UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anna Sakovich

Prov i matematik
MaKand, DvKand, IT, Lärare
Algebra 1
2018-01-07

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng, inklusive bonuspoäng från inlämningsuppgifter. Om inget annat anges, skall lösningarna åtföljas av förklarande text.

1. På den första uppgiften krävs inga motiveringar, endast svar.

(a) Undersök sanningsvärdet för utsagan $(A \wedge \neg B) \Rightarrow B$.

(b) På Matematiska Institutionen vid Smokhults Universitet arbetar 40 personer. Av dessa dricker 33 personer kaffe på jobbet och 21 dricker te. 17 dricker både kaffe och te. Hur många av de anställda dricker varken kaffe eller te på jobbet?

(c) Bestäm $\text{SGD}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^{11}, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^7)$.

(d) Ange ett exempel på en äkta delmängd av $\mathbb{R}$ som är överuppräknelig.

(e) Har ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ några heltalslösningar?

2. Lös den diofantiska ekvationen $15x + 24y = 45$.

3. (a) Skriv talet $(1011101)_2$ i basen 8.

(b) Vilken rest lämnar 2^{1345} vid division med 7?

(c) Visa att ekvationen $3x^2 + 2 = y^2$ saknar heltalslösningar.

4. En talföljd definieras genom att sätta

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{7a_n}{7 - a_n} \text{ för } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Visa med induktion att talföljden kan beskrivas med den slutna formeln

$$a_{n+1} = \frac{14}{7 - 2n} \text{ för } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

5. På mängden $\mathbb{C}$ av komplexa tal definieras en relation R på följande sätt:

$$zRw \iff z - w = a \text{ för någon } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation på $\mathbb{C}$.

(b) Vilka komplexa tal ingår i ekvivalensklassen $[-1 + 5i]$?

(c) Beskriv samtliga ekvivalensklasser och skissa några av dem i det komplexa talplanet.

Var god vänd!

6. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 2\}$, d v s A är mängden av alla punkter med heltalskoordinater i planet, sådana att koordinaternas summa är 2.

(a) Rita mängden A i talplanet.

(b) Konstruera en bijektiv funktion $f : \mathbb{Z} \to A$.

(c) Är mängden A uppräknelig? Motivera ditt svar.

7. Förkorta bråket

$$\frac{x^4 + x^3 + 2x - 4}{x^4 - x^3 - 2x - 4}$$

så långt som möjligt.

8. Ekvationen $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 12z + 15 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i Algebra 1 2018-01-07

1. (a) Utsagan är falskt precis när A är sann och B är falsk. (b) 3. (c) $2^3 \cdot 3^2 = 72$. (d) T ex $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (e) nej.

2. $x = -45 - 8n$, $y = 30 + 5n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) $(135)_8$. (b) 2.

5. (b) $[-1+5i] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 5\}$. (c) $[bi] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b\}$ för alla $b \in \mathbb{R}$.

6. (a) $A = \{(n, 2-n) : n \in \mathbb{Z}\}$ består av alla punkter med heltalskoordinater på linjen $y = 2 - x$. (b) $f : \mathbb{Z} \to A, n \to (n, 2-n)$. (c) ja.

7. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

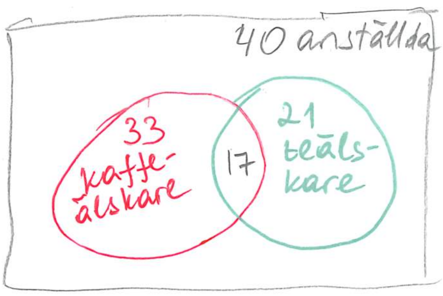
8. $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$, $x_{3,4} = -2 \pm i$.

1

a) Vi rittar sanningsvärdestabel:

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow B$
S	S	F	F	S
S	F	S	S	F
F	S	F	F	S
F	F	S	F	S

b)



Vi har $40-33-21+17=$
$=57-54=3$
personer som dryckar varken kaffe eller te.

c) $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

d) T ex ett interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ är överuppräkneligt (har visats på föreläsningar).

e) Om heltalslösningar finns så måste de vara bland delare hos 1, d v s ± 1. Varken 1 eller -1 är en rot, så heltalslösningar finns inte.

