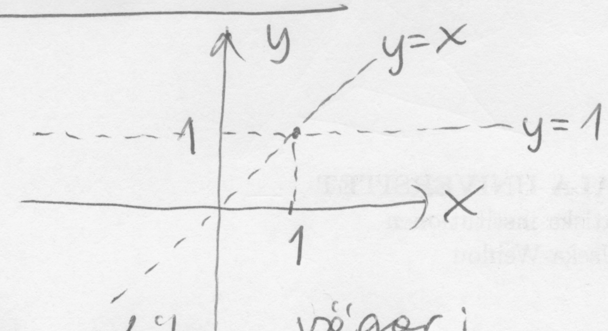
# Tenta 2012-04-12

① $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{x-1}$




kollar resultatet längs olika vägar:

- längs diagonalen $y=x$:

$$\lim_{(x,x)\to(1,1)} \frac{x^2-1}{x-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{konjugatregeln}}}{=} \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

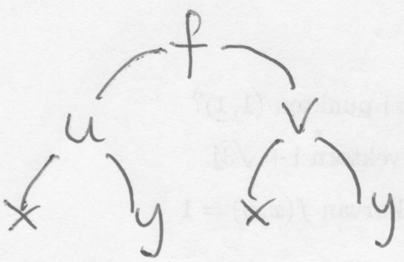
- längs linjen $y=1$:

$$\lim_{(x,1)\to(1,1)} \frac{x\cdot1-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Olika resultat $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar INTE.

---

② $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \begin{cases} u = 3x+y \\ v = x \end{cases}$




$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u}$$

Ekvationen blir:

$$\underbrace{\cancel{3\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{\partial f}{\partial v}}_{f_x} \underbrace{- \cancel{3\frac{\partial f}{\partial u}}}_{-3f_y} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(u,v) = g(u) \quad \text{konst. m.a.p. } v$$

Svar: $f(x,y) = g(3x+y)$ där $g$ - en godtycklig $C^1$ funktion.

3. $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y + x^2 + y^2$

$D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\}$ – enhetscirkelskivan

Plan: 1) stationära punkter inuti området

2) på randen: Lagrange fall 1

3) jämför och välj

Stationära punkter: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2x = 0 \\ 1+2y = 0 \end{cases}$

Bara en stationär punkt: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

---

Lagrange: max minimipunkter uppfyller:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} 1+2x & 1+2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

där $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\begin{cases} 2y(1+2x) - 2x(1+2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} 2y + \cancel{4xy} - 2x - \cancel{4xy} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

$2x^2 = 1$

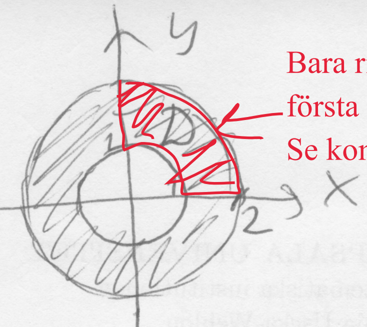
$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ eller $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(x,y) = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}^2} = \boxed{1 - \sqrt{2}} \approx -0{,}4 > -0{,}5$ $\qquad f(x,y) = \boxed{\sqrt{2} + 1}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$

Svar: Max: $\sqrt{2} + 1$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, min $-\frac{1}{2}$ i $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ∎

4. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-1}\,dx\,dy$




Bara ringen i den
första kvadranten!
Se kommentaren nere.

