UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ketil Tveiten

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I - 1MA025
2016-06-07

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Tentamen består av **8 frågor** *om* **5 poäng** *för totalt* **40 poäng**. *De preliminära betygsgränserna är som följer: 18 till 24 poäng ger betyget 3, 25 till 31 poäng ger betyget 4, 32 till 40 poäng ger betyget 5.*

1. (5 p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 17 \end{cases}.$$

2. (5 p) Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AXB = C,$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. (5 p) Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. (5 p) För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Hitta inversen A^{-1} för dom a där inversen finns.

5. (5 p) Låt $v_1 = (1,0,3,4), v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,0,5,5)$ och $v_4 = (0,1,2,2)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. Visa att vektorerna är linjärt beroende, och hitta en vektor u så att $\{v_1, v_2, v_3, u\}$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

6. (5 p) En linje l skär linjerna $k = (1,0,1) + t(2,2,0)$ och $m = (4,1,-1) + s(1,2,1)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ ortogonalt i samma punkt. Bestäm en parameterform för l.

7. (5 p) Låt $M = ABCDE$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, och $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Beräkna $\det(M)$.

8. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) (3 p) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T.

(b) (2 p) Visa att T är en ortogonal projektion på en linje i $\mathbb{R}^2$ genom origo, och ange ekvationen till denna linje.

LYCKA TILL!!

Lösningar

1. Radreduktion av ekvationssystemets totalmatris ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{3} \end{pmatrix}$$

och vi får lösningen $(x, y, z, w) = (1, 14/3, -8/3, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$, där t är en reell parameter.

2. Om A och B är inverterbara, får vi att $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$. A och B är triangulära matriser med nollskilda element på diagonalen, så vi ser att $det(A) = 6, det(B) = 1$ och båda är inverterbara. Beräkning på det vanliga sättet ger

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och till sist

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 7/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Vi kan bryta ut en faktor x i alla rader, och skriver om ekvationen till

$$x^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vi kan se att lösningsmängden beror på matrisens determinant; är determinanten nollskilld blir ekvationen ekvivalent med $x^4 = 0$ och $x = 0$ är enda lösning; är däremot deteminanten 0 blir ekvationen $0 = 0$ och alla $x \in \mathbb{R}$ uppfyller ekvationen. Kofaktorutveckling längs din favoritrad eller -kolumn ger at matrisen har determinant 2, så ekvationen har lösningen $x = 0$.

4. Matrisen A har determinant $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$, så A är inverterbar om $a \neq -1, 0, 1$. Inversen för dessa a blir

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a-1)(a+1)} \begin{pmatrix} a^2 & 1-a & -a \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ -a & 1-a & a^2 \end{pmatrix}.$$

5. Vektorerna uppfyller relationen $v_1 + v_4 = v_2 + v_3$, villket man kan upptäcka genom t.ex. radoperationer av matrisen vars rader är v_i (eller beräkning av determinanten till samma matris, som är 0).

För att $\{v_1, v_2, v_3, u\}$ ska vara en bas för $\mathbb{R}^4$ måste $Span\{v_1, v_2, v_3, u\} = \mathbb{R}^4$, och eftersom vi då har fyra vektorer som spänner upp ett fyradimensionellt rymd, måste dom vara en bas. Vi måste alltså hitta en $u \notin Span\{v_1, v_2, v_3\}$; eftersom detta är ett tredimensionellt delrum av det fyradimensionella $\mathbb{R}^4$ borde en slumpmässig vektor i $\mathbb{R}^4$ duga; vi provar t.ex. $u = e_1 = (1, 0, 0, 0)$:

$$det[v_1, v_2, v_3, u] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 20 = -5 \neq 0,$$

alltså är $\{v_1, v_2, v_3, u\}$ en bas för $\mathbb{R}^4$. (Samma metod funkar för en villken som helst u.)

6. Om $l = p + t.v$ (där $t \in \mathbb{R}$), ger villkoren i uppgiften att p är skärningspunkten mellan k och m, och v är kryssprodukten av riktningsvektorerna till k och m.

För att hitta p sätter vi upp ekvationssystemet $(1, 0, 1) + t(2, 2, 0) = (4, 1, -1) + s(1, 2, 1)$ (ett linjärt ekvationssystem i två variabler t, s, med tre ekvationer) och får lösningen $t = 5/2, s = 2$. Innsättning ger då $p = (6, 5, 1)$. Riktningsvektoren v ges av kryssprodukten $(2, 2, 0) \times (1, 2, 1) = (2, -2, 2)$.

Linjen l kan alltså skrivas på parameterform som $l = (6, 5, 1) + t(2, -2, 2)$.

7. Om $M = ABCDE$ är $\det(M) = \det(ABCDE) = \det(A)\det(B)\det(C)\det(D)\det(E)$ (determinanten bevarar produkter). Det är lätt att se att $\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, så hela produkten blir 0.

8. (a) Det karakteristiska polynomet är $\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, så avbildningens egenvärden är $0, 1$. Egenvektorer är $v_0 = (1, -1)$, $v_1 = (1, 1)$.

(b) Egenrummet motsvarande $\lambda = 1$, som bevaras av T, är linjen $x - y = 0$, med riktningsvektor $(1,1)$. Projektionsavbildningen $v \mapsto proj_{(1,1)}(v)$ kan uttryckas som

$$(x,y) \mapsto \frac{(x,y)\cdot(1,1)}{(1,1)\cdot(1,1)}(1,1) = \frac{x+y}{2}(1,1) = (x/2 + y/2, x/2 + y/2).$$

Vi kan då läsa av matrisen $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, och observera att denna är samma matris som $[T]$.