UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH

IT, STS, W
MAKAND
LÄRARE

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2016–06–07

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Delrummet $U \subset \mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (0,1,2,3), u_2 = (1,1,1,0)$, och $u_3 = (3,2,1,-3)$. Ange U:s dimension, finn en bas i U, och utvidga den till en bas i $\mathbb{R}^4$.

2. Den linjära operatorn f på $\mathbb{E}^3$ ges geometriskt som rotation med vinkel π kring axeln $L = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en on-bas (b_1, b_2, b_3) i $\mathbb{E}^3$ som består av idel egenvektorer till f:s matris A.

(b) Bestäm f:s matris A.

3. Den linjära operatorn $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x & - & 2y & - & 2z \\ -2x & + & 5y & - & z \\ -2x & - & y & + & 5z \end{pmatrix}$ på $\mathbb{E}^3$ har två egenrum, varav ett är en linje L och ett är ett plan P. Finn en riktningsvektor ℓ för L, finn P:s ekvation, och tolka operatorn geometriskt. (Tips om den inledande matristransformationen: addera en halv gånger andra raden och en halv gånger tredje raden till första raden.)

4. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Polynomföljden q_0, q_1, q_2, given genom

$$q_0(x) = 1,\ q_1(x) = \sqrt{3}(2x-1),\ q_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

är ortonormal. Beräkna det minsta avståndet $d(w, \mathcal{P}_1)$ mellan polynomet $w(x) = 1 + x + x^2$ och delrummet $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ som består av alla polynom av grad högst 1.

VAR GOD VÄND!

5. Vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ utrustas med den inre produkten

$$\langle A, B\rangle = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}.$$

Beräkna avståndet $d(A, B)$ mellan matriserna $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Avgör även om vinkeln α mellan A och B är spetsig, rät, eller trubbig.

6. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3,\ p \mapsto F(p)$ ges av $(F(p))(x) = (1 + x)p(1 + x)$.

(a) Ange F:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{P}_3$.

(b) Finn en bas i F:s bild.

(c) Utred huruvida F är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

7. Ytan Y består av alla punkter (x, y, z) i $\mathbb{E}^3$ som uppfyller

$$36x^2 + \frac{13}{2}y^2 + \frac{13}{2}z^2 + 5yz = 36.$$

Bestäm ytans typ, ytans kortaste avstånd till origo, och de punkter på ytan där det kortaste avståndet antas. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = \phantom{-y_1 - {}} 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = -y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Finn en 3×3-matris X så att $X^{11} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar 2016 - 06 - 07

1. $\mathcal{U} = \mathcal{R}(A)$ för $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

visar att

$\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{rang}(A) = 2$,

$(T_{1\cdot}, T_{2\cdot}) = ((1,0,-1,-3), (0,1,2,3))$ är en bas i $\mathcal{U}$ (ex. vis), och

$(T_{1\cdot}, T_{2\cdot}, e_3, e_4)$ är en bas i $\mathbb{R}^4$ (ex. vis), där $e_3 = (0,0,1,0)$ och $e_4 = (0,0,0,1)$.

2. (a) $(a_1, a_2) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ är en bas i $L^{\perp}$, och $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en bas i L.

Alltså är $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egenbas till A i $\mathbb{E}^3$, med $Aa_1 = -a_1$, $Aa_2 = -a_2$, $Aa_3 = a_3$.

Vidare blir $\underline{b} = GS(\underline{a})$ en on-egenbas till A i $\mathbb{E}^3$, med $Ab_1 = -b_1$, $Ab_2 = -b_2$, $Ab_3 = b_3$.

