# Information 1TD403

**För betyg 3 krävs**: Att man klarar varje delmål för betyg 3 nedan.
**För betyg 4/5 krävs**: Att man klarar både betyg 3 och en uppgift för betyg 4/5

**Regler:**

- Hemtentamen skall genomföras enskilt, i likhet med en salstentamen. All kommunikation med andra personer eller omvärlden är otillåten.
- Det är otillåtet att använda Internet och att göra sökningar.
- Hjälpmedel: Det huvudsakliga hjälpmedlet är kursens formelsamling. Eftersom det är hemtentamen får du också använda kurslitteraturen och de anteckningar du har gjort under kursens gång.
- Tentamen videoövervakas i Zoom och du bör ha en webkamera påslagen under hela skrivtiden. Om du bryter mot videoövervakningen kommer inte din tentamen att rättas.

Länken till Zoom: **https://uu-se.zoom.us/j/69478548290**

**Lösningarna** skriver du in direkt här i Inspera förutom för betyg 4/5 uppgifterna. Här kan du använda ett ordbehandlingsprogram eller skriva för hand på papper och skanna in det som en pdf-fil som du sedan laddar upp i Inspera.

# Delmål 1, 1TD403

**Delmål 1**: *kunna skriva ett Matlab-program som gör en numerisk simulering av något fenomen, givet en matematisk modell av fenomenet*
För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

# 1 Lösa ODE med Matlab

Skriv ett program i Matlab för att med *ode45* lösa differentialekvationen $y''(t) - (y'(t))^2 = sin(t)$ för $0 \leq t \leq 1$ med begynnelsevillkor y(0)=1 och y'(0)=0.5.

**Skriv in ditt svar här**

Totalpoäng: 1

## 2 Monte-Carlo med Matlab

Skriv ett program i Matlab som med Monte-Carlo metoden beräknar värdet på integralen
$\int_0^4 \int_0^4 \int_0^4 x \cdot y \cdot z \cdot e^{-(x \cdot y \cdot z)^2} dx\, dy\, dz.$

