UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2015-12-21

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell om utsagan $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg B)$ alltid är sann.
   (b) Låt $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$ och $N = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$. Bestäm $M \cap N$.

2. (a) Bestäm $\mathrm{SGD}(1820, 748)$.
   (b) Använd resultatet från (a) för att lösa den Diofantiska ekvationen
   $$1820x + 748y = 20.$$

3. (a) Skriv talet $(1303)_4$ i bas 7.
   (b) Bestäm resten som fås då 3^{761} delas med 5.

4. På mängden av reella tal införs en relation R som ges av $aRb \iff a - b > 0$. Bestäm vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, transitiv som relationen R uppfyller.

5. Visa att för alla positiva heltal n gäller
   $$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + k) = n^3 + 2n^2 + n.$$

6. Låt funktionen $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ vara given av $f((a,b)) = |a| + |b|$.
   (a) Undersök om funktionen f är injektiv respektive surjektiv.
   (b) Kan vi utifrån detta dra slutsatsen att $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ är uppräknelig? Varför/varför inte?

7. Polynomet $x^4+4x^3+5x^2+4x+4$ har ett dubbelt nollställe. Faktorisera polynomet fullständigt.

8. Bestäm ett reellt tal a sådant att ekvationen $x^3 - 5x^2 + ax - 5 = 0$ har en ickereell rot med realdel 2. Lös sedan ekvationen fullständigt.

Lösningar

1. (a)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee \neg B$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg B)$
S	S	S	S	S
S	F	F	S	S
F	S	F	F	S
F	F	F	S	S

   (b) $M \cap N = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$.

2. (a) Vi använder Euklides algoritm.

$$\begin{aligned} 1820 &= 2 \cdot 748 + 324 \\ 748 &= 2 \cdot 324 + 100 \\ 324 &= 3 \cdot 100 + 24 \\ 100 &= 4 \cdot 24 + 4 \\ 24 &= 6 \cdot 4\,. \end{aligned}$$

   Eftersom den sista nollskilda resten är 4 så är $\mathrm{SGD}(1820, 748) = 4$.

   (b) Vi börjar med att förkorta med $\mathrm{SGD}(1820, 748)$ och får ekvationen $455x + 187y = 5$. Därefter löser vi hjälpekvationen $455x + 187y = 1$ med hjälp av Euklides algoritm från del (a).

$$\begin{aligned} 4 &= 100 - 4 \cdot 24 \\ &= 100 - 4(324 - 3 \cdot 100) \\ &= 13 \cdot 100 - 4 \cdot 324 \\ &= 13(748 - 2 \cdot 324) - 4 \cdot 324 \\ &= 13 \cdot 748 - 30 \cdot 324 \\ &= 13 \cdot 748 - 30(1820 - 2 \cdot 748) \\ &= 73 \cdot 748 - 30 \cdot 1820\,. \end{aligned}$$

   Genom att dela med 4 får vi då $1 = 73 \cdot 187 - 30 \cdot 455$. Lösningarna till $455x + 187y = 5$ ges därför av talen $x = -150 - 187n$, $y = 365 + 455n$ där $n \in \mathbb{Z}$.

3. (a) Enligt definition har vi $(1303)_4 = 3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 = 3 + 3 \cdot 16 + 64 = 115$. Vi kan nu se att

$$\begin{aligned} 115 &= 2 \cdot 49 + 17 \\ 17 &= 2 \cdot 7 + 3 \end{aligned}$$

   så vi får $(1303)_4 = (115)_{10} = (223)_7$.

(b) Resten kan beräknas med kongruensräkning. Vi ser att $3^2 = 9 \equiv -1 \mod 5$ så vi får

$$\begin{aligned} 3^{761} &= (3^2)^{380} \cdot 3 \\ &\equiv (-1)^{380} \cdot 3 \mod 5 \\ &\equiv 3 \mod 5\,. \end{aligned}$$

Resten är därför 3.

4. Relationen R uppfyller endast transitivitet. För varje $x \in \mathbb{R}$ har vi $x - x = 0$ så R är inte reflexiv. Om $xRy \Leftrightarrow x - y > 0$ så har vi $y - x = -(x - y) < 0$, så R är inte symmetrisk. Däremot, om xRy och yRz så har vi $x - z = \underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{y - z}_{>0} > 0$ så xRz och därför är R transitiv.