Polär koordinatbyte

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\left\{ \begin{array}{l} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right.$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$x^2+y^2 = r^2$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2-1}\; r\,dr\,d\theta = \boxed{\begin{array}{l}\text{integranden}\\ \text{beror ej}\\ \text{på } \theta\end{array}}$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^2 (r^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot r\,dr = \circledast$$

Hittar primitiv funktion:

$$\int (r^2-1)^{\frac{1}{2}}\, r\,dr = \left[\begin{array}{l}\text{subst. } r^2-1 = t\\ 2r\,dr = dt\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{r^2-1}^{\,3} + C$$

$$\circledast = 2\pi\cdot\left[\frac{1}{3}\sqrt{r^2-1}^{\,3}\right]_1^2 = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(\sqrt{4-1}^{\,3} - 0\right) =$$

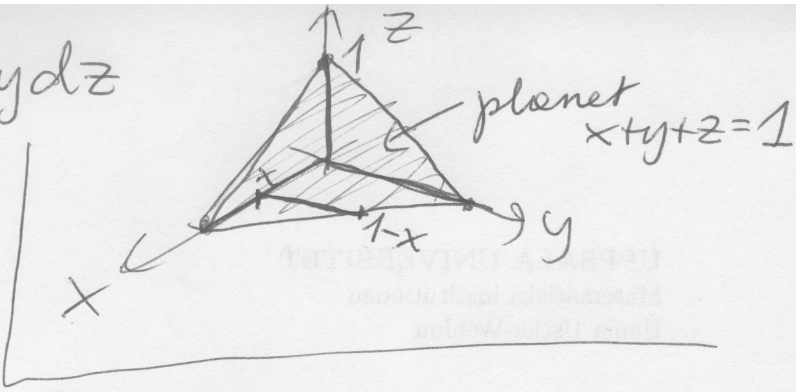
$$= \frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{3}^{\,3} = \frac{2\pi}{\cancel{3}}\,\cancel{3}\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}\,\pi} \leftarrow \text{svar.}$$

OBS: jag missade villkoren att x och y är större eller lika med noll! Detta ger theta mellan 0 och pi/2 och slutresultatet är resultatet som jag fick, dividerat med 4, alltså:

$$\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$$

5.

$$\iiint_\Omega e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$$




Fubini

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} e^{x+y+z}\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[e^{x+y+z}\right]_0^{1-x-y} dy\right)dx =$$

för z

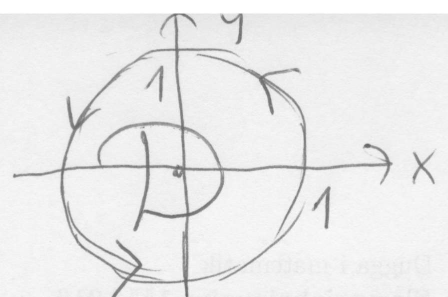
$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(e-e^{x+y}\right)dy\right)dx = \int_0^1\left[ey-e^{x+y}\right]_0^{1-x} dx =$$

för y

$$= \int_0^1\left(\cancel{e}-ex-\cancel{e^1}-0+e^x\right)dx = \left[-e\frac{x^2}{2}+e^x\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{e}{2}+e+0-1 = \boxed{\frac{e}{2}-1}$$

6.




Alla villkor för Greens sats är uppfyllda.

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(x,y) &= -y^2 - y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2y-1 \\ Q(x,y) &= yx^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \end{aligned}}$$

$$= \iint_D (2xy+2y+1)\,dx\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy = \text{Area}(D) = \boxed{\pi}$$

integralen av $2xy+2y$ är noll, ty området är symmetriskt enligt x-axeln och funktionen är udda m.a.p. $y$

$$g(x,-y) = -2xy-2y = -g(x,y)$$

7. Gauss sats

$$\oint\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz =$$

$K \leftarrow$ klotet med radien 3

$$= \iiint_K (3+2-1)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K 4\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 4\cdot \text{Vol}(K) = 4\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot 3^{\cancel{3}\,2} = 16\cdot 9\cdot\pi = \boxed{144\pi}$$

8) Lämpligast använder vi Stokes sats.