Uträkning ger $b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \dfrac{a_2 - (a_2 \cdot b_1) b_1}{\| \text{dito} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \dfrac{a_3}{\|a_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Med $S = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ gäller $S^T A S = D$, alltså

$$A = SDS^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vi skriver $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Då blir $f(x) = Ax$, där $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

är f:s matris i standardbasen. A:s egenvärden är lösningarna till determinantekvationen

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \lambda - \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \lambda - \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{2}{6} & \lambda - \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \lambda - \frac{5}{6} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} & \lambda - \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \lambda - \frac{5}{6} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \lambda - 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1.$$

Alltså har A två egenrum $E(0)$ och $E(1)$. Eftersom A är diagonaliserbar (enligt förutsättning), så gäller att

$$\begin{cases} \dim E(0) = \text{multiplicitet hos } \lambda = 1 & \Rightarrow \quad E(0) = L \\ \dim E(1) = \text{multiplicitet hos } \lambda - 1 = 2 & \Rightarrow \quad E(1) = P \end{cases}$$

<u>Detta innebär att</u> f <u>är projektionen på P</u>, <u>där projektionens riktning är parallellt med L</u>.

$L = E(0) = N(-A) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ visar att $l = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>är riktningsvektor för L</u>.

$$-A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$P = E(1) = N(I - A) = N(2\ 1\ 1)$ visar att $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ <u>är P:s ekvation</u>.

$$I - A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi konstaterar även att $L \perp P$, <u>dvs</u> f <u>är den ortogonala projektionen på</u> $P: 2x + y + z = 0$.

4. Då q_0, q_1, q_2 är en on-bas i $\mathcal{P}_2$ och $w \in \mathcal{P}_2$, så kan vi skriva

$$w = \langle w, q_0\rangle q_0 + \langle w, q_1\rangle q_1 + \langle w, q_2\rangle q_2 ,$$

där $u = \langle w, q_0\rangle q_0 + \langle w, q_1\rangle q_1 \in \mathcal{P}_1$ och $v = \langle w, q_2\rangle q_2 \in \mathcal{P}_1^{\perp}$ visar att

$w = u + v$ är den ortogonala uppdelningen av w med avseende på $\mathcal{P}_1$.

Därmed blir $d(w, \mathcal{P}_1) = \|v\| = \|\langle w, q_2\rangle q_2\| = |\langle w, q_2\rangle| \|q_2\| = |\langle w, q_2\rangle|$.

Vidare är $\langle w, q_2\rangle = \underbrace{\langle 1+X, q_2\rangle}_{0} + \langle X^2, q_2\rangle = \langle X^2, q_2\rangle =$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 (6x^4 - 6x^3 + x^2)\,dx = \sqrt{5}\left(\frac{6}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \sqrt{5}\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{4} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{5}\,\frac{72 - 90 + 20}{60} = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$ <u>Alltså är</u> $\underline{d(w, \mathcal{P}_1) = \frac{\sqrt{5}}{30}}$.

5. $d(A,B)^2 = \|A - B\|^2 = \left\|\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -3 & 8\end{bmatrix}\right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix}-2 & -2\\ -3 & 8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2 & -2\\ -3 & 8\end{bmatrix}\right\rangle = 4+4+9+64 = 81$

$\Rightarrow d(A,B) = 9$.

$$\cos\alpha = \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{0+3+10-15}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{-2}{\|A\|\,\|B\|} < 0$$

$\Rightarrow$ <u>vinkeln</u> α <u>är trubbig</u>.

6. (a) $(F(1))(x) = (1+x)\,1\,(1+x) = 1+x \Rightarrow F(1) = 1+X$

$(F(X))(x) = (1+x)X(1+x) = (1+x)^2 \Rightarrow F(X) = 1+2X+X^2$

$(F(X^2))(x) = (1+x)X^2(1+x) = (1+x)^3 \Rightarrow F(X^2) = 1+3X+3X^2+X^3$

$$\Rightarrow A = [F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\operatorname{im} F = \operatorname{span}\underbrace{\big(F(1), F(X), F(X^2)\big)}_{b_0} \Rightarrow \big(F(1), F(X), F(X^2)\big) =$

