UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend
Thomas Kragh
Sebastian Pöder

Prov i matematik
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand, IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2019-06-11

Skrivtid: 8:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs godkänt i varje moment samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. Minst tre poäng på uppgifterna 1-4 ger godkänt på motsvarande moment.

1. *Moment Linjära ekvationssystem.*

(a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ -1x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}.$$

(b) Bestäm rangen av systems koefficient- och totalmatris.

2. *Moment Matrisräkning.* Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna determinanten av matrisen A.

(b) Lös matrisekvationen

$$A(X^T + B) = B.$$

3. *Moment Vektorer.* Låt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vara fyra vektorer i $\mathbb{R}^3$.

(a) Beräkna $\vec{v} \times \vec{w}$.

(b) Beräkna $\vec{u} \cdot \vec{x}$.

(c) Avgör om u, v, w är linjärt oberoende.

(d) Avgör om v, w, x spänner upp $\mathbb{R}^3$.

4. *Moment Geometri.* Bestäm speglingen av punkten $P : (7, 3, 1)$ i planet

$$E : x - y + z = 2.$$

Bestäm även den punkt på E som är närmast P.

5. Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1, 1) &= (1, 2) \\ T(1, 2, 1, 1) &= (3, 2) \\ T(1, 1, 2, 1) &= (4, 3) \\ T(1, 1, 1, 2) &= (5, 4). \end{aligned}$$

Hitta standard matrisen $[T]$ för T.

6. Hitta alla reella tal x som löser ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ \pi & x & x & x \\ \pi & x & \pi & \pi \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Låt l vara linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}.$$

Låt P vara en punkt i rummet $\mathbb{R}^3$, och låt d vara avståndet mellan P och l. Visa att

$$d = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

8. Låt A, B och C vara kvadratiska matriser som uppfyller

$$AB + AB^2 + ABC = I.$$

Visa att B är inverterbar.

Lycka till!