$\boxed{\text{UPPGIFT 1}}$

Bestäm och klassificera alla kritiska (stationära) punkter till $f(x,y) = -2y^2 - 4xy - x^4$.
Redovisa alla dina beräkningar.

Lösning

Vi lokaliserar alla stationära punkter som lösningar till $\boxed{\nabla f(x,y) = \langle 0,0 \rangle}$.

$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle -4y-4x^3, -4y-4x \rangle.$$

Ekvationssystemet vi ska lösa är:

$$\begin{cases} -4y-4x^3=0 \\ -4y-4x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x^3 & (1) \\ y=-x & (2) \end{cases}$$

(1) och (2) ger $x^3 = x \iff x^3 - x = 0$

$$\iff x(x-1)(x+1) = 0.$$

Vi får tre lösningar: $x=0$, $x=1$, $x=-1$

$$\overset{(2)}{\Downarrow} \quad \overset{(2)}{\Downarrow} \quad \overset{(2)}{\Downarrow}$$

$y=0$, $y=-1$, $y=1$

Tre stationära punkter: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$.

För att bedöma deras karaktär, måste vi undersöka Hessianen

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x^2 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = 48x^2 - 16 = 16(3x^2-1)$$

- I $\boxed{(0,0)}$ $D_2 = -16 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{SADELPUNKT}}$
- I $\boxed{(1,-1)}$ och $\boxed{(-1,1)}$ $D_2 = 16 \cdot 2 > 0$ – extrempunkter både $\boxed{\text{LOKALA MAX}}$ ty $f_{xx} < 0$ i båda fall

1. (**Ej för dem med godkänd dugga.** Om du var godkänd på duggan 2018-03-26, skriv GODKÄND PÅ DUGGAN i tabellen på Försättsbladet: i rutan *Anm.* till rad 1.)

Bestäm och klassificera alla kritiska (stationära) punkter till $f(x,y) = -2y^2 - 4xy - x^4$.
Redovisa alla dina beräkningar.

Rättningsförslag:

1p: gradienten plus ES för stationära punkter,

2p: alla stationära punkter rätt,

1p: Hessianen rätt och 1 punkt rätt klassificerad,

1p: alla punkter rätt klassificerade.

UPPGIFT 2

Låt $w = yz + x^2 - z^2$

$x = s + t$

$y = u + t$

$z = u + s.$

a) Beräkna $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$

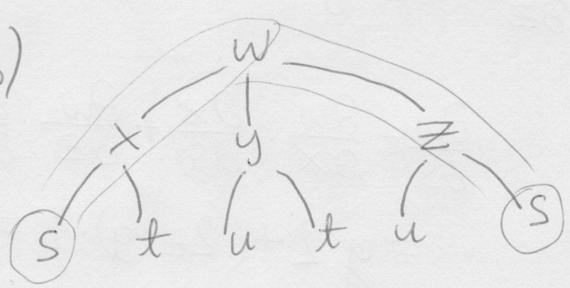
b) Uttryck $\frac{\partial w}{\partial s}$ med hjälp av variablerna s, t och u.

c) Beräkna $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial u}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$.

Lösning

a) $w = yz + x^2 - z^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = y - 2z \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial y \partial z} = 1}$

b)



$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial s}}_{1} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial s}}_{1} =$$

$$= 2x \cdot 1 + (y - 2z) \cdot 1 =$$

$$= 2(\underbrace{s+t}_{x}) + \underbrace{u+t}_{y} - 2(\underbrace{u+s}_{z}) =$$

$$= \cancel{2s} + 2t + u + t - 2u - \cancel{2s} = 3t - u$$

Svar: $\boxed{\frac{\partial w}{\partial s} = 3t - u}$

c) $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(3t - u) = -1$

$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(3t - u) = 0$

$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(3t - u) = 3.$

2. Låt

$w = yz + x^2 - z^2$

$x = s + t$

$y = u + t$

$z = u + s.$

a) (1p) Beräkna $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$.

b) (2p) Uttryck $\frac{\partial w}{\partial s}$ med hjälp av variablerna s, t och u.

c) (2p) Beräkna

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial u}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}.$$

Rättningsförslag:

a) **1p**: allt måste vara rätt för att få poäng.

b) **2p**: 1p för korrekt metod (t.ex. illustrerad med ett diagram) och 1p för korrekt resultat.

c) **2p**: 1p för korrekt metod, 1p för korrekt resultat.

