UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
V. Crispin Quinonez

Kortfattade lösningar till tentamen
LINJÄR ALGEBRA II
2018-08-29

1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn en bas i nollrummet till A.

(b) Finn en bas i radrummet till A.

(c) Finn en bas i kolonnrummet till A bestående av kolonner ur A.

Svar. (a) Gausseliminering på raderna i $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger t.ex.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

vilket tolkas som $\mathbf{x}^t = (-2r + s - t, -s, r, s, t) =$
$= r(-2, 0, 1, 0, 0) + s(1, -1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 0, 1)$,
där de 3 vektorernas transponat ger en bas.

(b) De två nollskilda radvektorererna i den Gausseliminerade matrisen i (a).

(c) Kolumnerna på platserna med de ledande ettorna i Gausseliminerade matrisen ger: $(1, 1, 3)^t$ och $(1, 2, 4)^t$. Alternativt, om k_i betecknar kolumn i: $k_2 = k_1 + k_4,\ k_3 = 2k_1,\ k_5 = k_1$ så $\{k_1, k_4\}$ utgör också en bas.

2. (a) Ange dimensionen för vektorrummet $M_2(\mathbb{R})$ bestående av alla 2×2-matriser. Endast svar räcker.

(b) Låt delrummet $U \subset M_2(\mathbb{R})$ bestå av alla 2×2-matriser sådana att summan av diagonalelementen är lika med noll. Med andra ord:

$$U = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \}$$

Ange U:s dimension, finn en bas i U och utvidga denna bas till en bas för hela $M_2(\mathbb{R})$.

Svar. (a) 4. (b) a, b, c kan väljas fritt, medan $d = -a$, alltså är $\dim(U) = 3$. En bas är $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ som kan utvidgas med t.ex. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Betrakta vektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^4$.

(a) Är vektorerna v_1, v_2, v_3 linjärt oberoende eller inte?

(b) Avgör om vektorn $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ligger i $span\{v_1, v_2, v_3\}$ eller inte.

Svar. (a) Ekvationen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0}$ ger ekvationssystemet $A_{4\times 3}\lambda = \mathbf{0}$ som bara har triviala lösningen, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

(b) Gausseliminering på ekvationssystemet $A_{4\times 3}\mathbf{x} = v$ ger t.ex. $0+0+0+0 = -1$. Alt.: systemets första rad är $x_1+x_1+x_3+x_4 = 1$ medan den sista är $2x_1+2x_1+2x_3+2x_4 = 1 \neq 2$. Alltså, p.g.a. motsägelser saknar systemet en lösning, och v tillhör ej $span\{v_i\}$.

4. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & -1 \end{pmatrix}$$

diagonaliserbar?

Svar. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - a)$. Om polynomet har 3 skilda rötter, dvs $a \neq 2, -1$, är A diagonaliserbar. $\underline{a = 2}$: systemet $2I - A = \mathbf{0}$ har lösning $(0, 3s, 2s)^t$, dvs geometriska multipliciteten < algebraiska ($1 < 2$), och A kan ej diagonaliseras. $\underline{a = -1}$ ger $(0, 0, s)^t$ och samma svar som för $a = 2$.

5. Låt $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

(a) Använd Gram–Schmidts ortogonaliseringsprocess på v_1, v_2, v_3 för att producera en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) Om v_3 byts mot $v_3' = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ kommer Gram-Schmidt *inte* att ge en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^3$. Varför?

Svar. (a) $u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t$. Nästa ortogonala vektor blir $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (2, 2, 2)^t - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t = \dfrac{4}{3}(1, 2, 1)^t$, vars normering ger $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^t$. Slutligen, $u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = (3, 1, 1)^t - \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t - \dfrac{6}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^t = (1, 0, -1)^t$, som normerad är $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^t$. $\{u_1, u_2, u_3\}$ ger en ortonormerad bas.

(b) Då $v_1 + v_2 = v_3'$ får vi ett 2-dimensionellt delvektorrum, som *inte* kan generera $\mathbb{R}^3$.

6. Låt Q vara ett kägelsnitt (andragradskurva) definierat via $13x^2 + 13y^2 - 10xy = 144$ i ett givet xy-koordinatsystem.

(a) Vilken geometrisk figur beskriver Q?

(b) Skissera Q med speciellt angivande av symmetrilinjer och kurvans skärning med dessa.

