(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos(2x)}{x\sin x - x^2}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 H_1(t) \Rightarrow e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + x^6 H_1(x^2)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + t^6 H_2(t) \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + x^6 H_2(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 H_3(x) \Rightarrow x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + x^6 H_3(x)$$

$$\frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x\sin x - x^2} = \frac{(1-2x^2+2x^4+x^6H_1(x^2)) - (1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+x^6H_2(x))}{(x^2 - \frac{x^4}{6} + x^6H_3(x)) - x^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}x^4 + x^6 H_4(x)}{-\frac{x^4}{6} + x^6 H_3(x)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x\sin x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4/3 + x^2 H_4(x)}{-1/6 + x^2 H_3(x)}$$

$$= \frac{4/3}{-1/6} = \frac{-24}{3} = -8$$

Svar: -8

3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x) \Longrightarrow$

$f(x)$ är jämn $\Rightarrow$ det räcker att först betrakta

f på $[0, +\infty)$ och sedan spegla grafen i

y-axeln.

Lodrät asymptot: $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$

$\therefore$ $x = 1$ är en lodrät asymptot.

Vågrät asymtot: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

$\therefore$ $y = 1$ är en vågrät asymptot

$\therefore$ Ingen sned asymptot.

$f'(x) = \frac{(x^2-1)(2x) - (x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

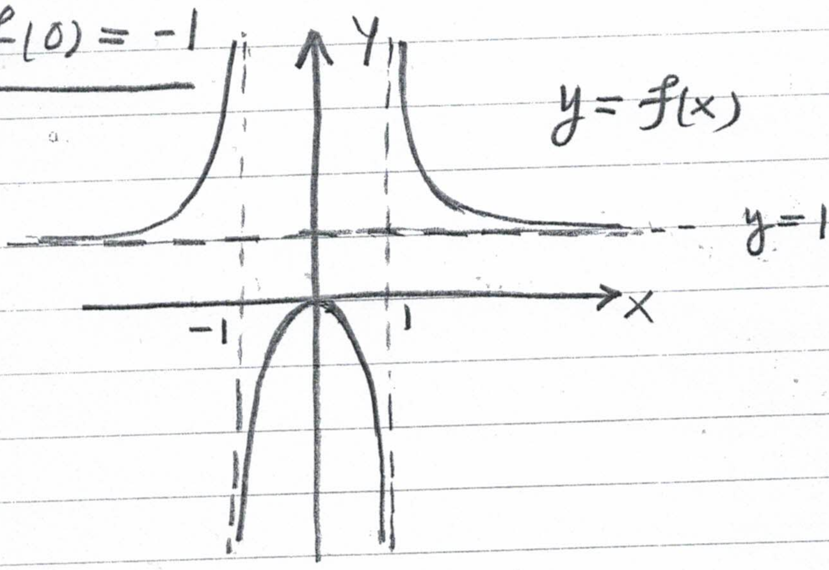
③ $f'(x)=0 \iff x=0$ och $x=0$ är en stationär punkt.

x		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

lok max

$\Longrightarrow$ lok max $= 0$

$f(0) = -1$



4

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x \ln x \, dx$$, partiell integration:

$x\,dx = dv, \quad \ln x = u \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}, \quad du = \frac{1}{x}dx$

$$2\pi \int_0^1 x \ln x \, dx = 2\pi \left[\left(\frac{x^2}{2} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \right]$$

$$= 0 - \frac{2\pi}{2} \int_0^1 x\, dx = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{-\pi}{2}$$

Svar: $\frac{\pi}{2}$ volymenheter

5a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+x}{x^3+\sin x}\,dx$

För tillräckligt stora x har man att

$\dfrac{x^2+x}{x^3+\sin x} > 0$. Dessutom gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+x}{\sin x+x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2}{\sin x+x^3} = 1 \neq 0$$

Eftersom $\displaystyle\int_*^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är divergent, ger

jämförelsesatsen att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+x}{x^3+\sin x}\,dx$ <u>divergerar.</u>

