UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

TENTAMEN i matematik
1MA024: Linjär algebra II
F, W, IT, Lärare
9 Januari 2020 klockan 14.00 – 19.00

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med **motiveringar**. Varje uppgift ger max. 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng (får man minst 16 poäng på följande uppgifter räknas eventuella bonus poäng med).

1. Vilka av följande delmängder i $\mathbb{R}^4$ är delrum? För varje delrum ange dess dimension.

(a) $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$.

(b) $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y = 0\}$.

(c) $W_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.

(d) $W_4 = \{a(1, 1, 1, 1) + b(2, 1, 2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Låt $W = \text{Span}\{(1, 2, 3, 4, 5), (3, 1, 3, 4, 5)\}$.

(a) Hitta den ortogonala projektionen av $(5, 3, 3, 2, 1)$ på W.

(b) Hitta den ortogonala projektionen av $(5, 3, 3, 2, 1)$ på $W^\perp$.

3. Lös följande system av differential ekvationer:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 3x(t) + 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

4. Låt $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotation med vinkel $\frac{\pi}{6}$ radianer moturs runt origo. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller:

$$T(0, 1) = (2, 1) \qquad \text{och} \qquad T(1, 0) = (1, 2)$$

(a) Hitta standardmatrisen $[R]$ där du använder $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ till att skriva denna utan att använda varken cosinus eller sinus.

(b) Hitta standardmatriserna $[T]$, $[R \circ T]$, $[T \circ R]$, $[T \circ T]$ och $[R^6]$.

Ledning: Här betyder $R^6 = R \circ R \circ R \circ R \circ R \circ R$ (det vill säga R sammansatt med sig själv 6 gånger) och försök hitta ett effektivt sätt att lösa denna del av uppgiften.

Var god vänd!

5. Låt $T : P_4 \to P_2$ vara den linjära avbildning som deriverar två gånger. Alltså

$$(T(p))(x) = p''(x)$$

Låt också

$$B = (1 + x^2, 1 + x, x^2, x^2 + x^3, x + x^4) \quad \text{och}$$
$$B' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$$

Hitta matrisen för T relativt baserna B och B' (skrives $[T]_{B',B}$).

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

(a) Hitta baser för nollrummet, kolonnrummet och radrummet för matrisen A.

(b) Låt $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning med standardmatris A. Identifiera varje av de 3 delrummen från uppgift a) med ett av delrummen

- Kärnan $\ker T_A$ av T_A.
- Värderummet (också kallat bilden) $R(T_A)$ av T_A.
- Kärnans ortogonala komplement $(\ker T_A)^\perp$.
- Värderummets ortogonala komplement $R(T_A)^\perp$

7. Volymen begränsad av en ellipsoid på formen $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, a > 0, b > 0, c > 0$ är enligt en känd formel $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{abc}}$. Visa att

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz = 1$$

definierar en ellipsoid och hitta volymen begränsad av denna.

Ledning: Ett ON-bas byte bevarar volym.

8. Låt

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

beroende på $a, b, c \in \mathbb{R}$. För vilka värden på a, b och c är F diagonaliserbar?

Lycka till!

Lösningar till provet i 1MA024: Linjär algebra II 9 Januari 2020 klockan 14.00 − 19.00

Lösning till problem 1.

(a) W_1 är ett delrum då det är nollrummet för matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dess dimension är 3 (dimensionssatsen då matrisen har rang 1).

(b) W_2 är ej delrum då $(1,-1,0,0)$ men inte $(-1,1,0,0) = -(1,-1,0,0)$ finns med i W_2.

(c) Ekvationen i definitionen av W_3 ger $x = y = 0$ och därför består W_3 av vektorer på formen $(0,0,z,w)$ for godtycklig $z, w \in \mathbb{R}$. Detta är ett delrum (om man ska vara väldigt noggran är det nollrummet för $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, men det krävde vi inte). Dimensionen är 2 (rangen av matrisen är 2 - eller alternativt: delrummet är öppenlyst isomorft med $\mathbb{R}^2$).

(d) W_4 är spannet/det linjära höljet av $(1,1,1,1)$ och $(2,1,2,1)$ och därför ett delrum. Dimensionen är 2 (de två vektorer är linjärt oberoende och därför en bas).

Lösning till problem 2.