$= \big(1+X,\ 1+2X+X^2,\ 1+3X+3X^2+X^3\big)$

<u>är en bas i</u> $\operatorname{im} F$, <u>ex. vis.</u>

(c) Enligt Dimensionssatsen är $\dim(\ker F) + \dim(\operatorname{im} F) = \dim(\mathcal{P}_2)$

$\Rightarrow \dim(\ker F) = \dim(\mathcal{P}_2) - \dim(\operatorname{im} F) \underset{(b)}{=} 3-3 = 0$

$\Rightarrow \ker F = \{0\}$

$\Rightarrow F$ <u>är injektiv</u>

$\dim(\mathcal{P}_2) < \dim(\mathcal{P}_3) \Rightarrow F$ <u>är ej surjektiv</u>, <u>alltså ej bijektiv</u>.

7. $Y:\ x^T A x = 36$ för $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-36 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \lambda-\frac{13}{2} \end{vmatrix} = (\lambda-36)\left(\left(\lambda-\tfrac{13}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2\right)$$

$= (\lambda-36)(\lambda-4)(\lambda-9)$ löses av

$\lambda_1 = 36,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 4$.

Om b_1, b_2, b_3 är normerade basvektorer i $E(\lambda_1), E(\lambda_2), E(\lambda_3)$, då gäller för alla $x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 \in \mathbb{E}^3$ att $x^T A x = 36y_1^2 + 9y_2^2 + 4y_3^2$. Därmed är

$$x \in Y \Leftrightarrow 36y_1^2 + 9y_2^2 + 4y_3^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{1^2} + \frac{y_2^2}{2^2} + \frac{y_3^2}{3^2} = 1 .$$

varav inses att Y är en <u>ellipsoid</u>, vars <u>kortaste avstånd till origo</u> $d(Y, 0) = 1$ <u>antas i punkterna</u>

$\pm b_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, då $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är normerad basvektor i $E(\lambda_1) = E(36)$.

8. $y' = Ay$ för $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Ekvationen $T^{-1}AT = D$ löses av $T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$, ex.vis.

Med substitutionen $y = Tz$ och $y' = Tz'$ gäller $y' = Ay$ omm $z' = Dz$, vars allmänna lösning är

$$\begin{cases} z_1 = c_1 e^{-x} \\ z_2 = c_2 e^{x} \\ z_3 = c_3 e^{4x} \end{cases}, \quad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Alltså har $y' = Ay$ den allmänna lösningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - 3z_2 \\ 4z_2 - z_3 \\ 2z_2 + z_3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar.</u> $$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{x} \\ y_2 = 4c_2 e^{x} - c_3 e^{4x} \\ y_3 = 2c_2 e^{x} + c_3 e^{4x} \end{cases}, \quad \text{\underline{där} } (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

8'. Med A, T, D som i lösningen till uppgift 8 gäller $T^{-1}AT = D$. En lösning X till ekvationen $X^{11} = A$ sökes. Med $(\alpha, \beta, \gamma) = (\sqrt[11]{-1}, \sqrt[11]{1}, \sqrt[11]{4}) = (-1, 1, \sqrt[11]{4})$ gäller att

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} \text{ löser } Y^{11} = \begin{bmatrix} \alpha^{11} & & \\ & \beta^{11} & \\ & & \gamma^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix} = D.$$

Detta medför att

$$A = TDT^{-1} = TY^{11}T^{-1} = (TYT^{-1})^{11}.$$

Alltså duger

$$X = TYT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta & 0 \\ 0 & 4\beta & -\gamma \\ 0 & 2\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha - 3\beta & 3\alpha - 3\beta \\ 0 & 4\beta + 2\gamma & 4\beta - 4\gamma \\ 0 & 2\beta - 2\gamma & 2\beta + 4\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 4+2\gamma & 4-4\gamma \\ 0 & 2-2\gamma & 2+4\gamma \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u>

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 4 + 2\sqrt[11]{4} & 4 - 4\sqrt[11]{4} \\ 0 & 2 - 2\sqrt[11]{4} & 2 + 4\sqrt[11]{4} \end{pmatrix}.$$