Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

2016-03-17
PROV I MATEMATIK
BASKURS

Tentamen består av 10 problem (max 4 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5. Hjälpmedel: Skrivdon. Skrivtid: 8 - 13.

1. Bestäm de reella tal som uppfyller olikheten $|x-1| \leq 3$. Markera talen som ett intervall på tallinjen.

2. Bestäm samtliga **reella** nollställen till polynomet
$$(x^3-1)(x^2+2x+1)(x^4-1).$$
Ange särskilt nollställenas multiplicitet.

   Ledning: a är ett nollställe av multiplicitet m till polynomet $P(x)$ om $P(x) = (x-a)^m\, Q(x)$ där polynomet $Q(x)$ uppfyller $Q(a) \neq 0$.

3. Bestäm det komplexa talet
$$z = \frac{i}{1+i}$$
på formen $a + bi$, där a och b är reella tal, samt markera talet i komplexa talplanet.

4. Skissera grafen av funktionen
$$y = \sin\frac{1}{2}x\,, -2\pi \leq x \leq 2\pi.$$
Markera särskilt värdena av $\sin\frac{1}{2}x$ för $x = 0,\;\; x = \pm\pi$ och $x = \pm 2\pi$. Lös slutligen ekvationen $\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i intervallet $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

5. Skissera grafen av funktionen $y = \ln x$. Markera särskilt värdena av $\ln x$ för $x = \frac{1}{e}$, $x = 1, x = e$ samt för $x = e^2$. Bestäm slutligen det värde på x för vilket $\ln x = -\frac{1}{2}$.

6. Genom punkterna $(6, -10)$ och $(-9, 20)$ går en rät linje. Bestäm denna linjes ekvation på interceptform
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

7. Ange typen av kurvan
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$
samt skissera den i ett rätvinkligt koordinatsystem. Beräkna också koordinaterna för de punkter där kurvan skär eller tangerar koordinataxlarna.

V.G.V!

8. Sök alla reella och komplexa rötter till ekvationen $z^3 = -1$. Ange rötterna både på polär form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ samt på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Markera rötterna i det komplexa talplanet.

9. Bevisa med induktion att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2$$

för alla positiva heltal n.

10. Mängden $\mathbf{M}$=$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ett val av k olika siffror ur $\mathbf{M}$ kallas en kombination om den inbördes ordningen av siffrorna är betydelselös. Hur många sådana kombinationer ur $\mathbf{M}$ finns det för $k = 3$ och $n = 6$? Ange svaret dels som en binomialkoefficient, dels som ett tal samt redovisa hur samtliga kombinationer ser ut.

Binomialkoefficenter

Symbolen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

kallas **binomialkoefficient**. Den förekommer till exempel i kombinatorik och i binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$