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot d\vec{S} = (*)$$

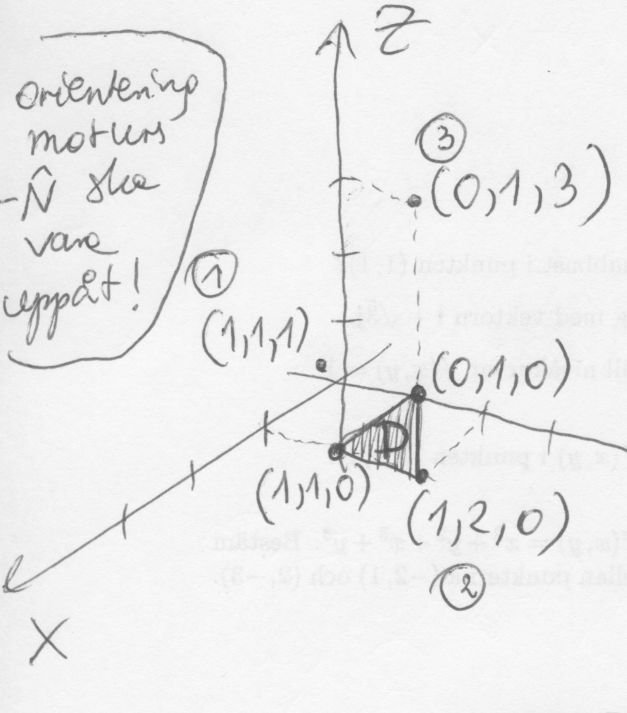
$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z^2 & 2x^2+y^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z, 4x-2y)$$

Vi behöver ekvationen för planet genom

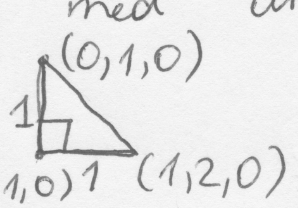
$A=(1,1,1)$, $B=(1,2,0)$ och $C=(0,1,3)$.

Normalvektor: $\underbrace{\vec{AB}}_{(0,1,-1)} \times \underbrace{\vec{AC}}_{(-1,0,2)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,1,1)$

orientering moturs — $\hat{N}$ ska vara uppåt!




Projektionen av triangeln på $xy$-planet är triangeln $D$ med hörn i $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ och $(1,2,0)$ som är rätvinklig med arean $\frac{1}{2}$




insättning av $(1,1,1)$ ger $d=-4$

Planet $\boxed{2x+y+z+d=0}$ är grafen till en funktion $z=g(x,y)$ med $\frac{\partial g}{\partial x}=-2$, $\frac{\partial g}{\partial y}=-1$.

Vi använder därför formeln:

$$\circledast = \iint_D (2y, 2z, 4x-2y)\cdot(2,1,1)\,dx\,dy = $$

Skalär-produkt

$$z = -2x-y+4$$

$$= \iint_D \left(\cancel{4y} \cancel{-4x} \cancel{-2y} -8 \cancel{+4x} \cancel{-2y}\right) dx\,dy =$$

$$= -8 \cdot \iint_D 1\,dx\,dy = -8 \cdot \text{Area}(D) = -8 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-4}$$

Svaret.

Nej! +4

OBS: Jag har tyvärr råkat välja fel normalvektor! Det ska vara (-2,-1,-1) i stället!
Man kan inte se det på den här bilden, men jag har gjort en bild i en annan perspektiv (i filen "Tenta 2012-04-12 SOLUTION upp8 CORRECTION"), och där ser man att triangeln är orienterad MOTURS sedd från origo, alltså MEDURS från en punkt högt uppe på z-axeln, vilket gör att man måste välja normalvektorn till ytan som är riktad nedåt (för att vektorn och kurvan ska ligga enligt högerhandsregeln)!
Svaret blir alltså 4, vilket bekräftas när man räknar med en annan metod (parametrisering av alla sidor i triangeln och beräkning av kurvintegralerna på varje sida för sig).

Tack för studenten som påpekade för mig att man kan räkna uppgiften på ett annat sätt (än Skokes sats) och att man då får minus resultat!