UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Magnus Jacobsson
Konstantinos Tsougkas

Tentamen April 7 2020
1MA016 Flervariabelanalys

Skrivtid: 8 - 13. Tillåtna hjälpmedel: Papper, penna, radergummi, linjal, Läroboken Adams' Calculus, föreläsningsanteckningar. Varje uppgift ger som mest 5 poäng. Alla lösningar skall vara försedda med förklarande text. För betygen 3, 4 och 5 krävs 18,25 resp. 32 poäng.

1. Ge exempel på följande.

(a) En icke-konstant funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som har ett lokalt minimum i $(1, 2, 3)$.

(b) En parametriserad kurva $\mathbf{r}(t)$ från $(1, 1, 1)$ till $(0, 2, 4)$, vars hastighetsvektor uppfyller $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, för alla t.

(c) Ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$ som är vinkelrätt mot ellipsoiderna $x^2 + 3(y-1)^2 + 5z^2 = C^2$.

(d) En delmängd $D \subset \mathbb{R}^3$ där funktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ har ett globalt maximum men saknar globalt minimum.

Lösningsförslag.

(a) $f(x, y, z) = (x-1)^2$ funkar. Om du av någon anledning föredrar ett strikt minimum, är $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ ett bra förslag.

(b) En rät linje $(x(t), y(t), z(t)) = (1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{11}}(-1, 1, 3)t$, $0 \le t \le \sqrt{11}$.

(c) Gradienten $(2x, 6(y-1), 10z)$ till funktionen $f(x, y, z) = x^2+3(y-1)^2+5z^2$ uppfyller villkoret.

(d) På x-axeln är funktionen $f(x, 0, 0) = x$ så t.ex. intervallet $(-\infty, 0]$ på x-axeln funkar bra.

2. Betrakta funktionen $f(x, y) = 3x^2 + y^3$ på $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten där $(x, y) = (2, 3)$.

(b) Bestäm riktningsderivatan av f i riktning av vektorn $v = (4, -3)$ i punkten $(2, 3)$.

Lösningsförslag.

(a) Tangentplanet är grafen till linjariseringen, vilken har ekvationen $z = f(2, 3) + \nabla(f)(2, 3) \bullet (x-2, y-3) = 39 + 12(x-2) + 27(y-3)$.

(b) Riktningsderivatan är $\nabla f(2, 3) \bullet \frac{1}{5}(4, -3) = \frac{1}{5}(12, 27) \bullet (4, -3) = -\frac{33}{5}$.

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + 4y^3 + 4xy$

(a) Hitta alla stationära (=kritiska) punkter till funktionen och bestäm deras typ.

(b) Har funktionen största och/eller minsta värde på $\mathbb{R}^2$? Bestäm dessa i så fall.

Lösningsförslag.

(a) $\nabla f(x,y) = (2x+4y, 12y^2+4x) = (0,0)$ has the solutions $(0,0)$, $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. The Hessian is $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24y \end{bmatrix}$ so the corresponding quadratic forms are for (0,0): $Q(h,k) = h^2 + 4hk = (h-2k)^2 - 4k^2$ (indefinite, saddle) and for $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$: $Q(h,k) = h^2 + 4hk + 12k^2 = (h-2k)^2 + 8k^2$ (positive definite, local minimum).

(b) Ingetdera, $f(0,y) = y^3$ går mot $\pm\infty$ då $y \to \pm\infty$.

4. Bestäm det största värde som funktionen $f(x,y,z) = x^2yz^3$ kan anta då $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och $x + y + z = 2$.

Lösningsförslag. Funktionen är uppenbarligen positiv eftersom området (en öppen triangel T i planet $x + y + z = 2$) ligger i den första oktanten. Den är också noll på randen av området så det finns ett maximum i T. I en sådan punkt är gradienten ∇f parallell med $(1,1,1)$, dvs $\nabla f \times (1,1,1) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2) \times (1,1,1) = (0,0,0)$. Detta ger $2xyz^3 - x^2z^3 = 0 \leftrightarrow 2y = x$, $2xyz^3 - 3x^2yz^2 = 0 \leftrightarrow 2z = 3x$, vilket tillsammans med $x + y + z = 2$ ger $2y + y + 3y = 2$ så vi får $(x,y,z) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ och det maximala värdet för f är $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) = ... = \frac{4}{27}$.

5. Beräkna volymen av den begränsade kropp som avgränsas av ytorna $z = 10 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2$.

Lösningsförslag. Projektionen av kroppen på xy-planet är cirkelskivan D given av olikheten $x^2 + y^2 \leq 5$. Volymen ges av dubbelintegralen

$$2 \iint_D 5 - x^2 - y^2 \, dA = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2) r \, dr d\theta = 4\pi \int_0^{\sqrt{5}} 5r - r^3 \, dr = 25\pi.$$

6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C (x^2 - \frac{y^2}{2}) dx + (\ln(y^4 + 2) + x^2) dy$$

där C parametriseras av $r(t) = (t, 2t)$ för $t \in [0,1]$, $r(t) = (2-t, 2)$ för $t \in (1,2]$ och $r(t) = (0, 6-2t)$ för $t \in (2,3]$.

Lösningsförslag. Om vi betecknar den givna differentialformen som $Pdx + Qdy$, har vi $Q_x - P_y = 2x - y$ och enligt Greens formel är den önskade kurvintegralen lika med dubbelintegralen

$$\iint_D 2x - y \, dA,$$

där D är det inneslutna området. D är en triangelskiva och den relevanta itererade integrationen blir

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 2x + y\, dydx = \int_0^1 (2xy + y^2/2)|_{2x}^2 dx = \int_0^1 4x + 2 - 6x^2\, dx = 2.$$

7. Låt $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 0\}$. Beräkna det totala flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + xz, 2x^2 - z^3, 3xy)$ ut ur E.

Lösningsförslag. Divergenssatsen säger att vi kan beräkna flödet ut ur ett område genom att integrera divergensen över området. I detta fall är divergensen $\nabla \bullet \mathbf{F} = z$ och integralen blir i sfäriska koordinater:

$$\int_3^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r \cos\phi r^2 \sin\phi\, d\theta d\phi dr = 2\pi \int_3^4 r^3\, dr \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi\, d\phi = \frac{175\pi}{4}.$$

8. Betrakta differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 6x + 2y \end{aligned}$$

(a) Hitta den allmänna lösningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

(b) Finns det begynnelsevillkor $(x(0), y(0))$ så att motsvarande lösning går mot $(0, 0)$ då $t \to \infty$? Om nej, förklara. Om ja, ange ett sådant.

Lösningsförslag.

(a) Vi bestämmer egenvärdena, vilka ges av

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 6 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

dvs. $\lambda = 5, -2$. Motsvarande egenvektorer är t.ex. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Detta ger den allmänna lösningen (teori)

$$\mathbf{r}(t) = Ae^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + Be^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(b) Ja. Begynnelsevillkoret $\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, ger $A = 0$, $B = 1$ och då $t \to \infty$ har vi uppenbarligen

$$e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$