(Ett plus om någon anmärker att blandade andra ordningens partiella derivator m.a.p. samma variabler i olika ordning är lika, eftersom alla inblandade funktioner är polynom, d.v.s. oändligt många gånger deriverbara.)

OBS: i c) blir det bättre med ett mellansteg: t.ex. i den första raden skriva mellan det första och det andra uttrycket:

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right) =$$

UPPGIFT 3

Bestäm största och minsta värdena för funktionen

$$f(x,y,z) = x+2y+3z$$

med bivillkoret $x^2+y^2+z^2=14$, alltså på sfären med mittpunkten i origo och radien $\sqrt{14}$.

Lösning

Vi använder Lagranges metod. Extrema finns där

$$\text{grad} f \parallel \text{grad}\, g$$

där $f(x,y,z) = x+2y+3z$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\text{grad} f = \langle 1,2,3\rangle$ $\quad$ $\text{grad}\, g = \langle 2x, 2y, 2z\rangle$

$$\text{grad} f \parallel \text{grad}\, g \iff \boxed{\frac{2x}{1} = \frac{2y}{2} = \frac{2z}{3}} \circledast$$

- $x=y=z=0$ ger $f(x,y,z)=0$, men det spelar ingen roll, ty $(0,0,0)$ INTE ligger på sfären.
- Om $\text{grad}\, g \neq \vec{0}$, då implicerar $\circledast$:

$$2x = y = \frac{2}{3}z \implies z = \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}\cdot 2x = 3x$$

$y = 2x$

$(x, 2x, 3x)$

(x,y,z) ligger på sfären, alltså:

$$x^2+y^2+z^2 = 14 \iff x^2+(2x)^2+(3x)^2 = 14$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+4x^2+9x^2=14$$

$$\Updownarrow$$

$$14x^2 = 14$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = 1 \iff (x-1)(x+1) = 0$$

ger $x=1$ eller $x=-1$

punkt $(1,2,3)$ $\qquad$ $(-1,-2,-3)$

$f(1,2,3) = 1+2\cdot 2+3\cdot 3 = 14$ MAX $\qquad$ $f(-1,-2,-3) = -14$ MIN

3. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y,z) = x+2y+3z$ med bivillkoret $x^2+y^2+z^2 = 14$, alltså på sfären med mittpunkten i origo och radien $\sqrt{14}$.

Rättningsförslag:

1p: rätt ansats till Lagranges metod, antingen med lambda parameter eller med parallella gradienter (proportionella komponenter),

3p: korrekt genomförande av Lagranges metod: lösning av ekvationssystemet på komponenterna (1p) plus insättning i villkoret $g(x,y,z) = 0$ med korrekt uträkning (1p); och separat hantering av variabler lika med noll (1p),

1p: rätt svar, inga räknefel. (Om någon anger bara maximi- och minimipunkter utan att räkna ut värdet, föreslår jag ett minus om man anger vilken är vilken; annars ingen poäng.)

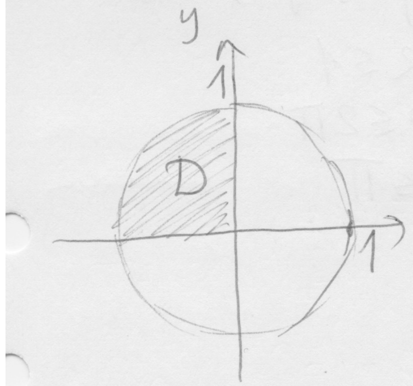
+: om någon påpekar att både min och max i D existerar eftersom området är kompakt (ev. slutet och begränsat) och funktionen kontinuerlig. Fast inget måste: räknar man ut (motiverar) min och max, är det lika bra.

