Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich, Jens Fjelstad

Civilingenjörsprogrammen F, IT, STS, W
Kandidatprogrammet i matematik
Gymnasielärarprogrammet

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2015–06–08

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för kolonnrummet $K(A)$.

(b) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$.

(c) Ange dimensionen för $K(A)$ respektive $N(A)$.

2. Bestäm standardmatrisen för den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ som ges geometriskt som projektionen på planet $x - y - z = 0$, där projektionen sker parallellt med vektorn $(0, 1, 0)$.

3. (a) För vilka reella värden på a och b är

$$\langle x, y\rangle = ax_1y_1 + x_2y_2 + bx_1y_2 + 2x_2y_1$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$?

(b) Gäller olikheten

$$(5x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 \leq \left(5x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2\right)\left(5y_1^2 + y_2^2 + 4y_1y_2\right)$$

för alla reella tal x_1, x_2, y_1, y_2? (Svaret ska motiveras på grundval av (a).)

Var god vänd!

4. Med $\mathcal{P}_n$ betecknas vektorrummet av alla polynom av grad högst n. Den linjära avbildningen $f : \mathcal{P}_4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definieras genom

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix}.$$

(a) Finn f:s matris i standardbaserna.

(b) Ange dimensionen av f:s kärna och dimensionen av f:s bild.

(c) Avgör huruvida f är surjektiv, injektiv, eller bijektiv.

5. I det euklidiska rummet $\mathcal{P}_2$ av alla polynom av grad högst 2, med $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, bildar polynomen $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $p_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$ en on-bas. Polynomet $q \in \mathcal{P}_2$ ges av $q(x) = (3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}) + (4\sqrt{3} - 6\sqrt{5})x + 6\sqrt{5}x^2$.
(a) Finn q:s koordinater i basen (p_1, p_2, p_3).
(b) Beräkna längden av q, med avseende på den inre produkten ovan.

6. Vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ utrustas med den inre produkten

$$\langle X, Y\rangle = X_{11}Y_{11} + 2X_{12}Y_{12} + 3X_{21}Y_{21} + 4X_{22}Y_{22}.$$

För vilka värden på t är vinkeln α mellan matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ med avseende på denna inre produkt (a) trubbig, (b) rät, (c) spetsig?

7. Låt $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. En diagonalmatris D vars samtliga diagonalelement är lika med $1, -1$ eller 0 kallas *tröghetsform* till A, om $S^T A\ S = D$ gäller för någon inverterbar matris S.
(a) Finn A:s tröghetsform D.
(b) Vilken typ har ytan $Y : -2x^2 + y^2 + 2xz - 4yz = 1$?

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4$.

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Beräkna A^{99}, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lycka till!

Lösningar 2015-06-08

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{5}\cdot \\ -\frac{1}{3}\cdot \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} = T$$

(a) $T_{\cdot 1}, T_{\cdot 2}$ är T:s pivotkolonner $\Rightarrow A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}$ är en bas för $K(A)$.

(b) $Ax = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + x_5 \\ x_2 = -x_4 - x_5 \end{cases}$. Substitutionen $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ger basen $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $N(A)$.

(c) $\dim K(A) = 2$, $\dim N(A) = 3$.

2. Vektorerna $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas $\underline{b}$ i $\mathbb{R}^3$ så att

$f(b_1) = 0$, $f(b_2) = b_2$, $f(b_3) = b_3$. Alltså är

$$[f]_{\underline{e}} = T_{\underline{eb}} [f]_{\underline{b}} T_{\underline{be}} = T_{\underline{eb}} [f]_{\underline{b}} T_{\underline{eb}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3\. (a) Avbildningen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ är additiv och homogen, då

$\langle x,y \rangle = x^T A y$ gäller för $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Den är symmetrisk omm A är symmetrisk,

dvs. omm $b = 2$. I så fall är den positivt definit omm huvudminorerna $M_1 = a > 0$

och $M_2 = a - 4 > 0$, vilket inträffar omm $a > 4$.

