UPPSALA UNIVERSITET | Baskurs i matematik
Matematiska institutionen | Lösning
Johan Andersson, Qimh Xantcha | 2017–09–25

1. Utförande av multiplikationen i täljaren, följt av förlängning med nämnarens konjugat, ger

$$\frac{(2-i)(3+i)}{1-i} = \frac{6+2i-3i-i^2}{1-i} = \frac{7-i}{1-i} = \frac{(7-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{7+7i-i-i^2}{1-i^2} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i.$$

2. Förenkling ger

$$\frac{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}} = \frac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}}$$
$$= \frac{\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}.$$

Detta är giltigt så länge $x \neq 0, \pm 1$.

3. Antalet möjliga urval av 3 smaker från 8 är

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$$

4. Ekvationen är ekvivalent med

$$0 = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).$$

Rötterna är $x = 0, \pm 1$.

5. *Fall 1:* $x \geqslant \frac{1}{2}$. Då är $x - \frac{1}{2} \geqslant 0$, och ekvationen blir

$$3x - \frac{1}{2} = \left| x - \frac{1}{2} \right| = x - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Detta är en falsk rot, ty $x = 0$ ligger ej i intervallet $x \geqslant \frac{1}{2}$.
Fall 2: $x < \frac{1}{2}$. Då är $x - \frac{1}{2} < 0$, och ekvationen blir

$$3x - \frac{1}{2} = \left| x - \frac{1}{2} \right| = -x + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Detta är en äkta rot, ty $x = \frac{1}{4}$ ligger i intervallet $x < \frac{1}{2}$.
Ekvationens enda lösning är $x = \frac{1}{4}$.

x		-1		1	
$-1-x^2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-1-x^2}{(x+1)(x-1)}$	$-$	odef.	$+$	odef.	$-$

Tabell 1: Teckenstudium.

6. Teckenstudium för den ekvivalenta olikheten

$$0 < \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1) - x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1-x^2}{(x+1)(x-1)}$$

finns i Tabell 1. Olikheten är uppfylld då $-1 < x < 1$.

7. Den första termen ger en geometrisk summa och den andra en aritmetisk, vardera med $n+1$ termer. Med nyttjande av formlerna för summor fås

$$\sum_{k=n}^{2n} (2^k - k) = \frac{2^n - 2^{2n+1}}{1-2} - \frac{1}{2}(n+1)(n+2n) = 2^{2n+1} - 2^n - \frac{3}{2}n(n+1).$$

8. Med Kvadreringsregeln erhålles

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = a + 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a} = \frac{a^2+2a+1}{a},$$

som tydligen är rationellt, eftersom både täljare och nämnare är heltal.