Svar:

a) Utsagan är falsk precis när A är sann och B är falsk.
b) 3 pers.
c) 72
d) t ex $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e) nej.

(2) $SGD(15,24)=3 \mid 45 \Rightarrow$ lösningarna finns. Förkortar ekvationen med 3:

$$5x + 8y = 15. \qquad (\star)$$

Här är $SGD(5,8)=1$. Löser först hjälpekvationen:

$$5x + 8y = 1. \qquad (*)$$

Här kan man gissa ett par $(x_0, y_0) = (-3, 2)$ som passar in. Alternativt kör man Euklides algoritm och får

$$
\begin{aligned}
8 &= \overset{\text{kvot}}{1} \cdot \underset{}{\overset{\text{delare}}{5}} + \overset{\text{rest}}{3} && (1)\\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 && (2)\\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 && (3)\\
2 &= 1 \cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$\underline{1} \overset{(3)}{=} 3 - 1\cdot 2 = \left[\begin{matrix}(2):\\ 2 = 5-3\end{matrix}\right] = 3 - (5-3) =$$

$$= 2\cdot 3 - 5 = \left[\begin{matrix}(1):\\ 3 = 8 - 1\cdot 5\end{matrix}\right] = 2(8 - 1\cdot 5) - 5 =$$

$$= 2\cdot 8 - 3\cdot 5 = \underline{\underline{5\cdot(-3) + 8\cdot 2}}.$$

Vi ser att $(-3, 2)$ är en lösning till $(*)$, och då ges den allmänna lösningen av $(\star)$ av formeln $\lceil 2$

$$\begin{cases} x = 15(-3) - 8n \\ y = 15 \cdot 2 + 5n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $x = -45 - 8n$, $y = 30 + 5n$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

3) a) $(\overset{6}{1}\overset{5}{0}\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{1})_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$= 64 + 16 + 8 + 4 + 1 =$

$= 8^2 + 2 \cdot 8 + 8 + 5 = 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 =$

$= (135)_8$

b) Vi ser att $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Eftersom $1345 = 3 \cdot 448 + 1$ har vi

$$2^{1345} = 2^{3 \cdot 448 + 1} = (2^3)^{448} \cdot 2 \equiv 1^{448} \cdot 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

Resten är 2.

c) Om en heltalslösning (x, y) finns, så gäller det att $y^2 \equiv 2 \pmod 3$. Vi ska nu

3

Visa att detta inte är möjligt.

För y finns det bara tre möjligheter:

$y \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow y^2 \equiv 0 \pmod 3$

$y \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \pmod 3$

$y \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow y^2 \equiv 4 \pmod 3$
$\equiv 1 \pmod 3$.

I vilket fall, $y^2 \not\equiv 2 \pmod 3$.
Ekvationen saknar lösningar.

(4) Vi vill bevisa att utsagan

$$P_n : a_{n+1} = \frac{14}{7-2n}$$

är sann för alla $n = 1, 2, 3 \ldots$

Basfall: om $n=1$ så är

$$P_1 : a_2 = \frac{14}{7-2\cdot 1} = \frac{14}{5}$$

vilket är sann då vi har

$$a_2 = \frac{7a_1}{7-a_1} = \frac{7\cdot 2}{7-2} = \frac{14}{5}$$

enligt den givna rekursionsformeln.

Induktionssteg

Vi gör induktionsantagande!

