UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg

Prov i matematik
ENVARIABELANALYS DEL 1

1MA013

2016-01-08

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Tabell på baksidan. Varje uppgift ger maximalt 5p, för godkänt delprov krävs minst 18p och här inräknas ev. bonuspoäng. Redovisa dina resonemang klart och tydligt.

1. Beräkna följande gränsvärden
   a)
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{2\,x^2+\ln x^2}{x^3\,\mathrm{e}^{-x}+x^2},$$
   b)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\ln(1+x)-\cos x}{x^2}.$$

2. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som
   $$f(x)=\begin{cases} a\,x+2, & x<1, \\ 2-x^2, & x\geq 1. \end{cases}$$
   a) Bestäm a så att $f(x)$ blir kontinuerlig för alla x.
   b) Undersök om funktionen med detta värde på a kommer att vara deriverbar för alla värden på x.

3. Bestäm det största intervall kring punkten $x=0$ där funktionen
   $$f(x)=x^3-3x+1$$
   är inverterbar samt beräkna $Df^{-1}(1)$.

4. Bestäm ekvationen för tangentlinjen i punkten $(1,1)$ till kurvan
   $$x^3+3\,x^2y-3\,xy^2-y^3=0.$$

5. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två kring punkten $x=\pi/2$ till funktionen
   $$f(x)=\sqrt{1+\sin x}.$$

6. Visa att polynomet $x^3+4\,x-6$ har exakt ett reellt nollställe. Motivera noga.

7. Undersök grafen till funktionen
   $$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$$
   med avseende på asymptoter, extrempunkter och konvexitet, samt skissa grafen.

8. Bestäm den maximala arean för en rektangel med hörn i origo, på positiva x−axeln, på positiva y−axeln samt på ellipsen $2\,x^2+y^2=2$.

LYCKA TILL!!

Formelblad till Envariabelanalys

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}H_1(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}H_2(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}H_3(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}H_4(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}H_5(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{2!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 - \frac{x^4}{4!}\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}H_6(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots + x^n H_7(x).$$

Funktionerna $H_1(x), H_2(x), H_3(x), \ldots H_7(x)$ är begränsade i något intervall kring $x = 0$.