UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH

ES, Q, X, FYSKAND

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2012–10–22

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan får hoppa över den första uppgiften.

1. Delrummet U i $\mathbb{R}^3$ ges som spannet av vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn en bas i U bland vektorerna v_1, v_2, v_3, v_4.

(b) Ange $d = \dim(U)$.

(c) Är varje delföljd av längd d till följden (v_1, v_2, v_3, v_4) en bas i U? Motivera ditt svar!

2. Avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8x_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att f är linjär.

(b) Visa att f beskriver projektionen på ett plan genom origo. Ange planets ekvation, samt en riktningsvektor för projektionens riktning.

3. (a) Vad betyder det att en matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är *diagonaliserbar*? Återge definitionen!

(a) Är matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonaliserbar? Motivera ditt svar!

VAR GOD VÄND!

4. (a) Alla vektorer v och w i ett inre produktrum uppfyller triangelolikheten. Återge detta påstående!

(b) Är det sant att olikheten

$$\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\,dx} \le \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,dx}$$

gäller för alla kontinuerliga funktioner $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$? Motivera ditt svar!

5. Det euklidiska rummet $\mathcal{P}_3$, med inre produkt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, innehåller $\mathcal{P}_2$ som delrum. Polynomen $p_1 = 1$, $p_2 = \sqrt{3}(2X-1)$, $p_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$ bildar en on-bas i $\mathcal{P}_2$.

(a) Beräkna den ortogonala projektionen av polynomet X^3 på delrummet $\mathcal{P}_2$.

(b) Finn ett polynom q av grad 3 så att $\int_0^1 p(x)q(x)\,dx = 0$ för alla $p \in \mathcal{P}_2$.

6. En yta som uppstår när en kurva roterar kring en axel kallas *rotationsyta.* Visa att ytan

$$Y : 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz = 0$$

är en rotationsyta och bestäm ytans typ. Ange även en riktningsvektor för rotationsaxeln.

7. Den linjära operatorn $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ges av $F(p) = p' + p'' + p'''$.

(a) Finn F:s matris i standardbasen.

(b) Ange dimensionen av F:s kärna. *(Kärna = nollrum.)*

(c) Ange dimensionen av F:s bild. *(Bild = värderum.)*

(d) Avgör huruvida operatorn F är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.
(Injektiv = one-to-one, surjektiv = onto, bijektiv = isomorphism).

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 3y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 5y_3 \end{cases}$$

LYCKA TILL!

Lösningar till tentan 2012-10-22

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \ \uparrow$$

$$v_1,\ v_2$$

Svar. (a) (v_1, v_2) är en bas i U.

(b) $d = 2$

(c) Nej (v_3, v_4) är linjärt beroende.

2. (a) $f(x) = Ax$, med $A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & \lambda - \frac{3}{4} & 3/8 \\ 1/4 & 1/2 & \lambda - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - \frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)\left(\left(\lambda - \frac{3}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{16}\right) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda$$

löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

$$E(0) = N(0I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t/2 \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-A \sim 8A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$E(1) = N(I - A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar (b). f har egenvärdena 0 och 1 samt $\dim(E(0)) = 1$ och $\dim(E(1)) = 2$ innebär att f är projektionen på planet $E(1): x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, parallellt med riktningsvektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. (a) En matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas diagonaliserbar om matrisekvationen $S^{-1}AS = D$ är lösbar med en inverterbar matris S och en diagonalmatris D.

(b) $0 = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ visar att

$$\dim(E(1)) = \dim(N(I - A)) = 3 - \operatorname{rang}(I - A) = 3 - 2 = 1$$

är mindre än multipliciteten av $\lambda - 1$ i $\det(\lambda I - A)$. Alltså är A ej diagonaliserbar.

4. (a) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ är en inre produkt på vektorrummet $C[0,1]$. För alla $f, g \in C[0,1]$ gäller därmed triangelolikheten $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Denna sammanfaller med den påstådda olikheten, då

$$\|f + g\| = \sqrt{\langle f+g, f+g \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(x) + g(x))^2\,dx}$$ och

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$$, samt $$\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,dx}$$. Svar (b). Ja!

