UPPSALA UNIVERSITET	Dugga, 2019-09-30
Matematiska Institutionen	Linjär algebra II
Georgios Dimitroglou Rizell	E, ES, FyKand, FyLär, KeKan, Q, X

Skrivtid: 08:00-10:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje uppgift ger max. 6 poäng. Ett resultat på minst 8, 12, 16, resp. 20 poäng ger 1, 2, 3, resp. 4 bonuspoäng som endast tillgodoräknas vid den ordinarie tentamen 1/11 (under förutsättning att 16 poäng eller mer uppnåtts på tentamen). Motivera svaren!

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hitta baser för kolonnrummet, radrummet, samt nollrummet för matrisen A. (6)

2. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,2,0),$$
$$\mathbf{v}_2 = (0,2,4,0),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0,0,4,1).$$

(a) Undersök vilka av de två vektorerna $\mathbf{w}_1 = (1,1,0,-1)$,$\mathbf{w}_2 = (1,1,1,1)$ som ligger i det linjära höljet span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

(b) Hitta dimensionen av delrummet span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ i $\mathbb{R}^4$.

(6)

3.(a) Ge en definition som beskriver när en uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ utgör en *bas* (för V).

(b) Undersök huruvida de följande tre polynomen $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = (x-1)(x-2)$ samt $p_3(x) = (x-1)(x^2+1)$ i P_3 är linjärt oberoende eller ej.

(c) Utgör ovanstående polynom en bas för P_3?

(6)

4. Betrakta den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som är bestämd av

$$T(1,1,1) = (3,5,1),$$
$$T(0,1,1) = (1,4,1),$$
$$T(0,0,1) = (0,1,2),$$

dvs. dess värden på basen $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ för $\mathbb{R}^3$.

(a) Hitta avbildningens matris $[T]$ i standardbasen.

(b) Hitta alla egenvärden till matrisen $[T]$.

(6)

Lycka till!

1.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&2&1\\0&3&4&2&1&2\\0&1&0&1&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&1&1&2&1\\0&0&1&-1&-5&-1\\0&0&-1&0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&1&1&1&2&1\\0&0&1&-1&-5&-1\\0&0&0&-1&-6&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0&2&7&2\\0&0&1&-1&-5&-1\\0&0&0&1&6&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&1&0&0&-5&4\\0&0&1&0&1&-2\\0&0&0&1&6&-1\end{bmatrix}$$

col A har en bas $(1,3,1),(1,4,0),(1,2,1)$

R(A) har en bas $(0,1,0,0,-5,4)$

$(0,0,1,0,1,-2)$

$(0,0,0,1,6,-1)$

$$\begin{cases}x_1=s\\x_2=5t-4u\\x_3=-t+2u\\x_4=-6t+u\\x_5=t\\x_6=u\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\5\\-1\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}0\\-4\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

N(A) har en bas $(1,0,0,0,0,0)$

$(0,5,-1,-6,1,0)$

$(0,-4,2,1,0,1)$

2.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$ ej konsistent

$\Rightarrow$ $(1,1,1,1)$ ej lin. komb. av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

$(1,1,0,-1)$ är en linj. komb av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

$\left(= 1 \cdot (1,0,2,0) + 1/2\,(0,2,4,0) - 1\,(0,0,4,1) \right)$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ har rang $=3$

Svar: $\operatorname{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ har dimension $=3$

3. (a) $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ är en bas för V om

(1) $\text{span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r\} = V$

(2) $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ är linjärt oberoende

(b) Metod 1: Beräkna rangen för matrisen av koord. vektorer

$$[p_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [p_2] = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [p_3] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ [p_1] & [p_2] & [p_3] \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \qquad \text{rang} = 3$$

$\Rightarrow$ lin. oberoende

Metod 2 $\quad a(x-1) + b(x-1)(x-2) + c(x-1)(x^2+1) = 0$

$$\Rightarrow (x-1)\left(a + b(x-2) + c(x^2+1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow a + b(x-2) + c(x^2+1) = 0 \Rightarrow c = 0, b = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

Svar: De är linjärt oberoende

(c) Nej, $\dim P_3 = 4 \neq 3$.

4.

(a)

$$T(1,1,1) = (3,5,1)$$
$$T(0,1,1) = (1,4,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(1,0,0) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (2,1,0) \\ T(0,1,0) = T(0,1,1) - T(0,0,1) = (1,3,-1) \\ T(0,0,1) = (0,1,2) \end{cases}$$

värdena på standardbasvektorerna

$$\Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\det(\lambda \cdot I - [T]) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

✓

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2) + (\lambda-2) - (\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

Svar: Matrisens egenvärden är $\lambda = 2$ & 3.