UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

Dugga i matematik
MatKand, F1, ES1, E3
FLERVARIABELANALYS,
FLERVARIABELANALYS M
2016–03–10

Skrivtid: 14.00 – 16.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng.

1. Beräkna båglängden av den parametriserade kurvan

$$\vec{r}(t) = (e^t, e^t \sin t, e^t \cos t), \qquad t \in [0, 1].$$

2. Låt

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4 - x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

för $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Visa att man kan definiera f i punkten $(0, 0)$ så att f blir en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

b) Är denna utvidgade funktion differentierbar?

3. a) Visa att differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x - y$$

genom variabelbytet $u = x + y, v = x - y$ transformeras till differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \tfrac{1}{4}v.$$

b) Hitta alla lösningar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ av klass C^2 till den ursprungliga differentialekvationen.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_E xy dA$$

där E är mängden begränsat av de tre linjerna $3x + y = 3$, $x + y = 3$ och $x = 2$.

LYCKA TILL!

Lösningar till duggan i FLERVARIABELANALYS, FLERVARIABELANALYS M 2016–03–10

Lösning till problem 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{len}(\vec{r}) &= \int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = \\
&= \int_0^1 \|(e^t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t - e^t \sin t)\| dt = \\
&= \int_0^1 e^t \|(1, \sin t + \cos t, \cos t - \sin t)\| dt = \\
&= \int_0^1 e^t \sqrt{1^2 + (\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt = \\
&= \int_0^1 e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3}[e^t]_0^1 = \sqrt{3}(e-1).
\end{aligned}$$

Lösning till problem 2.

a) $\left|\dfrac{x^4+y^4-x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{|x|^4+|y|^4+|x^2y^2|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{3r^4}{r^2} = 2r^2 \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Så vi kan utvidga med detta värde 0.

b) **Snabb svar**: Vi såg i del a) att funktionen faktiskt är 0 till andra ordning. Detta visar att 0 är en “bra” linjär approximation (bättre än $O(r)$) och därför är funktionen också differentierbar - faktiskt har den en stationär punkt i $(0,0)$.

Längre (mera vanlig) lösning: Vi hittar de partiella derivatorna i $(0,0)$:

$$f_1(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$
$$f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Det betyder enligt sats och definition att funktionen är differentierbar i $(0,0)$ omm

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-0h-0k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Så vi ska kolla på detta potentiella gränsvärde (som när vi sätter in precis blir):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4+k^4+h^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}^3}$$

Den extra faktor i nämnaren (jämfört med f) kommer av $\sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|$.

Längre (alternativ) lösning: Vi hittar de partiella derivatorna:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(4x^3-2xy^2)(x^2+y^2)-(x^4+y^4-x^2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fallet $(x,y)=(0,0)$ är en oberoende beräkning, men rätt enkel då f är 0 på båda axlarna (som ovan). Samma för

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(4y^3-2x^2y)(x^2+y^2)-(x^4+y^4-x^2y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Dessa ses båda att vara kontinuerliga som i uppgift 1 - då det är något av grad 5 över något av grad 4 ($O(r^5/r^4)$). Så funktionen är C^1 och därför enligt sats differentierbar.

Lösning till problem 3.

a) Koordinatbytet det andra hållet är: $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$ detta kan användas med kedjeregeln (flera gångar) till att beräkna:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}=&\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\tfrac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y})\\ &\Downarrow\\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=&\frac{\partial}{\partial u}\left(\tfrac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y})\right)=\\ =&\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\\ =&\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\tfrac{1}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\tfrac{1}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\tfrac{1}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\tfrac{1}{2}\right)=\\ =&\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

och sedan att $\frac{1}{4}(x-y)=\frac{1}{4}v$ följar det att de två ekvationerna är ekvivalenta.

b) Vi vet att $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{1}{4}v$ detta ger genom att integrera med avseende på u (som ger en konstant som kan bero på v):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=\tfrac{1}{4}vu+h(v)$$

Integrerar vi igen får vi

$$f(u,v)=\tfrac{1}{8}vu^2+uh(v)+g(v).$$

Då f måste vara av klass C^2 måste $h,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ också vara av klass C^2. I (x,y) koordinater är dessa lösningar:

$$f(x,y)=\tfrac{1}{8}(x-y)(x+y)^2+(x+y)h(x-y)+g(x-y)$$

för godtyckliga C^2 funktioner $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Lösning till problem 4. Rita mängden! Mängden är y-enkel och kan skrivas som:

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq x\leq 2, 3-3x\leq y\leq 3-x\}.$$

Detta betyder att integralen kan skrivas som

$$\begin{aligned}\iint_E xy\,dA=&\int_0^2\left(\int_{3-3x}^{3-x}xydy\right)dx=\int_0^2[\tfrac{1}{2}xy^2]_{y=3-3x}^{y=3-x}dx=\\ =&\tfrac{1}{2}\int_0^2(x(3-x)^2-x(3-3x)^2)dx=\tfrac{1}{2}\int_0^2-8x^3+12x^2dx=\\ =&\tfrac{1}{2}[-2x^4+4x^3]_0^2=\tfrac{1}{2}(32-32)=0.\end{aligned}$$