UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2015-11-16

Dugga – Linjär Algebra och Geometri 1

Skrivtid: 08:00-10:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng

1. Bestäm lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + (b-1)x_2 + x_3 = -2 \\ 2bx_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

för alla värden på $b \in \mathbb{R}$ där lösningar existerar.

Lösning: Vi använder Gauss-Jordan elimination på ekvationssystemets totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & b-1 & 1 & -2 \\ 0 & 2b & b & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & -3 \\ 0 & 2b & b & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & -3 \\ 0 & 0 & b-2 & 6 \end{array}\right)$$

För att fortsätta måste vi behandla olika värden på b separat. För $b = 2$ har vi matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

vilket svarar mot ett inkonsistent ekvationssystem.

För $b \neq 2$ fortsätter vi genom att multiplicera sista raden med $1/(b-2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{b-2} \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & -\frac{3b}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{b-2} \end{array}\right)$$

För $b = 0$ lyder matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Motsvarande ekvationssystem lyder

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

vilket har den allmäna lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (t+1, t, -3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Antag nu att $b \neq 0, 2$, och multiplicera den andra raden med $1/b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{b-2} \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{b-5}{b-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{b-2} \end{array}\right)$$

Vilket svarar mot ett ekvationssystem med den entydiga lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{b-5}{b-2}, -\frac{3}{b-2}, \frac{6}{b-2})$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -2a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Bestäm inversen A^{-1} för de värden på a som A är inverterbar.

Lösning: Vi beräknar först A:s determinant, Sarrus regel ger $\det(A) = 1 - 6a$. Matrisen är inverterbar för alla $a \neq 1/6$. Jacobis metod ger:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ a & -2a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; -a \quad -2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 1+2a & -a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \; -2a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-6a & 3a & 1 & -2a \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-6a & 3a & 1 & -2a \end{array}\right)$$

Antag $a \neq 1/6$ och multiplicera sista raden med $\frac{1}{1-6a}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{1-6a} & \frac{1}{1-6a} & -\frac{2a}{1-6a} \end{array}\right) \; -4 \quad 2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-6a} & \frac{2}{1-6a} & -\frac{4a}{1-6a} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{1-6a} & -\frac{4}{1-6a} & \frac{1+2a}{1-6a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{1-6a} & \frac{1}{1-6a} & -\frac{2a}{1-6a} \end{array}\right) \; -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-6a} & \frac{2}{1-6a} & -\frac{4a}{1-6a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{1-6a} & \frac{4}{1-6a} & -\frac{1+2a}{1-6a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{1-6a} & \frac{1}{1-6a} & -\frac{2a}{1-6a} \end{array}\right)$$

Vi läser av $A^{-1} = \frac{1}{1-6a}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4a \\ 2 & 4 & -(1+2a) \\ 3a & 1 & -2a \end{pmatrix}$

3. Finn alla matriser X som löser ekvationen

$$2X = C - XB,$$

där

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: Lös ut X: $2X+XB = C \Leftrightarrow X(B+2I) = C$. Om $(B+2I)$ är inverterbar så gäller $X = C(B+2I)^{-1}$.

$$B+2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sarrus regel ger $\|B+2I| = -1$, så $B+2I$ är inverterbar. Jacobis metod (t.ex.) ger $(B+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, och insatt i formeln för X ovan får vi

$$X = C(B+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Lösning: Beräkna först determinanten i vänsterledet:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 1 \\ x-1 & x & -1 & -1 \\ x-1 & -1 & x & 1 \\ x-1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & x+1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{K_2}{=} (x-1)(x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+1)^2$$

Ekvationen lyder alltså $(x-1)^2(x+1)^2 = 0$ och har lösningarna $x = \pm 1$.