Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Isac Hedén

Algebra I, 5 hp
2013-01-11
Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och linjal. Varje problem ger maximalt 5 poäng – om inget annat anges krävs att lösningarna skall vara åtföljda av klar och tydlig förklarande text för full poäng. Gränserna för betygen 3, 4 och 5 går vid 18, 25 och 32 poäng respektive (inklusive eventuella bonuspoäng från duggan). Påbörja varje uppgift på ett nytt blad.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. På den första uppgiften krävs inga motiveringar, endast svar.

a) Ge exempel på ett icke-konstant reellt polynom $p(x)$ sådant att $p(1+i) = 0$.

b) Ge exempel på två olika polynom som är associerade med varandra.

c) Ange tre heltal x som uppfyller $0 \leq x \leq 15$ och $x \equiv 3^5 \pmod 5$.

d) Ge exempel på ett heltal b sådant att den diofantiska ekvationen

$$2013x + by = 32$$

har oändligt många heltalslösningar x, y.

e) Bestäm sammansättningen $(f \circ g)(x)$ av följande två funktioner:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \quad \text{och} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 1.$$

Glöm inte att ange sammansättningens definitions- och målmängd.

2. **a)** Skriv talet $(137)_{\text{nio}}$ i basen 3.

b) Visa att $6|(n-1)n(n+1)$ för varje heltal $n \geq 0$.

3. Vilken är den minsta positiva rest som kan erhållas vid division av 19^{18} med 17?

4. Gröna stearinljus kostar 11 kronor styck och silverfärgade stearinljus kostar 16 kronor styck.

a) Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $11x + 16y = 1$.

b) När Adam köpte stearinljus av de två sorterna blev det totala priset 312 kronor. Vilket är det högsta sammanlagda antalet ljus han kan ha köpt?

Var god vänd!

5. Bevisa med induktion att

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = 0\}$, det vill säga A är den mängd som består av alla punkter i planet med koordinater (x, y) sådana att x och y är heltal och deras produkt är noll.

a) Åskådliggör mängden A i en figur.

b) Visa att A är uppräknelig genom att konstruera en bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Bijektionen f kan beskrivas på sluten form, rekursivt eller med hjälp av figuren från **a)**.

7. En relation R på $\mathbb{Z}$ definieras av $xRy \iff 5|x^2 - y^2$.

a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

b) Visa att s och $s + 5t$ tillhör samma ekvivalensklass då $s, t \in \mathbb{Z}$.

c) Hur många ekvivalensklasser på $\mathbb{Z}$ ger R upphov till?

8. **a)** Bestäm samtliga nollställen till polynomet $p(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 9$, givet att $p(t)$ har ett dubbelt nollställe.

b) Använd resultatet i **a)** och sambandet mellan ett polynoms nollställen och koefficienter för att hitta samtliga reella lösningar (x, y, z) till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = 3 \\ xyz = -9 \end{cases}$$

Lycka till!