UPPSALA UNIVERSITET	Prov i matematik
Matematiska institutionen	Envariabelanalys, del 1
Håkan Persson	1MA013
Tillåtna hjälpmedel: Skrivmateriel, medföljande formelblad.	2015-12-22

Instruktioner: *Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang är lätta att följa och alla svar måste motiveras. Kontrollera alltid rimligheten i dina svar. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng och för godkänd deltenta krävs minst 18 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng. Observera att uppgifterna ej är ordnade efter svårighetsgrad.*

- *Redovisa högst en uppgift per blad.*
- *Skriv bara på ena sidan av pappret.*
- *Sortera lösningarna i nummerordning.*

Lycka till!

1. Beräkna följande integraler:

   a)
   $$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

   b)
   $$\int \frac{\sin\bigl(\ln(x)\bigr)}{x}\,dx;$$

2. Hitta de generella lösningarna till följande differentialekvationer:

   a)
   $$y'' + 2y' + y = 1;$$

   b)
   $$y' + \frac{1}{x}y = e^{-x}$$

3. Antag att funktionen $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$. Om funktionen $F(x)$ vet man att $F(0) = 1/3$ och att den förhåller sig till $f(x)$ genom sambandet
   $$f(x) = \sin(x)F(x)^2.$$
   Bestäm $f(x)$.

4. Avgör om följande serier konvergerar

   a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n-1)(n+1)};$$

   b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n+n};$$

Var god vänd!

5. Ett föremål släpps från en hög höjd. Enligt en enkel fysikalisk modell beskrivs dess hastighet v vid tiden t av följande differentialekvation:

$$mv'(t) = mg - kv(t)^2,$$

där m betecknar föremålets massa, g betecknar tyngdaccelerationen till följd av jordens dragningskraft, och k är en konstant som bland annat beror på lufttätheten och det fallande föremålets tvärsnittsarea.

   a) Vilket tecken måste konstanterna k och g ha[1] om hastigheten för det fallande föremålet antas vara positiv?

   b) Vilken är den största hastighet (uttryckt i konstanterna m, g, och k) föremålet kan uppnå enligt denna modell?

6. Låt funktionen $f(x)$ ges av uttrycket

$$f(x) = \sqrt{x^3}.$$

   a) Hur lång är kurvan som för $0 \leq x \leq 4/3$ ges av $y = f(x)$?

   b) När området som innesluts mellan x-axeln, linjen $x = 4$ och grafen $y = f(x)$ roteras kring y-axeln bildas en kropp. Vad är dess volym?

7. Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, 1]$ som uppfyller

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

Bestäm värdet av följande integraler:

   a)
$$\int_0^1 f(x^2)x\,dx;$$

   b)
$$\int_{-1}^1 f\big(|x|\big)\,dx.$$

8. Studera potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

   a) Konvergerar serien för $x = 1/2$?

   b) Vad är potensseriens konvergensradie?

[1] Det vill säga, är konstanterna positiva eller negativa?

Formler

Trigonometriska formler:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x), \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1, \\
\cos^2(x) &= \frac{\cos(2x)+1}{2}, \\
\sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

Taylorutvecklingar kring $a = 0$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + O\big(x^{n+1}\big) \\
\sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O\big(x^{2n+3}\big) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O\big(x^{2n+2}\big) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + O\big(x^{n+1}\big) \\
\arctan(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + O\big(x^{2n+3}\big) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + O\big(x^{n+1}\big)
\end{aligned}$$