UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson
Sebastian Pöder
Hania Uscka-Wehlou

Prov i matematik
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand, IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018–08–23

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}.$$

2. Planet E går genom punkterna $A = (-2, 7, 3), B = (2, 9, 2)$ och $C = (0, 7, 4)$, och linjen l går genom A och är normal till E. Finn E:s ekvation på normalform (standardform) och l:s ekvation på parameterform.

3. Lös matrisekvationen

$$AXB - XB = B,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} -x-3 & 2x+2 & 3x+1 & 2x+2 \\ -4x-2 & 4x+2 & 3x+3 & 3x+3 \\ x+3 & -2x-2 & -2x & -2x-2 \\ 2 & -x-1 & -x+1 & -x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Var god vänd!

5. Bestäm (kortaste) avståndet mellan linjerna

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = -3 - s \\ z = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{och} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

samt ange koordinater till de punkter på linjerna l_1 och l_2 som ligger närmast varandra.

6. Låt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är ortogonala.

(b) Beräkna $\vec{u} + 3\vec{v}$ och $\vec{w} - \vec{u}$.

(c) Bestäm längden av $\vec{w} - \vec{u}$.

(d) Beräkna skalärprodukterna $\vec{u} \cdot \vec{w}$ och $\vec{w} \cdot \vec{w}$.

(e) Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{w}$.

7. Avgör om vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet, finn koordinaterna till $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i denna bas. Om de inte utgör en bas, avgör om de är linjärt oberoende.

8. Låt den linjära operatorn $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation kring origo med vinkel α. Den har matris

$$[R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Låt S_1 och S_2 vara spegling i linjerna $l_1 : x = y$ respektive $l_2 : x = 0$. Visa att sammansättningen $S_2 \circ S_1$ är en rotation R_α och bestäm värdet på α.

Lycka till!

Svar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018–08–23

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2s, s, -3t, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

2. $E : x - 3y - 2z = 29$ och $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.

3. $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $x = -1$ och $x = 1$ (dubbelrötter).

5. Avståndet är $\sqrt{14}$ och punkterna är $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

6. (a)

(b) $\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) 2

(d) 8 och 6

(e) $\frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. De utgör en bas. Koordinaterna är $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. $\alpha = \pi/2$.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018–08–23

Lösning till problem 1. Vi Gausseliminerar i totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \;\; -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1/3 \;\; -1/3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1/6 \end{matrix} \sim\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Vi avläser $x_1 = 1$, $x_2 = 2x_3$, och $x_4 = -3x_5$. Sätter vi $x_3 = s, x_5 = t, s, t \in \mathbb{R}$ ges samtliga lösningar av $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2s, s, -3t, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 2. Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ ligger i E, så $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ är en normal till E liksom $\vec{n} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\vec{n}$ är även en riktningsvektor till l. E:s ekvation är alltså

$$1(x+2) - 3(y-7) - 2(z-3) = 0 \iff x - 3y - 2z = -29$$

och l:s är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning till problem 3. Matrisen B är inverterbar (determinant $= 1$) så vi kan multiplicera med B^{-1} från höger och skriva om som

$$AX - X = I \iff (A-I)X = I.$$

Om dessutom $A - I$ är inverterbar ges lösningen av $X = (A-I)^{-1}$. En beräkning ger $\det(A-I) = 2$, så den är inverterbar, och med valfri metod fås

$$X = (A-I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 4. Vi beräknar

$$0 = \begin{vmatrix} -x-3 & 2x+2 & 3x+1 & 2x+2 \\ -4x-2 & 4x+2 & 3x+3 & 3x+3 \\ x+3 & -2x-2 & -2x & -2x-2 \\ 2 & -x-1 & -x+1 & -x-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2 \; 3 \; 2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -x+1 & 0 & x+3 & 0 \\ -4x+4 & x-1 & 6 & 0 \\ x-1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -x-1 & -x+1 & -x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-x-1)\begin{vmatrix} -x+1 & 0 & x+3 \\ -4x+4 & x-1 & 6 \\ x-1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-x-1)(x-1)\begin{vmatrix} -x+1 & x+3 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+1)(x-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & x+3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(x+1)(x-1)^2(-x-1) = (x+1)^2(x-1)^2.$$

Vi har två dubbelrötter, $x = -1$ och $x = 1$.

Lösning till problem 5. Tag en punkt $P = P(s) = \begin{pmatrix} -1-2s \\ -3-s \\ s \end{pmatrix}$ på linjen l_1 och en punkt $Q = Q(t) = \begin{pmatrix} 4+t \\ 2+5t \\ 3+t \end{pmatrix}$ på linjen l_2. Vi söker s och t så att vektorn $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5+2s+t \\ 5+s+5t \\ 3-s+t \end{pmatrix}$ är ortogonal mot linjernas riktningsvektorer $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Detta ger

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -10-4s-2t \; -5-s-5t \quad +3-s+t = 0 \\ \quad 5+2s+t \; +25+5s+25t \quad 3-s+t = 0 \end{cases} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} -6s - 6t = 12 \\ 6s + 27t = -33 \end{cases}.$$

Systemet har lösningen $s = t = -1$ så de sökta punkterna är $P(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $Q(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Avståndet ges av

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{14}.$$

Lösning till problem 6. (a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 - 1 + 1 + 0 = 0 \implies$ de är ortogonala.

(b) $\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\|\vec{w} - \vec{u}\| = \sqrt{2^2} = 2$.

(d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4 + 1 + 3 + 0 = 8, \vec{w} \cdot \vec{w} = 4 + 1 + 1 + 0 = 6$

(e) $\operatorname{proj}_{\vec{w}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \dfrac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösning till problem 7. Antalet vektorer är rätt (tre stycken i $\mathbb{R}^3$), så de utgör en bas precis om matrisen $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$ är inverterbar. En beräkning ger $\det A = 7$, så $\underline{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ utgör en bas. Koordinaterna till $\vec{w}$ i basen $\underline{v}$ fås t ex som $A^{-1}\vec{w}$ dvs

$$A^{-1}\vec{w} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 8. Speglingarnas matriser är

$$[S_1] = \begin{pmatrix} S_1(\vec{e}_1) & S_1(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } [S_2] = \begin{pmatrix} S_2(\vec{e}_1) & S_2(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för sammansättningen är alltså $[S_2 \circ S_1] = [S_2][S_1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, vilket är lika med en rotationsmatris $[R_\alpha]$ för $\alpha = \pi/2$.