UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson
Sebastian Pöder
Hania Uscka-Wehlou

Prov i matematik
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand, IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018–06–05

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Avgör för vilka värden på konstanten p ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -p \\ 3x_1 + 5x_2 - px_3 = 3 \\ px_1 + 3px_2 + x_3 = p \end{cases}$$

(a) har exakt en lösning

(b) har oändligt många lösningar

(c) saknar lösningar (är inkonsistent).

Bestäm även rangen till koefficientmatrisen för varje $p \in \mathbb{R}$.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ och $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att A är inverterbar och ange inversen A^{-1}.

(b) Finn alla matriser X sådana att $A^T X A = 2I$.

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} -1 & -x & x & x+1 \\ -1 & -1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 & -x-1 \\ x+1 & 2x & -2x & -3x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Punkterna $A : (-8, 11, 1), B : (-3, 9, 5)$ och $C : (1, 7, 5)$ är givna. Finn en punkt D sådan att A, B, C, D är hörnen i ett parallellogram, och finn arean av detta parallellogram.

Var god vänd!

5. Planen $E : x - 2y + z = 3$ och $F : -x + y + z = -2$ skär i en linje l. Planet G går genom punkten $(1, 0, 1)$ och är ortogonal mot vektorn $\vec{u} = (1, 1, -5)$.

(a) Bestäm linjen l:s ekvation på parameterform.

(b) Bestäm planet G:s ekvation på normalform (standardform).

(c) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan planet G och linjen l eller motivera varför de inte finns.

6. Finn avståndet mellan punkten $P : (1, 2, 3)$ och linjen $L : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, samt den punkt på L som är närmast P.

7. Avgör om vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. I så fall, bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i denna bas.

8. Låt den linjära avbildningen S från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $(x, y) = t(1, 2),\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm S:s matris i standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

(b) Finn bilden av $(1, 4)$ under avbildningen S.

Lycka till!