

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen
Örjan Stenflo, Ketil Tveiten

TENTAMEN I MATEMATIK

Linjär algebra och geometri I, 1MA025
2016-08-24

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, resp. 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases}.$$

2. Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX^T - AB = C,$$

$$\text{där } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen för x :

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ x-1 & 0 & x \end{vmatrix} = x$$

4. För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & -1 & a-2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm inversen A^{-1} för de parametrar a där inversen existerar.

5. Bestäm avståndet mellan punkten $P : (1, 0, 0)$ och den punkt i planet med ekvation $x + y - z = 1$ som ligger närmast punkten $Q : (1, 0, 2)$.

6. Bestäm arean av triangeln med hörn i $A : (0, -1, 0)$, $B : (0, 0, 2)$ och $C : (3, 3, 5)$.

Var god vänd!

7. Betrakta de fyra vektorerna $\vec{v}_1 = (3, 2, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (2, 0, 0, 6)$ och $\vec{v}_4 = (-1, 0, 0, 2)$ i \mathbb{R}^4 .

(a) Avgör om $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bildar en bas för \mathbb{R}^4 .

(b) Uttryck vektorn $\vec{w} = (3, 4, 0, 1)$ som en linjärkombination av vektorerna i S eller visa att detta är omöjligt.

8. Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotation medurs med vinkeln $\pi/2$ och låt $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i y -axeln.

(a) Bestäm standardmatriserna för F och G .

(b) Bestäm standardmatrisen för rotation medurs med vinkeln $\pi/2$ följt av spegling i y -axeln.

LYCKA TILL!