UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Andre Laestadius, Jens Fjelstad

Tentamen
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI I,
1MA025
2015-03-17

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon
Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng, och för betyg 5 krävs minst 32 poäng.
LÖSNINGARNA SKALL VARA VÄLSKRIVNA OCH INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

Lösningsförslag

1. (**Ska ej lösas om man är godkänd på duggan.**) Lös för alla värden på $c \in \mathbb{R}$ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 1, \\ \qquad\quad -x_3 - x_4 = c. \end{cases}$$

L. Om vi adderar den andra ekvationen till den tredje får vi $x_4 = -(1+c)/2$, vilket insatt i den andra ekvationen ger $x_3 = (1-c)/2$. Om vi nu sätter $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, i första ekvationen så har vi

$$x_1 = 1 + 2t - 1 + c = c + 2t.$$

Svar: för alla $c \in \mathbb{R}$ har vi oändligt många lösningar enligt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (c + 2t, t, (1-c)/2, -(1+c)/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Lös matrisekvationen

$$X = BX + C,$$

där

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ och } C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

L. Vi omformar först ekvationen enligt

$$X - BX = (I - B)X = C, \quad X = (I - B)^{-1}C.$$

Eftersom

$$I - B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

får vi att

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Bestäm för vilka värden på a som systemet

$$\begin{cases} x \ + ay \quad = a, \\ ax + y + z = a, \\ (a+1)x + (a+1)y + 2z = 2. \end{cases}$$

(a) har unik lösning,

(b) har oändligt många lösningar, och

(c) saknar lösning.

L. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a+1 & a+1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Då gäller att $\det(A) = 1 - a^2$.

(a) Unik lösning då $\det(A) = 1 - a^2 \neq 0$, dvs $a \neq \pm 1$.

Vi undersöker nu speciellt då $a = \pm 1$. Vi noterar först att $a = 1$ leder till $x + y = 1$ och $x + y + z = 1$ (tredje ekvationen säger samma sak som andra i detta fall). Således får vi $(x, y, z) = (t, -t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Alltså,

(b) Oändligt många lösningar då $a = 1$.

När $a = -1$ ger tredje ekvationen $z = 1$. Således har vi $x - y = -1$ och $-x + y = -2$, dvs vi har

(c) Saknas lösning då $a = -1$.

4. Bestäm arean av triangeln med hörn i $A : (1, 1, 1)$, $B : (1, 2, 0)$ och $C : (0, 2, 1)$.

L. Vi sätter

$$\vec{u} = (1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (0, 1, -1), \quad \vec{v} = (0, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 0).$$

Arean ges då av $A = |\vec{u} \times \vec{v}|/2$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad |(1, 1, 1)| = \sqrt{3}.$$

Svar: Arean är $\sqrt{3}/2$.

5. Bestäm avståndet mellan punkten $P : (1, 2, 3)$ och planet som på parameterform ges av $(x, y, z) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

L. En normalvektor till planet ges av

$$\vec{n} = (-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Punkten $(0,0,0)$ ligger i planet. Sätt $\vec{u} = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$. Då fås avståndet d av

$$d = |\text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}| = \frac{1}{\|\vec{n}\|}|\vec{n}\cdot\vec{u}| = 2\sqrt{3}.$$

6. (a) Beskriv geometriskt lösningsmängden i $\mathbb{R}^3$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

(b) Bestäm den punkt som uppfyller ekvationssystemet i (a) och som befinner sig närmast punkten $A : (2,3,1)$. Ange avståndet mellan dessa två punkter.

L. (a) Genom att addera första ekvationen till den andra får vi $2x = 0$, dvs $x = 0$. Om vi sätter $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, ser vi att löningsmängden ges av linjen

$$(x,y,z) = (0,t,t) = (0,0,0) + t(0,1,1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Vi noterar att $(0,0,0)$ är en punkt på linjen. Vi projicerar vektor

$$\vec{u} = (2,3,1) - (0,0,0) = (2,3,1)$$

på riktningsvektor för linjen $\vec{v} = (0,1,1)$, vilket ger

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\cdot\vec{u}\right)\vec{v} = (0,2,2).$$

Antag att Q är den närmaste punkten på linjen. Då har vi $Q : (0,2,2)$. Dessutom gäller att

$$\vec{QA} = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (2,3,1) - (0,2,2) = (2,1,-1), \quad \|\vec{QA}\| = \sqrt{6}.$$

Svar: Närmast punkt $Q : (0,2,2)$, avståndet är $\sqrt{6}$.

7. Det gäller att $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är den ortogonala projektionen på ett plan som innehåller origo. Bestäm en ekvation för detta plan då man vet att matrisen för T ges av

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

L: Eftersom T är ortogonal projektion så ger egenvektor med egenvärde lika med noll en normalvektor till det sökta planet. Vi studerar således $A\vec{x} = \vec{0}$. Detta ger $\vec{x}^T = t(1,1,1)$ där $t \in \mathbb{R}$. En ekvation för planet ges av $x + y + z = 0$.

8. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer för A.

(b) Bestäm de $\vec{x}$ som uppfyller

$$\lim_{n \to \infty} A^n \vec{x} = \vec{0}.$$

L. (a) Egenvärdena kan avläsas från huvuddiagonalen; $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3/4$.

För $\lambda_1 = 1$ fås egenvektorn $\vec{v}_1^T = (1, 2)$.

För $\lambda_2 = 3/4$ fås egenvektorn $\vec{v}_2^T = (0, 1)$.

(b) $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är två linjärt oberoende vektorer och utgör således en bas för $\mathbb{R}^2$, dvs

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2.$$

Vi får

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2, \\ A^2 \vec{x} &= c_1 \lambda_1^2 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^2 \vec{v}_2, \\ &\dots \\ A^n \vec{x} &= c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} A^n \vec{x} &= \lim_{n \to \infty} \left(c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(c_1 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \left(\frac{3}{4} \right)^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kräver således att $c_1 = 0$.

Svar: $\vec{x}$ ska uppfylla $\vec{x} = c_2 \vec{v}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, där $c_2 \in \mathbb{R}$.