**Skriv in ditt svar här**

Totalpoäng: 1

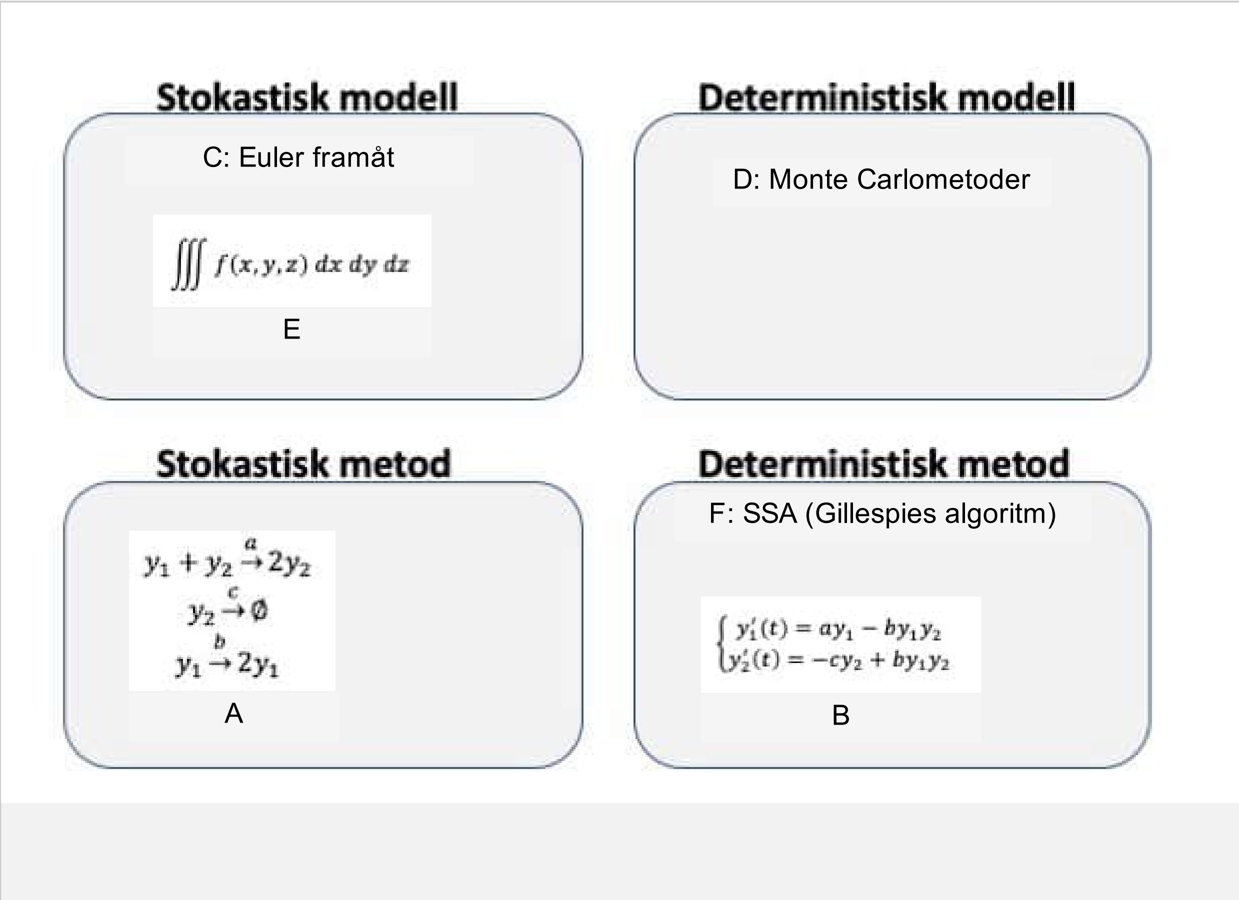
## i Delmål 2, 1TD403

**Delmål 2**: *känna till viktiga begrepp i anslutning till numerisk simulering*

För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

# 3 BV2-Begrepp-Stokastisk/deterministisk (SV)

Är rutorna (A-F) med text/formler exempel på stokastisk modell/metod respektive deterministisk modell/metod?
Tyvärr har de hamnat lite slumpmässigt (!) nedan. Dra och släpp rutorna på rätt plats. För godkänt måste samtliga vara rätt.




Totalpoäng: 1

# 4 Begrepp - Innebörd

När man ska lösa differentialekvationer numeriskt måste man ta hänsyn till om ekvationen är *styv.* Vad kännetecknar en *styv* ODE. Ett eller flera alternativ kan vara rätt, markera alla rätta alternativ.

**Välj ett eller flera alternativ:**

- ☐ Kräver litet tidssteg för stabilitet i explicita metoder
- ☐ Lambda är stort för motsvarande testekvation
- ☐ ODEn saknar analytisk lösning
- ☐ Implicita metoder är fördelaktiga
- ☐ Lösningen kan variera snabbt
- ☐ Noggrannheten är viktigare än stabiliteten och bestämmer steglängden
- ☐ Lösningen varier långsamt
- ☐ Kan ha kraftigt skilda skalor för olika lösningskomponenter
- ☐ Explicita metoder är fördelaktiga

---

Totalpoäng: 1

# i Delmål 3, 1TD403

**Delmål 3**: *kunna formulera och använda de olika algoritmer och numeriska metoder som ingår i kursen*

För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

# 5 Numerisk ODE

Man vill lösa följande differentialekvation $y'(x) = x \cdot y \cdot sin(x)$ med begynnelsevillkoret y(0) = 1 numeriskt. Metoden som vi har valt är Trapetsmetoden

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))/2$$

Genomför två steg med Trapetsmetoden och steglängden h = 0.2. Utför beräkningen och svara genom att välja ett av alternativen nedan (ett svar är rätt).

