Lösningsförslag
Dugga 2014-09-24
Baskurs i matematik

1) $|4-x| \leq 5$

$\Leftrightarrow \quad -5 \leq 4-x \leq 5$

$\Leftrightarrow \quad -9 \leq -x \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{-1 \leq x \leq 9}$

2) $15 < 16 < 20$

så $\sqrt{15} < 4 < \sqrt{20}$ (och $4 \in \mathbb{Q}$)

<u>svar:</u> tag $x = 4$.

3)

Observera att

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4,$$

så $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x+3} =$

$$= \frac{(x-5)(x+3)}{x+3} = x - 5.$$

(kan även lösas med polynomdivision)

4)

$$\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{2 - i + 6i - 3i^2}{4 - i^2} =$$

$$= \frac{5+5i}{5} = 1 + i$$

5)

$$|x-3| = |x-6|$$

$\Leftrightarrow$ antingen $x-3 = x-6$

eller $x-3 = -x+6$.

Den första saknar lösning, den andra

har lösningen $x = \frac{9}{2}$.

<u>Svar:</u> $x = 9/2$.

(Kan också lösas genom att tolka absolutbeloppen

som avstånd.)

6)

Vi kan välja grönsakerna på $\binom{5}{3}$ sätt

och buljongen på 2 sätt.

Enl. mult.principen är antalet

grönsakssoppor

$$2 \cdot \binom{5}{3} = 2 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 20.$$

Svar: 20.

7) Enl. binomialsatsen har vi

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \cdot x^{k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{13-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \cdot x^{2k-13}.$$

Vi får x^3-term när $2k-13=3$

$\Leftrightarrow k=8.$

<u>Svar</u> Sökt koefficient är $\binom{13}{8}$.

8) Basfallet: Med $n=1$ får vi

$$VL = \sum_{k=1}^{1} 2^{k-1} = 2^0 = 1 \quad \text{och} \quad HL = 2^1 - 1 = 1.$$

Så formeln gäller för $n=1$.

Induktionsantagande: Antag att för något tal $m \in \{1,2,3,\ldots\}$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} = 2^m - 1. \qquad (1)$$

Induktionssteg: Vi ska härleda att

$$\sum_{k=1}^{m+1} 2^{k-1} = 2^{m+1} - 1. \qquad (2)$$

Vi har $VL = \sum_{k=1}^{m+1} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} + 2^m = \left\{\begin{matrix}\text{enl. vårt} \\ \text{ind.} \\ \text{antagande}\end{matrix}\right\} =$

$= 2^m - 1 + 2^m = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1 = HL.$

Härledningen av (1) $\Rightarrow$ (2) är klar!

Enligt induktionsaxiomet gäller den givna formeln för alla $n = 1,2,3,\ldots$ Beviset klart!

9) $z=2$ är en rot (men inte $z=1$).

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad z^2 - 2z + 5 \\
\hline
z^3 - 4z^2 + 9z - 10 \;\big|\; z-2 \\
-(z^3 - 2z^2) \\
\hline
\quad -2z^2 + 9z - 10 \\
\quad -(-2z^2 + 4z) \\
\hline
\qquad 5z - 10 \\
\qquad -(5z - 10) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Vi visste att resten skulle bli noll enligt faktorsatsen. Så vår ekvation kan skrivas:

$$(z-2)\cdot(z^2-2z+5)=0.$$

De två återstående rötterna får vi som lösningar till $z^2-2z+5=0$

$\Leftrightarrow z = 1 \pm\sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$.

<u>Svar</u>: $z=2$ och $z=1\pm 2i$.