UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson
Sebastian Pöder
Hania Uscka-Wehlou

Prov i matematik
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand, IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018–08–23

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}.$$

2. Planet E går genom punkterna $A = (-2, 7, 3), B = (2, 9, 2)$ och $C = (0, 7, 4)$, och linjen l går genom A och är normal till E. Finn E:s ekvation på normalform (standardform) och l:s ekvation på parameterform.

3. Lös matrisekvationen

$$AXB - XB = B,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} -x-3 & 2x+2 & 3x+1 & 2x+2 \\ -4x-2 & 4x+2 & 3x+3 & 3x+3 \\ x+3 & -2x-2 & -2x & -2x-2 \\ 2 & -x-1 & -x+1 & -x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Var god vänd!

5. Bestäm (kortaste) avståndet mellan linjerna

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = -3 - \ \ s \\ z = \quad\ \ s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{och} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 4 + \ \ t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + \ \ t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

samt ange koordinater till de punkter på linjerna l_1 och l_2 som ligger närmast varandra.

6. Låt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är ortogonala.

(b) Beräkna $\vec{u} + 3\vec{v}$ och $\vec{w} - \vec{u}$.

(c) Bestäm längden av $\vec{w} - \vec{u}$.

(d) Beräkna skalärprodukterna $\vec{u} \cdot \vec{w}$ och $\vec{w} \cdot \vec{w}$.

(e) Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{w}$.

7. Avgör om vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet, finn koordinaterna till $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i denna bas. Om de inte utgör en bas, avgör om de är linjärt oberoende.

8. Låt den linjära operatorn $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation kring origo med vinkel α. Den har matris

$$[R_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Låt S_1 och S_2 vara spegling i linjerna $l_1 : x = y$ respektive $l_2 : x = 0$. Visa att sammansättningen $S_2 \circ S_1$ är en rotation R_α och bestäm värdet på α.

Lycka till!