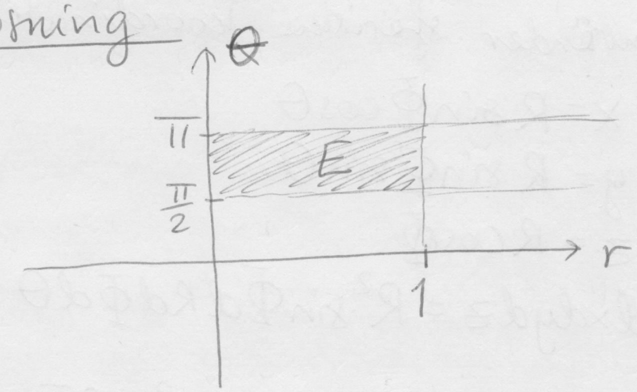
UPPGIFT 4

Beräkna $\iint_D x^2y\,dxdy$ där $D=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1, x\le 0, y\ge 0\}$

(D är alltså en fjärdedel av enhetscirkelskivan i den andra kvadranten; rita gärna området!)

Lösning





Vi genomför byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 1 \end{matrix}} \quad \text{(andra kvadranten!)} \longleftarrow D \text{ avbildas på rektangeln } E$$

$$dxdy = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_D x^2y\,dxdy = \iint_E r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4\cdot\cos^2\theta\sin\theta\,\cancel{dr\,d\theta}\ d\theta\,dr = \int_0^1 r^4\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta =$$

det gör att separera variablerna och E är en rektangel FUBINI

variabelbyte $\cos\theta = t$, $-\sin\theta\,d\theta = dt$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\cdot\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{5}\cdot\left(0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

4. Beräkna

$$\iint_D x^2y\,dxdy \qquad \text{där} \qquad D=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0\}.$$

(D är alltså en fjärdedel av enhetscirkelskivan i den andra kvadranten. Rita gärna!)

Rättningsförslag:

1p: korrekt byte till polära koordinater, både integralen och integreringsområdet,

1p: korrekt användning av Fubinis sats (dubbelintegralen som produkt av r-integralen och theta-integralen),

1p: integralen av r^4 korrekt,

2p: den trigonometriska delen av integralen rätt hanterat (1p för variabelbytet och 1p för korrekt resultat).

UPPGIFT 5

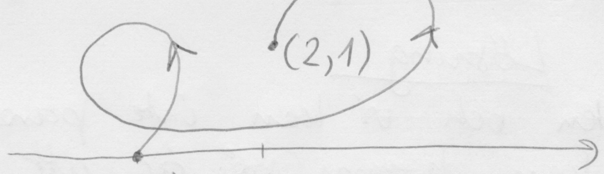
Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 2xy\cdot e^y dx + x^2(1+y)e^y dy$$

där C är kurvan i bilden nedan

Begynnelsepunkt: $(1,0)$

Slutpunkt: $(2,1)$.



Lösning

Eftersom vi inte kan parametrisera kurvan, misstänker vi att $\vec{F} = \langle 2xye^y, x^2(1+y)e^y \rangle$ är konservativt och att vi kan beräkna integralen m.h.a. huvudsatsen för vektorfält.

Kollar det nödvändiga villkoret:

som är även **tillräckligt** här eftersom fältet är C^1 i hela $\mathbf{R}^2$, vilket är ett **enkelt sammanhängande** område.

$$P(x,y) = 2xye^y \overset{\text{PRODUKTREGELN}}{\Longrightarrow} \frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y + 2xye^y = 2xe^y(1+y)$$

$$Q(x,y) = x^2(1+y)e^y \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = (1+y)e^y\cdot 2x$$

// Bra!

För att kunna använda huvudsatsen, måste vi hitta en potentialfunktion till $\vec{F}$, alltså $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.a.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy\cdot e^y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2(1+y)e^y.$$

① $\Phi(x,y) = \int 2xye^y dx = x^2ye^y + \varphi(y)$

$\boxed{\varphi \text{-beror ej på } x}$

② $x^2(1+y)e^y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \overset{\text{produktregeln}}{=} x^2e^y + x^2ye^y + \varphi'(y)$

$$\boxed{\varphi'(y) = 0} \iff \varphi(y) = C$$

Alltså $\Phi(x,y) = x^2ye^y$ – en potentialf. till $\vec{F}$.

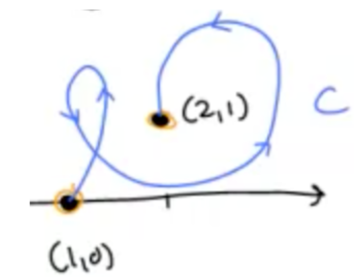
KOLLA ATT $\nabla\Phi = \vec{F}$!

