Tenta 2017-01-11 : lösningsförslag.

① (a) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1+\sin^2 x} = \left[\begin{array}{ll} t = \sin x & 0 \le t \le 1 \\ \frac{dt}{dx} = \cos x & dt = \cos x \, dx \end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

(b) Partiell integration ger

$$\int \overset{\uparrow}{x^2} \overset{\downarrow}{\ln x} \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx.$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C}}.$$

② $$y'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}, \text{ och}$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ och } x = -1.$$

Detta ger ett följande teckenschema:

		-1		1	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	$-1+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$
		lok max		lok min	

då $y(-1) = -1 - 2\arctan(-1) = -1 + 2\arctan 1$

$$= -1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{2}$$

och $y(1) = 1 - 2\arctan 1 = 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$.

Observera också att

$$\lim_{x\to\infty} (x - \underbrace{2\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}}) = \infty \quad \text{och}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x - \underbrace{2\arctan x}_{\to-\frac{\pi}{2}}) = -\infty.$$

Det finns alltså inga vågrätta asymptoter (det finns inte heller några snedda asymptoter (det finns inte heller några lodräta asymptoter — se nedan)

När $x \to \infty$ har vi

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \underbrace{\frac{\overbrace{2\arctan x}^{\to\frac{\pi}{2}}}{x}}_{\to 0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (x - 2\arctan x - \underbrace{k}_{=1}\cdot x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (-\underbrace{2\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}}) = -\pi$$

Så $y = kx + b \iff y = x - \pi$ är den sneda asymptoten då $x \to \infty$.

När $x \to -\infty$ har vi

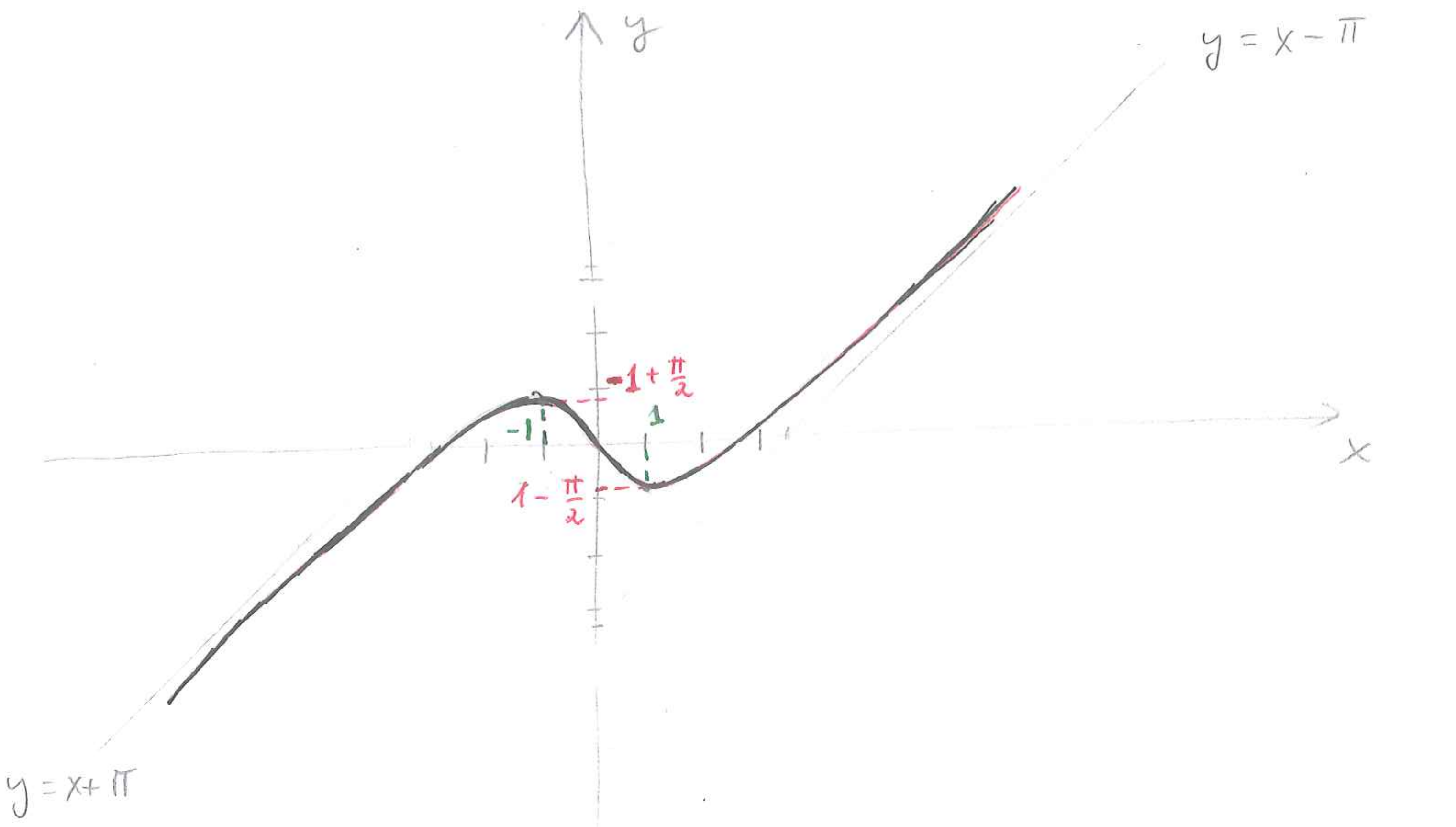
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \Bigg(1 - \underbrace{\frac{\overbrace{2\arctan x}^{\to -\frac{\pi}{2}}}{x}}_{\to 0}\Bigg)$$

