UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ketil Tveiten

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I - 1MA025
2016-03-14

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Tentamen består av **8 frågor** *om* **5 poäng** *för totalt* **40 poäng**. *De preliminära betygsgränserna är som följer: 18 till 24 poäng ger betyget 3, 25 till 31 poäng ger betyget 4, 32 till 40 poäng ger betyget 5.*

1. (5 p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

2. (5 p) Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX^{-1} - AB = AC^T,$$

där $A = \begin{pmatrix} 19 & 7 & 54 \\ 9 & 2 & -369 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. (5 p) Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. (5 p) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Hitta inversen A^{-1} för dom a där inversen finns.

5. Låt $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 0, 1)$ och $v_3 = (1, 1, 2, 2)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Är vektorerna linjärt oberoende? (2 p)

(b) Ligger vektoren $u = (1, -1, 5, 3)$ i $span\{v_1, v_2, v_3\}$? (3 p)

6. (5 p) Beräkna minsta avståndet mellan punkten $P = (1, 1, 2)$ och linjen

$$l : (4, 0, 2) + t(1, 0, -1).$$

7. (5 p) Matrisen

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

representerar linjäravbildningen givet av ortogonal projektion på ett plan genom origo. Bestäm ekvationen till detta plan.

8. (5 p) Punkterna $P_1 = (1, 2, -3)$, $P_2 = (3, -2, 2)$ och $P_3 = (1, 0, -1)$ i $\mathbb{R}^3$ bildar en triangel. Bestäm arean på denna triangel.

LYCKA TILL!!

Lösningar

1. Radreduktion av totalmatrisen ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14/3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/3 & 0 \end{pmatrix},$$

som ger lösningen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 3, -1, 0, 0) + t(-7/3, 14/3, 4, -7/3, 1)$.

2. Determinanten till A är $-4(19 \cdot 2 - 7 \cdot 9) = -4(38 - 63) = 100 \neq 0$, så A är inverterbar. Vi kan då skriva om

$$AX^{-1} - AB = AC^T$$

till

$$X^{-1} - B = C^T$$

genom att multiplicera med A^{-1} från vänster (notera att vi inte behöver ta fram A^{-1}, det räcker att veta att den finns). Nu får vi

$$X = (C^T + B)^{-1};$$

vi har att $C^T + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, med invers $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Determinanten kan beräknas t.ex. genom att subtrahera första rad från dom andra, och bryta ut faktoren $(x-1)$ från rad 2,3 och 4:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sen addera (-1) gånger raderna 2,3 och 4 till första rad, som ger en triangulär matris:

$$(x-1)^3 \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

och vi ser att determinanten blir $(x-1)^3(x+3)$, som ger lösningar $x=1, x=-3$ till ekvationen.

4. Matrisen är inverterbar om $det(A) = a(a-1) \neq 0$, dvs. för alla $a \neq 0, 1$. Om $a \neq 0, 1$ ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & a-1 \\ a^2 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sätter man upp v_1, v_2, v_3 som rader (eller kolumner) i en matris ser man efter lite Gaussing att matrisen har rang 3, dvs. vektorerna *är* linjärt oberoende; svaret på frågan a) är alltså *ja*. Utvidgar man matrisen med vektoren u som en ekstra rad (eller kolumn) och gör samma sak ser man att den utvidgade matrisen har rang 3 (evt. kan man beräkna determinanten eftersom matrisen är kvadratisk, villket ger rang 3 eftersom determinanten är 0), så u är linjärt beroande av v_1, v_2, v_3 och ligger då i $span\{v_1, v_2, v_3\}$; svaret på b) är då *ja*.

6. Låt $Q = (4,0,2)$ och $v = (1,0,-1)$ (så linjen ges av $Q + tv$). Närmaste punkt på linjen hittar man som $p := Q + proj_v(QP) = (4,0,2) + \frac{(-3,1,0)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}(1,0,-1) = (4,0,2) - \frac{3}{2}(1,0,-1) = (5/2, 0, 7/2)$. Avståndet är då längden på vektoren $pP = (1,1,2) - (5/2,0,7/2) = (-3/2, 1, -3/2)$. Längden är $\sqrt{9/4+1+9/4} = \sqrt{11/2}$.

7. Normalvektoren för planet är en egenvektor med egenvärde 0; alltså en lösning på ekvationen $Mx = 0$. M kan radreduceras till $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, som har lösningsrum $t(1,2,1)$; planet är då $x + 2y + z = 0$.

8. Arean på triangeln ges av t.ex. $\frac{1}{2}\|P_1P_2 \times P_1P_3\|$. Kryssprodukten $P_1P_2 \times P_1P_3$ är $(2,-4,-4)$, som har längd 6; arean är alltså 3.