**Välj ett alternativ:**

- 1.0055501
- 1.0062331
- 1.0003330
- 1.0029915
- 1.0049926
- 1.0026595
- 1.0071891
- 1.0212158
- 1.0239279
- 1.0404232

Totalpoäng: 1

# 6 Monte Carlo - Tärning

När man spelar Yatzy med tärningar vill man gärna samla på så många sexor som möjligt. Sannolikheten *p(k)* att få *k* sexor i *n* kast är binomialfördelad. Med fem kast får vi då följande fördelning:

p(0)=0.4019
p(1)=0.4019
p(2)=0.1608
p(3)=0.0322
p(4)=0.0032
p(5)=0.0001

Antag nu att vi vill simulera fall ur denna fördelning och använder då likformigt fördelade slumptal i intervallet 0 till 1. Det slumptal som vi drar är

0.8345, 0.0211, 0.9734, 0.4672, 0.5236, 0.9602

Använd *ITS-algoritmen* för att bestämma vilka utfall dessa slumptal motsvarar.
**Välj ett alternativ:**

- 3, 0, 4, 1, 2, 4
- 3, 0, 4, 2, 2, 4
- 2, 0, 3, 1, 1, 2
- 3, 0, 5, 1, 2, 4
- 4, 0, 5, 2, 3, 5
- 2, 0, 4, 1, 1, 3

---

Totalpoäng: 1

# i Delmål 4, 1TD403

**Delmål 4**: *känna till egenskaper hos numeriska metoder och matematiska modeller samt kunna genomföra analys för att undersöka dessa egenskaper*
För att visa att du nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

# 7 Analys-MC

Antag att vi har beräknat integralen $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ med Monte-Carlometoden och $N = 10000$ slumptal. Som feluppskattning har vi också beräknat ett konfidensintervall av storleken $\varepsilon = 0.25$. Nu vill vi förbättra feluppskattningen och då analysera ungefär hur många slumptal det skulle krävas för det nya konfidensintervallet. Hur många slumptal krävs det ungefär för att förbättra noggrannheten med en faktor 10, dvs minska konfidensintervallets längd till $\varepsilon = 0.025$?

Beräkna det $N$ som krävs och ange här på heltalsform, N= .

Totalpoäng: 1

# 8 Analys-Steglängd ODE

Vi använder klassisk Runge-Kutta för att lösa en ODE. Med val av steglängd $h = 0.8$ har man uppskattat det globala diskretiseringsfelet till $10^{-3}$ (det som uppskattas här är det absoluta felet). Nu vill man förbättra noggrannheten och då analysera ungefär vilken motsvarande steglängd som krävs. Vilken steglängd krävs ungefär för att förbättra noggrannheten med en faktor 1000, dvs minska felet till $10^{-6}$?

Beräkna det $h$ som krävs och ange här med två decimaler, h= .

Totalpoäng: 1

# i Delmål 5, 1TD403

**Delmål 5**: *kunna använda kunskap om egenskaper för att värdera och argumentera för olika metoders och modellers lämplighet i anslutning till en given problemställning*

För att visa att du nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

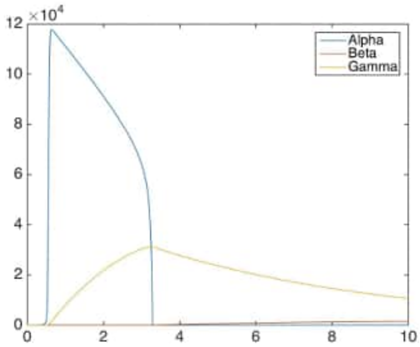
**OBS!** Med tanke på vad det här delmålet handlar om är det ***viktigt att du verkligen åstadkommer en tydlig argumentation, som övertygar läsaren om att det alternativ du förespråkar skulle vara lämpligast***.

# 9 Argumentation

Antag att du ska lösa ett system av differentialekvationer som beskriver reaktionerna i en kemisk lösning. Ekvationerna och lösningen illustreras i bilden nedan. Argumentera och förklara vilken typ av ODE-lösare som är lämplig för problemet. Du måste ha en tydlig motivering varför den ena typen är att föredra över den andra och dina argument ska använda begrepp och teori från kursen.