P_n är sann för $n = m$, för ngn $m \in \{1, 2, \ldots\}$

d v s $\quad a_{m+1} = \dfrac{14}{7-2m}$ $\quad (P_m)$

Vi vill visa att P_{m+1} också är sann, d v s att

$$a_{m+2} = \frac{14}{7-2(m+1)} . \qquad (P_{m+1})$$

Vi beräknar a_{m+2} m h a rekursionsformeln och sedan använder induktionsantagendet:

$$a_{m+2} = \frac{7a_{m+1}}{7-a_{m+1}} \overset{(P_m)}{=} \frac{\frac{7\cdot 14}{7-2m}}{7-\frac{14}{7-2m}} = \frac{\frac{7\cdot 14}{\cancel{7-2m}}}{\frac{7(7-2m)-14}{\cancel{7-2m}}} =$$

$$= \frac{7\cdot 14}{49-14m-14} = \frac{7\cdot 14}{35-14m}$$

$$= \frac{\cancel{7}\cdot 14}{\cancel{7}(5-2m)} = \frac{14}{7-2(m+1)}$$

(P_{m+1}) är då bevisat. Enligt induktionsprincipen följer det att $a_{n+1} = \dfrac{14}{7-2n}$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

15

5 (a) Relationen R är

<u>reflexiv</u> då $zRz \iff z - z \in \mathbb{R}$

$\iff 0 \in \mathbb{R}$ – sant.

<u>symmetrisk</u> då $zRw \iff z - w \in \mathbb{R}$

$\iff -(z-w) \in \mathbb{R}$

$\iff w - z \in \mathbb{R} \iff wRz.$

<u>transitiv</u> då $(zRw) \wedge (wRu) \Rightarrow$

$(z - w \in \mathbb{R}) \wedge (w - u \in \mathbb{R}) \Rightarrow$

$(z - \cancel{w}) + (\cancel{w} - u) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$z - u \in \mathbb{R} \Rightarrow zRu.$

R är alltså en ekvivalensrelation.

(b) $[-1+5i] = \{z \in \mathbb{C} : (-1+5i)Rz\}$

För $z = a + bi \in \mathbb{C}$ har vi

$(-1+5i)Rz \iff (-1+5i) - (a+bi) \in \mathbb{R}$

$\iff (-1-a) + (5-b)i \in \mathbb{R}$

$\iff b = 5$

$\iff \operatorname{Im} z = 5.$

Vi ser att

$[-1+5i] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 5\}.$

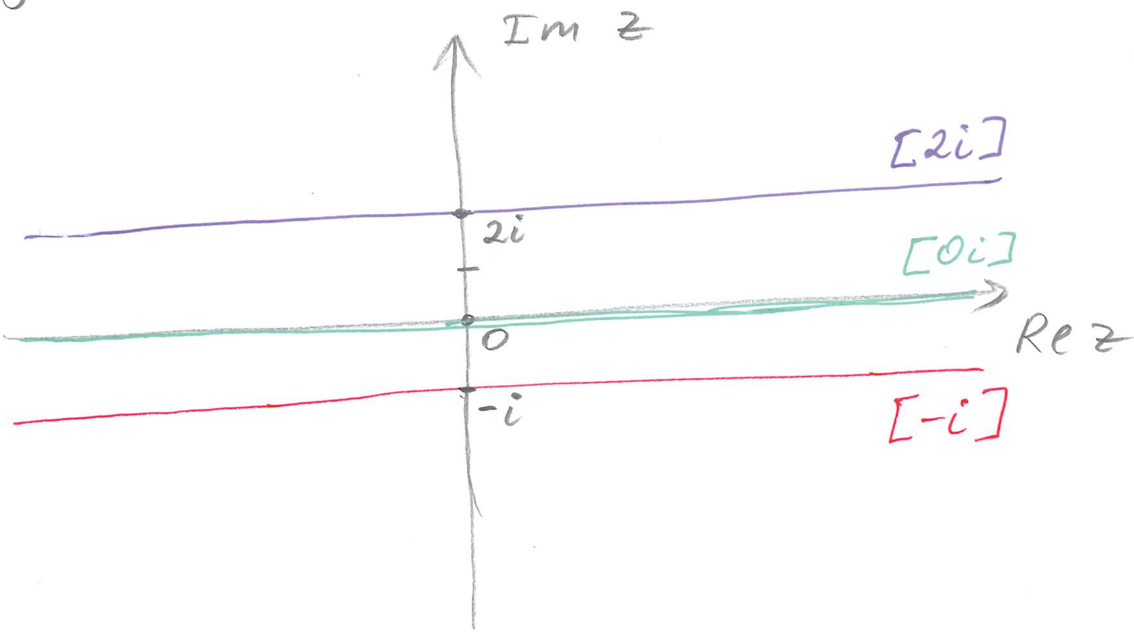
(c) Låt $z = a + bi$ och $w = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vi har

$$z R w \iff z - w \in \mathbb{R}$$
$$\iff (a-c) + (b-d)i \in \mathbb{R}$$
$$\iff b = d$$
$$\iff \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w.$$