5. (a)

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_2}(X^3) = \langle X^3, 1\rangle 1 + \langle X^3, \sqrt{3}(2X-1)\rangle \sqrt{3}(2X-1) + \langle X^3, \sqrt{5}(6X^2-6X+1)\rangle \sqrt{5}(6X^2-6X+1)$$

$$= \frac{1}{4}1 + 3\frac{3}{20}(2X-1) + 5\frac{1}{20}(6X^2-6X+1)$$

$$= \left(\frac{5}{20} - \frac{9}{20} + \frac{5}{20}\right)1 + \left(\frac{18}{20} - \frac{30}{20}\right)X + \frac{30}{20}X^2$$

$$= \frac{1}{20}1 - \frac{3}{5}X + \frac{3}{2}X^2 \qquad \text{då}$$

$$\langle X^3, 1\rangle = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\langle X^3, 2X-1\rangle = \int_0^1 (2x^4 - x^3)\,dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20},$$

$$\langle X^3, 6X^2-6X+1\rangle = \int_0^1 (6x^5 - 6x^4 + x^3)\,dx = x^6 - \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{4} = \frac{-4+5}{20} = \frac{1}{20}.$$

(b)

$$q = X^3 - \operatorname{proj}_{\mathcal{P}_2}(X^3) = -\frac{1}{20}1 + \frac{3}{5}X - \frac{3}{2}X^2 + X^3.$$

6 Med notationen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för (x, y, z) blir vänsterledet i Y:s ekvation den kvadratiska formen

$$q(x) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 = x^TAx \quad \text{med } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2\lambda-2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2\lambda-2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-8 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-8) \quad \text{löses av } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 8.$$

Vidare är $\dim(E(-1)) = 2$ och $\dim(E(8)) = 1$.

Om (b_1, b_2) är en on-bas i $E(-1)$ och b_3 enhetsvektor i $E(8)$, då gäller

$$q(x) = -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2 \qquad \forall x \in E^3 \text{ med } [x]_{\underline{b}} = y.$$

$$x \in Y \Leftrightarrow q(x) = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 - 8y_3^2 = 0$$

visar att Y är en rotationsyta, då alla snittkurvor $Y \cap \{y_3 = c\}$ är cirklar i planet $y_3 = c$.

Rotationsytan Y uppstår när kurvan $K : Y \cap \{y_1 = 0\}$ roterar kring y_3-axeln $\text{span}\{b_3\}$.

$$K : \quad 0 = y_2^2 - 8y_3^2 = (y_2 + \sqrt{8}\,y_3)(y_2 - \sqrt{8}\,y_3)$$

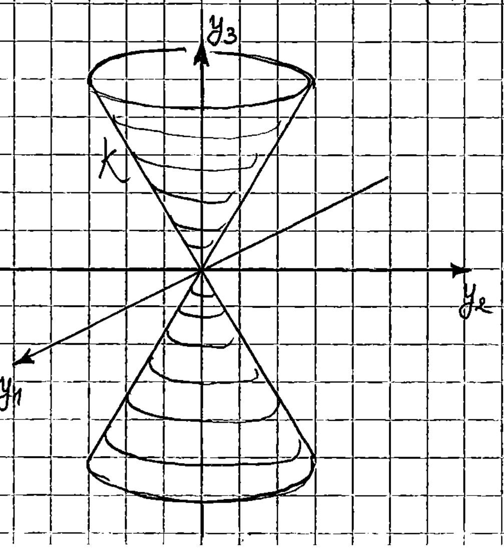
är unionen av linjerna $y_2 = \pm\sqrt{8}\,y_3$ i (y_2, y_3)-planet. Alltså är Y en kägel.

Som riktningsvektor för rotationsaxeln $\text{span}\{b_3\} = E(8)$ duger varje basvektor i $E(8)$,

exempelvis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$E(8) = N(8I - A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$8I - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{som ovan}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



7 (a) $A = [F]_{\underline{X}} = \left([F(1)]_{\underline{X}} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [F(x^3)]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\dim(\ker(F)) = \dim(N(A)) = 4 - \operatorname{rang}(A) = 4 - 3 = 1$

(c) $\dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(K(A)) = \operatorname{rang}(A) = 3.$

(d) $\ker(F) \underset{(b)}{\neq} \{0\} \Rightarrow F$ är ej injektiv $\Rightarrow F$ är ej bijektiv.

$\operatorname{im}(F) \underset{(c)}{\subsetneq} \mathcal{P}_3 \Rightarrow F$ är ej surjektiv.

8. Systemet kan skrivas $y' = Ay$, med $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ & 3 & -2 \\ & & 5 \end{pmatrix}$ och $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$T^{-1}AT = D$ gäller för $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$, ex.vis.

Med $y = Tz$ gäller $y' = Ay \Leftrightarrow Tz' = ATz \Leftrightarrow z' = Dz$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{3x} \\ c_3 e^{5x} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{3x} \\ c_3 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

<u>Svar</u> $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x} + c_3 e^{5x} \\ y_2 = c_2 e^{3x} - c_3 e^{5x} \\ y_3 = c_3 e^{5x} \end{cases}$, där $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.