UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Olof Sisask

Prov i matematik
E, El, STS, X
1MA013 Envariabelanalys
2019–03–21

Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.
Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Tentan består av 8 frågor värda 5p vardera; totalt 40 poäng.
Gränserna för betyg 3, 4, 5 är 18p, 25p respektive 32p.
Skrivtid: *14.00–19.00.*

Lösningförslag.

1. **a)** Fritt val: ange antingen definitionen av uttrycket $\lim_{x \to c} f(x) = L$ (där L är ett tal) eller definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = c$. OBS: definitioner behöver anges med matematiskt entydiga termer.

b) Om $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är en talföljd, vad är definitionen av uttrycket $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

c) Bestäm reella konstanter a, b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{om } x < 0 \\ b & \text{om } x = 0 \\ 2x + 5 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i alla punkter, *med hänvisning till definitionen av kontinuitet* i dina val.

Lösning:

a) $\lim_{x \to c} f(x) = L$ betyder: för varje $\epsilon > 0$ finns det $\delta > 0$ sådant att: när $0 < |x - c| < \delta$ så är $|f(x) - L| < \epsilon$.

Att $f(x)$ är deriverbar i $x = c$ betyder att gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$ finns.

b) Uttrycket $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ står för gränsvärdet $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$, när detta finns.

c) Definitionen av att f är kontinuerlig i en punkt c är att $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Eftersom ae^x och $2x + 5$ är kontinuerliga i alla punkter, så behöver vi bara kolla kontinuitet vid punkten $x = 0$. Enligt satsen om vänster- och höger-gränsvärde finns gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x)$ omm gränsvärdena $\lim_{x \to 0+} f(x)$ och $\lim_{x \to 0-} f(x)$ finns och är lika. Gränsvärdet från höger är $\lim_{x \to 0+} (2x + 5) = 5$, alltså har vi höger-kontinuitet omm $b = 5$. Detta är lika med gränsvärdet från vänster omm $5 = \lim_{x \to 0-} ae^x = a$. Alltså är funktionen kontinuerlig omm $a = b = 5$.

2. **a)** Ange Taylorserien kring $x = 0$ för e^x. (Det är okej att skriva $\ldots$ i ditt svar, så länge det är tydligt vad resterande termer är.)

b) Ange Taylorserien kring $x = 0$ för e^{x^2}. (Samma kommentar som ovan.)

c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 3 + 2\cos(x)}{x^4}.$$

<u>Lösning:</u>

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

b) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \cdots$

c) Om vi sätter in $x = 0$ i täljaren eller nämnaren får vi 0, alltså undersöker vi täljarens beteende runt $x = 0$ närmare med hjälp av Taylorvecklingar, för att se hur täljaren jämför sig med x^4.

Vi använder Taylorpolynomen för de inblandade funktionerna; dessa är som ovan serier fast trunkerade, plus en felterm som vi skriver som $O(x^n)$, samt

$$\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - O(x^6).$$

Vi ser att det räcker att utveckla upp till grad 4 för att få något nollskilt i täljaren (och grad 3 räcker inte). Detta ger

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - 3 + 2\cos(x) &= (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + O(x^6)) - 3 + 2(1 - x^2/2! + x^4/4! - O(x^6)) \\
&= \frac{x^4}{2} + \frac{2x^4}{4!} + O(x^6) \\
&= \frac{7}{12}x^4 + O(x^6).
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 3 + 2\cos(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{12} + O(x^2)\right) = \frac{7}{12}.$$

3. Låt $f(x) = \dfrac{x(4x-3)}{x-1}$.

a) Sketcha grafen för $y = f(x)$, och bestäm alla lokala och globala extrempunkter samt ekvationer för alla grafens asymptoter.

b) Har $f(x)$ något globalt minimum eller maximum på intervallet $[5/4,\ 3]$? Bestäm denna/dessa, eller förklara varför de inte finns.