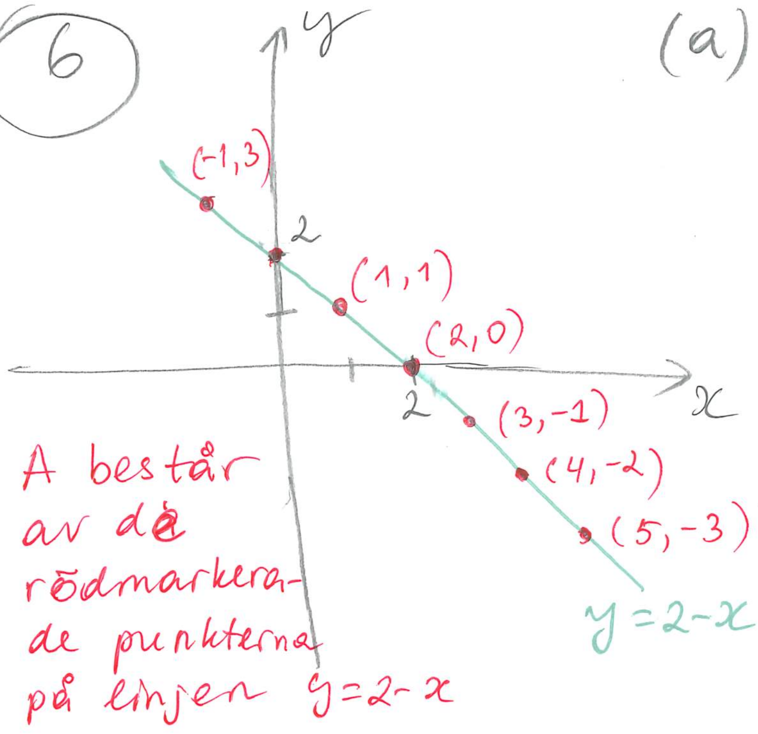
Med andra ord, tillhör z och w samma ekvivalensklass precis när de har samma imaginära del. Samtliga ekvivalensklasser kan då exempelvis beskrivas av

$$[bi] = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b \}$$

för alla $b \in \mathbb{R}$.



6



(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x+y=2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y=2-x\}$

Så A är mängden av alla punkter (x,y) med heltals-koordinater på linjen $y=2-x$.

(b) Notera att vi kan skriva

$A = \{(x, 2-x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} =$

$= \{(n, 2-n) : n \in \mathbb{Z}\}$

En bijektion $f : \mathbb{Z} \to A$ ges av $f(n) = (n, 2-n)$.

Kontroll!

- $f(n_1) = f(n_2) \iff (n_1, 2-n_1) = (n_2, 2-n_2)$

$\iff \begin{cases} n_1 = n_2 \\ 2-n_1 = 2-n_2 \end{cases}$

$\iff n_1 = n_2$ så f är injektiv

- Varje $a \in A$ kan skrivas som $a = (n, 2-n) = f(n)$ för någon $n \in \mathbb{Z}$ så f är surjektiv.

(c) Eftersom det finns en bijektiv funktion $f: \mathbb{Z} \to A$ så har $\mathbb{Z}$ och A samma kardinalitet.

$\mathbb{Z}$ är uppräkneligt oändlig så det följer att A är också uppräkneligt oändlig. Mängden A är alltså uppräknelig.

