UPPSALA UNIVERSITET
**Matematiska Institutionen**
Sebastian Pöder

Prov i matematik
Matematik I, KandMa1, IT2
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2017-09-21

*Skrivtid: 14.00 – 16.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 12 poäng.*

1. Bestäm koefficienterna $a, b, c$ så att kurvan $y = a + bx + cx^2$ går genom punkterna $(x, y) = (-1, 1), (x, y) = (2, 4)$, och $(x, y) = (5, 1)$.

2. Lös matrisekvationen
$$A - X = BX,$$
där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $a$ vara ett reellt tal och låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Beräkna $\det(A)$.
   (b) Ange adjungatan $\operatorname{adj}(A)$.
   (c) Avgör för vilka värden på $a$ som $A$ är inverterbar, och finn $A^{-1}$ för dessa $a$.

4. Lös ekvationen
$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ 2x & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x & 2 & 2x \\ 2x & 1 & 2x-2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Lycka till!

# Lösningsförslag duggan 21 sep. 2017

① Respektive punkt skall alltså uppfylla ekvationen

$$y = a + bx + cx^2.$$

Detta ger systemet

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ a + 2b + 4c = 4 \\ a + 5b + 25c = 1 \end{cases}$$

vilket är ett linjärt ekvationssystem i tre obekanta $a, b, c$. Gausseliminering:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 25 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 24 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{18} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 8/3 \\ & 1 & & 4/3 \\ & & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

Vi avläser $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$.

(2) $A - X = BX$

$\Leftrightarrow \quad A = BX + X$

$\Leftrightarrow \quad A = (B+I)X$

Om $B+I$ har invers är detta

$\Leftrightarrow \quad (B+I)^{-1}A = X.$

$$B+I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ har determinant $-2 \neq 0$

och inversen bestäms ex. vis med standardmetoden till

$$(B+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$X = (B+I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

3 a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} \overset{-2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = \left[ \text{Utv. rad 2} \right] =$

$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = -(a+2)$

b) $\begin{pmatrix} -4+a & -(-2+a) & -2+4 \\ -(-2-1) & -1-1 & -(-1+2) \\ 2a+4 & -(a+2) & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-4 & 2-a & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2a+4 & -a-2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A$ är inverterbar $\leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$\leftrightarrow$ $a \neq -2$,

och för dessa $a$ är

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} 4-a & a-2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2a-4 & a+2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{4-a}{a+2} & \frac{a-2}{a+2} & -\frac{2}{a+2} \\ -\frac{3}{a+2} & \frac{2}{a+2} & \frac{1}{a+2} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4 Ex. vis

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ 2x & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x & 2 & 2x \\ 2x & 1 & 2x-2 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \quad (-1) \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ 2x & 1 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-2x^2)\left(2-(x-1)x\right) = -(1-2x^2)(x+1)(x-2)$$

Lösningarna $x=2$, $x=-1$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ avläses.