Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich, Jens Fjelstad

Civilingenjörsprogrammen F, IT, STS, W
Kandidatprogrammet i matematik
Gymnasielärarprogrammet

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2015–03–12

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan 2015-02-13 får hoppa över den första uppgiften.

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för kolonnrummet $K(A)$.

(b) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$.

(c) Ange dimensionen för $K(A)$ respektive $N(A)$.

2. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges av

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7x & + & 2y & + & 3z \\ -2x & + & 2y & - & 6z \\ -x & - & 2y & + & 3z \end{pmatrix}.$$

Visa att f beskriver projektionen på ett plan π genom origo, som sker parallellt med en linje L genom origo. Bestäm vidare en ekvation för planet π samt en riktningsvektor för linjen L.

3. (a) För vilka reella värden på a och b är

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ax_2y_2 + bx_1y_2 + 3x_2y_1$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$?

(b) Gäller olikheten

$$(x_1y_1 + 15x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1)^2 \leq \left(x_1^2 + 15x_2^2 + 6x_1x_2\right)\left(y_1^2 + 15y_2^2 + 6y_1y_2\right)$$

för alla reella tal x_1, x_2, y_1, y_2? (Svaret ska motiveras på grundval av (a).)

Var god vänd!

4. Med $\mathcal{P}_n$ betecknas vektorrummet av alla polynom av grad högst n. Den linjära avbildningen $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definieras genom $f(p) = p' + \frac{1}{2}p'' + \frac{1}{3}p'''$.

(a) Finn f:s matris i standardbaserna.

(b) Ange dimensionen av f:s kärna och dimensionen av f:s bild.

(c) Avgör huruvida f är surjektiv, injektiv, eller bijektiv.

5. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Speciellt är polynomen $u_1(x) = x,\ u_2(x) = 1-3x^2$ och $w(x) = 2+2x$ vektorer i $\mathcal{P}$. Finn det kortaste avståndet från w till delrummet $U = \text{span}(u_1, u_2)$, samt den vektor u i U som ligger närmast w.

6. Vektorerna v och w i ett inre produktrum uppfyller $\|v\| = 2,\ \|w\| = 3$, samt $\|v-w\| = \sqrt{19}$.

(a) Hur definieras vinkeln α mellan v och w?

(b) Finn vinkeln α mellan v och w.

7. Ytan Y i $\mathbb{E}^3$ består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 4yz = -3$$

Bestäm ytans typ och kortaste avstånd till origo. Finn även de punkter på ytan där det kortaste avståndet antas. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \qquad\quad +3y_3 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \\ y_3' = y_1 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 1$.

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Bestäm A^n för alla naturliga tal n, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar 2015-03-12

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \end{bmatrix} = T$

(a) $T_{\bullet 1}, T_{\bullet 2}$ är T:s pivotkolonner $\Rightarrow$ $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}$ är en bas för $K(A)$.

(b) $Ax = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_3 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$. Substitutionen $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ger basen $b_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $N(A)$.

(c) $\dim K(A) = 2$, $\dim N(A) = 2$.

2. f beskriver en projektion omm $\dim E(0) = 1$ och $\dim E(1) = 2$. I så fall är $\pi = E(1)$ och $L = E(0)$.

$$E(0) = N(0I - A) = N(A) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & -2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$E(1) = N(I - A) = N\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I - A \sim 6I - 6A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Vi ser att $\dim E(0) = 3 - \operatorname{rang}(0I - A) = 3 - 2 = 1$ och $\dim E(1) = 3 - \operatorname{rang}(I - A) = 2$.

<u>Alltså beskriver f en projektion på planet</u> $\pi : x + 2y + 3z = 0$, <u>parallellt med riktningsvektorn</u> $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>för L</u>.

3. (a) $\langle x,y\rangle = x^T A y$ gäller för $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Alltså är $\langle x,y\rangle$ additiv och homogen.

