UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend,
Thomas Kragh,
Jens Fjelstad,
Karl-Heinz Fieseler

Prov i matematik

K1, STS1, W1, X1, Frist,
KandKe1, Gylärarma1
KandGeo2, KandDv1, KandMat

Linjär algebra
och geometri I
2014–08–27

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - ax_4 = -1 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3ax_4 = 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + ax_3 - 2ax_4 = -3 \end{cases}$$

för alla värden på $a \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AB + AXB = I.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^4 & x^5 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Bestäm avståndet från punkten $P : (-2, -2, 3)$ till planet π som innehåller punkten $(2, 0, -1)$ och linjen $(x, y, z) = (3, 0, 0) + t(-1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm även den punkt på planet π som ligger närmast P.

var god vänd!

5. Låt $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\pi\colon\ 3x + 3y + 3z = 0$.

(a) Bestäm S:s standardmatris $[S]$.

(b) Bestäm bilden av linjen $l\colon\ (x, y, z) = (3, 0, 0) + t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ under S.

6. Visa att de två planen

$$\pi_1 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, 3, 1) + s(2, 1, 2), t, s \in \mathbb{R}$$
$$\pi_2 : (x, y, z) = (1, 5, 4) + u(0, 4, 3) + v(2, 5, 5), u, v \in \mathbb{R}$$

är samma plan.

7. (a) Beräkna arean av triangeln med hörnen $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) Beräkna volymen av parallellepipeden som spänns upp av ovanstående vektorer.

8. (a) Ge definitionen av det linjära höljet (eller spannet) av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

(b) För vilka värden på det reella talet a är det linjära höljet $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ hela $\mathbb{R}^3$, där

$$\vec{v}_1 = (2, 1, 1),\ \vec{v}_2 = (3, 0, 3),\ \vec{v}_3 = (0, -2, 2),\ \vec{v}_4 = (0, 1, a).$$

(c) Avgör om vektorerna

$$\vec{w}_1 = (3, 4, -1),\ \vec{w}_2 = (0, 5, 5)$$

tillhör det linjära höljet $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

Lycka till!

Svar till tentamen i
Linjär algebra
och geometri I 2014–08–27

1.

$$\begin{aligned}
a = 0: &\qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 + 3s, s, 0, t), s, t \in \mathbb{R}. \\
a = 1: &\qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 + 3s + t, s, -t, t), s, t \in \mathbb{R}. \\
a \neq 0, 1: &\qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 + 3s, s, 0, 0), s, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. $X = A^{-1}B^{-1} + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $x^9(x-1)^3 = 0$. Alltså $x \in \{0, 1\}$.

4. Avstånd: $2\sqrt{6}$. Närmaste punkten: $(0, 2, 1)$.

5.
(a)

$$[S] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $[S](l)$: $(x, y, z) = (1, -2, -2) + s(-1, -1, -1), s \in \mathbb{R}$. Vilket också är linjen l.

6. Båda har ekvationen: $5x + 6y - 8z = 3$.

7. Arean av triangeln: $\sqrt{21}/2$. Volymen av parallellepiped: 15.

8.
b) För alla $a \neq -1$.
c) $\vec{w}_1$ tillhör spannet, medan $\vec{w}_2$ ej tillhör det.