5b $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = I + J$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} < \infty \text{ ty } \tfrac{1}{2} < 1.$$

$$J = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx \quad \text{ty } \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \text{ för } x \geq 1$$

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{1}{e} < \infty.$$

Därför är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ <u>konvergent</u>

(6) $y' + \frac{x}{1+x^2} y = x \;,\quad y(0) = 0$

Integrerande faktorn $\mu = e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx}$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore \mu = e^{\ln\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} .$$

Multiplicera med $\sqrt{1+x^2} \Longrightarrow$

$$\sqrt{1+x^2}\, y' + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(y\sqrt{1+x^2}\right) = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \int x\sqrt{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

$$\therefore \underline{y = \frac{1}{3}(1+x^2) + C(1+x^2)^{-1/2}}$$

$$0 = y(0) = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Svar: } y = \frac{1}{3}(1+x^2) - \frac{1}{3}(1+x^2)^{-1/2}}$$

(7) $y'' + 9y = \sin 3x$, Den homogena ekv är

$y'' + 9y = 0 \Rightarrow$ karakteristiska ekv $r^2 + 9 = 0$

$r = \pm 3i \Longrightarrow \underline{y_h = A \sin 3x + B \cos 3x}$

Ansats till sär lösning: $y_p = x^m (A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x)$

$m = 1$ ger en bra ansats $\Longrightarrow$

$y_p = A_1 x \sin 3x + A_2 x \cos 3x$

$y_p' = A_1 \sin 3x + 3A_1 x \cos 3x + A_2 \cos 3x - 3A_2 x \sin 3x$

$y_p'' = 3A_1 \cos 3x + 3A_1 \cos 3x - 9A_1 x \sin 3x - 3A_2 \sin 3x$
$\quad - 3A_2 \sin 3x - 9A_2 x \cos 3x$
$\quad = 6A_1 \cos 3x - 6A_2 \sin 3x - 9A_1 x \sin 3x - 9A_2 x \cos 3x$

$\therefore \; y_p'' + 9y_p = 6A_1 \cos 3x - 6A_2 \sin 3x \Longrightarrow$

Om $y_p'' + 9y_p = \sin 3x$ så måste

$A_1 = 0$ och $-6A_2 = 1$ dvs $A_2 = -\frac{1}{6}$

således $\underline{y_p = \frac{-x}{6} \cos 3x}$

Svar $\boxed{y_{allmän} = A \sin 3x + B \cos 3x - \frac{x}{6} \cos 3x}$

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^k}{3^k} x^k \Longrightarrow a_k = \frac{k 2^k}{3^k}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k 2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}}{(k+1) 2^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow$$

Konvergensradien av serien är $\frac{3}{2}$ dvs serien konvergerar för $|x| < \frac{3}{2}$ och divergerar för $|x| > \frac{3}{2}$.

För $|x| = \frac{3}{2}$ har vi att antingen $x = \frac{3}{2}$ eller $x = -\frac{3}{2}$. Om $x = \frac{3}{2}$ så är serien densamma som $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^k}{3^k} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ $= \sum_{k=1}^{\infty} k$ vilken är divergent.

Om $x = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \sum k \frac{2^k}{3^k} (-1)^k \left(\frac{3}{2}\right)^k =$ $\sum (-1)^k k$ som är divergent

Svar: Serien konv för $|x| < 3/2$ och div för $|x| \geq 3/2$.

(9a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2k \sin \frac{1}{k}$, här är $a_k = 2k \sin \frac{1}{k}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} 2k \sin \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2 \sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 2 \neq 0$$

$\therefore$ Serien är divergent.

(9b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$ är en alternerande serie

ty $a_k = \frac{1}{1+\sqrt{k}} > 0$. Vidare gäller

att a_k är avtagande och

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}} = 0 \implies$$

Leibnizs test ger att

$\sum \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$ är konvergent.