Den är symmetrisk omm A är symmetrisk, dvs. omm $b = 3$. I så fall är den positivt definit

omm huvudminorerna $M_1 = |1| = 1 > 0$ och $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 9 > 0$.

Svar (a). $a > 9$ och $b = 3$.

(b) För $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$ är $\langle x,y\rangle := x^T A y$ en inre produkt på $\mathbb{R}^2$, enligt (a). Alltså

gäller CS-olikheten $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \qquad \text{för alla } x,y \in \mathbb{R}^2,$$

och denna är just uppgiftens olikhet.

Svar (b). Ja.

4. (a) $f(1) = 0$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = 2X + 1$, $f(X^3) = 3X^2 + 3X + 2\cdot 1$ ger

$$A = [f] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) $\text{rang}(A) = 3$ medför att $\dim(\ker(f)) = \dim(N(A)) = 4 - 3 = 1$

och $\dim(\text{im}(f)) = \dim(K(A)) = 3$.

(c) $\dim(\text{im}(f)) = 3 = \dim(\mathcal{P}_2) \Rightarrow \text{im}(f) = \mathcal{P}_2 \Rightarrow f$ är surjektiv.

$\dim(\ker(f)) = 1 \Rightarrow \ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ är ej injektiv

$\Rightarrow f$ är ej bijektiv.

5. Då (u_1, u_2) är en bas i $\mathcal{U}$, blir $(b_1, b_2) = GS(u_1, u_2)$ en on-bas i $\mathcal{U}$. Vidare antas det kortaste avståndet $d = d(w, \mathcal{U})$ i $u = \langle w, b_1 \rangle b_1 + \langle w, b_2 \rangle b_2$, och $d = \|v\|$, där $v = w - u$.

<u>Uträkningar.</u> $\underline{b_1} = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \underline{\sqrt{\frac{3}{2}}\, X}$, då

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \|u_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad ;$$

$$\underline{b_2} = \frac{u_2 - \langle u_2, b_1 \rangle b_1}{\| \quad \text{dito} \quad \|} = \frac{u_2 - \frac{3}{2}\langle u_2, X \rangle X}{\| \quad \text{dito} \quad \|} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \underline{\sqrt{\frac{5}{8}}\,(1 - 3X^2)}, \text{ då}$$

$$\langle u_2, X \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - 3x^2) x \, dx = \int_{-1}^{1} (x - 3x^3) \, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{4} x^4 \Big|_{-1}^{1} = 0 \quad \text{och}$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - 3x^2)^2 dx = \int_{-1}^{1} (1 - 6x^2 + 9x^4) \, dx = x - 2x^3 + \frac{9}{5} x^5 \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(1 - 2 + \frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5} \Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{\frac{8}{5}} \quad ;$$

$$\underline{u} = \langle w, b_1 \rangle b_1 + \langle w, b_2 \rangle b_2 = \frac{3}{2} \langle w, u_1 \rangle u_1 + \frac{5}{8} \langle w, u_2 \rangle u_2$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} X + \frac{5}{8} \cdot 0 \cdot (1 - 3X^2) = \underline{2X}, \text{ då}$$

$$\langle w, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (2 + 2x) x \, dx = \int_{-1}^{1} (2x + 2x^2) \, dx = x^2 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \quad \text{och}$$

$$\langle w, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (2 + 2x)(1 - 3x^2) \, dx = \int_{-1}^{1} (2 + 2x - 6x^2 - 6x^3) \, dx = 2x + x^2 - 2x^3 - \frac{3}{2} x^4 \Big|_{-1}^{1} = 0 \, ;$$

$$\underline{d} = \|w - u\| = \|2 \cdot 1 + 2X - 2X\| = \|2 \cdot 1\| = 2\|1\| = \underline{2\sqrt{2}}, \text{ då}$$

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2} \, .$$

<u>Svar.</u> $d = 2\sqrt{2}$ <u>antas i</u> $u = 2X$.