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Phi(2,1) - \Phi(1,0) = 4\cdot 1\cdot e^1 - 1\cdot 0\cdot e^0 = \boxed{4e}$$

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 2xye^y dx + x^2(1+y)e^y dy$$

där C är kurvan i bilden nedan. Kurvans begynnelsepunkt är $(1,0)$ och slutpunkt är $(2,1)$.



Rättningsförslag:

1p: inser att man enbart kan beräkna kurvintegralen om fältet är konservativt och kollar det nödvändiga villkoret (ett plus för observationen att villkoret i detta fall är även tillräckligt),

1p: ställer upp ekvationerna för potentialfunktioner,

1p: någon bra slutsats om funktionernas utseende, genom integrering av en av ekvationerna (i förslaget visar jag slutsatsen från integreringen m.a.p. *x*, men man kan också köra *y* först),

1p: rätt slutsats med användning av den andra ekv. (antingen genom integrering och jämförelse av båda formerna för potentialfunktioner framtagna från båda villkor, eller genom derivering av den första formen på funktionen m.a.p. den andra variabeln). Ett plus om man kontrollerar om detta man fick fram verkligen ÄR en potentialfunktion.

1p: korrekt tillämpning av Huvudsatsen.

OBS: sista **4p** kan man också få utan att beräkna en potentialfunktion, om man väljer en annan kurva att integrera över, t.ex. raka sträckor från (1,0) till (2,0) och sedan upp från (2,0) till (2,1). Då MÅSTE man anmärka att villkoret för vekorfältet att vara konservativt är **tillräckligt** här (p.g.a. detta att fältet är definierat och C^1 i ett enkelt sammanhängande område) och det blir **1p** för det.

UPPGIFT 6

Bestäm flödet av vektorfältet $\vec{F}$ ut genom enhetssfären med mittpunkten i origo.

$$\vec{F} = \langle 4x - y + \cos z^2, -2y - e^{xz}, z^2 + xy\cos x \rangle.$$

Lösning

Alla antaganden i Gauss sats är uppfyllda. Vi kan alltså ersätta vår flödesintegral med trippelintegralen över enhetsklotet K av $\operatorname{div}\vec{F}$.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4 - 2 + 2z = \boxed{2+2z}$$

Från Gauss sats:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{F}\, dxdydz = \iiint_K (2+2z)\, dxdydz =$$

integralen är linjär

$$= \iiint_K 2\, dxdydz + 2 \cdot \iiint_K z\, dxdydz =$$

geometrisk tolkning av integralen

$$= 2 \cdot \mathrm{Vol}(K) + 2 \cdot \iiint_K z\, dxdydz = \frac{8}{3}\pi + 2 \cdot \iiint_K z\, dxdydz.$$

NOLL!

$\mathrm{Vol}(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$, $R = 1$

Den andra integralen kan man beräkna på två sätt!

1) Symmetriargument. $\boxed{\text{Int.} = 0}$ ty K är symmetrisk mot (bl.a.) xy-planet, och $f(x,y,z) = z$ är udda m. a. p. z.

2) rymdspolära koordinater

$x = R\sin\Phi\cos\Theta$
$y = R\sin\Phi\sin\Theta$
$z = R\cos\Phi$
$dxdydz = R^2 \cdot \sin\Phi\, dR\, d\Phi\, d\Theta$
$0 \le R \le 1$
$0 \le \Theta \le 2\pi$
$0 \le \Phi \le \pi$

$$\iiint_K z\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{R\cos\Phi}_{z} \cdot R^2 \cdot \sin\Phi\, d\Phi\, d\Theta\, dR =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int_0^{\pi} \sin\Phi\cos\Phi\, d\Phi = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\sin^2\Phi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot (0 - 0) = 0.$$

integranden oberoende av Θ

subst. $\sin\Phi = t$, $\cos\Phi\, d\Phi = dt$

Svaret: Flödet $= \frac{8}{3}\pi$

6. Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom enhetssfären med mittpunkten i origo.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (4x - y + \cos z^2, -2y - e^{xz}, z^2 + xy\cos x).$$

