**UPPSALA UNIVERSITET**
**Matematiska institutionen**
Thomas Kragh

Prov i matematik

E3, ES1, F1, KandMa

FLERVARIABELANALYS/
FLERVARIABELANALYS M
Spår ODE: 1MA016
Spår TOP: 1MA183
2016–06–02

*Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.*

**1.** (**Obs:** denna uppgift ska **inte** lösas om man har klarat duggan!)
Bestäm alla punkter på ytan
$$z = x^2 + y^2 - 2x^4$$
i vilka tangentplanet är parallellt med planet
$$2y + z = 0.$$
Bestäm även ekvationerna för dessa tangentplan.

**2.** Visa att sambandet $y^2 + \sin y + x^3 = 1 + \sin(1)$ definierar $y$ som funktion av $x$ i en omgivning av punkten $(0, 1)$. Beräkna också $y'(x)$ i denna punkt.

**3.** Bestäm största och minsta värde av
$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 2xy$$
på mängden
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$
Bestäm också alla lokala maxima och minima för funktionen definierad på hela $\mathbb{R}^2$.

**4.** Bestäm volymen av kroppen
$$K : x^2 + y^2 + |z| \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

**5.** Bestäm flödet av vektorfältet
$$\vec{F}(x, y, z) = (y\cos(xy) + x, -x\cos(xy) + y, \cos z + z)$$
genom cylinder delen
$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$$
orienterad så att normalvektorn pekar bort från $z$-axeln.

**6.** Bestäm kurvintegralen (arbetet)

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

där $C$ är skärningskurvan mellan ytorna $x + z = 0$ och $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orienterad så att enhetsvektorn (som ger riktningen) i punkten $(0, 1, 0)$ är $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, och där

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{2016x}, e^{\sin y} + x + z^2, e^{\sin(\cos z)} + y).$$

**7.** Bestäm alla $C^1$ funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(Ledning: Hitta till exempel nya koordinater där ekvationen är enklare att lösa, eller kolla på vad riktningsderivator säger om detta problem.)

**8.** (**Obs:** i denna uppgift löses enbart **ett** av de två nedanstående problemen (i) och (ii).)

(i) (spår ODE-1MA016) Bestäm alla lösningar till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x' = x + 2016y \\ y' = y \end{cases}$$

(ii) (spår TOP-1MA183) Låt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{n}\right)^n$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att $f$ är väldefinierad och kontinuerlig.

(b) Är $f$ deriverbar?

**LYCKA TILL!**

Lösningarna på följande sidor är väldigt snabbt skrivit och jag hade inte mina svar från tidigare - så om fel hittas skriv gärna till `thomas.kragh@math.uu.se`.

**Lösningar till tentamen i FLERVARIABELANALYS/ FLERVARIABELANALYS M Spår ODE: 1MA016 Spår TOP: 1MA183 2016–06–02**

**Lösning till problem 1.** Då tangentplanen av en nivåyta $F = c$ är orthogonal mot $\nabla F$ ska vi hitta punkter på ytan där

$$\nabla F = (2x - 8x^3, 2y, 1)$$

är parallell med normalen $(0, 2, 1)$ till planet. Då båda har $z$ koordinat lika med 1 är detta precis när de två första koordinater är lika. Så vi sökar punkter som uppfyller

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^4 = z \\ 2x - 8x^3 = 0 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\} \\ y = 1 \end{cases}$$

vilket ger punkterna $(0, 1, 1)$ och $(\pm\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8})$. Sätts dessa in i en ekvation för tangentplanen (som vi känner normalvektorn till) fås:

$$0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5 \qquad 2 \cdot 1 + 1 \cdot \tfrac{9}{8} = \tfrac{25}{8}.$$

Så tangentplanens ekvationerna blir $2y + z = 5$ i det ena fallet och $2y + z = \frac{25}{8}$ i de två andra fallen.

**Lösning till problem 2.** a) Med $F(x, y) = y^2 + \sin y + x^3$ ses att $F(0, 1) = 1 + \sin(1)$ och då

$$\frac{\partial F}{\partial y}_{|(x,y)=(0,1)} = (2y + \cos y)_{|(x,y)=(0,1)} = 2 + \cos(1) \neq 0$$

är villkoren i implicita funktion satsen uppfyllt. Det ger a) (precis formulering av satsen).
b) Satsen ger också en formel för derivaten i punkten:

$$\frac{\partial y}{\partial x}_{|x=0} = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_{|(x,y)=(0,1)} = \left(\frac{2x^2}{2y + \cos y}\right)_{|(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Eller alternativt kan man se att då $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ måste nivåkurvan $F(0, 1) = 1 + \sin(1)$ vara horisontal i punkten - och därför måste derivaten av denna som graf vara 0.

