

*Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.*

1. (**Obs:** denna uppgift ska **inte** lösas om man har klarat duggan!)

Bestäm alla punkter på ytan

$$z = x^2 + y^2 - 2x^4$$

i vilka tangentplanet är parallellt med planet

$$2y + z = 0.$$

Bestäm även ekvationerna för dessa tangentplan.

2. Visa att sambandet  $y^2 + \sin y + x^3 = 1 + \sin(1)$  definierar  $y$  som funktion av  $x$  i en omgivning av punkten  $(0, 1)$ . Beräkna också  $y'(x)$  i denna punkt.

3. Bestäm största och minsta värde av

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 2xy$$

på mängden

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Bestäm också alla lokala maxima och minima för funktionen definierad på hela  $\mathbb{R}^2$ .

4. Bestäm volymen av kroppen

$$K : x^2 + y^2 + |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

5. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\vec{F}(x, y, z) = (y \cos(xy) + x, -x \cos(xy) + y, \cos z + z)$$

genom cylinder delen

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

orienterad så att normalvektorn pekar bort från  $z$ -axeln.

6. Bestäm kurvintegralen (arbetet)

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

där  $C$  är skärningskurvan mellan ytorna  $x + z = 0$  och  $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$  orienterad så att enhetsvektorn (som ger riktningen) i punkten  $(0, 1, 0)$  är  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , och där

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{2016x}, e^{\sin y} + x + z^2, e^{\sin(\cos z)} + y).$$

7. Bestäm alla  $C^1$  funktioner  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(Ledning: Hitta till exempel nya koordinater där ekvationen är enklare att lösa, eller kolla på vad riktningsderivator säger om detta problem.)

8. (**Obs:** i denna uppgift löses enbart **ett** av de två nedanstående problemen (i) och (ii).)

- (i) (spår ODE-1MA016) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x' = x + 2016y \\ y' = y \end{cases}$$

- (ii) (spår TOP-1MA183) Låt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{n} \right)^n$$

för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Visa att  $f$  är väldefinierad och kontinuerlig.  
(b) Är  $f$  deriverbar?

**LYCKA TILL!**

Lösningarna på följande sidor är väldigt snabbt skrivit och jag hade inte mina svar från tidigare  
- så om fel hittas skriv gärna till `thomas.kragh@math.uu.se`.

**Lösningar till tentamen i  
FLERVARIABELANALYS/  
FLERVARIABELANALYS M  
Spår ODE: 1MA016  
Spår TOP: 1MA183 2016–06–02**

**Lösning till problem 1.** Då tangentplanen av en nivåyta  $F = c$  är orthogonal mot  $\nabla F$  ska vi hitta punkter på ytan där

$$\nabla F = (2x - 8x^3, 2y, 1)$$

är parallell med normalen  $(0, 2, 1)$  till planet. Då båda har  $z$  koordinat lika med 1 är detta precis när de två första koordinater är lika. Så vi söker punkter som uppfyller

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^4 = z \\ 2x - 8x^3 = 0 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} \\ y = 1 \end{cases}$$

vilket ger punkterna  $(0, 1, 1)$  och  $(\pm\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8})$ . Sätts dessa in i en ekvation för tangentplanen (som vi känner normalvektorn till) fås:

$$0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5 \quad 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{25}{8}.$$

Så tangentplanens ekvationerna blir  $2y + z = 5$  i det ena fallet och  $2y + z = \frac{25}{8}$  i de två andra fallen.

**Lösning till problem 2.** a) Med  $F(x, y) = y^2 + \sin y + x^3$  ses att  $F(0, 1) = 1 + \sin(1)$  och då

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(0,1)} = (2y + \cos y) \Big|_{(x,y)=(0,1)} = 2 + \cos(1) \neq 0$$

är villkoren i implicita funktion satsen uppfyllt. Det ger a) (precis formulering av satsen).

b) Satsen ger också en formel för derivaten i punkten:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \left( \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right) \Big|_{(x,y)=(0,1)} = \left( \frac{2x^2}{2y + \cos y} \right) \Big|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Eller alternativt kan man se att då  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  måste nivåkurvan  $F(0, 1) = 1 + \sin(1)$  vara horisontal i punkten - och därför måste derivaten av denna som graf vara 0.