Kemisk reaktion:

$$\begin{cases} \alpha'(t)=s(\beta(t)-\alpha(t)\cdot\beta(t)+\alpha(t)-q\cdot\alpha(t)^2) \\ \beta'(t)=s^{-1}(-\beta(t)-\alpha(t)\cdot\beta(t)+\gamma(t)) \\ \gamma'(t)=w(\alpha(t)-\gamma(t)) \end{cases}$$

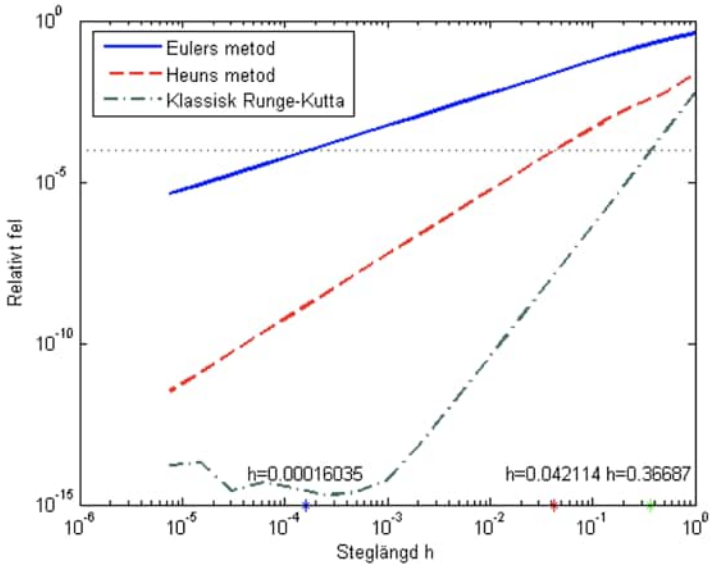



**Skriv in ditt svar här**

Totalpoäng: 1

# 10 Argumentation

Figuren nedan visar hur det relativa felet beror av steglängden för tre olika metoder. Antag att det i problemet som man vill lösa ställs krav på att lösningen ska komma under en given feltolerans, tex att relativa felet<$10^{-4}$. Argumentera och förklara vilken av metoderna man då ska välja.




**Skriv in ditt svar här**

Totalpoäng: 1

# Högre betyg, 1TD403

Var och en av de följande två uppgifterna har en del för betyg 4 och en annan del för betyg 5. Det räcker med godkänd lösning på en av uppgifterna för att få motsvarande betyg. Du behöver alltså inte göra båda uppgifterna.

# 11 Högre betyg

**Bungee Jump**

Ett Bungee jump kan beskrivas av en ODE utifrån Newtons andra lag, F=ma. Krafterna som verkar på hopparen är tyngdacceleration, luftmotståndet och repets dragningskraft. I fasen där hopparen faller fritt har vi ingen repkraft och ekvationen blir:

$mx''(t) = mg - sign(x'(t)) \cdot C_v \cdot x'(t)^2$ (Ekvation 1)

När repet börjar sträckas får vi in även repets dragningskraft och ekvationen blir:

$mx''(t) = mg - sign(x'(t)) \cdot C_v \cdot x'(t)^2 - k \cdot (x(t) - L)$ då x>L (Ekvation 2)

**För betyg 4:** Skissa upp en algoritm/kod för att lösa ekvationerna med Eulers metod (explicit Euler). Algoritmen skriver du i Matlabs editor eller i en annan textbehandlare, dvs det får inte vara handskrivet.

**För betyg 5:** Härled också ett teoretiskt uttryck stabilitetsgränsen för Eulers metod tillämpad på ekvation (1), antag att x'(t)>0. Analysen kan du göra för hand och skanna eller fota.

Sätt ihop din lösning med algoritm och analys till en PDF-fil och ladda upp den nedan.

