UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sebastian Pöder

Prov i matematik
IT2, KandMa1, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2017–10–24

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (Ej för den med godkänd dugga.) Utför multiplikationen

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z & w \end{pmatrix}$$

och finn alla x, y, z, w så att produkten blir $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Avgör för vilka reella x som $A = \begin{pmatrix} x & 2 & x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2x^2 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

3. Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $L\colon -x + 3y = 0$ genom origo.

(a) Finn f:s matris.

(b) Finn den punkt på L som är närmast $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Finn avståndet mellan P och L.

4. Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör vilka $\vec{v}_i$ som är ortogonala mot linjen

$$L\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

genom origo.

(b) Avgör om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$.

Var god vänd!

5. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $A = (-2,-2,-2), B = (-1,0,1)$ och $C = (0,2,1)$, samt bestäm volymen av parallellepipeden med kanter $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{OC}$.

7. Låt E vara ett plan ortogonalt mot vektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ och F planet med ekvation $2x - y + 4z = 0$. Bestäm för vilka reella a och b som planen E och F skär i en linje, och finn för dessa värden på a och b en riktningsvektor till skärningslinjen.

8. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges som rotation med 90° kring $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och operatorn s på $\mathbb{R}^3$ ges av spegling i planet $E\colon x + y + z = 0$ genom origo. Visa att sammansättningen $f \circ s$ är lika med sammansättningen $s \circ f$.

Lycka till!