Lösningar till tentan i EaT, 2015-03-13

1a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x \cdot \ln x}{\ln(x^3) + \sqrt{x^4 + x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x \cdot \ln x}{3 \cdot \ln x + x^2 \cdot \sqrt{1 + 1/x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{\ln x}{x}}{\frac{3 \cdot \ln x}{x^2} + \sqrt{1 + 1/x^3}} = \frac{3+0}{0+1} = 3.$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2x}{e^{2x} - 1}}_{\to 1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(standardgränsvärden, alternativt kan l'Hospitals regel användas)

2| $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

Linjen $y = 1$ är horisontell asymptot ty

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$$

Linjerna $x = -3$ och $x = 3$ är vertikala asymptoter ty

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty.$$

(sned asymptot saknas)

Lokala max & min antas i stationära punkter.

Vi har $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-9)^2}$.

Så $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Teckenschema:

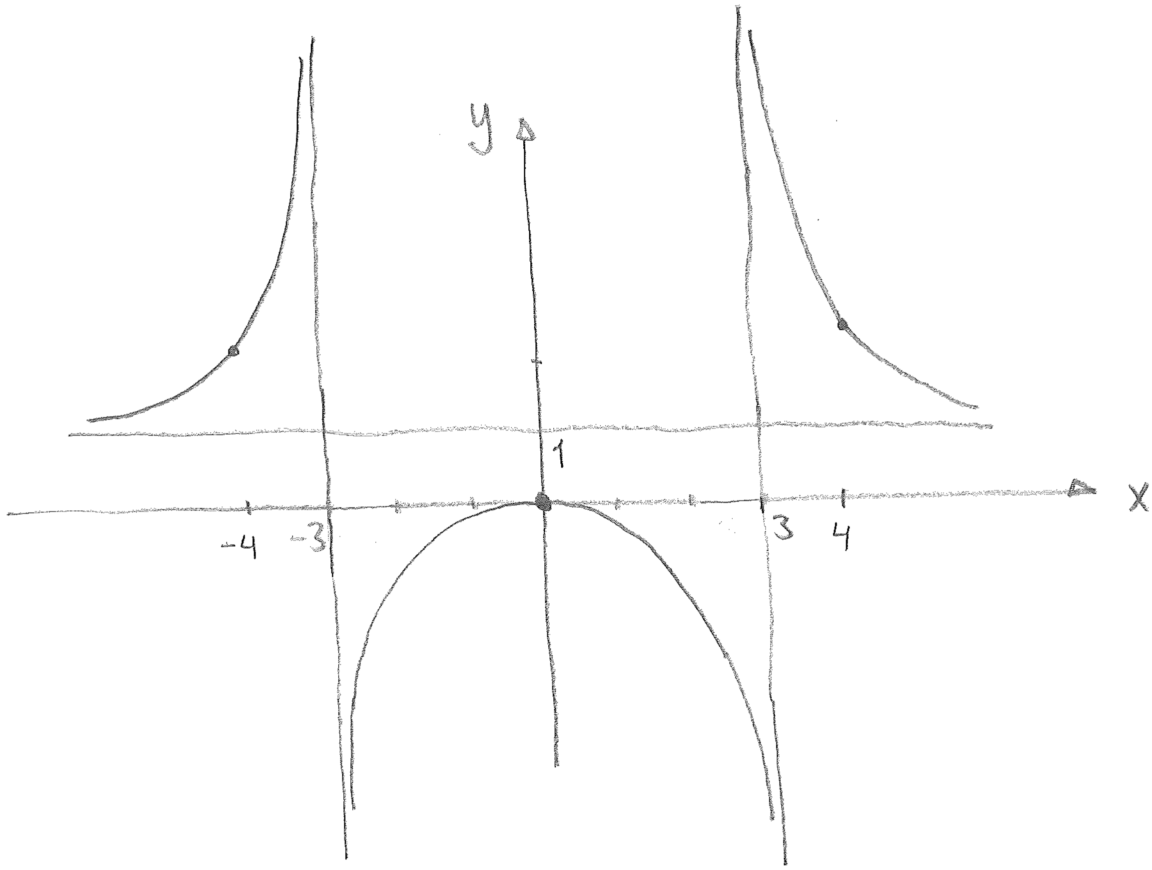
		-3		0		3	
$-18x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x^2-9)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	ξ	$+$	0	$-$	ξ	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	ξ	$\nearrow$	max	$\searrow$	ξ	$\searrow$

f har maxpunkt $x=0$ (och $f(0)=0$).

f är strängt växande på $(-\infty,-3)$ och $(-3,0]$.

f är strängt avtagande på $[0,3)$ och $(3,\infty)$.

