DUGGA 30.9 2011

Baskursen.

LÖSNINGAR o SVAR

(1) $|x-2| \leq 3 \iff -3 \leq x-2 \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5$

Svar: Olikheten är uppfylld av de x som ligger i intervallet $\boxed{-1 \leq x \leq 5}$ dvs. $\boxed{[-1,5]}$

(2) $$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 1+4+9+16 = 30$$

Svar: Värdet av summan är $\boxed{30}$

(3) Man kan resonera så här: om högst 2 skall vara födda samma månad kan vi maximalt ha 2×12 personer så om antalet är $2\times 12+1 = 25$ så kommer det nödvändigtvis att finnas (minst) en månad då (minst) tre personer är födda.

Svar: $\boxed{25 \text{ personer}}$

(4) $$(x+2)^9 = \begin{pmatrix}\text{Binomial-}\\ \text{utveckl.}\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^k \cdot 2^{9-k}.$$

x^4-termen får vi om $k=4$ och den blir $\binom{9}{4}\cdot 2^{9-4} x^4 = \binom{9}{4} \cdot 2^5 \cdot x^4$.

(forts.)

(4) (forts)

Koefficienten för x^4 är alltså $\binom{9}{4}\cdot 2^5$

eller $\dfrac{9!}{(9-4)!\cdot 4!}\cdot 2^5 = \dfrac{9!}{5!\cdot 4!}\cdot 2^5 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 4!}\cdot 2^5$

$= \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}\cdot 2^5 = 126\cdot 2^5 = 126\cdot 32 =$

Svar: Koefficienten är $\boxed{\binom{9}{4}\cdot 2^5 = 4032}$

---

(5) $\text{Re}\,\dfrac{2-i}{i+3} = \text{Re}\,\dfrac{2-i}{3+i} = \text{Re}\,\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} =$

$= \text{Re}\,\dfrac{6-2i-3i+i^2}{9-i^2} = \text{Re}\,\dfrac{5-5i}{10} =$

$= \text{Re}\left(\dfrac{5}{10}-\dfrac{5i}{10}\right) = \text{Re}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\right) = \underline{\dfrac{1}{2}}$

Svar: Realdelen är $\boxed{1/2}$

---

(6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 7^k = \frac{7^{n+1}-1}{6} \quad (1)$

Basfallet: Sätt $n=0$ i (1).

Vänsterledet är då $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 7^k = 7^0 = \underline{\underline{1}}$

Högerledet är $\dfrac{7^{0+1}-1}{6} = \dfrac{7^1-1}{6} = \dfrac{7-1}{6} = \dfrac{6}{6} = \underline{\underline{1}}$

De är lika och basfallet fungerar.

Vi skall nu visa att $\boxed{\text{OM}}$ formeln gäller för ett visst värde på n, kalla det n_0, $\boxed{\text{SÅ FÖLJER}}$ att de också gäller för nästa värde på n, nämligen (n_0+1). Vi skall alltså visa implikationen

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n_0} 7^k = \frac{7^{n_0+1}-1}{6}} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n_0+1} 7^k = \frac{7^{(n_0+1)+1}-1}{6}}$$

A B

Annorlunda uttryckt, vi skall visa att formel B gäller under förutsättning att A gäller.

Vi börjar med att studera vänsterledet i B (VL(B)).

$$VL(B) = \sum_{k=0}^{n_0+1} 7^k = \left(\begin{array}{c}\text{Definitionen}\\ \text{av}\\ \text{summasymbolen}\end{array}\right) = \sum_{k=0}^{n_0} 7^k + \sum_{n_0+1}^{n_0+1} 7^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} 7^k + 7^{n_0+1}$$ och eftersom A förutsätts gälla kan den första delen skrivas $\frac{7^{n_0+1}-1}{6}$ och vi har

$$VL(B) = \frac{7^{n_0+1}-1}{6} + 7^{n_0+1} = \left(\begin{array}{c}\text{Gör lik-}\\ \text{nämnigt!}\end{array}\right) = \frac{7^{n_0+1}-1}{6} + \frac{6\cdot 7^{n_0+1}}{6} =$$

$$= \frac{(7^{n_0+1}-1) + 6\cdot 7^{n_0+1}}{6} = \frac{7^{n_0+1} + 6\cdot 7^{n_0+1} - 1}{6} = \frac{7^{n_0+1}(1+6)-1}{6} =$$

$$= \frac{7^{n_0+1}\cdot 7 - 1}{6} = \frac{7^{n_0+1}\cdot 7^1 - 1}{6} = \boxed{\frac{7^{n_0+2}-1}{6}} \quad (2)$$

(forts.)

⑥ (forts.).

Slutligen betraktar vi högerledet i B och ser att det är $\frac{7^{(n_0+1)+1}-1}{6} = \boxed{\frac{7^{n_0+2}-1}{6}}$.

Jämförelse med (2) visar direkt att vänsterledet i B är lika med högerledet i B så <u>implikationen är sann.</u>

Vi hänvisar nu till <u>INDUKTIONSAXIOMET</u> för att kunna dra slutsatsen att formeln gäller för alla naturliga tal n. (Axiomet säger ju att om vi har en mängd M - i detta fall är M mängden av naturliga tal för vilka (1) är sann - sådan att 0 finns i mängden och <u>om</u> ett visst tal n_0 finns i M så finns även n_0+1 i mängden, så kommer M att vara mängden av <u>alla</u> naturliga tal.) (Puh!)

---

⑦ Eftersom polynomet x^3-6x+4 har nollställe $x=2$ säger <u>FAKTORSATSEN</u> att polynomet är delbart med $x-2$, dvs. vi kan skriva:
$$x^3-6x+4=(x-2)\cdot Q(x) + \boxed{0}$$
där $Q(x)$ är ett polynom; vi har alltså <u>ingen rest!</u>

⑦ (forts)

Vi skall bestämmas $Q(x)$ och det kan ske på (minst) två sätt.

