UPPSALA UNIVERSITET	Prov i matematik
Matematiska institutionen	1MA013 Envariabelanalys
	2019-01-14

Skrivtid: 8 - 13. Tillåtna hjälpmedel: Papper, penna, radergummi, linjal. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x)$ är *kontinuerlig* i punkten $x = a$.

(b) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x)$ är *deriverbar* i punkten $x = a$.

(c) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x)$ är *strikt växande* (i Calculus: *increasing*) på ett intervall I.

(d) Ge ett exempel på en kontinuerlig, strikt växande funktion på $\mathbb{R}$, som inte är deriverbar i $x = 1$. (5)

2. (a) Ange linjariseringen $L(x)$ samt Maclaurinpolynomet $p_2(x)$ av grad 2 av funktionen

$$f(x) = 3xe^{2x} - \sin 3x + 4\ln(1 + x)$$

.

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

(5)

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = e^{-x}(x + 1)^2$$

Ange särskilt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (5)

4. Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $f(x) = x \sin x$

(b) $g(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (5)

5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{3x}{(x + 1)(x^2 + 2)}\, dx.$$

(5)

6. (a) Bestäm konvergensradien R för potensserien

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^n} x^n.$$

(b) Bestäm även konvergensintervallet (dvs undersök konvergensen i ändpunkterna).
(c) Ange $f'(0)$. (5)

7. Betrakta differentialekvationen

$$y' = x^2 y^2.$$

(a) Förklara hur man kan veta att alla lösningar $y(x)$ är växande (i Calculus: *non-decreasing*) funktioner av x redan innan man löser ekvationen.

(b) Lös ekvationen med begynnelsevillkoret $y(0) = 3$. (5)

8. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = e^{-2t}.$$

(5)