**Ladda upp din fil här som en PDF. Maximum en fil.**

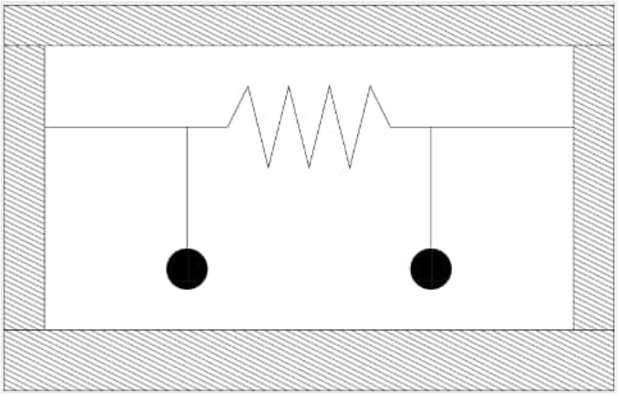
Följande filtyper är tillåtna: **.pdf** Maximal filstorlek är **1 GB**

Välj fil att ladda upp

Totalpoäng: 1

# 12 Högre betyg

Differentialekvationer i riktiga tillämpningar innehåller ofta ett antal parametrar. Värdena på parametrarna kan vara svåra att bestämma exakt och kan vara störda av tex mätfel. Ett sådant exempel är väderprognoser där insamlingen av väderdata kan innehålla små fel av olika slag som är slumpmässigt fördelade. För att uppskatta säkerheten i en väderprognos lägger man då till små slumpmässiga störningar till parametrarna och beräknar prognosen upprepade gånger. Man gör s.k. *ensemble prognoser* och tittar på spridningen av dessa. Vi ska i den här uppgiften göra *ensemble prognoser* för ett modellproblem. Som exempel kan vi betrakta följande tillämpning. Här har vi två pendlar med samma massa och samma längd som är sammankopplade med en fjäder (se Figur 1).



Figur 1: Dubbelpendel kopplad med en fjäder.

Rörelseekvationerna för de två pendlarna kan beskrivas med differentialekvationerna
$\theta_1'' + sin(\theta_1) + \alpha(\theta_1 - \theta_2) = 0\theta_2'' + sin(\theta_2) - \alpha(\theta_1 - \theta_2) = 0$
Här motsvarar $\theta_1$och $\theta_2$respektive vinkel för pendlarna och $\alpha$ en konstant som är beroende av längden och massan på pendeln samt av fjäderkonstanten hos fjädern mellan pendlarna. Parametern $\alpha$ inte är känd exakt och likaså har vi inte heller exakta värden på vinklarna $\theta_1$och $\theta_2$ vid start. Din uppgift blir nu att lösa rörelseekvationerna för pendlarna med upprepade störningar i parametrarna $\alpha$, $\theta_1(0)$ och $\theta_2(0)$. Du ska sedan beräkna väntevärde och standardavvikelse för $\theta_1(T)$ vid en sluttid T=10. Sätt också upp 95% konfidensintervall för $\theta_1(T)$ . För att illustrera fördelningen av $\theta_1(T)$ rita upp ett histogram. Du kan också rita upp de olika lösningarna över alla t från t=0 till t=T i en figur för att få en uppfattning om *prognosens säkerhet*.

Antag att systemet startar från vila och använd följande variation på parametrarna:
$\alpha \in N(10, 0.1)$ - Normalfördelat med väntevärde 10 och standardavvikelse 0.1
$\theta_1(0) \in N(\pi/10, \pi/100)$
$\theta_2(0) \in N(\pi/10, \pi/100)$

Lös uppgiften i Matlab med inbyggda lösare och ladda upp ditt Matlab-program nedan. Du kan lägga både skript och Matlabfunktioner i samma fil om du skriver funktionerna längst ner i filen och avslutar dem med ett end. Alternativt, om du inte har tillgång till Matlab kan du skissa upp programmet och algoritmerna i en vanlig textfil och ladda upp denna. För betyg 4 räcker det med en algoritmbeskrivning men för betyg 5 bör det vara ett detaljerat och körbart program med motivering till val av metoder, tex varför du väljer en viss ODE-lösare.

Till sist: Vad är din slutsats, är prognosen säker?

**Ladda upp din fil här. Maximum en fil.**

Alla filtyper är tillåtna. Maximal filstorlek är**1 GB**

Välj fil att ladda upp

Totalpoäng: 1