UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ketil Tveiten

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I - 1MA025
2016-06-07

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Tentamen består av **8 frågor** *om* **5 poäng** *för totalt* **40 poäng**. *De preliminära betygsgränserna är som följer: 18 till 24 poäng ger betyget 3, 25 till 31 poäng ger betyget 4, 32 till 40 poäng ger betyget 5.*

1. (5 p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 17 \end{cases}.$$

2. (5 p) Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AXB = C,$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. (5 p) Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. (5 p) För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Hitta inversen A^{-1} för dom a där inversen finns.

5. (5 p) Låt $v_1 = (1,0,3,4), v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,0,5,5)$ och $v_4 = (0,1,2,2)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. Visa att vektorerna är linjärt beroende, och hitta en vektor u så att $\{v_1, v_2, v_3, u\}$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

6. (5 p) En linje l skär linjerna $k = (1,0,1) + t(2,2,0)$ och $m = (4,1,-1) + s(1,2,1)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ ortogonalt i samma punkt. Bestäm en parameterform för l.

7. (5 p) Låt $M = ABCDE$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, och $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Beräkna $\det(M)$.

8. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) (3 p) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T.

(b) (2 p) Visa att T är en ortogonal projektion på en linje i $\mathbb{R}^2$ genom origo, och ange ekvationen till denna linje.

LYCKA TILL!!