Dugga 14-02-2017

(1) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Systemets totalmatris är

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-4) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ (-1) \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

så x_1 och x_2 är ledande variabler, och x_3 och x_4 - de fria.

Systemet är alltså ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -7x_3 - 5x_4 \\ x_2 = 5x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

Alla lösningar kan skrivas på formen

$$\begin{cases} x_1 = -7s - 5t \\ x_2 = 5s + 4t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Svar: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-7s-5t,\ 5s+4t,\ s,\ t)$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

För vilka reella tal a är A inverterbar? Bestäm inversen A^{-1} för dessa a.

◄ A är inverterbar precis när $\det A \neq 0$.

Sarrus regel ger:

$$\begin{array}{ccccc} a & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 2a & 0 & a \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$\det A =$

$$= a \cdot a \cdot (-1) + 1 \cdot 2a \cdot (-1) + \cancel{1 \cdot 0 \cdot (-1)}$$
$$- 1 \cdot a \cdot (-1) - a \cdot 2a \cdot (-1) - 1 \cdot \cancel{0 \cdot (-1)}$$

$$= -a^2 - 2a + a + 2a^2 = a^2 - a$$

$$= a(a-1)$$

Så A är inverterbar när $a(a-1) \neq 0$, dvs när $a \neq 0$ och $a \neq 1$.

För dessa a är

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 2a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} -a+2a & -(0+2a) & 0+a \\ -(-1+1) & -a+1 & -(-a+1) \\ 2a-a & -2a^2 & a^2 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a & -2a & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ a & -2a^2 & a^2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -2a & 1-a & -2a^2 \\ a & a-1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Kontroll:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -2a & 1-a & -2a^2 \\ a & a-1 & a^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a^2-2a+a & 1-a+a-1 & a^2-2a^2+a^2 \\ -2a^2+2a^2 & a-a^2+2a^2-2a & -2a^3+2a^3 \\ -a+2a-a & -1+a+a-1 & -a+2a^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a^2-a & 0 & 0 \\ 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

Svar: A^{-1} existerar då $a \neq 0$, $a \neq 1$. I detta fall

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ -2a & 1-a & -2a^2 \\ a & a-1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

③ Låt $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Finn den matris S som uppfyller $C^{-1}SC = D$.

$$C^{-1}SC = D \Leftrightarrow \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{=I} \cdot SC = C \cdot D$$

$$SC = CD$$

$$\underbrace{SC \cdot C^{-1}}_{=I} = CDC^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = CDC^{-1}}}.$$

Söker C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(vänstra blocket: $=C$, högra blocket: $=C^{-1}$)

Vi ser att $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, så

$$S = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Svar: $S = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

④ Lös ekvation

$$\begin{vmatrix}1&1&1&x\\1&1&x&1\\1&x&1&1\\x&1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

Finns olika sätt att göra, t ex

$$\begin{vmatrix}1&1&1&x\\1&1&x&1\\1&x&1&1\\x&1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-1\\ \\ \\ -1\end{matrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&x\\0&0&x-1&1-x\\1-x&x-1&0&0\\x&1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ -1\end{matrix} =$$

$$= \begin{array}{c}\begin{vmatrix}1-x&0&0&x-1\\0&0&x-1&1-x\\1-x&x-1&0&0\\x&1&1&1\end{vmatrix}\\ \begin{matrix}\quad&1&1&\quad\end{matrix}\end{array} =$$

tre nollor!

$$= \begin{vmatrix}1-x&0&0&x-1\\0&0&x-1&0\\0&x-1&0&0\\x+1&1&1&2\end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l}\text{kofaktorutveckling}\\ \text{längs rad \# 2}\end{array}\right]$$

två nollor!

$$= (-1)^{2+3}\cdot(x-1)\cdot\begin{vmatrix}1-x&0&x-1\\0&x-1&0\\x+1&1&2\end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot(x-1)\cdot\big(2(1-x)-(x-1)(x+1)\big) =$$

$$= -(x-1)^2(x-1)(-2-x-1)$$
$$= -(x-1)^3(x+3).$$

Så ekvationen förenklas till

$$-(x-1)^3(x+3)=0 \iff (x-1)^3(x+3)=0.$$

Lösningarna är $x=1$ och $x=-3$

<u>Svar</u>: $x=1$ och $x=-3$.