Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Isac Hedén

Algebra I, 5 hp
Distanskurs
2013-06-08
Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och linjal. Varje problem ger maximalt 5 poäng – om inget annat anges krävs att lösningarna skall vara åtföljda av klar och tydlig förklarande text för full poäng. Gränserna för betygen 3, 4 och 5 går vid 18, 25 och 32 poäng respektive. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad.
Skrivtid: *09.00–14.00.*

1. På den första uppgiften krävs inga motiveringar, endast svar.

a) Ge exempel på två mängder A och B, och en funktion $f : A \longrightarrow B$ som varken är injektiv eller surjektiv.

b) Beräkna $\sum_{k=3}^{8}(3k-2)$.

c) Beräkna $\sum_{k=3}^{8} 3^{k-2}$. Svaret behöver inte förenklas fullständigt. Det går bra att svara med ett bråk.

d) I en skolklass finns 11 elever som spelar piano, och 12 som spelar tennis. 3 av eleverna spelar både piano och tennis, och 4 spelar varken tennis eller piano. Hur många elever finns det i klassen?

e) Låt a, b och n vara heltal med $n \geq 2$. Vad betyder det att $a \equiv b \pmod{n}$?

2. **a)** Skriv talet $(132)_{\text{fyra}}$ i basen 2.

b) Bestäm alla heltal $x \geq 0$ sådana att $4x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$.

3. Vilken är den minsta positiva rest som kan erhållas vid division av 29^{19} med 13?

4. Blyertspennor kostar 9 kronor styck och bläckpennor kostar 13 kronor styck.

a) Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $9x + 13y = 1$.

b) När Beatrice köpte pennor av de två sorterna blev det totala priset 221 kronor. Vilket är det lägsta sammanlagda antalet pennor hon kan ha köpt?

Var god vänd!

5. Bevisa med induktion att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$
för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. Polynomen $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5$ och $x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ har en gemensam icke-konstant faktor. Bestäm samtliga nollställen till *det första* polynomet.

7. **a)** Undersök med avseende på reflexivitet, symmetri och transitivitet, den relation R på $\mathbb{Z}$ som definieras av $mRn \Leftrightarrow 5 \nmid m^2 \cdot n$.

b) Visa att mängden av alla naturliga tal som är delbara med 4 är uppräknelig.

c) Visa att mängden av alla naturliga tal som *inte* är delbara med 4 också är uppräknelig.

8. Bestäm alla primtal p för vilka ekvationen $x^3 - 3x + p = 0$ har en heltalsrot.

LYCKA TILL!