Lösning:

a) Vi börjar med att notera att f inte är definierad för $x = 1$, men annars överallt, så definitionsmängden är $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, och vi exkluderar $x = 1$ från allt nedan. Vi kan algebraiskt förenkla uttrycket för f:

$$f(x) = \frac{(x-1+1)(4x-3)}{x-1} = \frac{(x-1)(4x-3)+(4x-3)}{x-1} = (4x-3) + \frac{4x-3}{x-1} = 4x+1+\frac{1}{x-1}.$$

Extremvärden:
Enligt känd sats kan f endast ha extremvärden vid stationära eller singulära punkter (där $f'(x) = 0$ resp där $f'(x)$ inte finns). Här har vi

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{(x-1)^2},$$

som finns för alla $x \neq 1$. Detta är lika med 0 omm

$$(x-1)^2 = \tfrac{1}{4}, \quad \text{dvs omm} \quad x = 1 \pm \tfrac{1}{2}.$$

Så de enda möjligheterna för extrempunkter är vid $x = 1/2$ och $x = 3/2$. Vi ser vidare att

$$f'(x) < 0 \quad \text{omm} \quad 4 < 1/(x-1)^2 \quad \text{omm} \quad (x-1)^2 < 1/4 \quad \text{omm} \quad 1/2 < x < 3/2,$$

och annars är $f'(x) > 0$. Alltså är f växande innan $x = 1/2$ och sedan avtagande för x upp till 1, så $x = 1/2$ är en lokal maxpunkt för f, och eftersom f är avtagande för $1 < x < 3/2$ och växande efter $3/2$ så är $x = 3/2$ en lokal minpunkt.

Asymptoter:
Vi ser direkt från

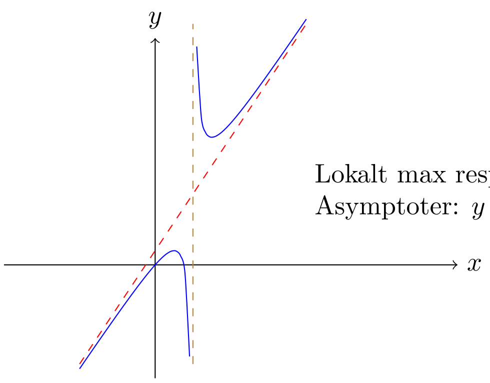
$$f(x) = 4x+1+\frac{1}{x-1}$$

att $y = 4x+1$ är en sned asymptot för grafen när $x \to \pm\infty$. Alltså har grafen inte några horisontella asymptoter. Eftersom f är kontinuerlig för alla $x \neq 1$ så är $x = 1$ den enda möjligheten för en vertikal asymptot – för vid alla andra $x = c$ så gäller $\lim\limits_{x\to c\pm} f(x) = f(c) < \infty$. Runt $x = 1$ ser vi att

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty,$$

eftersom detta gäller för termen $1/(x-1)$. Alltså är $x = 1$ en vertikal asymptot för f, både till vänster och till höger.

Svar:



Lokalt max resp min vid $x = 1/2$ resp $x = 3/2$.
Asymptoter: $y = 4x + 1$ när $x \to \pm\infty$, samt $x = 1$.

b) Eftersom f är kontinuerlig på detta slutna intervall $[5/4,\ 3]$ så antar den ett minimum och ett maximum på intervallet. Enligt extremvärdessatsen måste dessa förekomma antingen vid stationära punkter eller vid intervallets ändpunkter. Vid den stationära punkten $x = 3/2$ har vi värdet

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2}(6-3)/\tfrac{1}{2} = 9.$$

Vid ändpunkterna har vi

$$f\left(\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{5}{4}(5-3)/\tfrac{1}{4} = 10 \quad \text{och} \quad f(3) = 3(12-3)/2 = 13\tfrac{1}{2}.$$

Funktionens minvärde är alltså 9, vid $x = 3/2$, och funktionens maxvärde är $13\frac{1}{2}$, vid $x = 3$.