**Lösning till problem 3.** Max och min existera på $\mathcal{D}$ eftersom den är kompakt. Dessa måste hittas i stationära/singulära/rand punkter på $\mathcal{D}$. Stationäre/singulära punkter:

$$(0, 0) = \nabla f = (8x^3 - 2y, 2y - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\} \\ y = x \end{cases}$$

Så inga singulära punkter och alla stationära punkter är: $(0, 0)$ och $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dessa har funktions värden:

$$f(0, 0) = 0 \qquad \text{och} \qquad f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{8}.$$

Randpunkter:

Vi kollar på topp randen genom att se på funktionen $g(y) = f(1, y) = 2 + y^2 - 2y$ denna är en parabel och har max i en av randpunkterna och min i punkten $y = \frac{2}{2} = 1$ som också är ett rand punkt. I dessa randpunkter är $f(1, 1) = g(1) = 1$ och $f(1, -1) = g(-1) = 5$. Om vi ser på botten randen får vi nästan samma funktion $g_2(y) = f(-1, y) = 2 + y^2 + 2y$ - den uppfyller att $g_2(y) = g(-y)$ så på intervalen $[-1, 1]$ har de samma max och min.

Ser vi på höger del av randen definierar vi $h(x) = f(x, 1) = 2x^4 - 2x + 1$, och denna har kritisk punkt där $h'(x) = 0$ som ger $8x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Sätts detta in i $h$ fås

$$h(\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}) = 2(\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}})^4 - 2\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\big(2\tfrac{1}{4} - 2\big) + 1 = 1 - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Detta är större än $-\frac{1}{8}$ eftersom

$$1 - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}) > 0$$

eftersom $\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ eftersom $\frac{27}{64} > \frac{1}{4}$. På randen är $h(\pm 1) = g(1)$ som vi redan har kollat på.

På den vänstre randdelen definierar vi $h_2(x) = f(x, -1) = 2x^4 - 2x + 1$, men denna är $h_2(x) = h(-x)$ så på intervalen $[-1, 1]$ har vi igen de samman max och min.

Vi drar slutsatsen att max på $\mathcal{D}$ är 5 och min är $-\frac{1}{8}$.

Andra delen: Då vi redan har set att $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är minimum på hela $\mathcal{D}$ och dessa ligger i den inre av $\mathcal{D}$ måste de vara lokala minima. Det återstår att kolla på karaktären av $(0, 0)$. I denna är den kvadratiska approximation av f givet som ($f$ är ett polynom så man behöver faktiskt inte derivera - men man kan om man känner sig mera säker på det sätt):

$$Q(h, k) = k^2 - 2hk = (k - h)^2 - h^2$$

som vi ser har båda positiva och negativa delar. Så detta är en sadelpunkt.

**Lösning till problem 4.** Vi skriver som vanligt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och ser att olikheterna är ekvivalenta med

$$r^2 + |z| \le r \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| \le r - r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 - r \le z \le r - r^2.$$

Detta har lösningar precis när $r - r^2 \ge 0$ som är ekvivalent med

$$r - r^2 \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r(r - 1) \le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \le r \le 1$$

Så vi har en $z$-enkel mängd över mängden $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Så vi kan beräkna volym genom att integrera och använda upprepat integration:

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(K) = \iiint_K 1 dV = &\iint_{\mathcal{D}} \left( \int_{r^2 - r}^{r - r^2} 1 dz \right) dA = \\
= &\iint_{\mathcal{D}} 2(r - r^2) dA =^{\text{[byta till polära koordinater]}} \\
=&2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) r d\theta dr = \\
=&4\pi[\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{5}r^5]_0^1 = \tfrac{8\pi}{15}
\end{aligned}$$

**Lösning till problem 5.** Ytan har enhetsnormalvektor (som pekar ut) given av $\vec{n} = (x, y, 0)$ så vi ska beräkna:

$$\begin{aligned}
\iint_S (y\cos(xy) + x, -x\cos(xy) + y, \cos z + z) \bullet (x, y, 0) dS = &\iint_S x^2 + y^2 dA = \\
= &\iint_S 1 dA = \text{Area}(S) = 2 \cdot 2\pi = 4\pi.
\end{aligned}$$

Här använde vi att på ytan $S$ är $x^2 + y^2 = 1$, och att arean av en cylinder är längden av bottenkurvan $2\pi$ gånger höjden 2.

**Lösning till problem 6.** Vi beräkner först rotationen (curl) av vektorfältet i hoppat att det är snyggare än $\vec{F}$ själv:

$$\text{Rot}\,\vec{F} = (1-2z, 0-0, 1-0) = (1-2z, 0, 1).$$

Det var den - så kanske Stoke:s är en bra idé. Vi måste därför hitta en orienterad yta $S$ med $C$ som orienterad rand. Så först hittar skuggan av $C$ i $xy$-planet:

$$3x^2 + y^2 + (-x)^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^2 + y^2 = 1$$

vilket är en ellips med storradie 1 (längs $y$-axeln) och litenradie $\frac{1}{2}$ (längs $x$-axeln). Eftersom $C$ är givet som skärningen av ett plan och en ellipsoid är det ganska närliggande att använda den del av planet som $C$ begränsar:

$$S : \begin{cases} 4x^2 + y^2 \leq 1 \\ \qquad\quad z = -x \end{cases}$$

Som har skugga $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^1 \leq 1\}$. Vi kunna använda graf-parametrisering, men det blir lite mera direkt att se hur man växlar till polära koordinater om vi användar:

$$\vec{r}(u, v) = (2u, v, -2u), \qquad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Som nästen är en graf-parametrisering (en faktor 2 på $x$-koordinat). Denna har

