Lösningar till duggan i baskurs i matematik 2016-09-21

1. Visa att talet $(\sqrt{2}-\sqrt{8})^2$ är rationellt. (1 poäng)

   Lösning: $(\sqrt{2}-\sqrt{8})^2 = 2 - 2\sqrt{16} + 8 = 2 - 8 + 8 = 2 \in \mathbb{Q}$

2. Beräkna i^{33}. (1 poäng)

   Lösning: $i^{33} = i^{32}i = (i^2)^{16}i = (-1)^{16}i = i$

3. Bestäm de x som uppfyller olikheten $|3x-6| \leq 9$. (1 poäng)

   Lösning: $|3x-6| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 3x-6 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq 3x \leq 15 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

4. Förkorta uttrycket $\frac{(3x^2-12)(x^2-1)}{(x+1)(x+2)}$, så långt som möjligt. (2 poäng)

   Lösning: $\frac{(3x^2-12)(x^2-1)}{(x+1)(x+2)} = 3\frac{(x^2-4)(x^2-1)}{(x+1)(x+2)} = 3\frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 3(x-2)(x-1) = 3x^2 - 9x + 6$.

5. Beräkna $\frac{1+3i}{2-i}$. (2 poäng)

   Lösning: $\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+6i-3}{4+1} = \frac{-1+7i}{5}$.

6. På hur många sätt kan man bilda en kommitté bestående av 5 personer, från en grupp av 7 individer? För full poäng krävs ett exakt svar i form av ett positivt heltal. (2 poäng)

   Lösning: Detta ges av antalet kombinationer av 5 element valda bland 7, d.v.s $\binom{7}{5}$ $= \frac{7!}{5!(7-5)!} = 7 \cdot 3 = 21$.

7. Beräkna summan $\sum_{k=1}^{n}(3^k - 3k)$. (2 poäng)

   Lösning: $\sum_{k=1}^{n}(3^k - 3k) = \sum_{k=1}^{n} 3^k - 3\sum_{k=1}^{n} k = \frac{3^{n+1}-3}{3-1} - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{3^{n+1}-3}{2} - \frac{3n(n+1)}{2}$.

8. Visa med induktion att $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2(1-2^{-n-1})$, för alla icke-negativa heltal $n = 0, 1, 2, \ldots$. (3 poäng)

   Lösning: Visa att påståendet P_0 är sant, d.v.s $VL_0 = HL_0$. Detta följer från $VL_0 = \sum_{k=0}^{0} 2^{-k} = 2^0 = 1$ och $HL_0 = 2(1-2^{-1}) = 1$. Antag nu att påståendet P_p är sant, d.v.s $\sum_{k=0}^{p} 2^{-k} = 2(1-2^{-p-1})$. Då gäller att

$$VL_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{p} 2^{-k} + 2^{-p-1} = 2(1-2^{-p-1}) + 2^{-p-1} =$$
$$2 - 2\cdot 2^{-p-1} + 2^{-p-1} = 2 - 2^{-p-1} = 2(1-2^{-p-2}) = HL_{p+1}.$$

Induktionsaxiomet visar nu att det ursprungliga påståendet är sant för alla icke-negativa heltal.

9. Bestäm koefficienten för x^4 i binomialutvecklingen av $(2x^2 - \frac{1}{x})^5$. (3 poäng)

Lösning: Binomialsatsen medför att

$$(2x^2 - \frac{1}{x})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x^2)^{5-k} (\frac{-1}{x})^k =$$

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} (-1)^k x^{10-2k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 2^{5-k} (-1)^k x^{10-3k}.$$

Därför kan man få koefficienten av x^4 genom att först lösa ekvationen $10 - 3k = 4$, som har lösningen $k = 2$, och sedan sätta in denna lösning i uttrycket $\binom{5}{k} 2^{5-k}(-1)^k$ vilket ger $\binom{5}{2} 2^{5-2}(-1)^2 = 10 \cdot 8 = 80$.

10. Lös ekvationen $|x + 2| + |x + 5| = 7$. (3 poäng)

Lösning: Här inser man lätt at ekvationen ovan har två brytpunkter nämligen $x = -5$ och $x = -2$. Därför kan vi dela upp tallinjen i 3 interval och betrakta 3 fall.

Fall 1. $x > -2$: Här har man att $|x + 2| = x + 2$ och $|x + 5| = x + 5$. Således får vi ekvationen $x + 2 + x + 5 = 7$ som har lösningen $x = 0$. Denna lösning är giltig ty, $x = 0 > -2$.
Fall 2. $-5 \leq x \leq -2$: Här har man att $|x + 2| = -x - 2$ och $|x + 5| = x + 5$. Således får vi ekvationen $-x - 2 + x + 5 = 7$ som ger den orimliga likheten $3 = 7$, vilket innebär att detta fall inte leder till några lösningar.
Fall 3. $x < -5$: Här har man att $|x + 2| = -x - 2$ och $|x + 5| = -x - 5$. Således får vi ekvationen $-x - 2 - x - 5 = 7$ som har lösningen $x = -7$. Eftersom $x = -7 < -5$, så är även denna lösning giltig. Sammanfattningsvis får vi två lösningar $x = 0$ och $x = -7$.