(a) Vi ser att de två vektorer är en bas för W och vi använder Gram-Schmidt. Först en ortogonal bas:

$$\vec{v}_1 = (1,2,3,4,5),$$
$$\vec{v}_2 = (3,1,3,4,5) - \frac{(1,2,3,4,5) \bullet (3,1,3,4,5)}{\|(1,2,3,4,5)\|^2}(1,2,3,4,5) = (2,-1,0,0,0).$$

Sedan normera vi denna om till en ON-bas:

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}(\vec{v}_1) = \tfrac{1}{\sqrt{55}}(1,2,3,4,5)$$
$$\vec{b}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}(\vec{v}_2) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0,0)$$

Så använder vi att den ortogonala projektionen i W nu kan beräknas enligt formeln:

$$\mathrm{proj}_W^{\perp}(\vec{x}) = (\vec{b}_1 \bullet \vec{x})\vec{b}_1 + (\vec{b}_2 \bullet \vec{x})\vec{b}_2.$$

Så svaret blir:

$$(\vec{b}_1 \bullet (5,3,3,2,1))\vec{b}_1 + (\vec{b}_2 \bullet (5,3,3,2,1))\vec{b}_2 =$$
$$= \frac{33}{55}(1,2,3,4,5) + \frac{7}{5}(2,-1,0,0,0) = \frac{1}{5}(17,-1,9,12,15)$$

(b) Här används formeln $\vec{x} = \mathrm{proj}_W^{\perp}(\vec{x} = + \mathrm{proj}_{W^\perp}^{\perp}(\vec{x})$ som ger svaret:

$$(5,3,3,2,1) - \frac{1}{5}(17,-1,9,12,15) = \frac{1}{5}(8,16,6,-2,-10).$$

Lösning till problem 3.

Alternativ 1 (standard metod): Vi diagonaliserar koefficientmatrisen:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Först hittar vi egenvärden:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2$$

Så egenvärdena är $\lambda = 0$ och $\lambda = 6$. Så hittar vi de motsvarande egenrum:

$$E_0 = N(C - 0I) = N(C) : \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så nollrummet av matrisen består av vektorerna (parametriserat lite ovanligt för att undgå bråk):

$$(x, y, z) = t(-2, 3, 0) + s(-1, 0, 3), \;\; s, t \in \mathbb{R}.$$

Liknande är:

$$E_6 = N(C - 6I) : \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så lösningarna är: $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. Vi har alltså 3 linjärt oberoende egenvektorer som ger en inverterbar (basbytes) matris med dessa som kolonnor:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Byter vi till koordinater (a, b, c) med dessa egenvektorer som bas får vi att det ursprungliga differentialekvationssystem är ekvivalent med det diagonala systemet:

$$\begin{cases} a(t) = 0 \\ b(t) = 0 \\ c(t) = 6 \end{cases}$$

som har generella lösningar $a(t) = k_1$, $b(t) = k_2$, och $c(t) = k_3 e^{6t}$. Lösningarna till den ursprungliga ekvationen blir då:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 e^{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 e^{6t} - 2k_1 - k_2 \\ k_3 e^{6t} + 3k_1 \\ k_3 e^{6t} + 3k_2 \end{bmatrix}$$

Alternativ 2 (smart, kort, men inte så generell): vi inser att $x'(t) = y'(t) = z'(t)$ och att detta ger:

$$y(t) = x(t) + k_1, \qquad z(t) = x(t) + k_2$$

vilket direkt ger att

$$x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + z(t) = 6x(t) + 2k_1 + k_2$$

som lösas generellt av $x(t) = k_3e^{6t} - \frac{1}{3}k_1 - \frac{1}{6}k_2$, som i sin tur ger $y(t) = k_3e^{6t} + \frac{2}{3}k_1 - \frac{1}{6}k_2$ och $z(t) = k_3e^{6t} - \frac{1}{3}k_1 + \frac{5}{6}k_2$. Man kollar lätt att dessa är lösningar (och det följer också i princip direkt av metoden).

Observera: att lösningarna kan parametriseras på många olika sätt och detta är grunden till att svaren i de två alternativ inte ser helt lika ut.

Lösning till problem 4.

(a) Standardmatrisen för en rotation med vinkel θ (moturs) är gennerelt:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Vilket i detta fall ger:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Enligt formel for standardmatrisen är

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Enligt räkneregler för standard matriser är:

$$\begin{aligned}
[R \circ T] = [R][T] &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\
[T \circ R] = [T][R] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} \\
[T \circ R] = [T][T] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Eftersom R är rotation med $\frac{\pi}{6}$ grader är R^6 rotation med π grader, denna har standard matris:

$$[R^6] = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

vilket ju är det samma som avbildningen som skickar (x, y) till $-(x, y)$.

Lösning till problem 5. Vi har en formel för $[T]_{B',B}$ där den j:te kolonnen är given som T av den j:te basvektor i B skrivit i basen B'. Alltså:

$$[T]_{b',b} = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ [T(1+x^2)]_{B'} & [T(1+x)]_{B'} & [T(x^2)]_{B'} & [T(x^2+x^3)]_{B'} & [T(x+x^4)]_{B'} \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ [2]_{B'} & [0]_{B'} & [2]_{B'} & [2+6x]_{B'} & [12x^2]_{B'} \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

De sista två kolonnerna är kanske inte helt uppenbara, men de linjära ekvationssystem som ska lösas är väldigt simpla.

