UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

Dugga i matematik
MatKand, F1, ES1, E3

FLERVARIABELANALYS
2015–03–04

Skrivtid: 8.00 – 10.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng.

1. Låt den parametriserad kurvan $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ vara givet som

$$\vec{r}(t) = (\tfrac{1}{6}t^6, \tfrac{1}{9}t^9), \qquad t \in [0,1].$$

Beräkna båglängden av $\vec{r}$.

2. Låt

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + x^3 + 2y^2 + y^3}{x^2 + y^2}$$

för $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Visa att man kan definiera f i punkten $(0,0)$ så att f blir en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

b) Är denna utvidgade funktion av klass C^1?

3. Hitta alla lösningar f av klass C^1 till differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{x+y}{x-y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(1 - \frac{x+y}{x-y}\right) = 0, \qquad 0 < x < y,$$

genom att införa variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

4. Låt $f(x,y) = (x-1)(y-2)(x-3)$ definierad på hela $\mathbb{R}^2$.

a) Hitta alla stationära punkter och avgör om de är lokala maxima, lokala minima eller sadelpunkter.

b) Hitta största och minsta värden av f på mängden given av $1 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 4$.

LYCKA TILL!

Lösningar till duggan i
FLERVARIABELANALYS 2015–03–04

Lösning till problem 1. Formel för båglängd är

$$\int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^1 \|(t^5, t^8)\| dt = \int_0^1 t^5\sqrt{1+t^6}dt = \frac{1}{6}\int_1^2 \sqrt{s}ds = \frac{1}{6}[\tfrac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{9}.$$

Lösning till problem 2. a) Vi skriver om bråket:

$$\frac{2x^2+x^3+2y^2+y^3}{x^2+y^2} = 2 + \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

Vi ser att sista delen går mot 0 eftersom

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{R^3+R^3}{R^2} = 2R \to 0$$

då $R = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ som det ju gör då $(x,y) \to (0,0)$. Så om vi definierar $F(0,0) = 2$ så går bråket mot detta då $(x,y) \to (0,0)$ och därför blir F kontinuerlig i $(0,0)$ och därför hela $\mathbb{R}^2$.

b) Om funktionen ska vara av klass C^1 måste de partiella derivatorna vara kontinuerliga. Speciellt måste

$$F_1(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3+y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

ha en gränsvärde när $(x,y) \to (0,0)$, men på linjen $y = x$ är detta bråk $\frac{1}{2}$ och på linjen $y = 0$ är bråket $\frac{1}{4}$. Så detta gränsvärdet kan inte existera, och därför är F inte C^1 i noll.

Lösning till problem 3. Vi skriver de två derivator i de nya koordinater enligt kedjeregeln:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x\end{aligned}$$

Detta sätts in i ekvationen från uppgiften:

$$\begin{aligned}0 =& \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}y\right)\cdot\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x\right)\cdot\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right) =\\ =& 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(y\left(\frac{x-y+x+y}{x-y}\right) + x\left(\frac{x-y-(x+y)}{x-y}\right)\right) =\\ =& 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(y\left(\frac{2x}{x-y}\right) + x\left(\frac{-2y}{x-y}\right)\right) = 2\frac{\partial f}{\partial u}.\end{aligned}$$

Så i de nya koordinater er ekvationen ekvivalent med $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$. Så alla C^1 lösningar är $f(u,v) = h(v)$ där h är en C^1 funktion. Så svaret är (i gamla koordinater)

$$f(x,y) = h(v) = h(xy).$$

Lösning till problem 4. a) Stationära punkter:

$$(0,0) = \nabla f = ((y-2)(x-3) + (x-1)(y-2), (x-1)(x-3)).$$

Andra koordinaten visar att $x \in \{1,3\}$ och för varje av dessa ser man att $y = 2$ i första koordinaten. Så alla stationära punkter är:

$$(x,y) = (1,2) \qquad \text{och} \qquad (x,y) = (3,2).$$

Vi kollar nu på andra derivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y-2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x-3) + (x-1) = 2x - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Så den kvadratiska form associerad med punkten $(1,2)$ är:

$$Q(h,k) = -2hk(2 \cdot 1 - 4) = 4hk = (h+k)^2 - (h-k)^2$$

som har är indefinit och därför är denna en sadelpunkt.

Den kvadratiska form associerad med punkten $(3,2)$ är:

$$Q(h,k) = -2hk(2 \cdot 3 - 4) = -4hk = (h-k)^2 - (h+k)^2$$

som också är indefinit och därför är denna också en sadelpunkt.

b) Vi har set att f inte har några singulära punkter och vi har hittat båda stationära punkter, men eftersom de inte ligger i det inre av mängden kan vi ignorerar dessa och vi vet att vi måste hitta största och minsta värden på randen. Vi har fyra delar av randen:

- $f(1,y) = 0$ for $y \in [2,4]$: max och min är 0.
- $f(3,y) = 0$ for $y \in [2,4]$: max och min är 0.
- $f(x,2) = 0$ for $x \in [1,3]$: max och min är 0.
- $g(x) = f(x,4) = 2(x-1)(x-3)$ for $x \in [1,3]$: För att hitta max av en envariabel funktion hittar vi där $2(x-1) + 2(x-3) = g'(x) = 0$ som ger $x = 2$, Så max och min av g ska hittas i denna punkt eller i de två rand punkterna $x = 1$ och $x = 3$. Det ger de 3 värden:

$$f(1,4) = g(1) = 0, \qquad f(2,4) = g(2) = 2(2-1)(2-3) = -2, \qquad f(3,4) = g(3) = 0.$$

Så största värdet av f på mängden är 0 och minsta värdet av f på mängden är -2.