**Lösning till problem 3.** Max och min existera på  $\mathcal{D}$  eftersom den är kompakt. Dessa måste hittas i stationära/singulära/rand punkter på  $\mathcal{D}$ . Stationära/singulära punkter:

$$(0, 0) = \nabla f = (8x^3 - 2y, 2y - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} \\ y = x \end{cases}$$

Så inga singulära punkter och alla stationära punkter är:  $(0, 0)$  och  $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Dessa har funktions värden:

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{och} \quad f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}.$$

Randpunkter:

Vi kollar på topp randen genom att se på funktionen  $g(y) = f(1, y) = 2 + y^2 - 2y$  denna är en parabel och har max i en av randpunkterna och min i punkten  $y = \frac{2}{2} = 1$  som också är ett rand punkt. I dessa randpunkter är  $f(1, 1) = g(1) = 1$  och  $f(1, -1) = g(-1) = 5$ . Om vi ser på botten randen får vi nästan samma funktion  $g_2(y) = f(-1, y) = 2 + y^2 + 2y$  - den uppfyller att  $g_2(y) = g(-y)$  så på intervallen  $[-1, 1]$  har de samma max och min.

Ser vi på höger del av randen definierar vi  $h(x) = f(x, 1) = 2x^4 - 2x + 1$ , och denna har kritisk punkt där  $h'(x) = 0$  som ger  $8x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ . Sätts detta in i  $h$  fås

$$h\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^4 - 2\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(2\frac{1}{4} - 2\right) + 1 = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Detta är större än  $-\frac{1}{8}$  eftersom

$$1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{8} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) > 0$$

eftersom  $\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$  eftersom  $\frac{27}{64} > \frac{1}{4}$ . På randen är  $h(\pm 1) = g(1)$  som vi redan har kollat på.

På den vänstre randdelen definierar vi  $h_2(x) = f(x, -1) = 2x^4 - 2x + 1$ , men denna är  $h_2(x) = h(-x)$  så på intervallen  $[-1, 1]$  har vi igen de samma max och min.

Vi drar slutsatsen att max på  $\mathcal{D}$  är 5 och min är  $-\frac{1}{8}$ .

Andra delen: Då vi redan har set att  $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  är minimum på hela  $\mathcal{D}$  och dessa ligger i den inre av  $\mathcal{D}$  måste de vara lokala minima. Det återstår att kolla på karaktären av  $(0, 0)$ . I denna är den kvadratiske approximation av  $f$  givet som ( $f$  är ett polynom så man behöver faktiskt inte derivera - men man kan om man känner sig mera säker på det sätt):

$$Q(h, k) = k^2 - 2hk = (k - h)^2 - h^2$$

som vi ser har båda positiva och negativa delar. Så detta är en sadelpunkt.

**Lösning till problem 4.** Vi skriver som vanligt  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  och ser att olikheterna är ekvivalenta med

$$r^2 + |z| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad |z| \leq r - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - r \leq z \leq r - r^2.$$

Detta har lösningar precis när  $r - r^2 \geq 0$  som är ekvivalent med

$$r - r^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r - 1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r \leq 1$$

Så vi har en  $z$ -enkel mängd över mängden  $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Så vi kan beräkna volym genom att integrera och använda upprepat integration:

$$\begin{aligned} \text{Volym}(K) &= \iiint_K 1 dV = \iint_{\mathcal{D}} \left( \int_{r^2-r}^{r-r^2} 1 dz \right) dA = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} 2(r - r^2) dA \stackrel{[\text{byta till polära koordinater}]}{=} \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) r d\theta dr = \\ &= 4\pi \left[ \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

**Lösning till problem 5.** Ytan har enhetsnormalvektor (som pekar ut) given av  $\vec{n} = (x, y, 0)$  så vi ska beräkna:

$$\begin{aligned} \iint_S (y \cos(xy) + x, -x \cos(xy) + y, \cos z + z) \bullet (x, y, 0) dS &= \iint_S x^2 + y^2 dA = \\ &= \iint_S 1 dA = \text{Area}(S) = 2 \cdot 2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

Här använde vi att på ytan  $S$  är  $x^2 + y^2 = 1$ , och att arean av en cylinder är längden av bottenkurvan  $2\pi$  gånger höjden 2.

**Lösning till problem 6.** Vi beräknar först rotationen (curl) av vektorfältet i hoppat att det är snyggare än  $\vec{F}$  själv:

$$\text{Rot } \vec{F} = (1 - 2z, 0 - 0, 1 - 0) = (1 - 2z, 0, 1).$$

Det var den - så kanske Stoke:s är en bra idé. Vi måste därför hitta en orienterad yta  $S$  med  $C$  som orienterad rand. Så först hittar skuggan av  $C$  i  $xy$ -planet:

$$3x^2 + y^2 + (-x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 1$$

vilket är en ellips med storradie 1 (längs  $y$ -axeln) och litenradie  $\frac{1}{2}$  (längs  $x$ -axeln). Eftersom  $C$  är givet som skärningen av ett plan och en ellipsoid är det ganska närliggande att använda den del av planet som  $C$  begränsar:

$$S : \begin{cases} 4x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = -x \end{cases}$$