(7) För att förkorta bråket, beräknar SGD av de två polynomen i täljaren och nämnaren med Euklides algoritm

1) $x^4+x^3+2x-4 = (\overset{\text{delare}}{x^4-x^3-2x-4})\cdot 1$

$+\ \underbrace{2x^3+4x}_{\text{rest}}$

2) Delar $2(x^4-x^3-2x-4)$ med $2x^3+4x$:

$$
\begin{array}{l}
\quad x-1 \\
\hline
2x^4-2x^3-4x-8 \;\big|\; 2x^3+4x \leftarrow \text{delare} \\
-\;(2x^4+4x^2) \\
\hline
\quad -2x^3-4x^2-4x-8 \\
\quad -2x^3 \qquad\quad -4x \\
\hline
\qquad -4x^2-8 \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

3) Delar $2x^3+4x$ med $-4x^2-8$:

$2x^3+4x = -\frac{1}{2}x(-4x^2-8)+0$

Som SGD kan vi då ta något polynom som är lika med $-4x^2-8$ up till multiplikation med en konstant, tex x^2+2. Både polynom är alltså delbara med x^2+2, och division ger

$$
\begin{array}{l}
x^2+x-2 \\
\hline
x^4+x^3+2x-4 \;\big|\; x^2+2 \\
-\;(x^4+2x^2) \\
\hline
\quad x^3-2x^2+2x-4 \\
-\;(x^3+2x) \\
\hline
\quad -2x^2-4 \\
\quad -2x^2-4 \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

10

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2 - x - 2} & \\
\hline
x^4 - x^3 - 2x - 4 & x^2 + 2 \\
-\left(x^4 + 2x^2\right) & \\
\hline
-x^3 - 2x^2 - 2x - 4 & \\
-\left(-x^3 - 2x\right) & \\
\hline
-2x^2 - 4 & \\
-\left(-2x^2 - 4\right) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Så vi får

$$\frac{x^4 + x^3 + 2x - 4}{x^4 - x^3 - 2x - 4} = \frac{\cancel{(x^2+2)}(x^2 + x - 2)}{\cancel{(x^2+2)}(x^2 - x - 2)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}.$$

<u>Kontroll</u>! vi har $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ så

bråket kan inte förkortas längre än så.

<u>Svar</u>: $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$

8 Vi har fått tipset att det finns en rot på formen $z = bi$, $b \neq 0$.

Insättning ger

$$b^4 \underbrace{i^4}_{=1} + 4b^3 \underbrace{i^3}_{=-i} + 8b^2 \underbrace{i^2}_{=-1} + 12bi + 15 = 0 \iff$$

$$b^4 - 4b^3 i - 8b^2 + 12bi + 15 = 0 \iff$$

$$(b^4 - 8b^2 + 15) + (-4b^3 + 12b)i = 0 \iff$$

$$\begin{cases} b^4 - 8b^2 + 15 = 0 \\ -4b^3 + 12b = 0 \end{cases} \underset{(b \neq 0)}{\iff} \begin{cases} b^4 - 8b^2 + 15 = 0 \\ \cancel{-4b}(b^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b^4 - 8b^2 + 15 = 0 \\ b^2 = 3 \end{cases}$$

passar in! $3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

Vi ser att $b^2 = 3 \iff b = \pm\sqrt{3}$.
Ekvationen har alltså två rötter $z_1 = \sqrt{3}i$ och $z = -\sqrt{3}i$, vilket innebär att polynomet i VL är delbart med

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) =$$

$$= z^2 - (\sqrt{3}i)^2 = z^2 + 3.$$

Division ger

$$\begin{array}{l|l}
z^2 + 4z + 5 & \\
\hline
z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 12z + 15 & z^2 + 3 \\
-(z^4 + 3z^2) & \\
\hline
4z^3 + 5z^2 + 12z + 15 & \\
-(4z^3 + 12z) & \\
\hline
5z^2 + 15 & \\
-(5z^2 + 15) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

12

Ekvationen är då ekvivalent med

$(z^2+3)(z^2+4z+5)=0$.

Polynomet $z^2+4z+5 = (z^2+4z+4)+1$

$= (z+2)^2+1$

$= (z+2)^2 - i^2$

$= (z+2-i)(z+2+i)$

har nollställen $z=-2\pm i$, så ekvationens samtliga rötter är

$z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$, $z_{3,4} = -2\pm i$.

Svar $z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$, $z_{3,4} = -2\pm i$.