6. (a) $\quad \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right)$

(b) $\quad \cos\alpha = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \dfrac{-3}{2\cdot 3} = -\dfrac{1}{2} \implies \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

Här beräknades $\langle v,w\rangle$ enligt

$$
\begin{aligned}
-\langle v,w\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\langle v-w, v-w\rangle - \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|v-w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(19-4-9\right) = 3
\end{aligned}
$$

7. Med $x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ istället för (x,y,z) blir VL i Y:s ekvation lika med

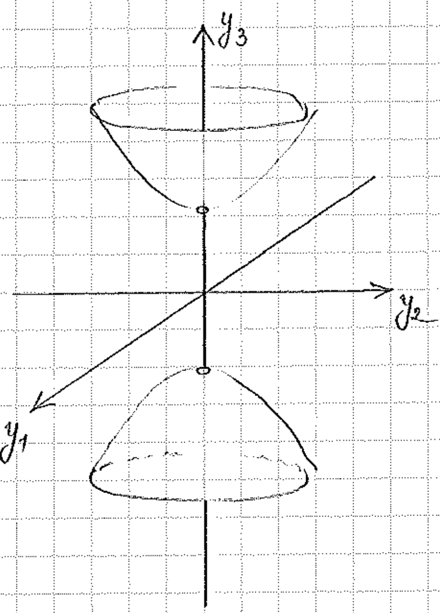
$$q(x) = x^T A x \;, \quad \text{för } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & -3\\ -2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$= (\lambda-3)^2(\lambda+3)$ ger egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -3$. Enligt Spektralsatsen finns det en on-egenbas (b_1, b_2, b_3) till A i $\mathbb{E}^3$ så att $b_i \in E(\lambda_i)$ $\forall i \in \underline{3}$. Då gäller för alla $x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i$ att $q(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2$. Alltså är

$$
\begin{aligned}
x \in Y &\iff q(x) = -3\\
&\iff 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 = -3\\
&\iff -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 = 1\\
&\iff y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 - 1
\end{aligned}
$$

Därmed är Y en tvåmantlad rotationshyperboloid, med y_3-axeln som rotationsaxel.



För alla $x \in Y$ är

$$\begin{aligned} d(x,0)^2 = \|x\|^2 = \|y\|^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 \\ &= \quad 1 \quad + 2y_1^2 + 2y_2^2 \geq 1 , \end{aligned}$$

med likhet omm $y_1 = y_2 = 0$ och $y_3 = \pm 1$.

Alltså är ytans kortaste avstånd till origo lika med 1, och den antas i punkterna

$$\pm b_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \text{då}$$

$$E(-3) = N(-3I - A) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ger} \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

$$-3I - A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -24 & -12 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> Y <u>är en tvåmantlad rotationshyperboloid</u>. $d(Y,0) = 1$ <u>antas i</u> $\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8. Systemet kan skrivas koncist som $y' = Ay$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$. Med $y = Tz$ gäller $y' = Ay$ omm $z' = Dz$.

Den allmänna lösningen till $z' = Dz$ är $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{x} \\ c_3 e^{3x} \end{pmatrix}$, där $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

Den allmänna lösningen till $y' = Ay$ är därmed

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-x} \qquad\quad + 3c_3 e^{3x} \\ -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - 3c_3 e^{3x} \\ c_1 e^{-x} \qquad\quad + c_3 e^{3x} \end{pmatrix} .$$

Den uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$\begin{pmatrix} -c_1 & & +3c_3 \\ -c_1 & +c_2 & -3c_3 \\ c_1 & & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \text{ då}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Svar.

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{3x} \\ y_2 = -\frac{1}{2}e^{-x} + 3e^{x} - \frac{3}{2}e^{3x} \\ y_3 = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} \end{cases}$$

8'. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$.

$A = TDT^{-1}$ medför att

$$A^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & (-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -(-2)^n \\ 1 & 2(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 2-2(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

Svar. $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+(-1)^n 2^n & 1+(-1)^{n+1} 2^n \\ 2+(-1)^{n+1} 2^{n+1} & 1+(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix}$ för alla $n \in \mathbb{N}$.