UPPSALA UNIVERSITET	Prov i matematik
Matematiska institutionen	Envariabelanalys, del 1
Håkan Persson	1MA013
Tillåtna hjälpmedel: Skrivmateriel.	2015-10-19

Instruktioner:

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang är lätta att följa. Kontrollera alltid rimligheten i dina svar. Observera att uppgifterna ej är ordnade efter svårighetsgrad. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng och för godkänd deltenta krävs minst 18 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng.

Lycka till!

1. (a) Ge ett exempel på en funktion definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, som inte är *kontinuerlig* i punkten $x = 0$.

   (b) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$, men som inte är *deriverbar* i punkten $x = 0$.

   (c) Ge ett exempel på en funktion som är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, men som *saknar gränsvärde* i punkten $x = 0$.

2. Beräkna följande gränsvärden:

   i)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x) + xe^x + 2x}{e^{2x}}$$

   ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

   iii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

3. Låt funktionen f vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{om } x \neq 0, \\ a, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

   i) Bestäm a så att f blir en kontinuerlig funktion.

   ii) Avgör om funktionen f med a som i *i)* är deriverbar för alla x.

   iii) Är derivatan till funktionen f med a som i *i)* kontinuerlig?

4. Låt $f(x) = x^x$, för $x > 0$.

   (a) Finns det något *största* värde $f(x)$ kan anta?

   (b) Vad är det *minsta* värde $f(x)$ kan anta?

5. Låt $T(t)$ beteckna jordens medeltemperatur mätt i grader Celsius vid tidpunkten t.

   (a) Är det rimligt att anta att T är kontinuerlig?

   (b) Vad betyder det för jordens medeltemperatur att $T'(2015) > 0$?

(c) Vad innebär det i termer av derivator att jordens temperaturökning minskar vid tiden t? Du kan anta att alla derivator du behöver använda existerar.

6. Beräkna Taylorpolynomet av ordning 4 kring punkten a till följande funktioner:

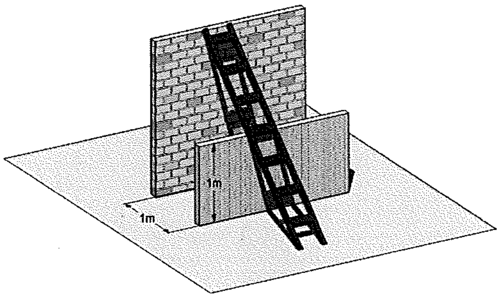
   (a) $f(x) = \sin(x) + x$, med $a = 0$;

   (b) $g(x) = \ln(x)$, med $a = 1$;

   (c) $h(x) = e^{\arctan(x)}$, med $a = 0$.

7. Undersök funktionen
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$
med avseende på asymptoter, lokala och globala extrempunkter samt konvexitet. Skissa grafen $y = f(x)$.

8. Ett 1 meter högt staket går parallellt med en vägg på 1 meters avstånd från väggen, se Figur 1. Hur lång är den kortaste stege man kan luta mot väggen, över staketet?



Figur 1: Skiss över problemet i Fråga 8.

$$\frac{X}{1} = \frac{1+y}{y}$$

$$X = \frac{1+y}{y}$$

$$\ell^2 = X^2 + (1+y)^2 = \left(\frac{1+y}{y}\right)^2 + (1+y)^2 = (1+y)^2\left[\frac{1}{y^2} + 1\right.$$

$$\frac{(1+y)^3}{y^2}$$