Som har skugga  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Vi kunna använda graf-parametrisering, men det blir lite mera direkt att se hur man växlar till polära koordinater om vi använder:

$$\vec{r}(u, v) = (2u, v, -2u), \quad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Som nästen är en graf-parametrisering (en faktor 2 på  $x$ -koordinat). Denna har

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (2, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 2).$$

Vi ser att denna är orienterad med  $z$ -koordinat uppåt, och vi ser att om man ser på kurvan långt uppifrån (från position med stor  $z$ -koordinat) så är  $C$  positivt orienterad. Det betyder enligt högerhandsregeln att denna parametrisering har den korrekta orientering. Så Stoke:s ger

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \iint_{\mathcal{D}} \text{Rot } \vec{F} \bullet (2, 0, 2) dA = \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1 + 2u, 0, 1) \bullet (2, 0, 2) dA = \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4 + 4u dA = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4 dA = 4 \text{Area}(u^2 + v^2 \leq 1) = 4\pi. \end{aligned}$$

Här gick  $4u$  bort eftersom detta är en udda funktion i  $u$  och enhetsklotet  $u^2 + v^2 \leq 1$  är symmetriskt i speglingen  $u \mapsto -u$ .

### Lösning till problem 7.

**Alternativ 1:** Om man använder kjedregeln för koordinatbyte  $(x(u, v), y(u, v))$  får man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

Så om vi till exempel använder koordinaterna  $x = u$  och  $y = -2u + v$ . Så får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Här är den specifika formel för  $y$  inte så viktigt, men det är viktigt att funktionerna tillsammans beskriver bijektivt koordinatbyte - i detta fall linjärt med matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det är därför vi måste ha med ett  $v$  i formlerna. Nu ser vi att i dessa koordinater är differentialekvationen ekvivalent med  $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ . Denna lösas som vanligt med

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v) = g(v) = g(2x + y)$$

där  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är en godtycklig  $C^1$  funktion.

**Alternativ 2:** inse att differentialekvationen är ekvivalent med att riktningsderivaten i riktning  $(1, -2)$  är givet som:

$$D_{(2,1)}f = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}}(1, -2) \bullet \nabla f = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Det betyder att den är ekvivalent med att  $f$  ska vara konstant längs linjer parallel med denna riktning. Alltså att den är konstant på linjer av typen

$$(x, y) = (a, b) + t(1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dessa har ekvationerna  $2x + y = c$  för något  $c \in \mathbb{R}$ . Detta ger att funktionen kan enbart bero på detta  $c$  (det vill säga vilken linje vi är på) och *inte* vart på linjen  $(x, y)$  ligger. Därför är

$$f(x, y) = g(2x + y)$$

för någon godtycklig  $C^1$  funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Lösning till problem 8.

(i) Systemet kan skrivas på matrisform genom:

$$\vec{r}'(t) = A\vec{r}(t)$$

med

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denna har egenvärde givet som lösningarna av

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2016 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2$$

Så  $\lambda = 1$  är en egenvärde (med multiplicitet 2). Då har vi en formel för exponentialmatrisen:

$$e^{tA} = e^{\lambda t}(I + (A - \lambda I)t) = e^t \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2016 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2016t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Då de två kolonnerna i exponentialmatrisen ger två linjärt oberoende lösningar och det beskriver alla lösningar är den allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2016t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) a) Vi ser att vi kan begränsa absolut beloppet av varje term:

$$\left| \frac{\sin x}{n} \right|^n \leq \frac{|\sin x|^n}{n^n} \leq \frac{1}{n^n}$$

och vi ser att summan av dessa är konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Så Weirstrass: majorant sats säger att summan är likformigt konvergent och därför är  $f$  väldefinierad. Eftersom varje term i summan är kontinuerlig och vi har likformig konvergens har vi också en sats som säger att gränsfunktion  $f$  är kontinuerlig.

b) Vi har en sats som säger: om summen konvergerar (det såg vi i a)) och om funktionsserien definierad genom att derivera termvist konvergerar likformigt. Så är funktion deriverbar (och även givet av den termvist deriverade serie). Vi tar termvis derivat:

$$\frac{\partial \left( \frac{\sin x}{n} \right)^n}{\partial x} = \frac{(n-1)(\sin x)^{n-1} \cos x}{n^n}.$$

Igen ser vi på absolut beloppet:

$$\left| \frac{(n-1)(\sin x)^{n-1} \cos x}{n^n} \right| \leq \frac{n-1}{n^n} \leq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} \leq \frac{1}{n^{n-1}}$$

igen är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Så igen säger Weirstrass: majorant sats att funktionsserien är likformigt konvergent.