UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson, Qimh Xantcha

Baskurs i matematik
Lösningar
2017–12–21

Del A

1. Av lagarna

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

följer att

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}} = -\frac{\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{\sin(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

2. Vi skriver $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{3/2}} = 2^{-3/2}$, varav 2-logaritmen avläses som exponenten, alltså $-\frac{3}{2}$.

3. Riktningskoefficienten beräknas till

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{1-2} = -1.$$

Punkten $(1, 1)$ insatt i $y = -x+m$ ger $m = 2$. Linjens ekvation är $y = -x+2$.

4. Med Kvadreringsregeln två gånger fås

$$\frac{(2+x)^2 - 8x}{2-x} = \frac{4 + 4x + x^2 - 8x}{2-x} = \frac{4 - 4x + x^2}{2-x} = \frac{(2-x)^2}{2-x} = 2 - x.$$

5. Förenkling ger

$$\frac{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}{a^{-1}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}}}{a^{-1}} = \frac{a^1}{a^{-1}} = a^2.$$

6. Rita figur. Talet $\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ ligger i första kvadranten. Argumentet är (exempelvis) $\frac{\pi}{4}$.

7. Absolutbeloppet är

$$\left|\frac{1-2i}{1+2i}\right| = \frac{|1-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = 1.$$

Alternativt kan divisionen utföras, innan absolutbeloppet beräknas. Då fås räkningen

$$\left|\frac{1-2i}{1+2i}\right| = \left|\frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right|$$
$$= \left|\frac{1 - 4i + 4i^2}{1 - 4i^2}\right| = \left|\frac{-3-4i}{5}\right| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2+4^2} = 1.$$

8. Uträkning av produkten ger

$$\prod_{k=-1}^{2} k^3 = (-1)^3 \cdot 0^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 0.$$

Del B

9. Lösningarna är

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{\pi}{3},$$

där n är ett godtyckligt heltal.

10. Med nyttjande av additions- och subtraktionsformlerna för cosinus erhåller vi direkt

$$\begin{aligned} &\cos(x-y) - \cos(x+y) \\ &\qquad = (\cos x \cos y + \sin x \sin y) - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ &\qquad\qquad = 2 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

11. Ekvationens lösning är

$$7 = \lg 2^x + \lg 5^x = \lg(2^x \cdot 5^x) = \lg 10^x = x.$$

Denna är äkta, ty båda logaritmerna är uppenbarligen definierade.

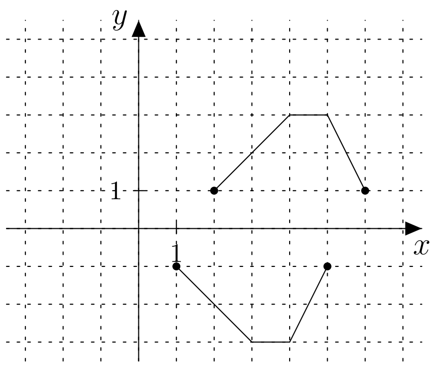
12. Enligt Binomialteoremet är

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (2x^2)^{50-k} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{50} (-1)^k 2^{50-k} \binom{50}{k} x^{100-5k}.$$

Den konstanta termen är tydligen nummer $k = 20$, och denna är

$$(-1)^{20} 2^{30} \binom{50}{20} = 2^{30} \binom{50}{20}.$$

13. Den översta kurvan är $y = f(x-1)$ (translaterad ett steg åt höger) och den understa $y = -f(x)$ (speglad i x-axeln).



14. Centrum är $(p, q) = (3, -2)$ och halvaxlarna $(a, b) = (2, 1)$. Ellipsens ekvation är

$$1 = \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = \frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2.$$

15. Hyperbelns ekvation $y = \frac{1}{2x}$ insatt i cirkelns ekvation ger

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{4x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x^4 + \frac{1}{4}.$$

Denna andragradsekvation i x^2 kan lösas exempelvis med substitutionen $t = x^2$. Den har en dubbelrot $x^2 = \frac{1}{2}$, varav fås

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad y = \frac{1}{2 \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De sökta skärningspunkterna är alltså $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

16. (a) Vi skall välja 3 män av 5 möjliga, och 2 kvinnor av 4 möjliga (Sonja är redan inkluderad), vilket går på

$$\binom{5}{3}\binom{4}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}\frac{4 \cdot 3}{2!} = 10 \cdot 6 = 60$$

sätt.

(b) Nu skall vi välja 3 män av 5 möjliga, och 3 kvinnor av 4 möjliga (Sonja är exkluderad). Antalet möjligheter är nu

$$\binom{5}{3}\binom{4}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 10 \cdot 4 = 40.$$

17. (a) Från

$$(-2-i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$$

och

$$(-2-i)^3 = (-2-i)(3+4i) = -6 - 8i - 3i - 4i^2 = -2 - 11i$$

följer det att

$$2(-2-i)^3 + 7(-2-i)^2 + 6(-2-i) = 2(-2-11i) + 7(3+4i) + 6(-2-i) = 5.$$

Talet $-2-i$ löser således ekvationen.

(b) Enligt Konjugerade rotsatsen skall även $-2+i$ vara en rot, ty ekvationen har reella koefficienter. Polynomet $2x^3 + 7x^2 + 6x - 5$ skall därmed, enligt Faktorsatsen, vara delbart med produkten

$$(x+2+i)(x+2-i) = (x+2)^2 - i^2 = x^2 + 4x + 5.$$

Polynomdivision leder till faktoriseringen

$$2x^3 + 7x^2 + 6x - 5 = (x^2 + 4x + 5)(2x - 1),$$

där $2x - 1$ uppenbarligen har nollstället $x = \frac{1}{2}$. Tredjegradsekvationens rötter är alltså $-2 \pm i$ jämte $\frac{1}{2}$.

18. (a) Direkt uträkning ger

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2\cdot 1+1}{1^2(1+1)^2} + \frac{2\cdot 2+1}{2^2(2+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}.$$

(b) Formeln duger för $n = 1$, ty

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2\cdot 1+1}{1^2(1+1)^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}.$$

Antag formeln gälla för ett visst antal termer $n = p$, alltså att

$$S_p = 1 - \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Då gäller formeln även för nästa antal termer $n = p + 1$, ty

$$\begin{aligned} S_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = S_p + \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2p+3}{(p+1)^2(p+2)^2} \\ &= 1 + \frac{-(p+2)^2 + 2p + 3}{(p+1)^2(p+2)^2} = 1 + \frac{-p^2 - 2p - 1}{(p+1)^2(p+2)^2} \\ &= 1 - \frac{(p+1)^2}{(p+1)^2(p+2)^2} = 1 - \frac{1}{(p+2)^2}. \end{aligned}$$

Enligt Induktionsprincipen stämmer formeln för alla positiva heltal n.