UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl och Seidon Alsaody
018–471 32 81
073–990 96 58

Prov i matematik
KandData, KandMat, IT
Lärare, Fristående
Algebra I
24/8–2012

Skrivtid 5 timmar. Hjälpmedel: skrivdon. Provet består av 8 uppgifter, om vardera 5 poäng, totalt 40 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. ***Inga bonuspoäng räknas.*** *Skriv tydligt,* ***motivera väl*** *och påbörja varje uppgift på nytt blad. Lycka till!*

1. (a) Visa, med sanningsvärdestabell, att $\neg(P \wedge Q)$ inte är ekvivalent med $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ för allmänna utsagor P och Q.

(b) Visa, med sanningsvärdestabell, att $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ samt att $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$ för alla utsagor P och Q.

(c) Illustrera, med Venn-diagram, att $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$ samt att $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$ för alla mängder A och B. (* betecknar komplementet av en mängd.)

Dessa påståenden kallas för *de Morgans lagar*.

2. Relationen $\cong$ på $\mathbb{R}$ definieras enligt $x \cong y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

(a) Visa att $\cong$ är en ekvivalensrelation.

(b) Ange två reella tal som inte ligger i samma ekvivalensklass.

(c) Bestäm den ekvivalensklass som innehåller talet 3.

3. Lille Arvid (som är fyra år och bara kan räkna till tjugo) är stolt ägare av en påse med stenkulor. När han delar upp kulorna i 8 högar med lika många kulor i varje hög får han 7 kulor över. När han sedan istället delar upp sina kulor i 15 högar med lika många kulor i varje hög blir det 6 kulor över. Hur många stenkulor har han, givet att det finns högst 200 kulor i påsen?

4. Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ges av

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ 1 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Avgör, med bevis eller motexempel, om funktionen är injektiv resp. surjektiv.

5. Skriv talet $t = (432)_{sju}$ i basen 10. Vilken entalssiffra har t^8 i basen 11?

V. g. vänd!

6. Lös ekvationerna $2x^3 + 3x^2 - 10x = 15$ och $2x^4 - x^3 - 8x^2 + 5x = 10$ fullständigt. *Ledning: de har minst en gemensam rot.*

7. Definiera två följder $(x_n)_1^\infty$ och $(y_n)_1^\infty$ genom att sätta

$$\begin{aligned} x_1 &= 9, \quad y_1 = 4 \\ x_{n+1} &= x_1 x_n + 5 y_1 y_n \\ y_{n+1} &= x_1 y_n + y_1 x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Visa med induktion att $x = x_n$, $y = y_n$ är en heltalslösning till ekvationen

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

för varje $n \geq 1$.

8. Visa att primtalsfaktoriseringen av ett godtyckligt heltal på formen $4n + 3$ måste innehålla minst ett primtal p av samma form (dvs. som är kongruent med 3 modulo 4). *Ledning: Motsägelsebevis — vad kan primtalen annars vara kongruenta med? Vad händer då?*