4. Bestäm konvergensradie och konvergensintervall för följande potensserier.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^n$

Lösning:

a) Konvergensradien är 0, då seriens termer inte går mot 0 förutom för $x = 0$. (Nolltestet.) Alternativt: i kvottestet blir kvoten

$$\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = (n+1)\,|x| \quad \text{som} \to \infty \text{ när } n \to \infty, \text{ förutom för } x = 0.$$

Enligt kvottestet divergerar serien för $x \neq 0$, och den konvergerar uppenbarligen för $x = 0$. Konvergensintervallet är alltså $[0, 0] = \{0\}$.

b) Vi applicerar kvottestet: den relevanta kvoten blir

$$\left|\frac{(-4)^{n+1} x^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(-4)^n x^n}\right| = \frac{4(n+1)}{n+2}\,|x| \to 4\,|x| \quad \text{när } n \to \infty.$$

Kvottestet säger att serien konvergerar om detta gränsvärde är < 1 och divergerar om det är > 1. Alltså konvergerar serien för $|x| < 1/4$ och divergerar för $|x| > 1/4$. Konvergensradien är således $1/4$, enligt vad ordet konvergensradie betyder.

För konvergensintervallet behöver vi undersöka konvergensen vid $x = \pm 1/4$. Vid $x = -1/4$ blir serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ vilket är den harmoniska serien, som enligt känd sats divergerar. Alltså är $x = -1/4$ inte i konvergensintervallet.

Vid $x = 1/4$ får vi serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Detta är en alternerande serie, och eftersom termerna är avtagande i absolutbelopp: $1/(n+2) \leq 1/(n+1)$; och termerna går mot 0: $(-1)^n/(n+1) \to 0$; så konvergerar serien enligt alternerande serietestet. Alltså ligger $x = 1/4$ i konvergensintervallet.

Konvergensintervallet är således $(-1/4, 1/4]$.

5. Bestäm volymen av den kropp som bildas när grafen av $y = \dfrac{2x}{(x+1)^{1/2}(x^2+1)^{1/2}}$, för $0 \le x \le 1$, roteras runt x-axeln.

Lösning: Enligt känd formel ges denna volym av

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{2x}{(x+1)^{1/2}(x^2+1)^{1/2}} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{4x^2}{(x+1)(x^2+1)} dx.$$

Vi använder partialbråksuppdelning här, med ansats

$$\frac{4x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

vilket håller omm

$$4x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C.$$

Detta gäller för alla x omm $A+B=4$, $B+C=0$ och $A+C=0$. Detta gäller omm $A=B=2$ och $C=-2$. Så

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \frac{2}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2+1} dx \\ &= \pi \left[2\ln(x+1) + \ln(x^2+1) - 2\arctan(x) \right]_0^1 \\ &= \pi(3\ln(2) - 2\arctan(1) - 3\ln(1) + 2\arctan(0)) \\ &= \pi(3\ln(2) - \pi/2). \end{aligned}$$

(Detta kan också skrivas som $\pi \ln(8) - \pi^2/2$.)

6. Bestäm om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna dess värde; om den är divergent, förklara noggrant varför.

Lösning: Integralen är generaliserad på två sätt; alltså delar vi upp den i två delar:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx.$$

Definitionen av konvergens innebär att vår integral är konvergent omm båda dessa integraler är det.

Eftersom

$$\frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}} \le \frac{1}{x^{1/2}}$$

och $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ är konvergent (standardresultat/p-integral/beräkna som $\Big[2x^{1/2}\Big]_0^1$), så konvergerar

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx.$$

Liknande konvergerar den andra integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx$, efter jämförelse med $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$. Alltså är integralen konvergent.

Beräkning: Vi kan också se konvergensen genom direkt beräkning:
Substitutionen $u = x^{1/2}$ ger $du/dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, så $dx = 2x^{1/2}du$, och u går från 0 till ∞ när x gör det, så

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{2x^{1/2}}{x^{1/2}+x^{3/2}}\,du = \int_0^\infty \frac{2}{1+x}\,du = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\Big[\arctan(u)\Big]_0^\infty.$$

Eftersom arctan är kontinuerlig vid 0 behöver vi inte ta något gränsvärde för denna del, men mot oändligheten behöver vi göra det: integralen är lika med

$$2\lim_{R\to\infty}(\arctan(R) - \arctan(0)) = 2\cdot\pi/2 = \pi.$$

7. Bestäm de allmänna lösningarna $y = y(x)$ till de följande differentialekvationerna.

a) $y' = \dfrac{1}{3}\cos(x)e^{\sin(x)}y^4$

b) $y' + \dfrac{y}{x} = \ln x$, där $x > 0$

Lösning:

a) Denna ekvation är separabel, då högerledet kan skrivas som $f(x)g(y)$. Vi använder därför variabelseparation för att lösa den: vi skriver först om som

$$3y^{-4}\frac{dy}{dx} = \cos(x)e^{\sin(x)},$$

och sedan

$$3y^{-4}\,dy = \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx,$$

och sedan med integral-tecken:

$$\int 3y^{-4}\,dy = \int \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx.$$

