UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anna Sakovich

Tentamen
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI I
2017-03-13
DvKand, GeoKand, Lärare

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng, och för betyg 5 krävs minst 32 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

1. **(Ej nödvändig att lösa om man är godkänd på duggan.)**
   Lös det linjära ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + 2y + 3z = k \end{cases}$$
   för alla värden på $k \in \mathbb{R}$.

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar? Bestäm inversen A^{-1} för dessa a.

3. Antag att A och B är inverterbara matriser med inverserna A^{-1} respektive B^{-1}. Bestäm den matris X som uppfyller matrisekvationen
$$AXB = AB + A^2.$$
   Beräkna matrisen X om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Lös ekvationen
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ -1 & x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Beräkna avståndet mellan punkten $P : (0, 0, 1)$ och planet π som innehåller punkten $Q : (-3, 1, 7)$ och är vinkelrätt mot linjen l: $(x, y, z) = (3t + 2, -4, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$.

VAR GOD VÄND!

6. Betrakta punkterna $A : (2,4,5)$, $B : (2,1,5)$, $C : (3,3,6)$.

a) Beräkna arean av triangeln med hörn i punkterna A, B och C.

b) Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna A, B och C.

7. a) Visa att de fyra vektorerna $\vec{v}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{v}_2 = (2,1,0,0)$, $\vec{v}_3 = (3,2,0,1)$ och $\vec{v}_4 = (4,3,1,2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$.

b) Bestäm koordinaterna för $\vec{w} = (1,0,1,1)$ i denna bas.

8. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara funktionen $T(x,y,z) = (x,z,y)$.

a) Visa utifrån definitionen att T är en linjär avbildning.

b) Bestäm standardmatrisen $[T]$ till T.

c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T.

d) T är en spegling i ett plan genom origo. Använd resultatet från c) för att beskriva detta plan.

LYCKA TILL!