Rättningsförslag:

1p: inser att man kan och bör använda Gauss sats.
Ett minus om man inte påpekar att alla antaganden i satsen är uppfyllda (ett plus om man *listar* dessa),

1p: divergensen korrekt samt alla element rätt insatta i formeln från divergenssatsen,

3p: korrekt hantering och rätt uträkning av trippelintegralen. Här kan man tänka sig olika vägar att gå:
- rent **geometrisk** hantering av integralen (linjäriteten, volym, symmetri) som i min lösning,
- rent **aritmetisk** hantering av integralen genom ett direkt byte till *rymdspolära* koordinater + Fubinis sats,
- olika **blandningar** av ovannämnda.

Max 3p i alla fall, men hur precis, vill jag lämna över till omdömet av personen som rättar.

UPPGIFT 7

Beräkna $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ då

$$\vec{F}(x,y,z) = (z+x^3+x,\ z-\sin y,\ x+z)$$

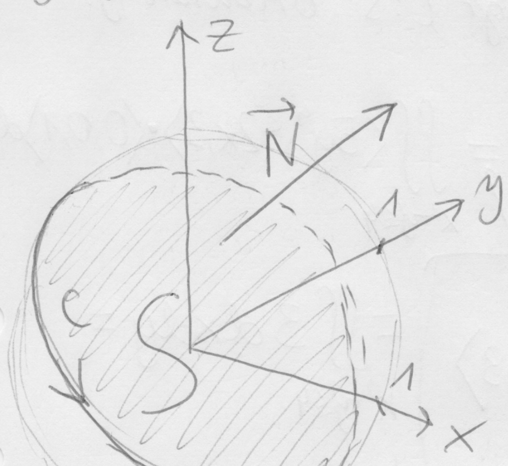
och C är skärningskurvan mellan ytorne $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y+z=0$. Kurvan C är orienterad moturs sett från en punkt högt upp på z-axeln.

Lösning

Alla antagende i Stokes sats är uppfyllde ($\vec{F}$ är C^1 ty alla inblandede funktioner är t.o.m. C^∞ – polynom och sinus; ytan inom kurvan är kompakt och C^2, randen C^1)

Kurvan **C** är förstås en cirkel, t.o.m. enhetscirkeln, ty planet $x+y+z=0$ går genom origo.

Låt S – enhets-cirkelskivan i planet $x+y+z=0$, med centret i origo.



Planets normal (uppåtriktad, så att S och C är orienterade på rätt sätt)

$$\vec{N} = \langle 1, 1, 1\rangle.$$

Normerad: $\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,1,1\rangle$.

Stokes sats: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \langle -1,0,0\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,1,1\rangle\, dS =$

def. av ytintegralen av vektorfält

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\iint_S dS = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \text{Arean}(S) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

S enhetscirkelskivan

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+x^3+x & z-\sin y & x+z \end{vmatrix} = \langle -1, 1-1, 0\rangle = \langle -1, 0, 0\rangle$$

7. Beräkna $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ då

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z+x^3+x,\ z-\sin y,\ x+z)$$

och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y+z=0$. Kurvan C är orienterad moturs sett från en punkt högt uppe på z-axeln.

Rättningsförslag:

1p: inser att man kan och bör använda Stokes sats. Ett minus om man inte påpekar att alla antaganden i satsen är uppfyllda (ett plus om man *listar* dessa),

1p: rotationen korrekt samt alla element rätt insatta i formeln från Stokes sats,

1p: normalvektorn korrekt framtagen,

2p: korrekt hantering av ytintegralen: antingen genom ett geometriskt resonemang som i min lösning (viktigt att man normerar normalvektorn då!) eller (en svårare väg att gå!): projektion av skärningskurvan på *xy*-planet och tillämpning av formeln för ytintegralen över en grafyta till en tvåvariabelfunktion (blir jobbigt, ty projektionen är en roterad ellips… Jag skulle ge 1p om man gör allt rätt utom att beräkna arean A för ellipsområdet, men är medveten om att projektionen av cirkeln blir en ellips och hur ytintegralens värde uttrycks m.h.a. A.).

UPPGIFT 8 TOP

Bestäm (och motivera riktigt noga!)