Svar (a). $a > 4$ och $b = 2$.

(b) För $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ är $\langle x,y \rangle = x^T A y$ en inre produkt på $\mathbb{R}^2$, enligt (a). Alltså

gäller CS-olikheten $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 = \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \quad \text{för alla } x,y \in \mathbb{R}^2,$$

och denna är just (b)-uppgiftens olikhet.

Svar (b). Ja.

✓

4\. (a) $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(X^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(X^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $f(X^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ger

$$A = [f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{rang}(A) = 4$ medför att $\dim(\ker(f)) = \dim(N(A)) = 5 - 4 = 1$

och $\dim(\text{im}(f)) = \dim(K(A)) = 4$.

(c) $\dim(\text{im}(f)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) \Rightarrow \text{im}(f) = \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow f$ är surjektiv.

$\dim(\ker(f)) = 1 \Rightarrow \ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ är ej injektiv

$\Rightarrow f$ är ej bijektiv.

5. (a) Vi söker $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [q]_{\underline{p}}$. Pga $T_{\underline{X}\underline{p}}\, x = T_{\underline{X}\underline{p}}\, [q]_{\underline{p}} = [q]_{\underline{X}}$ löser x det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}\cdot \\ \frac{1}{6}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 3-2\sqrt{3}+\sqrt{5} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} & 4\sqrt{3}-6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ (-1)\,(3) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 3-2\sqrt{3}+\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{3} & -3\sqrt{5} & 2\sqrt{3}-3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 3-2\sqrt{3} \\ & \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ & & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ & \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ & & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 3 \\ & 1 & & 2 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Svar</u> (a). $[q]_{\underline{p}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Eftersom $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ är en on-bas i $\mathcal{P}_2$, så gäller

$$\|q\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

6. α är $\begin{cases} \text{trubbig} \\ \text{rät} \\ \text{spetsig} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha$ är $\begin{cases} > 90^\circ \\ = 90^\circ \\ < 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \cos\alpha$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{\langle A,B \rangle}{\|A\|\,\|B\|} \text{ är } \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle A,B \rangle \text{ är } \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5+5t \text{ är } \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1+t \text{ är } \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \text{ är } \begin{cases} < -1 \\ = -1 \\ > -1 \end{cases}$$

<u>Svar</u>. (a) α är trubbig omm $t < -1$,

(b) α är rät omm $t = -1$,

(c) α är spetsig omm $t > -1$.

7. (a)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 \end{bmatrix} \approx \sqrt{\tfrac{2}{7}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 1 & -4 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}} \qquad \underset{\sqrt{\frac{2}{7}}}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -\sqrt{\frac{7}{2}} \end{pmatrix}}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = D$$ <u>är</u> A:<u>s tröghetsform</u>.

(b) $\operatorname{sign}(A) = (1, -1, -1)$ visar att A har ett positivt egenvärde $\lambda_1 > 0$ och två negativa egenvärden $\lambda_2, \lambda_3 < 0$. <u>Alltså är ytan Y en tvåmantlad hyperboloid.</u>

8. Systemet kan skrivas koncist som $y' = Ay$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$. Med $y = Tz$ gäller $y' = Ay$ omm $z' = Dz$.

Den allmänna lösningen till $z' = Dz$ är $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}$, där $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Den allmänna lösningen till $y' = Ay$ är därmed

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} - c_2 e^{-2x} \\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Den uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u>
$$\begin{cases} y_1 = 2e^{x} - e^{-2x} \\ y_2 = 2e^{x} + 2e^{-2x} \end{cases}$$

8'. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$.

$A = TDT^{-1}$ medför att

$$A^{99} = (TDT^{-1})^{99} = TD^{99}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -2^{99} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2^{99} \\ 1 & -2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-2^{99} & 1+2^{99} \\ 2+2^{100} & 1-2^{100} \end{pmatrix}.$$