$$= 1.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \big(\cancel{x} - \underbrace{2\arctan x}_{\to -\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\cancel{k \cdot x}}_{=1}\big) = \pi.$$

Så $y = k \cdot x + b \iff y = x + \pi$ är den sneda asymptoten då $x \to -\infty$.

Nu kan vi rita grafen!



(3) Kontroll: tillhör $(-3, 1)$ kurvan?
Insättning $x = -3$ och $y = 1$ ger

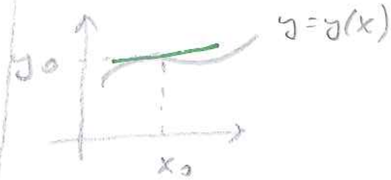
$$2((-3)^2 + 1^2)^2 = 25((-3)^2 - 1)$$
$$2 \cdot 10^2 = 25 \cdot 8$$
$$200 = 200$$ $\Rightarrow$ ja, $(-3, 1)$ tillhör kurvan.

Tangentens ekvation är då

$$y = 1 + y'(-3)(x+3)$$

Så allt vi behöver veta är $y'(-3)$. Detta kan vi hitta med hjälp av implicit derivering:

Påminnelse:



Tangentens ekv. i den givna punkten är
$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$

$$\frac{d}{dx}\left[2(x^2 + (y(x))^2)^2\right] = \frac{d}{dx}\left[25(x^2 - (y(x))^2)\right]$$

$$4(x^2 + (y(x))^2)\frac{d}{dx}(x^2 + (y(x))^2) = 25\frac{d}{dx}(x^2 - (y(x))^2)$$

$$4(x^2 + (y(x))^2)(2x + 2y(x) \cdot y'(x)) = 25(2x - 2y(x)y'(x))$$

Vi kan byta $x = -3$, $y(x) = 1$:

$$4(9+1)(-6 + 2y'(-3)) = 25 \cdot (-6 - 2y'(-3))$$
$$\underset{8}{\cancel{40}} \cdot \cancel{2} \cdot (-3 + y'(-3)) = \underset{5}{\cancel{25}} \cdot \cancel{2}(-3 - y'(-3))$$
$$-24 + 8y'(-3) = -15 - 5y'(-3)$$
$$13y'(-3) = 9 \Rightarrow y'(-3) = \frac{9}{13}.$$

Så $y'(-3) = \frac{9}{13}$ och tangentens ekvation är

$$y = 1 + \frac{9}{13}(x+3) \quad \text{eller}$$

$$y = \frac{9}{13}x + 1 + \frac{27}{13} \iff \underline{\underline{y = \frac{9}{13} + \frac{40}{13}}}$$

(4) För att beräkna integrallen måste vi först göra partiell bråkuppdelning:

$$\underbrace{\frac{x-2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+1)}} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

detta är vår funktion,
där nämnaren och
täljaren har delats
med 2.