Svar. (a) Karakteristiska ekvationen för motsvarande matris $\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ är $\lambda^2 - 26\lambda - 144 = (\lambda - 18)(\lambda - 8)$, som beskriver en ellips. (b) Egenvärdet $\lambda_1 = 18$ har egenvektorer $r(1, -1)^t$ och $\lambda_2 = 8$ har $s(1, 1)^t$. Alltså, i de nya variablerna är kurvan $18a^2 + 8b^2 = 144 \Leftrightarrow (\frac{a}{2\sqrt{2}})^2 + (\frac{b}{3\sqrt{2}})^2 = 1$. Då är $13x^2 + 13y^2 - 10xy = 144$ en ellips med mittpunkt i origo med lillaxeln $4\sqrt{2}$ (symmetrilinjen $y = -x$) och storaxeln $6\sqrt{2}$ (symmetrilinjen $y = x$).

7. Låt $P_2(\mathbb{R})$ respektive $P_1(\mathbb{R})$ vara vektorrummen av alla polynom med reella koefficienter av grad ≤ 2 respektive ≤ 1. Låt $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ vara en bas i $P_2(\mathbb{R})$ och $B' = \{2, 1+2x\}$ en bas i $P_1(\mathbb{R})$. Antag vidare att $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ är en linjär avbildning sådan att avbildningsmatrisen för f med avseende på baserna B och B' är

$$[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm bilden $f(ax^2 + bx + c)$ för ett godtyckligt polynom i $P_2(\mathbb{R})$ (där $a, b, c \in \mathbb{R}$). *Beteckningen* $[f]_{B'B}$ *avser matrisen som avbildar koordinatvektorer i basen B till koordinatvektorer i basen B'. Alternativ beteckning är* $[f]_{B' \leftarrow B}$.

Svar. Låt $E = \{1, x, x^2\}$ vara standardbasen för $P_2(\mathbb{R})$ och $E' = \{1, x\}$ standardbasen för $P_1(\mathbb{R})$. Vi har $[f]_{E'E} = [f]_{E'B'}[f]_{B'B}[f]_{BE} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

så att $f(ax^2 + bx + c) = [f]_{E'E}(c, b, a)^t = (8c - b - 4a) + (4c + 6b - 8a)x$.

Kontroll: $f(ax^2 + bx + c) = f\big((c - b) \cdot 1 + (b - a) \cdot (1 + x) + a \cdot (1 + x + x^2)\big) = [f]_{B'B}\big((c - b, b - a, a)^t\big) = \big(3(c - b) + (b - a) + a\big) \cdot 2 + \big(2(c - b) + 5(b - a) + a\big) \cdot (1 + 2x) = (8c - b - 4a) + (4c + 6b - 8a)x$.

8. Låt V vara ett vektorrum med basen $e_1, ..., e_4$ och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning som uppfyller $F(e_1) = F(e_2) = F(e_3) = F(e_4) \neq \mathbf{0}$.

(a) Bestäm $\dim(\ker(F))$ och $\dim(R(F))$. *Här betecknar* $\ker(F)$ *nollrummet till F och $R(F)$ bilden.*

(b) Har F några egenvektorer? Vad kan du säga om egenvärdena?

Svar. (a) Då alla basvektorerna avbildas på en enda nollskild vektor är $\dim(R(F)) = 1$ och $\dim(\ker(F)) \overset{dim.satsen}{=} 4 - \dim(R(F)) = 4 - 1 = 3$.

(b) Ja, uppenbarligen är t.ex. $v = e_1 - e_2 \neq \mathbf{0}$ en egenvektor, ty $F(v) = \mathbf{0} = 0 \cdot v$. 0 är ett trippelt egenvärde då även $e_2 - e_3$ och $e_3 - e_4$ avbildas på $\mathbf{0}$.

Enligt sats i boken har F och F^t samma egenvärden. Eftersom $F(e_i)$ avbildas på samma vektor, säg, $v = (a, b, c, d)^t$ får vi

$$F^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Nu är det enkelt att se att $F^t(1, 1, 1, 1)^t = (a+b+c+d)(1, 1, 1, 1)^t$, dvs att F^t och därmed F har egenvärde $(a+b+c+d)$. Observera att det inte är trivialt att räkna ut motsvarande egenvektor till F, men det efterfrågas inte heller. Det går att räkna ut $det(\lambda I_4 - F)$ på sedvanligt sätt också, men är litet mödosamt.