

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Martin Herschend,
Thomas Kragh

Prov i matematik

K1, STS1, W1, X1, Frist,
KandKe1, Gylärarna1

Linjär algebra
och geometri I
2013–12–19

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (**Obs:** denna uppgift löses **inte** om man har klarat duggan!)

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + (a-2)x_4 = -2 \\ 4x_1 + 12x_2 + (a+4)x_3 + 9x_4 = 8 \end{cases}$$

för alla värden på $a \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AXC + BXC = I.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2x & 1 \\ x & 2x & x & 3x \\ 1 & 2x & 1 & x \\ 2 & x & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Låt punkterna

$$A: (1, 2, 2), \quad B: (2, 2, 3), \quad C: (3, 4, 3) \quad \text{och} \quad D: (2, 4, 2)$$

vara givna.

- (a) Visa att punkterna är hörnen i en parallelogram där vektorn \overrightarrow{AC} utgör ena diagonalen.

(b) Bestäm arean av denna parallelogram.

5. Låt $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som

- avbilder vektorn $(1, 0, 0, 0)$ på $(2, -1)$,
- avbilder vektorn $(0, 1, 0, 0)$ på $(2, -1)$,
- avbilder vektorn $(0, 0, 3, 1)$ på $(1, 2)$ och
- avbilder vektorn $(0, 0, 2, 2)$ på $(1, 1)$.

(a) Hitta standardmatrisen $[T]$ för T .

(b) Hitta bilden av vektorerna $(1, -3, 6, 2)$ och $(2, 1, 2, 2)$ under T .

6. Låt $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara speglingen i planet $\pi: 2x + y - z = 0$.

(a) Hitta S 's standardmatris $[S]$.

(b) Hitta två egenvärden för $[S]$.

(Obs: man kan lösa (b) utan att lösa (a))

7. (a) Ge definitionen av spannet (det linjära höljet) av vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Låt

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 2, 0), \quad \vec{u}_3 = (3, 5, 1) \quad \text{och} \quad \vec{u}_4 = (4, 7, 1).$$

(b) Avgör om spannet av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ och \vec{u}_4 är hela \mathbb{R}^3 .

(c) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1, 1, a)$ spannet $\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$?

8. Hitta ekvationen för planet genom origo som skär båda planen

$$\pi_1: y + 2z = 23 \quad \text{och} \quad \pi_2: x - y + z = 27$$

vinkelrätt.

Lycka till!
God jul och gott nytt år.

**Lösningar till tentamen i
Linjär algebra
och geometri I 2013–12–19**

Lösning till problem 1. Totalmatrisen är:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & a-2 & -2 \\ 4 & 12 & a+4 & 9 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{①} \leftarrow -4 \\ \text{②} \leftarrow -2}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftarrow -a} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftarrow \frac{1}{1-a^2}} \sim_{\text{om } a \neq \pm 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{①} \leftarrow -3 \\ \text{②} \leftarrow -a \\ \text{③} \leftarrow -2}} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Lösningar: } (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, t, 0, 0), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Om $a = 1$ är totalmatrisen ekvivalent med:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{②} \leftarrow -1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

och alla lösningar är: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t-s, t, -s, s), t \in \mathbb{R}$.

Om $a = -1$ är totalmatrisen ekvivalent med:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{②} \leftarrow -1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

och alla lösningar är: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t-3s, t, s, s), t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 2.

$$AXC + BXC = I \quad \Leftrightarrow \quad (A+B)XC = I \quad \Leftrightarrow \quad X = (A+B)^{-1}C^{-1} = (C(A+B))^{-1}$$

om $C(A+B)$ är inverterbar (observera att detta också medför att C och $A+B$ är inverterbara). Vi ser att

$$C(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna inverteras:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{①} \leftarrow -2 \\ \text{②} \leftarrow -2}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

So omskrivningen gäller och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{också:} \quad \left((A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = C \right)$$

Lösning till problem 3.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2x & 1 \\ x & 2x & x & 3x \\ 1 & 2x & 1 & x \\ 2 & x & 2 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 1 & 2x & x \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} \textcircled{-1} \longrightarrow \\ x^3 \begin{vmatrix} x-6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x^3(x-7). \end{matrix}$$

Så lösningarna är $x \in \{0, 7\}$.

Lösning till problem 4.

(a) Vi ser att $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 2, 0)$ och

$$\overrightarrow{AC} = (2, 2, 1) = (1, 0, 1) + (1, 2, 0) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Därför är punkten C mittemot A i parallelogrammen med sidorna \overrightarrow{AB} och \overrightarrow{AD} .

Alternativ: $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ och $\overrightarrow{DC} = (1, 0, 1)$ är lika. Så därför är \overrightarrow{AD} och \overrightarrow{BC} också lika och punkterna är hörnen i en parallelogram.

(b) Vi har formeln:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\diamond ABCD) &= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \|(-2, 1, 2)\| = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Lösning till problem 5. (a) Från uppgiften får vi ekvationen

$$[T] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi inverterar 4×4 matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textcircled{3} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textcircled{-\frac{1}{4}} \\ \leftarrow \textcircled{-2} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

och vi får att

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 6. (a) normalvektorn $(2, 1, -1)$ avbildas på $(-2, -1, 1)$ och vektorerna $(1, -2, 0)$ och $(1, -1, 1)$ (som är parallell med planet) bevaras av S . Så vi får ekvationen:

$$[S] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi inverterar matrisen precis till höger om $[S]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{-1}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{-5}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{-1}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{0}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Så vi får

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ beräkna $[S]$:s (eller dennas kolonner) direkt genom att använda

$$S(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \text{proj}_{(2,1,-1)}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot (2,1,-1)}{3} (2,1,-1)$$

(b) Då S är en spegling är $S(\vec{n}) = -\vec{n}$ och $S(\vec{v}) = \vec{v}$ för \vec{n} normalvektor till planet och \vec{v} parallell med planet. Så båda -1 och 1 är egenvärden (och där finns inte andra). Alternativt hitta rötterna i

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-3\lambda \end{vmatrix} &= \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 0 & 3-3\lambda & 3-3\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1-\lambda}{3^2} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda}{3^2} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -4 \\ -2 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1-\lambda}{3^2} ((1+3\lambda)(-1+3\lambda) - 8) = \frac{1-\lambda}{3^2} (9\lambda^2 - 9) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Lösning till problem 7.

- (a) Spannet av vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är mängden av alla linjära kombinationer av vektorerna. Alternativt $\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \{c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k \mid c_i \in \mathbb{R}\}$.
- (b+c) Vi sätter vektorerna in som kolonner i en matris och kollar om rangen är lika med antalet rader och vi sätter vektorn $(1, 1, a)$ som augmentering för att se när den faktiskt kan skrivas som en linjär kombination av \vec{u} :na.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{①} \\ \leftarrow \\ \leftarrow}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{①}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Vi är nu på trappstegsform, och då koefficientmatrisen har rang $2 < 3$ är spannet inte lika med hela \mathbb{R}^3 . Yttermera, ser vi att $(1, 1, a)$ tillhör spannet om och endast om $a = 1$ (precis då har vi lösningar).

Lösning till problem 8. Vi söker ett plan som är parallellt med de två normalvektorerna

$$\vec{n}_1 = (0, 1, 2) \quad \text{och} \quad \vec{n}_2 = (1, -1, 1).$$

Till normalvektor kan vi ta

$$(0, 1, 2) \times (1, -1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (3, 2, -1)$$

Då planet går genom origo är ekvationen

$$3x + 2y - z = 0.$$