UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2016-03-22

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt P, Q, R vara utsagor. Konstruera sanningsvärdestabellen för utsagan (3 poäng)
$$P \Rightarrow (Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg R))$$
   (b) Låt A, B vara delmängder av ett universum X. Rita Venndiagram för mängderna $(A \cap B)^c$ och $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (2 poäng)

2. Visa att den Diofantiska ekvationen $420x - 441y = 63$ har lösningar. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)

3. (a) Låt a vara ett heltal sådant att $5 \mid (a+2)$. Visa att $5 \,\big|\, (a^2+1)$. (2 poäng)
   (b) Beräkna $(22101)_3 + (1221)_3$ och ge svaret i bas 3. (3 poäng)

4. Låt relationen R vara definierad på heltalen genom $xRy \Leftrightarrow 4 \mid (2x - 2y)$.
   (a) Visa att R är en ekvivalensrelation. (3 poäng)
   (b) Bestäm dess ekvivalensklasser. (1 poäng)
   (c) Relationen R är ekvivalent med en välkänd ekvivalensrelation som har förekommit i kursen. Vilken? (1 poäng)

5. Låt r vara ett reellt tal som uppfyller $r \neq 1$. Visa med induktion att
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$
för alla naturliga tal n. (5 poäng)

6. Visa att funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ som ges av
$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{om } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{om } n < 0. \end{cases}$$

Var god vänd!

är en bijektion. (5 poäng)

7. Polynomet $3x^4-x^3+3x^2+29x-10$ har minst ett rationellt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

8. Bestäm ett reellt tal a så att ekvationen $x^3 + ax - 6 = 0$ har en ickereell rot med realdel -1. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)