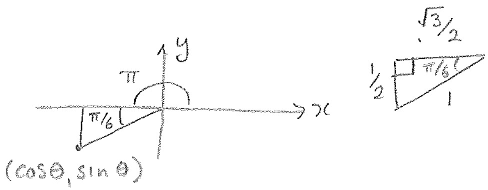
Baskurs i matematik omtenta 2015-06-08

1. $|x+8| > 3$. Antingen $\underbrace{x+8>3}_{x>-5}$ eller $\underbrace{x+8<-3}_{x<-11}$ $\quad$ Svar: $x<-11$ eller $x>-5$

2. $\dfrac{9-8i}{5+2i} = \dfrac{(9-8i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \dfrac{45-40i-18i-16}{25+4} = \dfrac{29-58i}{29} = 1-2i$ $\quad$ Svar: $1-2i$

3. $\cos(7\pi/6)$



Svar: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $y=(x-4)^2-16+5 = (x-4)^2-11$ $\quad$ Svar: $(4,-11)$

Symmetri linje $x=4$ och $y(4)=-11$

5. $\dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{9-2x}{(2x+3)(2x-3)} = \dfrac{4x-6}{(2x+3)(2x-3)} + \dfrac{9-2x}{(2x+3)(2x-3)}$ $\quad$ Svar: $\dfrac{1}{2x-3}$

$= \dfrac{\cancel{2x+3}}{\cancel{(2x+3)}(2x-3)} = \dfrac{1}{2x-3}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \frac{2^k}{k+2}$ $\quad$ (svar)

7. $3^{4x}\cdot 9^x = 81 \iff 9^{2x}\cdot 9^x = 81$ $\quad$ Svar: $x = 2/3$

$\iff 9^{3x} = 9^2$

$\iff 3x = 2$

8. $\log 20x^5 - 2\log 2x^2 = \log 20x^5 - \log 4x^4 = \log\dfrac{20x^5}{4x^4}$ $\quad$ Svar: $\log 5x$

$= \log 5x$

9. $x^2-2x+y^2+10y+22=0$ $\quad$ Svar: medelpunkt $=(1,-5)$, radie $=2$

$(x-1)^2-1+(y+5)^2-25+22=0$

$(x-1)^2+(y+5)^2 = 4$

10. $\binom{n}{6} = 28$ $\quad$ Svar: $|A| = 8$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 ------ 28 8 1

$\binom{8}{6} = 28$

11. $\sin(3x-\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-\pi &= \pi/4 + 2\pi n \\ 3x_2-\pi &= 3\pi/4 + 2\pi n \end{aligned}\right\} n\in\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 &= 5\pi/4 + 2\pi n \\ 3x_2 &= 7\pi/4 + 2\pi n \end{aligned}\right\} n\in\mathbb{Z}$$

Svar: $$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5\pi/12 + \frac{2\pi n}{3} \\ x_2 &= 7\pi/12 + \frac{2\pi n}{3} \end{aligned}\right\} n\in\mathbb{Z}$$

12.

$z^2 = 1+i$

$r^2 e^{2vi} = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$

$r^2 = \sqrt{2} \Rightarrow r = 2^{1/4}$

$2v = \pi/4 + 2\pi n \quad , n = 1, 2$

$v = \pi/8 + \pi n \quad , n = 1, 2$

Svar: $z_1 = 2^{1/4} e^{\pi i/8}$

$z_2 = 2^{1/4} e^{9\pi i/8}$

13.

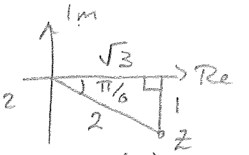
$(\sqrt{3} - i)^{12}$

$= \left(2\left(\cos(-\pi/6) + i\sin(\frac{-\pi}{6})\right)\right)^{12}$

$= 2^{12}\left(\cos(\frac{-12\pi}{6}) + i\sin(\frac{-12\pi}{6})\right)$

$= 2^{12}(\underbrace{\cos(-2\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(-2\pi)}_{=0})$

$= 2^{12}$



$\arg(z) = -\pi/6$

$|z| = 2$

Svar: $2^{12} = 4096$

14. $^{(*)}$ $\log_2(x-1) + \log_2(x+5) = 4 \iff \log_2(x-1)(x+5) = 4$

$(x-1)(x+5) = 2^4$

$x^2 - x + 5x - 5 - 16 = 0$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

$(x-3)(x+7) = 0$

$x_1 = 3 \;,\; x_2 = -7$

men $x = -7$ ger inget svar i $(*)$

för $x - 1 < 0$ och $x + 5 < 0$

Svar: $x = 3$

15. $x = 5i$ är en lösning

$\Rightarrow x = -5i$ är en lösning

Så $\underbrace{(x-5i)(x+5i)}_{x^2+25}$ är en faktor av $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 47x^2 + 125x - 75$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x - 3 \\
\hline
x^2 + 0x + 25 & 2x^4 + 5x^3 + 47x^2 + 125x - 75 \\
 & 2x^4 + 0x^3 + 50x^2 \\
\hline
 & 0 \quad 5x^3 - 3x^2 + 125x \\
 & \quad\; 5x^3 + 0x^2 + 125x \\
\hline
 & \quad\; 0 \quad -3x^2 + 0x - 75 \\
 & \qquad -3x^2 + 0x - 75 \\
\hline
 & \qquad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Lös $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

