UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Veronica Crispin Quiñonez

Dugga
Linjär algebra II 5 p 1MA024
2019-02-18 kl 14-16

- *Tillåtna medel: sedvanliga skrivdon.*
- *8p, 12p, 16p och 20p ger 1, 2, 3 respektive 4 bonuspoäng vid tentamen 2019-03-18, om man uppnår minst 16p på tentamen.*
- **Varje svar ska motiveras noga! Enbart svar utan motivering ger 0p.** *Skriv tydligt och hoppa inte över nödvändiga steg.*

---

(1) Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla matriser av storlek 2×2 och betrakta delmängden som består av följande matriser:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange $\dim(\mathcal{M}_{2\times 2})$. (1p)

(b) Avgör om delmängden $\{M_1, \ldots, M_5\}$ är linjärt oberoende eller ej, utan att utföra några beräkningar. (1p)

(c) Ange en bas för det linjära höljet av $\{M_1, \ldots, M_5\}$ (i boken betecknat som $\text{span}(\{M_1, \ldots, M_5\})$). (3p)

(d) Ange dimensionen av $\text{span}(\{M_1, \ldots, M_5\})$. (1p)

(2) Låt $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2.

(a) Finn alla $c \in \mathbb{R}$ sådana att delmängden $\{p(0) = c \mid p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\}$ blir ett delvektorrum till $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. (2p)

(b) Ange en bas $\mathcal{E}$ för delvektorrummet i (a), bestående av standardvektorer (standardpolynom). (1p)

(c) Låt $\mathcal{U} = \{x - x^2, 2x - x^2\}$ vara en annan bas för delvektorrummet i (a). Ange basbytesmatriserna för basbyte från $\mathcal{U}$ till $\mathcal{E}$ respektive från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{U}$. (3p)

(3) (a) Formulera dimensionssatsen för matriser. (2p)

(b) Låt $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning, som ges av matrisen A.

(i) Ange storleken på A. (1p)

(ii) Vad är det minsta värde som $\text{null}(A)$ kan anta? Vad är det största värde som $\text{rang}(A)$ kan anta? (2p)

(c) Låt $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ vara en linjär avbildning definierad via $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_4)$. Ange matrisen $[S]$ som motsvarar avbildningen med avseende på standardbasen. (1p)

(4) (a) Definiera begreppet *egenvärdet* av en matris. (1p)

(b) Hitta alla egenvärden till matrisen (3p)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vad kan du säga om egenvärdena till M^3 med hjälp av svaret på (b)? (1p)

(d) Bekräfta ditt svar genom att räkna ut egenvärdena till M^3. (1p)

LYCKA TILL!