Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Isac Hedén

Algebra I, 5 hp
2013-04-03
Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och linjal. Varje problem ger maximalt 5 poäng – om inget annat anges krävs att lösningarna skall vara åtföljda av klar och tydlig förklarande text för full poäng. Gränserna för betygen 3, 4 och 5 går vid 18, 25 och 32 poäng respektive. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. På den första uppgiften krävs inga motiveringar, endast svar.

a) Bestäm samtliga rationella nollställen till polynomet $p(x) = x^3 + x + 1$, om det finns några.

b) Låt P och Q vara två utsagor. Rita en sanningsvärdestabell för utsagan $P \Rightarrow \neg Q$.

c) Ange tre olika heltal x som uppfyller $0 \leq x \leq 24$ och $x \equiv 7^3 \pmod 8$.

d) Bestäm sammansättningen $(f \circ g)(x)$ av följande två funktioner:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x - 1 \quad \text{och} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Glöm inte att ange sammansättningens definitions- och målmängd.

e) Ge exempel på ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att summan av p:s nollställen är lika med ett.

2. **a)** Skriv talet $(147)_{\text{åtta}}$ i basen sju.

b) Bestäm $\text{SGD}(14^6, 18^3)$.

3. Vilken är den minsta positiva rest som kan erhållas vid division av 2^{64} med 11?

4. Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $4x + 93y = 2$.

Var god vänd!

5. Det finns ett reellt tal a sådant att

$$\sum_{k=1}^{n} 6k^2 = 2n^3 + an^2 + n$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Bestäm talet a.

b) Bevisa med induktion att ovanstående formel gäller med ditt val av a.

6. Bestäm de värden på heltalet b för vilka ekvationen $x^3 + bx^2 - 7x - 7 = 0$ har (minst) en heltalsrot. Lös sedan ekvationen för *ett* av dessa värden på b.

7. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x + 3y = 1\}$, det vill säga A är den mängd som består av alla punkter i planet med koordinater (x, y) sådana att x och y är heltal och $2x + 3y = 1$.

a) Åskådliggör mängden A i en figur.

b) Visa att A är uppräknelig genom att konstruera en bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. **Tips:** Man kan konstruera f genom att först konstruera en bijektion $g : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ och en bijektion $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, och sedan ta $f = g \circ h$.

8. Den här uppgiften går ut på att ge exempel på relationer som har exakt en av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet.

a) Ge exempel på en mängd M_1 och en relation R_1 på M_1 som är transitiv men inte reflexiv eller symmetrisk.

b) Ge exempel på en mängd M_2 och en relation R_2 på M_2 som är symmetrisk men inte reflexiv eller transitiv.

c) Ge exempel på en mängd M_3 och en relation R_3 på M_3 som är reflexiv men inte symmetrisk eller transitiv.

Lycka till!