Lösning till problem 6.

(a) Vi radreducerar matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alla lösningar till det motsvarande homogena linjära ekvationenssystem (nollrummet) är:

$$(x, y, z, w) = (-2t + \tfrac{1}{2}s, t, -\tfrac{3}{2}s, s), s, t \in \mathbb{R}$$

och därför är

$$N(A) = \text{Span}\{(-2, 1, 0, 0), (\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 1)\}$$

där de två vektorer är linjärt oberoende och därför en bas. De två raderna $(1, 2, 0, -\frac{1}{2})$ och $(0, 0, 1, \frac{3}{2})$ är en bas för radrummet, och de två kolonnerna i A, som har ledande element i den radkanoniska matrisen radekvivalent med A,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

är en bas för kolonnrummet.

(b) Nollrummet av A är det samma som kärnan av T_A. Kolonrummet är det samma som $R(A)$ (bilden av T_A). Radrummet är det samma som det ortogonala komplementet till kärnan av T_A skrivet som $(\ker T_A)^{\perp}$. (den sista $R(A)^{\perp}$ är nollrummet av A^T och därför den som inte är med i uppgift a - se sats 4.8.9 i boken).

Lösning till problem 7.

Den kvadratiska formen (VL) kan skrivas som:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Då matrisen är symmetrisk kan den ortogonalt diagonaliseras. Så, vi kan hitta en ON-bas (vars koordinater vi kallar (u, v, w)) som transformera ekvationen till en på formen $au^2 + bv^2 + cw^2 = 1$ där a, b och c är egenvärdena för vår symmetriska matris. Det vill säga att det är nog att visa att egenvärdena är positiva och hitta produkten abc av dessa egenvärde och sätta denna in i formeln för volymen. Vi behöver alltså inte hitta koordinatbytet det är nog att veta det existerar och hur ekvationen kommer att se ut.

Så vi hittar egenvärdena:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (\tfrac{1}{4}(3-\lambda) + \tfrac{1}{4}(3-\lambda)) =$$

$$= (3-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda) - \tfrac{1}{2}) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + \tfrac{11}{2})$$

Rötterna i den sista faktorn är

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$$

vilka båda är positiva (eftersom $\sqrt{3} < 5$). Dessa två rötters produkt är konstant termen $\frac{11}{2}$ (enligt $(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) = \lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda + r_1 r_2$). Så produkten av de tre egenvärden blir $\frac{33}{2}$ och därför blir volymen:

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{\frac{33}{2}}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{66}}$$

Lösning till problem 8. Att kunna diagonaliserar F är ekvivalent med att kunna hitta en bas av egenvektorer och det är också ekvivalent med att summan av de geometriska multipliciteter är 3 (för 3×3 matriser). Så vi hittar alla egenvärden:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 2-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(c-\lambda)$$

så vi ser att vi har två eller tre olika egenvärden beroende på vad c är. Om $c \neq 1$ och $c \neq 2$ då har vi tre egenvärden och en sats som då säger att matrisen är diagonaliserbar (beviset för satsen i detta fall är: varje av de 3 geometriska multipliciteter är minst 1 och summan högst 3 - alltså är alla precis 1 och summan är precis 3). Vi har därför två fall kvar.

Fall 1: $c = 1$. I detta fall har vi algebraiska multiplicitet 2 för egenvärdet $\lambda = 1$. Så det är enbart detta egenvärde som kan göra att matrisen inte är diagonaliserbar. Så vi beräknar geometriskt multiplicitet:

$$E_1(F) = N(F - I) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att om $a = 0$ är rangen 1 och därför är $\dim E_1 = 3 - 1 = 2$ (diagonaliserbar), men om $a \neq 0$ är rangen 2 och $\dim E_1 = 1$ (ej diagonaliserbar).

Fall 2: $c = 2$.I detta fall har vi algebraiska multiplicitet 2 för egenvärdet $\lambda = 2$. Så det är enbart detta egenvärde som kan göra att matrisen inte är diagonaliserbar. Så vi beräknar geometriskt multiplicitet:

$$E_2(F) = N(F - 2I) : \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att om $b = 0$ är rangen 1 och därför är $\dim E_2 = 3 - 1 = 2$ (diagonaliserbar), men om $b \neq 0$ är rangen 2 och $\dim E_2 = 1$ (ej diagonaliserbar).

Slutsats: F är diagonaliserbar omm: ($c \neq 1$ och $c \neq 2$) eller ($c = 1$ och $a = 0$) eller ($c = 2$ och $b = 0$).