UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sebastian Pöder

Prov i matematik
IT2, KandMa1, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018–9–20

Skrivtid: 14.00 – 16.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. Den som får minst 6 poäng på de två första uppgifterna är godkänd på momentet Linjära ekvationssystem. *Den som får minst 6 poäng på de två sista uppgifterna är godkänd på momentet* Matrisräkning.

Moment Linjära ekvationssystem

1. Bestäm koefficienterna a, b, c så att kurvan $y = a + bx + cx^2$ går genom punkterna $(x, y) = (-2, 12)$, $(x, y) = (-1, 6)$, och $(x, y) = (3, 2)$.

2. Finn en linjär ekvation $ap + bq + cr = d$ sådan att systemet

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = p \\ -2x - 2y + 11z = q \\ -x + 2z = r \end{cases}$$

är lösbart precis då högerledet (p, q, r) löser ekvationen $ap + bq + cr = d$.

Moment Matrisräkning

3. Lös matrisekvationen

$$XA - AB = C,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. För vilka värden på den reella parametern a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar?

Lycka till!

Svar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018–9–20

1. $(a, b, c) = (2, -3, 1)$

2. T. ex. $5r + p - q = 0$.

3. $X = \begin{pmatrix} -47 & 104 \\ -14 & 31 \end{pmatrix}$

4. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018–9–20

Lösning till problem 1. Att kurvan går genom punkterna betyder att varje punkt skall lösa kurvans ekvation. Detta ger systemet

$$\begin{cases} a - 2b + 4c = 12 \\ a - b + c = 6 \\ a + 3b + 9c = 2. \end{cases}$$

Gausseliminering i totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \end{array}\right) -5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right) 1/20 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 3 & -4 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösningen $(a, b, c) = (2, -3, 1)$ avläses.

Lösning till problem 2. Vi Gausseliminerar i totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & p \\ -2 & -2 & 11 & q \\ -1 & 0 & 2 & r \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & r \\ -2 & -2 & 11 & q \\ 3 & -2 & 1 & p \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & 3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & r \\ 0 & -2 & 7 & -2r+q \\ 0 & -2 & 7 & 3r+p \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & r \\ 0 & -2 & 7 & -2r+q \\ 0 & 0 & 0 & 5r+p-q \end{array}\right).$$

Vi ser nu från matrisens form att systemet har lösning precis då $5r + p - q = 0$, vilket alltså är den sökta ekvationen.

Lösning till problem 3. Om A är inverterbar kan vi skriva om ekvationen som

$$XA - AB = C \leftrightarrow XA = C + AB \leftrightarrow X = (C + AB)A^{-1}.$$

Eftersom $\det(A) = 11 \cdot 4 - 9 \cdot 5 = -1$ är nollskild är A inverterbar och uttrycket ovan stämmer. På valfritt sätt beräknas

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 5 & -11 \end{pmatrix}$$

och

$$X = (C + AB)A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -47 & 104 \\ -14 & 31 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 4. Matrisen A är inverterbar precis då $\det(A) \neq 0$. Vi beräknar

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ a+2 & a+2 & a+2 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)a \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+2)\left((a-1)^2 - 1\right) =$$

$$= a^2(a+2)(a-2).$$

Alltså är A inverterbar för alla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.