Multiplicerar med $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+1)$:

$$x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$x-2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + \frac{1}{2}Bx + \frac{C}{2}$$

$$x-2 = (A+B)x^2 + \left(C+\frac{B}{2}\right)x + \left(A+\frac{C}{2}\right)$$

Jämför koefficienterna i HL och VL:

$$x^2: \quad A+B=0 \longrightarrow A=-B$$

$$x^1: \quad C+\frac{B}{2}=1 \longrightarrow C=1-\frac{B}{2}$$

$$x^0: \quad A+\frac{C}{2}=-2 \longrightarrow \underbrace{-B}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{B}{4}}_{\frac{C}{2}} = -2$$

Den sista ekvationen ger

$$-\frac{5B}{4} = -\frac{5}{2} \implies B = 2$$

$$A = -B = -2$$

$$C = 1 - \frac{B}{2} = 0.$$

Vi kan nu beräkna

$$\int_2^{\infty} \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{X \to \infty} \int_2^{X} \frac{2x-4}{(2x+1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \lim_{X \to \infty} \int_2^{X} \left(-\frac{2}{x+\frac{1}{2}} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \lim_{X \to \infty} \Big[\overbrace{-2\ln\left|x+\tfrac{1}{2}\right|}^{=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} + \ln(x^2+1) \Big]_{x=2}^{x=X} =$$

$$= \lim_{X \to \infty} \left[\ln \frac{x^2+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \right]_{x=2}^{x=X}$$

$$= \lim_{X \to \infty} \left(\ln \frac{X^2+1}{X^2+X+\frac{1}{4}} - \ln \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} \right) =$$

$$= \lim_{X \to \infty} \left(\ln \frac{\cancel{X^2}\left(1+\overbrace{\tfrac{1}{X^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{X^2}\left(1+\underbrace{\tfrac{1}{X}+\tfrac{1}{4X^2}}_{\to 0}\right)} - \ln \frac{\cancel{5}\cdot 4}{5^{\cancel{2}}} \right)$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{4}{5} = -\ln\frac{4}{5} = \underline{\underline{\ln\frac{5}{4}}}$$

Löser först ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$.

5

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$

$\Rightarrow$ vi har en dubbelrot $r = -1$.

Lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ är därför $y_H = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$.

Den partikulära lösningen till

$y'' + 2y' + y = 2\cos t$

kan sökas på formen $y = A\cos t + B\sin t$.

I detta fall $y' = -A\sin t + B\cos t$

$y'' = -A\cos t - B\sin t$.

Insättning ger

$\cancel{-A\cos t} - \cancel{B\sin t} + \cancel{2}(A\sin t + B\cos t) + \cancel{A\cos t} + \cancel{B\sin t} =$

$= \cancel{2}\cos t$

Så $A\sin t + B\cos t = \cos t$

vilket ger $A = 0$ och $B = 1$.

Den partikulära lösningen till (*) är då $y_P = \sin t$ och den allmänna lösningen till (*) är $y = \underbrace{C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}}_{y_H} + \underbrace{\sin t}_{y_P}$.

I detta fall är $y' = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 t e^{-t} + \cos t$.

$y(0) = 0$ ger $C_1 = 0$ och

$y'(0) = 2$ ger $-\underbrace{\cancel{C_1}}_{=0} + C_2 + 1 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$

Den givna begynnelsevärdesproblem har lösningen

$$y = te^{-t} + \sin t.$$

(6) (a) Använder kvotkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{7^{n+1}}}{\frac{n^5}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{n^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \cdot \frac{\cancel{7^n}}{7^{\cancel{n}+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^5 = \frac{1}{7} < 1.$$

Serien är konvergent.

(b) Vi skriver om seriens term som

$$(-1)^n\left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-2}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n\left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-2}\right)\left(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}\right)}{\left(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^n\left(\left(\sqrt{3n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{3n-2}\right)^2\right)}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}}$$

$$= \frac{(-1)^n\left(\cancel{3n}+2-(\cancel{3n}-2)\right)}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}} = \frac{(-1)^n \cdot 4}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}}$$

Serien har då växlande tecken och

$$\left| \frac{(-1)^n \cdot 4}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

monotont (ju större n desto större nämnaren, desto mindre bråket). Leibitz kriterium säger då att serien är konvergent.

