PROV I MATHEMATIK
SANNOLIKHET OCH STATISTIK DV, 1MS321

VALENTIN GARINO

UPPSALA UNIVERSITET
2024-05-28

Hjälpmedel: Räknedosa, formel- och tabellsamling och engelsk-svensk ordlista för kursen 1MS321. Goda resonemang och motiveringar vägs in vid poängsättning. För betygen 3, 4, resp 5 krävs normalt minst 18, 25, resp 32 poäng.

1. Fråga 1

Vi singlar slant 3 gånger i rad (sidorna är numrerade med 0 respektive 1 och båda har samma sannolikhet att inträffa). Vi betecknar dessa 3 oberoende utfall av slantsinglingen med X_1, X_2, X_3. Betrakta följande händelser:

- $A = \{X_1 = 0\}$
- $B = \{X_1 + X_2 + X_3 = 3\}$
- $C = \{X_1 + X_2 + X_3 \textit{ är ett jämnt tal}\}$

a) Vad är sannolikhetsfunktionen tillhörande $X_1+X_2+X_3$? Beräkna $P(C)$.
b) Är A och B oberoende?
c) Är A och C oberoende?

2. Fråga 2

Betrakta slumpvariabeln X med täthetsfunktion definierad genom

$$f_X(x) := \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{om } x \in [0,2] \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Skissa grafen till f_X.
b) Beräkna fördelningsfunktionen F_X tillhörande X. Vad är $P(X \leq 1)$?
c) Beräkna $\mathbb{E}[X]$ och $V(X)$.
d) Beräkna $Cov(X, X^2)$.

3. Fråga 3

Betrakta två grupper av bilar på en motorväg: Blåa bilar och och gula bilar. Vi antar att varje fordon åker med konstant hastighet. Vidare, antag att hastigheten (i km/h) för en slumpmässigt vald blå bil följer normalfördelningen $\mathcal{N}(90, 400)$ och antag att hastigheten för en slumpmässigt vald gul bil följer normalfördelningen $\mathcal{N}(130, 900)$.

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald blå bil kör snabbare än 120 km/h.

Vi organiserar en tävling mellan blåa bilar och gula bilar. Vi väljer $2n$ slumpmässigt valda blåa bilar och n slumpmässigt valda gula bilar. Alla dessa väljs oberoende av varandra. Varje bil kör så långt de kommer under en timma. I slutändan vinner det lag som åker sammanlagt längst sträcka.

b) Vilken fördelning har den sammanlagda åkta sträckan för alla $2n$ blåa bilar? Samma fråga gäller de gula bilarna.
c) Beräkna sannolikheten att det gula laget vinner för $n = 5$.

4. Fråga 4

Vi betraktar en viktad sexsidig tärning (sidor numrerade från 1 till 6). Utfallen för alla siffror 1-5 har alla samma sannolikhet för tärningen. Tärningen rullar en sexa med okänd sannolikhet $p > 0$. Målet är att skatta p. Vi rullar tärningen n gånger och betecknar X_i för varje utfall. Betrakta skattningen

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i=6},$$

där $1_{X_i=6}$ är lika med 1 om $X_i = 6$ och 0 annars. Med andra ord skattar vi p genom att dela summan av antalet sexor med det totala antalet försök.

a) Låt X vara utfallet för ett slag med tärningen. Vad är sannolikhetsfunktionen för X (uttryckt som en funktion av p)?
b) Vi antar att $n = 500$ och $\hat{p} = 0.1$. Beräkna ett konfidensintervall med 95% konfidens för parametern p, motivera ditt svar. Tips: Ta hjälp av formelsamlingen.

5. Fråga 5

Betrakta två normalfördelade slumpvariabler $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(2\mu - 1, \sigma^2)$. Antag att X och Y är oberoende och att parametern σ är känd. Vi vill skatta den okända parametern μ.

a) Betrakta skattningen $T_1 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}(Y + 1)$. Visa att T_1 är väntevärdesriktig och beräkna dess varians.
b) Betrakta istället skattningen $T = aX + bY + c$ med 3 parametrar $a, b, c \in \mathbb{R}$. Visa att T är väntevärdesriktig om, och endast om, parametrarna

uppfyller följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ b = c \end{cases}$$

6. Fråga 6

Polisen undersöker hastigheten på en motorväg och finner att antalet hastighetsöverskridningar kan modelleras som en poissonprocess med intensitet $\lambda_1 = 1/h$ (en per timma) för bilar och $\lambda_2 = 2/h$ för motorcyklar.

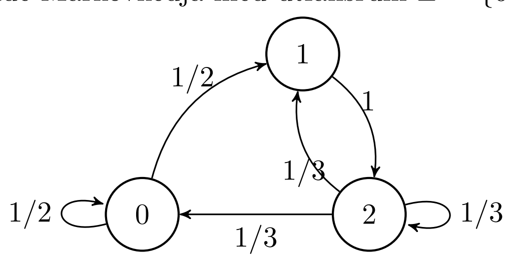
a) Vad är sannolikheten att inga bilar gör hastighetsöverskridningar under de första två timmarna?

b) Vad är sannolikheten att åtminstone tre hastighetsöverskridningar (från både bilar och motorcyklar) sker under de första två timmarna?

c) Polisen installerar en hastighetskamera som noterar registreringsskyltar på fordon som åker för fort. Därefter skickas en bot till den hastighetsöverskridande föraren. På grund av teknologiska begränsningar, kan antingen registreringsskylten eller föraren inte identifieras och ingen bot kan skickas, detta sker med sannolikhet $p = 0,2$. Genom att använda förtunningsegenskapen för poissionprocesser, ge sannolikheten att åtminstone 3 förare (både motorcykel och bil) får böter (under de första två timmarna).

7. Fråga 7

Betrakta följande Markovkedja med utfallsrum $E = \{0, 1, 2\}$



a) Vad är överföringsmatrisen till denna Markovkedja?

b) Givet att starttillståndet har fördelning $p_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, beräkna sannolikhetsfördelningen p_2 för Markovkedjan efter två iterationer.

c) Har denna Markovkedja en asymptotisk fördelning? Motivera ditt svar.

d) Om svaret på förra frågan var ja, beräkna denna asymptotiska fördelning.