UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Örjan Stenflo

Linjär algebra och geometri I, 1MA025
HT 2015

Linjär algebra och geometri I, 1MA025

Dugga 150928 med lösningar

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + cy = 1 \\ 2x + c^2y = c+1 \\ 2x + 3cy + cz = 1, \end{cases}$$

för alla värden på konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Lösning: Vi börjar med att förenkla ekvationssystemet genom att påbörja en Gauss-eliminering av ekvationssystemets totalmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 2 & c^2 & 0 & c+1 \\ 2 & 3c & c & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & c^2-c & 0 & c \\ 2 & 3c & c & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & c^2-c & 0 & c \\ 0 & 2c & c & 0 \end{array}\right).$$

Den sista totalmatrisen motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + cy = 1 \\ c(c-1)y = c \\ 2cy + cz = 0, \end{cases}$$

som vi ser saknar lösningar om $c = 1$. Om $c = 0$ har vi ett linjärt ekvationssystem med en ekvation och tre obekanta så lösningsmängden innehåller två parametrar. De oändligt många lösningarna ges då av $x = 1/2$, $y = s$, $z = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Om $c \neq \{0, 1\}$ är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & c^2-c & 0 & c \\ 0 & 2c & c & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{1}{c^2-c} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 2c & c & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2c \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 0 & c & \frac{-2c}{c-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{c} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{c-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -c \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{c-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{c-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(c-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{c-1} \end{array}\right),$$

så om $c \notin \{0,1\}$ så har ekvationssystemet en unik lösning given av

$$(x,y,z) = \frac{1}{c-1}\Big(-\frac{1}{2},1,-2\Big).$$

2. För vilka värden på den reella konstanten a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 3a & 2 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm A^{-1} för dessa värden på a.

Lösning: Vi beräknar determinanten för A genom att kofaktorutveckla längs 1:a raden: $det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$, där $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ och M_{ij} är determinanten av den 2×2 matris man får om man stryker rad i och kolumn j i A, för varje $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$.

Detta ger

$$det(A) = 2a\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3a & 2 \end{vmatrix} = 2a^3 + a(2-3a^2) = a(2-a^2).$$

Då A är inverterbar om och endast om $det(A) \neq 0$ följer att A är inverterbar $\iff a \neq \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ och inversen ges då enligt sats av

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

Matrisen A är alltså inverterbar $\iff a \neq \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ med

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{a(2-a^2)}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3a & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2a & a \\ 3a & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2a & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 3a & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \quad \frac{1}{a(2-a^2)}\begin{bmatrix} a^2 & 2a & -a^2 \\ -a & -a^2 & a \\ 2-3a^2 & -4a & 2a^2 \end{bmatrix}.$$

3. Bestäm matrisen X som uppfyller ekvationen

$$AX = A + X,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

$$AX = A + X \Leftrightarrow (A - I)X = A \Leftrightarrow X = (A - I)^{-1}A$$

Inversen till

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ges av

$$\begin{aligned} (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & -18 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 1/12 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

så

$$X = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 1/12 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3/4 & 1/12 \\ 0 & 5/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}.$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 5 & 2x \\ 1 & x & 2x & 2 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning: Då

$$
\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 5 & 2x \\ 1 & x & 2x & 2 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 5 & 2x \\ 1 & x & 2x & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -x \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x^2 & 5-x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -x \end{vmatrix}
= -\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x^2 & 5-x^2 & x \\ 0 & 0 & -4 & -x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}
= -\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x^2 & 5-x^2 & x \\ 0 & 0 & -4 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x^2/4 \end{vmatrix}
= (1-x^2)(4-x^2) = 0,
$$

ser vi att ekvationen har lösningen $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
(I beräkningarna ovan använde vi egenskaperna att determinantens värde inte ändras av den elementära radoperationen att addera en konstant gånger en rad till en annan rad, den elementära radoperationen att byta plats på rader ändrar tecken på determinanten, och slutligen egenskapen att determinanten av en övertriangulär matris är produkten av dess diagonalelement.)