

Skrivtid: 14:00–16:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark.

1. Beräkna längden på kurvan som anges med följande parametrisering: $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ för $t \in [0, 2\pi]$.

2. Låt $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

- a) I vilken riktning och med vilken hastighet växer $f(x, y)$ snabbast i punkten $(-1, 1)$?
- b) Beräkna riktningsderivatan i punkten $(-1, 1)$ i riktning med vektorn $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
- c) Bestäm ekvationer för tangent- och normallinjerna till nivåkurvan $f(x, y) = 1$ i punkten $(-1, 1)$.
- d) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(-1, 1, 1)$.

3. Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Om $z = f(x, y)$ där $x = 5s - 2t$ och $y = 3s + t$, beräkna:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

4. Bestäm och klassificera alla stationära punkter till $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Redovisa alla dina beräkningar.

Lycka till!