5. Vi använder induktion. Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)$ och $HL_n = n^3+2n^2+n = n(n+1)^2$.

Basfall: För $n = 1$ har vi $VL_1 = \sum_{k=1}^{1}(3k^2 + k) = 3 + 1 = 4$ och $HL_1 = 1(2)^2 = 4$ så $VL_1 = HL_1$.

Induktionsantagande: Antag att $VL_p = HL_p$ för något naturligt tal $p \geq 1$.

Induktionssteg: För $n = p + 1$ har vi då

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1}(3k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^{p}(3k^2 + k) + 3(p + 1)^2 + p + 1 \\ &= p(p + 1)^2 + 3(p + 1)^2 + p + 1 && \text{enl. induktionsantagande} \\ &= (p + 1)(p(p + 1) + 3(p + 1) + 1) \\ &= (p + 1)(p^2 + 4p + 4) \\ &= (p + 1)(p + 2)^2 \\ &= HL_{p+1} \end{aligned}$$

så $VL_{p+1} = HL_{p+1}$.

Enligt induktionsprincipen gäller därför att $VL_n = HL_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + k) = n^3 + 2n^2 + n$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

6. (a) Funktionen är inte injektiv eftersom $f((a, b)) = |a| + |b| = |b| + |a| = f((b, a))$ för alla $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Om $a \neq b$ har vi därför $(a, b) \neq (b, a)$ men $f((a, b)) = f((b, a))$. Funktionen är däremot surjektiv eftersom, till exempel, $f((n, 0)) = n$ för alla naturliga tal n.

(b) Nej, eftersom f är surjektiv men inte injektiv kan vi bara dra slutsatsen att $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \geq_c \mathbb{N}$, vilket inte räcker för att avgöra om $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ är uppräknelig.

7. Låt $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$. Vi har då att $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 10x + 4$. Vi letar nu efter nollställen för f'. Vi börjar med att notera att $4x^3 + 12x^2 + 10x + 4 = 0 \iff 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$ så vi kan lika gärna leta efter nollställen till $2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$. Eftersom detta är ett heltalspolynom kan vi börja med att leta rationella nollställen $x = \frac{p}{q}$ där vi måste ha $p|2$ och $q|2$. Detta ger de möjliga nollställena $x = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. För $x = -2$ får vi

$$2(-2)^3 + 6(-2)^2 + 5(-2) + 2 = -16 + 24 - 10 + 2 = 0$$

och

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 + 4(-2)^2 + 5(-2)^2 + 4(-2) + 4 \\ &= 16 - 32 + 20 - 8 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

och därför måste $x = -2$ vara ett dubbelt nollställe. Vi kan därför faktorisera ut $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Vi får

$$\begin{array}{rl} x^2 + 1 & \\ \hline x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 & \big| \; x^2 + 4x + 4 \\ -(x^4 + 4x^3 + 4x^2) & \\ \hline x^2 + 4x + 4 & \\ -(x^2 + 4x + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

så $f(x) = (x+2)^2(x^2+1)$. Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ har rötterna $x = \pm i$ så vi får $f(x) = (x+2)^2(x-i)(x+i)$.

8. Vi ansätter ett nollställe x på formen $x = 2 + bi$ där $b \in \mathbb{R}$. Eftersom polynomet $x^3 - 5x^2 + ax - 5$ är ett reellt polynom måste dessutom $\overline{x} = 2 - bi$ vara ett nollställe och därför måste $x^3 - 5x^2 + ax - 5$ vara delbart med $(x - (2+bi))(x - (2-bi)) = x^2 - 4x + 4 + b^2$. Vi får då

$$
\begin{array}{rl}
x - 1 & \\
\hline
x^3 - 5x^2 + ax - 5 & \big| \; x^2 - 4x + 4 + b^2 \\
-(x^3 - 4x^2 + (4 + b^2)x) & \\
\hline
-x^2 + (a - b^2 - 4)x - 5 & \\
-(-x^2 + 4x - 4 - b^2) & \\
\hline
(a - b^2 - 8)x + b^2 - 1 &
\end{array}
$$

Eftersom divisionen ska gå jämnt ut måste $(a - b^2 - 8)x + b^2 - 1$ vara nollpolynomet. Därför måste alla koefficienter vara 0 vilket ger oss ekvationerna $b^2 - 1 = 0 \iff b = \pm 1$ och $a - b^2 - 8 = a - 9 = 0 \iff a = 9$. Vi ser alltså att för $a = 9$ får vi nollställen $x = 2 \pm i$ och $x = 1$.