$(x + 5/4)^2 - \frac{25}{16} - \frac{24}{16} = 0$

$(x + 5/4)^2 = \frac{49}{16}$

$x = -5/4 \pm 7/4$

$x_1 = 2/4 \;;\; x_2 = -12/4 = -3$

Svar: $x_1 = 1/2 \;;\; x_2 = -3 \;;\; x_3 = 5i \;;\; x_4 = -5i$

16. <u>Basfall</u> $n = 1$ $\qquad P(n): \sum_{k=1}^{n} 3^k - 4 = \frac{3^{n+1} - 8n - 3}{2}$

$P(1)$: $VL = 3^1 - 4 = -1$

$HL = \frac{3^2 - 8 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow VL = HL$ och $P(1)$ är sant.

<u>Induktionssteg</u>

Antag $P(m)$ är sant och betrakta

$$\sum_{k=1}^{m+1} 3^k - 4 = \left(\sum_{k=1}^{m} 3^k - 4\right) + 3^{m+1} - 4$$

$$= \frac{3^{m+1} - 8m - 3}{2} + 3^{m+1} - 4$$

(av induktionsantagandet)

$$= \frac{3^{m+1} - 8m - 3 + 2 \cdot 3^{m+1} - 8}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^{m+1} - 8(m+1) - 3}{2}$$

$$= \frac{3^{m+2} - 8(m+1) - 3}{2}$$

<u>Mål</u> $P(m+1)$

$$\sum_{k=1}^{m+1} 3^k - 4 = \frac{3^{m+2} - 8(m+1) - 3}{2}$$

Så $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ och $P(1)$ är sant så av induktionsprincipen $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

17. $$\left(\frac{3}{x^2} + \frac{x^3}{2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \underbrace{\left(\frac{3}{x^2}\right)^k \left(\frac{x^3}{2}\right)^{10-k}}_{\frac{3^k}{2^{10-k}} x^{3(10-k)} \cdot x^{-2k}}$$ av binomialsatsen

Så konstanttermen ges av k som uppfyller

$$3(10-k) - 2k = 0$$

$$\Rightarrow \quad -5k = -30$$

$$\Rightarrow \quad \underline{k = 6}$$

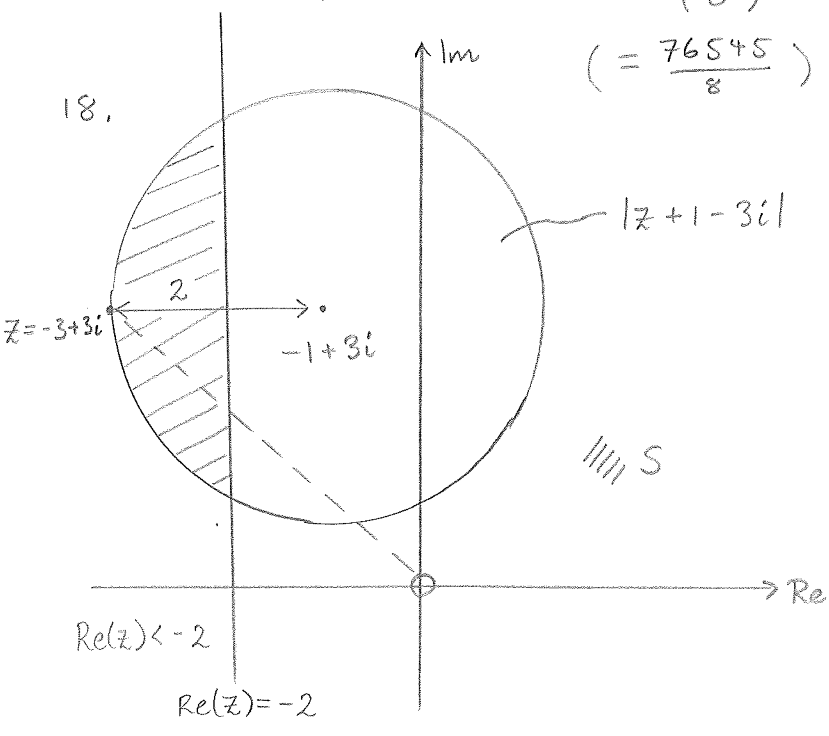
konstanttermen $= \binom{10}{6} \cdot 3^6/2^4$

$\left(= \frac{76545}{8}\right)$

<u>Svar</u>: $\binom{10}{6} \cdot \frac{3^6}{2^4}$

$\left(= \frac{76545}{8}\right)$

18.



Endast en punkt z uppfyller $z \in S$ och $Re(z) = -3$, nämligen $z = -3+3i$ (se diagrammet)

$|-3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\arg(-3+3i) = 3\pi/4$