Dock är den inte absolut konvergent då termerna i den positiva serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}} \quad (P)$$

uppför sig som

$$\frac{4}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-2}} = \frac{4}{\sqrt{3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)} + \sqrt{3n\left(1-\frac{2}{3n}\right)}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3n}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{3n}}_{\to 0}} + \sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{3n}}_{\to 0}}\right)}$$

$$\sim \frac{4}{2\sqrt{3n}} = \frac{2}{\sqrt{3n}}$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}$ är divergent, då detta är en p-serie med $p = 1/2$.

Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}}}{\frac{2}{\sqrt{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4}\,2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-2}} \cdot \frac{\sqrt{3n}}{\cancel{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{3n}}}{\cancel{\sqrt{3n}}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{3n}}_{\to 0}} + \sqrt{1-\underbrace{\tfrac{2}{3n}}_{\to 0}}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

Så säger jämförelsekriterium att (P) är också divergent.

Serien i (b) är därför bara betingat konvergent.

7 (a) För att f ska vara kontinuerlig i noll måste

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ vara uppfylld.

Detta ger

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \left[\begin{array}{l} e^x = 1 + x + x^2 H_1(x) \\ \cos x = 1 + x^2 H_2(x) \\ H_1(x) \text{ och } H_2(x) \text{ är} \\ \text{begränsade nära } x=0 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+x+x^2H_1(x) - \cancel{1} - x^2 H_2(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \overbrace{\underbrace{x}_{\to 0}\underbrace{\left(H_1(x) - H_2(x)\right)}_{\substack{\text{begränsad} \\ \text{nära } x=0}}}^{\to 0} = 1$$

Så $\underline{\underline{a = 1}}$.

(b) För att f ska vara deriverbar i $x=0$ måste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$ existera och vara ändligt.

Vi har

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - \cos x}{x} - \overbrace{1}^{=a}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3 H_1(x) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 H_2(x) \\ \quad H_1 \text{ och } H_2 \text{ begränsade nära } x=0 \end{array} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3 H_1(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 H_2(x)\right) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + x^3 H_1(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2!} - x^4 H_2(x) - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 H_1(x) - x^4 H_2(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(1 + \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{H_1(x)}_{\text{begr.}} - \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{H_2(x)}_{\text{begr.}}\Big) = \underline{1}$$

Så funktionen är deriverbar i $x=0$, och $f'(0)=1$.

(8) Låt mängden av det giftiga ämnet vid t-tiden vara $y(t)$ m^3. Denna mängd ändras med hastigheten

$$y'(t) = -100 \cdot \frac{y(t)}{5000} \quad (*)$$

då varje minut $100\ m^3$ av det förorenade vattnet rinner ut, och koncentrationen av det giftiga ämnet i det är $\frac{y(t)}{5000}$.

Vi har $y(0) = 0,2 \cdot 5000$ (20% av 5000)

så $y(0) = 1000$,

och vi vill veta värdet på t då

$y(t) = 0,05 \cdot 5000 = 250$ (5% av 5000).

Först löser vi $(*)$:

$y'(t) + \frac{1}{50} y(t) = 0$ – linjär ekvation, den integrerande faktorn är $e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{\frac{1}{50}t}$,

$$e^{\frac{1}{50}t} y'(t) + \underbrace{\frac{1}{50} e^{\frac{1}{50}t}}_{=(e^{\frac{1}{50}t})'} \cdot y(t) = 0$$

$$\left(y(t) \cdot e^{\frac{t}{50}}\right)' = 0 \Rightarrow y(t) \cdot e^{\frac{t}{50}} = \underset{\text{konst}}{C} \Rightarrow$$

$y(t) = Ce^{-\frac{t}{50}}$.

$y(0) = 1000$ ger $C = 1000$, så

$y(t) = 1000e^{-\frac{t}{50}}$.

Nu kan vi räkna ut tiden då koncentrationen har gått ner till 5%:

$$250 = 1000e^{-\frac{t}{50}} \Leftrightarrow 1 = 4e^{-\frac{t}{50}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{50}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{50} = \ln 4 \Rightarrow \underline{\underline{t = 50\ln 4}}$$