om

   (a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.

   (b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.

   (c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.

8. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $-2x + y = 0$ och låt den linjära avbildningen $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ha standardmatrisen $[Y] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   Bestäm standardmatrisen för avbildningen $T$, samt standardmatrisen för den sammansatta avbildningen $Y \circ T$.