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^3 \frac{n^2x+\sin x}{x^3+n^2}\,dx.$$

Lösning

- Först undersöker vi punktvis konvergens av integranden.

Låt $2\le x\le 3$

$$\frac{n^2x+\sin x}{x^3+n^2} = \frac{x+\overset{\xrightarrow{n\to\infty}0}{\frac{\sin x}{n^2}}}{\underset{\xrightarrow{n\to\infty}0}{\frac{x^3}{n^2}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} x$$

Funktionen $\boxed{f(x)=x}$ är alltså (punktvis) gränsfunktion.

- För att veta om vi kan kasta om gränsvärdeprocesserna, undersöker vi om konvergensen är likformig. Då gäller det

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^3 f_n(x)\,dx = \int_2^3\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2}-\frac{4}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

Svaret OM konvergensen är likformig

- För att bevisa att konvergensen är likformig, räcker det att visa att

$$\sup_{2\le x\le 3}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{n^2x+\sin x}{x^3+n^2}-x\right| =$$

$$= \left|\frac{\cancel{n^2x}+\sin x-x^4-\cancel{xn^2}}{x^3+n^2}\right| = \frac{|\sin x-x^4|}{x^3+n^2} \underset{2\le x}{\le} \frac{|\sin x-x^4|}{8+n^2} \le \frac{81}{8+n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

för $x\in[2,3]$
$0<\sin x<1$
$16\le x^4\le 81$

Konvergensen är alltså likformig och svaret är $\boxed{\frac{5}{2}}$.

(spår **TOP-1MA183**) Bestäm (och motivera riktigt noga!)

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^3 \frac{n^2x+\sin x}{x^3+n^2}\,dx.$$

Rättningsförslag:

1p: punktvis gränsfunktion rätt,

1p: integralen av gränsfunktionen rätt,

1p: formulerar rätt sats och inser att man kan hävda att integralernas följd konvergerar till integralen av gränsfunktionen enbart om konvergensen av funktionsföljden är likformig,

2p: visar likformig konvergens (OBS: ordningen behöver inte vara samma som hos mig, om bara resonemanget är korrekt).

UPPGIFT 8 ODE

Bestäm alla lösningar till systemet av diff.ekv.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \frac{1}{2}y \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y \end{cases}$$

Lösning

Systemet kan skrivas på matrisform:

$$\vec{r}\,'(t) = A\vec{r}(t)$$

där $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

Vi hittar egenvärden som rötter till det karakteristiska polynomet:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{1}{2} \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 =$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

Vi har två egenvärden med multiplicitet 1: $\boxed{\lambda = 1}$, $\boxed{\lambda = 5}$.

Nu måste vi hitta tillhörande egenvektorer:

1) för $\boxed{\lambda = 1}$: Lösning till $\begin{bmatrix} 2-1 & \frac{1}{2} \\ 6 & 4-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

alltså $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 0 \\ 6v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -2v_1$

Egenvekt. $\begin{bmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{bmatrix}$ t.ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) för $\boxed{\lambda = 5}$: Lösning till $\begin{bmatrix} 2-5 & \frac{1}{2} \\ 6 & 4-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

alltså $\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0 \\ 6u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = 6u_1$

Egenvekt. $\begin{bmatrix} u_1 \\ 6u_1 \end{bmatrix}$ t.ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Alla lösningar ges som $\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Svar: $\boxed{\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -2C_1 e^{t} + 6C_2 e^{5t} \end{cases}}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

både svar är perfekt OK!

(spår **ODE-1MA016**) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \frac{1}{2}y \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

OBS: Slarvigt formulerat! Antingen "*RÖTTER* till den karakteristiska *ekvationen*" eller "**NOLLSTÄLLEN** till det karakteristiska **polynomet**".

Rättningsförslag:

1p: omskrivning av systemet till matrisform (eller åtminstone koefficientmatrisen A),

1p: uppställning och lösning av den karakteristiska ekvationen; två korrekta egenvärden,

2p: En poäng för varje egenvektor korrekt uträknat (OBS: behöver inte vara samma som jag fick fram, men måste vara parallella med dem),

1p: rätt formulering av den allmänna lösningen till ODE m.h.a. egenvektorerna och egenvärdena.