Ⓐ "Tänk-metoden"

$$x^3-6x+4=(x-2)\boxed{(x^2+2x-2)}$$

- Vi ser att vi måste ha x^2 här. Detta fixar x^3 termen
- Men vi får också $\underline{-2x^2}$ och har inga x^2 till vänster. Det fixar $\underline{+2x}$ - termen.
- Sluttermen måste vara -2 eftersom den, multiplicerad med -2 skall ge 4.

(Det går fortare att göra än att skriva!)

Ⓑ "Liggande stolen".

SVARET

$$x^3-6x+4 \;\big|\; x-2$$

$$\boxed{x^2+2x-2}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x+4 & x-2 \\ -x^3+2x^2 & \\ \hline 2x^2-6x+4 & \\ -2x^2+4x & \\ \hline \pm 2x+4 & \\ +2x-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Båda metoderna ger $Q(x)=x^2+2x-2$ och vi löser $x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow$

$x=-1\pm\sqrt{(-1)^2+2}=\underline{-1\pm\sqrt{3}}$

<u>SVAR:</u> Rötterna är

$$\boxed{2 \text{ och } -1\pm\sqrt{3}}$$

⑧. $\left| \dfrac{x-2}{5+x} \right| \le 1 \qquad (1)$

Vi vill skriva detta utan beloppstecken och eftersom beloppet av ett tal kan tolkas som avståndet till origo så säger olikheten att värdet av uttrycket inom beloppstecknen måste ligga mellan -1 och 1, så

$$(1) \iff -1 \le \frac{x-2}{5+x} \le 1 \iff \left(\frac{x-2}{5+x} \le 1\right) \text{ och } \left(\frac{x-2}{5+x} \ge -1\right)$$

dvs BÅDA olikheterna skall vara uppfyllda för att x skall vara ett giltigt värde.

Ⓐ $\boxed{\dfrac{x-2}{5+x} \le 1} \iff \dfrac{x-2}{5+x} - 1 \le 0 \iff \dfrac{x-2}{5+x} - \dfrac{(5+x)}{5+x} \le 0 \iff$

$$\iff \frac{(x-2)-(5+x)}{5+x} \le 0 \iff \frac{x-2-5-x}{5+x} \le 0 \iff \boxed{\frac{-7}{5+x} \le 0} \quad (2)$$

Teckenschema:

x		-5	(Här är $x>-5$)	
-7	$- - -$	$-$	$- - -$	← Negativt överallt
$5+x$	$- - -$	0	$+ + + +$	← Byter tecken i -5
$\frac{-7}{5+x}$	$+ +$	⧘	$- - - -$	← $\frac{\text{MINUS}}{\text{PLUS}} = \text{MINUS}$

"$\frac{\text{MINUS}}{\text{MINUS}} = \text{PLUS}$" ↑ ↑ Uttrycket $\frac{-7}{5+x}$ är ej definierat

Ur teckenschemat ser vi att uttrycket är negativt om $x > -5$ och positivt om $x < -5$ och det betyder att (2) är sant om $x > -5$, dvs ur kedjan av ekvivalensen ser vi att $\dfrac{x-2}{5+x} \le 1$ precis när $\boxed{x > -5}$

8 (forts)

B

$$\boxed{\frac{x-2}{5+x} \geq -1} \iff \frac{x-2}{5+x} + 1 \geq 0 \iff \frac{x-2}{5+x} + \frac{(5+x)}{5+x} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-2)+(5+x)}{5+x} \geq 0 \iff \frac{x-2+5+x}{5+x} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x+3}{5+x} \geq 0 \iff \boxed{\frac{2(x+3/2)}{5+x} \geq 0} \quad (3)$$

Teckenschema:

x		-5		$-3/2$	
$x+3/2$	$-\ -$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +\ +\ +$
$x+5$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+\ +\ +$
$\dfrac{2(x+3/2)}{5+x}$	$+\ +\ +$	Ej def.	$-\ -$	0	$+\ +\ +\ +$

$\frac{\text{MINUS}}{\text{MINUS}} = \text{PLUS}$

Ej def. (men byter tecken!)

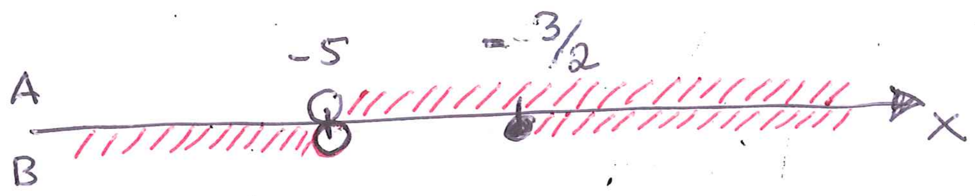
Om vi nu går tillbaka till (3) ser vi att vi är intresserade av de värden på x för vilka uttrycket är ≥ 0, positivt eller 0 och teckenschemat visar att detta gäller om $x < -5$ eller om

$x \geq -3/2$.

Slutligen gäller att de x vi söker är de för vilka <u>båda</u> olikheterna är uppfyllda

Vi skall alltså ha <u>både</u> att $(x > -5)$ <u>och</u> $(x < -5)$ eller $(x \geq -3/2)$ och det betyder (förstås?) att de enda x som duger är de som är $\geq -3/2$!

Vi kan illustrera det hela sålunda:



De enda punkter som är röda på båda sidorna är de som uppfyller $x \geq -3/2$:

<u>Svar:</u> Olikheten är uppfylld av precis de x som satisfierar $\boxed{x \geq -3/2}$

Nu e're slut ?