Uppsala Universitet	**Algebra I, 5hp**
Matematiska institutionen	2014-01-07 kl. 08.00–13.00
Martin Blomgren	Tentamen i kurs `1MA004`

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Föreliggande tentamen utgörs av åtta problem; varje problem ger högst fem poäng. Tabellen nedan ger relationen mellan totalpoäng och betyg. Ange eventuellt godkänt resultat på inlämningsuppgifterna i kommentarsfältet hörande till uppgift 1, vilken då tillgodoräknas med full poäng. Notera att uppgift 1 skall i så fall **ej** *lösas.*

$\sum$	0-17	18-24	25-31	32-40
Betyg	U	3	4	5

Nedan är grova lösningsförslag.

1. Låt p, q, r vara utsagor. Är "$p \to q \to r$" otvetydigt? D.v.s. gäller det att

$$((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))?$$

Lösning: Tvetydigt, vilket man kan se för t.ex. $p = q = r =$ falskt. (Tolkningen av satsen till vänster om ekvivalenspilen är då falsk, och tolkningen av satsen till höger är då sann.)

2. Bestäm det minsta icke-negativa heltal r sådant att

$$3^{43} + 17 \equiv r \pmod{16}.$$

Lösning: Eftersom $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{16}$, så $3^{43} + 17 \equiv 3^{40} \cdot 3^3 + 17 \equiv 1 \cdot 27 + 17 \equiv 27 + 1 \equiv 28 \equiv 12 \pmod{16}$.

Svar: $r = 12$.

3. Visa med induktion att

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

för $n \geq 2$.

Lösning: Om $n = 2$, så gäller påståendet, ty $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$. Antag nu att att påståendet är sant för något $n \geq 2$. Då följer $\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+1}{2n}(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{(n+1)(n^2+2n)}{2n(n+1)^2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2n(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ och därmed är påståendet med induktion bevisat.

4. Lös fullständigt den diofantiska ekvationen

$$31x + 17y = 144.$$

Bestäm även de lösningar (x, y) sådana att $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

Lösning: Detta problem löses lämpligen med Euklides' algoritm. En variant på lösning är: Vi ser att $31 + 17 = 48$ och 48 är en delare i 144. Nu är $144 = 3 \cdot 48$ så

$x = 3$ och $y = 3$ är en partikulärlösning till ekvationen. Alltså ges samtliga lösningar av $x = 3 + 17k$ och $y = 3 - 31k$ där $k \in \mathbb{Z}$, ty $\mathrm{SGD}(17, 31) = 1$ eftersom 17 och 31 är primtal. Nu ser man att den enda lösningen för vilka båda $x \geq 0$ och $y \geq 0$ är precis $(x, y) = (3, 3)$. (Med direkt tillämpning av Euklides' algoritm får man att $x = -864 + 17k$ och $y = 1584 - 31k$ där $k \in \mathbb{Z}$ och $(x, y) = (3, 3)$ för $k = 51$. Genom variabelbytet $k \mapsto k + 51$ får man dock tillbaka $x = 3 + 17k, y = 3 - 31k$)

5. Låt $f(X) = X^5 + 5X^3 + X^2 + 6X + 3$ och $g(X) = X^5 + X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3$ vara polynom i X. Bestäm $\mathrm{SGD}(f(X), g(X))$.

Lösning: Problemet löses lämpligen med Euklides' algoritm för polynom; för omväxlings skull ges emellertid följande lösning. Låt $d(X)$ vara den största gemensamma moniska delaren. Vi har att $g(X) - f(X) = X^5 + X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3 - (X^5 + 5X^3 + X^2 + 6X + 3) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 6X$. Faktorisering ger $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 6X = X(X^3 - 2X^2 + 3X - 6)$ och här kan man observera att $(X-2)(X^2+3) = (X^3 - 2X^2 + 3X - 6)$ d.v.s. $g(X) - f(X) = X(X-2)(X^2+3)$ och därmed måste $d(X)|X(X-2)(X^2+3)$. Det gäller att $X \nmid d(X)$ ty $f(0) \neq 0$ och $X - 2 \nmid d(X)$ ty $f(2) \neq 0$. Alltså måste $d(X) = X^2 + 3$ eller $d(X) = 1$. Polynomdivision visar nu att $X^2 + 3|f(X)$ och $X^2 + 3|g(X)$ så $d(X) = X^2 + 3$. (Svar som är associerade till $X^2 + 3$ är naturligtvis inte felaktiga!)

6. Låt A vara mängden som utgörs av de tal i intervallet $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, vilkas decimalbråksutveckling slutar med en oändlig svit av 3:or. Ett tal $x \in A$ är

$$x = 0,008971489123633333333333333333333\ldots$$

Visa att A är uppräknelig.

Lösning: Talen i A är rationella, eftersom de har en periodisk decimalbråksutveckling. Eftersom de rationella talen är uppräkneliga, så måste även A vara uppräknelig, ty delmängder av uppräkneliga mängder är uppräkneliga.

7. Låt R vara relationen på $\mathbb{R}$ sådan att för $x, y \in \mathbb{R}$ så xRy om, och endast om $x^2 - y^2 = \sqrt{2}n$ för något $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

(b) Finns det ett $x \in \mathbb{R}$ sådant att $xR(1 + x)$?

Lösning: a) Relationen är reflexiv, ty $x^2 - x^2 = \sqrt{2} \cdot 0$ och $0 \in \mathbb{Z}$. Vidare är relationen symmetrisk, ty om xRy, så finns ett $n \in \mathbb{Z}$ sådant att $x^2 - y^2 = \sqrt{2}n$ och därmed $y^2 - x^2 = \sqrt{2}(-n)$ varför yRx eftersom $-n \in \mathbb{Z}$. Om xRy och yRz, så finns $n, m \in \mathbb{Z}$ sådana att $x^2 - y^2 = \sqrt{2}n$ och $y^2 - z^2 = \sqrt{2}m$ varur följer att $x^2 - z^2 = \sqrt{2}(n + m)$, och eftersom $n + m \in \mathbb{Z}$ så följer xRz och relationen är alltså transitiv.
b) Ja, t.ex. $x = -\frac{1}{2}$. Vi har att $(-\frac{1}{2})^2 - (1 - \frac{1}{2})^2 = 0 (= \sqrt{2} \cdot 0)$.

8. Låt a och b vara heltal sådana att $a \equiv 2 \pmod 5$ och $b \equiv 1 \pmod 5$ samt låt $f(X) = X^3 + aX + b$. Visa att polynomet $f(X)$ är irreducibelt över $\mathbb{Z}$.

Lösning: För att visa att polynomet är irreducibelt över $\mathbb{Z}$, så räcker det att att utesluta att ekvationen $f(X) = 0$ har en heltalsrot, ty heltalspolynomet i fråga har grad 3 och är moniskt. Antag att c är en heltalsrot. Då är $f(c) = 0$, och speciellt måste $f(c) \equiv 0 \pmod 5$. Eftersom c är ett heltal, så måste $c \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 5$. Insättning ger emellertid att $f(0) \equiv 1$, $f(\pm 1) \equiv \pm 1 + \pm 2 + 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ och $f(\pm 2) \equiv \pm 8 + \pm 4 + 1 \equiv \pm 3 + \pm 4 + 1 \not\equiv 0 \pmod 5$. Motsägelse.