Graf till f:



$$\left(f(-4) = \frac{16}{16-9} = \frac{16}{7} = f(4)\right)$$

3 Finn tangentlinjen till

$$\arcsin(y) + x^2 \cdot y + x = 1$$

i punkten $(1,0)$.

Lösning:

Vi deriverar implicit:

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + 2xy + x^2 \cdot y' + 1 = 0.$$

Sätt in $x=1$, $y(1)=0$, $y'(1)=k$.

$$\frac{k}{1} + 0 + 1 \cdot k + 1 = 0 \iff k = -1/2.$$

Svar: Sökt tangent har ekvation

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x-1).$$

4]
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{om} \quad x > 0 \\ kx + m & \text{om} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

a) Vi har $f(0) = m$,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (kx + m) = m \quad \text{och}$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(standardgränsvärde eller använd l'Hospital).

f är kontinuerlig vid $x = 0$ om

$$f(0) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x),$$

dvs om $m = 1$.

b) Låt nu $m = 1$.

Vi har

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{k \cdot h + 1 - 1}{h} = k$$

och $$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \frac{0}{0}\text{-typ} \\ \text{l'Hospital} \end{matrix} \right\} = \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} = \lim_{h \to 0+} \frac{-1}{2 \cdot (1+h)} = -1/2.$$

f är deriverbar vid $x = 0$ om $f'_-(0) = f'_+(0)$,

dvs om $k = -1/2$.

5

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$D_f = (0, \infty)$

Vi undersöker var f är strängt monoton.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

	0		e	
$1-\ln x$		$+$	0	$-$
x^2		$+$		$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Så f är strängt växande och därmed inverterbar

på $(0, e]$.

Vi har $f(1) = 0$, så $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1^2}{1-\ln 1} = 1.$

6 a) $P_n(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$

$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n.$

b) $g(x) = \ln(x+e^x)$, $g(0) = \ln 1 = 0.$

$g'(x) = \frac{1+e^x}{x+e^x}$, $g'(0) = \frac{1+1}{0+1} = 2.$

$g''(x) = \frac{e^x\cdot(x+e^x) - (1+e^x)^2}{(x+e^x)^2}$,

$g''(0) = \frac{1\cdot 1 - (1+1)^2}{1^2} = -3.$

Sökt Taylorpolynom:

$P_2(x) = g(0) + g'(0)\cdot x + \frac{g''(0)}{2!}\cdot x^2 =$

$= 2x - \frac{3x^2}{2}.$

7 Vi ska visa att

$$\arctan(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0. \quad \circledast$$

Låt $f(x) = \sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})$.

Vi har $f(0) = 0$ och

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{\sqrt{x}}{2 \cdot (1+x)}.$$

Klart att $f'(x) > 0$ om $x > 0$,

så f är (strängt) växande på $[0, \infty)$.

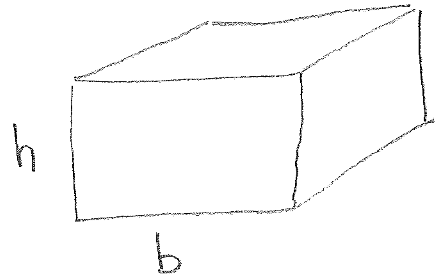
Därmed har vi visat att

$$0 = f(0) \leq f(x) \quad \text{för alla} \quad x \geq 0$$

vilket medför att $\circledast$ gäller.

8

Beteckningar enl. fig.



Vi ska finna max för

lådans volym $V = h \cdot b^2$.

Vi har $2h + 2b = 200 \iff b = 10 - h$,

Så $V(h) = h \cdot (10 - h)^2$.

Funktionen ska maximeras på intervallet $0 \leq h \leq 10$.

V saknar singulär punkt och är kontinuerlig på $[0, 10]$,

så max antas antingen i ändpunkt:

$$V(0) = 0, \quad V(10) = 0,$$

eller i stationär punkt:

$$V'(h) = (10-h)^2 - 2h \cdot (10-h) = (10-h) \cdot (10 - h - 2h) =$$
$$= (10-h)(10-3h).$$

Så $V'(h) = 0 \iff h = 0$ eller $h = \frac{10}{3}$.

Vi har $V(10/3) = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{4000}{27}$, som alltså är

maximal volym.