Vänsterledet Vänsterledet är en potensfunktion, alltså använder vi $\int y^r\,dy = y^{r+1}/(r+1)$:

$$\text{VL} = \int 3y^{-4}\,dy = -y^{-3}.$$

(Vi kan utelämna integrationskonstanten här då vi kommer få en i högerledet.)

Högerledet För högerledet ser vi att substitutionen $u = \sin(x)$ verkar rimlig; vi har då $du/dx = \cos(x)$, eller $du = \cos(x)\,dx$. Alltså har vi

$$\text{HL} = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\sin(x)} + C$$

för en godtycklig konstant $C \in \mathbb{R}$.

VL = HL Alltså är

$$-y^{-3} = e^{\sin(x)} + C,$$

vilket vi kan skriva om som

$$y = -(e^{\sin(x)} + C)^{-1/3} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b) Denna ekvation är linjär av första ordningen, så vi kan använda integrerande faktor. Denna ges av

$$\text{IF} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln(x)} = x.$$

(Absolutbelopp behövs inte eftersom $x > 0$ i problemet.) Alltså multiplicerar vi ekvationen med detta:

$$x \cdot y' + y = x\ln x,$$

och här kan vi identifiera vänsterledet som $\dfrac{d}{dx}(x \cdot y)$ (den integrerande faktorn gånger y):

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = x\ln x.$$

Vi integrerar:

$$x \cdot y = \int x\ln x\,dx.$$

För högerledet använder vi partiell integration med $f(x) = x$ och $g(x) = \ln x$:

$$\int x\ln x\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$.

Alltså är

$$y = \tfrac{1}{2}x\ln x - \tfrac{1}{4}x + C/x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

8. Bestäm den lösning $y = y(t)$ som uppfyller ekvationen

$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{3t}$$

samt att $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

Lösning: Ekvationen är linjär av ordning 2, så vi löser den genom att först hitta den allmänna lösningen $y = y_h$ till den homogena varianten

$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = 0$$

och sedan addera en partikulärlösning $y = y_p$ till den inhomogena ekvationen.

Homogena ekvationen: För att lösa den homogena ekvationen bildar vi karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 6r + 10 = 0$$

som enligt pq-formeln har lösningar

$$r = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i.$$

Alltså ges, enligt känd sats, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen av

$$y_h = Ae^{3t}\sin(t) + Be^{3t}\cos(t) \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Partikulärlösning: För partikularlösningen gör vi ansatsen $y = Ce^{3t}$ för en konstant C. Detta ger $y' = 3Ce^{3t}$ och $y'' = 9Ce^{3t}$. Denna funktion är alltså en lösning till vår ekvation omm

$$9Ce^{3t} - 6 \cdot 3Ce^{3t} + 10Ce^{3t} = e^{3t},$$

vilket är fallet omm $(9 - 18 + 10)C = 1$, dvs $C = 1$.

Allmänna lösningen till ekvationen: Den allmänna lösningen till vår ekvation är alltså

$$y = y_h + y_p = e^{3t} + Ae^{3t}\sin(t) + Be^{3t}\cos(t).$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger

$$2 = y(0) = 1 \ + \ A \cdot 1 \cdot 0 \ + \ B \cdot 1 \cdot 1,$$

dvs $B = 1$. Alltså är

$$y = e^{3t} + Ae^{3t}\sin(t) + e^{3t}\cos(t).$$

För det andra begynnelsevillkoret behöver vi derivera y. Enligt produktregeln har vi

$$y' = 3e^{3t} + 3Ae^{3t}\sin(t) + Ae^{3t}\cos(t) + 3e^{3t}\cos(t) - 3e^{3t}\sin(t),$$

och villkoret $y'(0) = 0$ ger

$$0 = 3 + A + 3,$$

dvs $A = -6$.

Svar:

$$y = e^{3t} - 6e^{3t}\sin(t) + e^{3t}\cos(t).$$