UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2014-10-22
1MA025

Tentamen – Linjär algebra och geometri 1

Skrivtid: 08:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 p, för betyg 4 krävs minst 25 p, och för betyg 5 krävs minst 32 p. Lösningarna skall vara väl motiverade. **Lycka till!**

1. (Ej nödvändig att lösa om man är godkänd på duggan.)
Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + ax_4 = 2 \end{cases}$$

för alla $a \in \mathbb{R}$ som det går att lösa.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$X + 2I = B + XA$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. Låt $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara funktionen $S(x, y) = (x, y + x)$.

(a) Visa utifrån definitionen att S är en linjär avbildning.

(b) Bestäm standardmatrisen $[S]$ för S.

(c) Avgör om S är injektiv (dvs ett till ett).

(d) Bestäm egenvärdena för $[S]$

Var god vänd

5. Punkterna

$$A:(2,3,-1),\ B:(1,0,1),\ C:(3,2,0),\ D:(4,3,-7)$$

bildar hörnen i en tetraeder (dvs en pyramid med triangel som botten). Bestäm avståndet mellan D och det plan som innehåller punkterna A, B och C, samt bestäm den punkt i planet som ligger närmast D.

6. (a) Ange definitionen av en bas i $\mathbb{R}^n$

(b) Bildar $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en bas i $\mathbb{R}^3$? I så fall, bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ i denna bas.

7. Bestäm, på parameterform, den linje l som uppfyller följande två villkor

1. l är parallell med planet $\pi : 2x - y + 3z = 1$
2. l skär linjen $k : (x,y,z) = (2-t, 3t, -5+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, ortogonalt i samma punkt som linjen k skär planet $\rho : x - y - z = 0$.

8. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $-3x + y + z = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen $[P]$ för P.

(b) Bestäm bilden av linjen $l : (2,5,-1) + t(-3,1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$ under avbildningen P.

Svar

1. Inga lösningar finns då $a = -2$. Om $a \neq -2$ har vi den allmäna lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{1}{a+2} - \frac{t}{3}, \frac{a+1}{a+2} + \frac{2t}{3}, t, -\frac{3}{a+2}),\ t \in \mathbb{R}$$

2.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Lösningar: $x = \pm 1, 3$

4. (a) $S(x+u, y+v) = (x+u, x+u+y+v) = (x, x+y) + (u, u+v) = S(x,y) + S(u,v)$, $S(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, \lambda x + \lambda y) = \lambda(x, x+y) = \lambda S(x,y)$

(b) $[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) S är injektiv (ses exempelvis pga $\text{Rang}([S]) = 2$)

(d) $[S]$ har endast egenvärdet $\lambda = 1$.

5. Avståndet $= \sqrt{26}$, punktens koordinater: $(3, 6, -3)$.

6. (a) se boken el. föreläsningsanteckningar

(b) De bildar en bas, och koordinaterna för vektorn i den basen är $(1, 3, 0)$.

7.

$$l : (x, y, z) = (\frac{5}{6}, \frac{7}{2}, -\frac{8}{3}) + s(11, 7, -5), \ s \in \mathbb{R}$$

8. (a) Standardmatrisen är

$$[P] = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Bilden av l, dvs alla punkter $P(x, y, z)$ där $(x, y, z) \in l$ kan t.ex. beskrivas som linjen

$$(x, y, z) = (2, 5, 1) + s(\frac{6}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{20}{11}), \ s \in \mathbb{R}.$$