UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2014-09-27
MatemAI, KandMa1, IT2

# Lösningar Dugga

## Linjär Algebra och Geometri 1

*Skrivtid: 10:00-12:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng*

**1.** Bestäm lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ \quad bx_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

för alla värden på $b \in \mathbb{R}$ där lösningar existerar.

**Lösning:** Vi utför radoperationer på totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & b & 1 & 1 \end{array}\right) 1 \quad \frac{b}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(b+3) & (b+1) \end{array}\right)$$

Vi ser i den sista raden att systemet saknar lösningar om $b = -3$, antag därför att $b \neq -3$ och fortsätt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(b+3) & (b+1) \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{b+3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3\frac{b+1}{b+3} \end{array}\right) \frac{1}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{b+3} \\ 0 & 0 & 1 & 3\frac{b+1}{b+3} \end{array}\right)$$

Vi sammanfattar beräkningarna i följande svar: För $b = -3$ har systemet inga lösningar, och för varje $b \neq -3$ har systemet den entydiga lösningen $(x_!, x_2, x_3) = (2, -\frac{2}{b+3}, 3\frac{b+1}{b+3})$.

**2.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ -a & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Bestäm inversen $A^{-1}$ för de värden på $a$ som $A$ är inverterbar.

**Lösning:** Om vi vill kan vi först beräkna determinanten för att se för vilka värden på $a$ som matrisen är inverterbar. Istället försöker vi för hand att invertera med hjälp av Jacobis metod, och vi kommer att se för vilka värden på $a$ som detta är möjligt. Jacobis metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -a & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -\frac{a}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{a}{3} & \frac{2a}{3} & 1 & 0 & -\frac{a}{3} \\ 0 & -\frac{a}{3} & 1-\frac{a}{3} & 0 & 1 & -\frac{a}{3} \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{a}{3} & 1-\frac{a}{3} & 0 & 1 & -\frac{a}{3} \\ 0 & 0 & (a-1) & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) -3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & a & (a-3) & 0 & -3 & a \\ 0 & 0 & (a-1) & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Från det sista uttrycket ser vi att $A$ inte kan inverteras för $a = 0, 1$ (eftersom i dessa fall kan vi inte få det vänstra blocket till identitetsmatrisen via ytterligare radoperationer). Antag därför att $a \neq 0, 1$, och fortsätt med radoperationerna:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & a & (a-3) & 0 & -3 & a \\ 0 & 0 & (a-1) & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & a & -2 & -1 & -2 & a \\ 0 & 0 & (a-1) & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{a-1}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & a & -2 & -1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 0 \end{array}\right) \; 2 \;\; \tfrac{1}{3} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3(a-1)} & -\frac{1}{3(a-1)} & -\frac{1}{3} \\ 0 & a & 0 & \frac{3-a}{a-1} & \frac{-2a}{a-1} & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 0 \end{array}\right) \; \tfrac{1}{a} \;\; \tfrac{1}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-a}{a(a-1)} & \frac{-2}{a-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 0 \end{array}\right)$$

Vi har alltså att $A$ är inverterbar för $a \neq 0, 1$ med invers

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ \frac{3-a}{a(a-1)} & \frac{-2}{a-1} & 1 \\ \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ (3-a) & -2a & a(a-1) \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** Finn alla matriser $X$ som löser ekvationen

$$B - XA = 2XC,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

**Lösning:** Vi börjar med att lösa ut $X$ ur ekvationen.

$$B - XA = 2XC \Leftrightarrow B = 2XC + XA \Leftrightarrow B = X(2C + A) \Leftrightarrow B(2C + A)^{-1} = X,$$

där det sista steget är möjligt endast om matrisen $(2C + A)$ är inverterbar.

$$A + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar $|A + 2C| = 4$, så matrisen är verkligen inverterbar. För omväxlings skull använder vi formeln för matrisinvers för att invertera matrisen:

$$(A + 2C)^{-1} = \frac{1}{|A + 2C|}\mathrm{Adj}(A + 2C) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -10 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan slutligen beräkna $X$:

$$X = B(A+2C)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ x & -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Lösning:** Vi utför radoperationer för att beräkna vänsterledet i ekvationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ x & -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ x & -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & (x+1) & 0 & (x+1) \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ x & -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \end{matrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ x & 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-1$$

$$\overset{K_4}{=} -x(x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x(x+1)$$

Ekvationen vi ska lösa lyder alltså $2x(x+1) = 0$, och har lösningarna $x = 0, -1$.