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (2, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 2).$$

Vi ser att denna är orienterad med $z$-koordinat uppåt, och vi ser att om man ser på kurvan långt uppifrån (från position med stor $z$-koordinat) så är $C$ positivt orienterad. Det betyder enligt högerhandsregeln att denna parametrisering har den korrekta orientering. Så Stoke:s ger

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} &\text{Rot}\,\vec{F} \bullet (2, 0, 2) dA = \\
= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} &(1 + 2u, 0, 1) \bullet (2, 0, 2) dA = \\
= \iint_{u2+v^2 \leq 1} &4 + 4u dA = \iint_{u^2+v^2 \leq} 4 dA = 4\,\text{Area}(u^2 + v^2 \leq 1) = 4\pi.
\end{aligned}$$

Här gick $4u$ bort eftersom detta är en udda funktion i $u$ och enhetsklotet $u^2+v^2 \leq 1$ är symmetriskt i speglingen $u \mapsto -u$.

**Lösning till problem 7.**
**Alternativ 1:** Om man använder kjedregeln för koordinatbyte $(x(u, v), y(u, v))$ får man:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Så om vi till exempel använder koordinaterna $x = u$ och $y = -2u + v$. Så får vi

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Här är den specifika formel för $y$ inte så viktigt, men det är viktigt att funktionerna tillsammans beskriver bijektivt koordinatbyte - i detta fall linjärt med matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det är därför vi måste ha med ett $v$ i formlerna. Nu ser vi att i dessa koordinater är differentialekvationen ekvivalent med $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$. Denna lösas som vanligt med

$$f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v)) = f(u,v) = g(v) = g(2x+y)$$

där $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en godtycklig $C^1$ funktion.
**Alternativ 2:** inse att differentialekvationen är ekvivalent med att riktnings derivaten i riktning $(1,-2)$ är givet som:

$$D_{(2,1)}f = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}}(1,-2) \bullet \nabla f = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Det betyder att den är ekvivalent med att $f$ ska vara konstant längs linjer parallel med denna riktning. Altså att den är konstant på linjer av typen

$$(x,y) = (a,b) + t(1,-2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dessa har ekvationerna $2x + y = c$ för något $c \in \mathbb{R}$. Detta ger att funktionen kan enbart bero på detta $c$ (det vill säga vilken linje vi är på) och *inte* vart på linjen $(x,y)$ ligger. Därför är

$$f(x,y) = g(2x+y)$$

för någon godtycklig $C^1$ funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Lösning till problem 8.**
(i) Systemet kan skrivas på matrisform genom:

$$\vec{r}'(t) = A\vec{r}(t)$$

med

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denna har egenvärde givet som lösningarna av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2016 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Så $\lambda = 1$ är en egenvärde (med multiplicitet 2). Då har vi en formel för exponentialmatrisen:

$$e^{tA} = e^{\lambda t}(I + (A - \lambda I)t) = e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2016 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2016t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Då de två kolonnerna i exponentialmatrisen ger två linjärt oberoende lösningar och det beskriver alla lösningar är den allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2016t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) a) Vi ser att vi kan begränsa absolut beloppet av varje term:

$$\left|\frac{\sin x}{n}\right|^n \leq \frac{|\sin x|^n}{n^n} \leq \frac{1}{n^n}$$

och vi ser att summan av dessa är konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Så Weirstrass: majorant sats säger att summan är likformigt konvergent och därför är $f$ väldefinierad. Eftersom varje term i summan är kontinuerlig och vi har likformig konvergens har vi också en sats som säger att gränsfunktion $f$ är kontinuerlig.

b) Vi har en sats som säger: om summen konvergerar (det såg vi i a)) och om funktionsserien definierad genom att derivera termvist konvergerar likformigt. Så är funktion deriverbar (och även givet av den termvist deriverade serie). Vi tar termvis derivat:

$$\frac{\partial\left(\frac{\sin x}{n}\right)^n}{\partial x} = \frac{(n-1)(\sin x)^{n-1}\cos x}{n^n}.$$

Igen ser vi på absolut beloppet:

$$\left|\frac{(n-1)(\sin x)^{n-1}\cos x}{n^n}\right| \leq \frac{n-1}{n^n} \leq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} \leq \frac{1}{n^{n-1}}$$

igen är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}} \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Så igen säger Weirstrass: majorant sats att funktionsserien är likformigt konvergent.