Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Tentamen i Numeriska metoder och simulering, 5.0 hp, 2021-10-26

Skrivtid: $8^{00} - 13^{00}$
Hjälpmedel: Bifogat formelblad och miniräknare.

För fullt uppfyllda mål och kriterier på uppgifterna krävs fullständiga räkningar och utförliga resonemang samt motivering till alla svar.

För betyg 3 krävs: att man klarar varje delmål för betyg 3 i del A. För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna för respektive delmål. Du kan också komplettera ett missat delmål genom att klara motsvarande mål på del B.
För betyg 4/5 krävs: att man klarar både betyg 3 och en uppgift för betyg 4/5 i del B.

Del A (betyg 3)

Delmål 1: *kunna skriva ett Matlab-program som gör en numerisk simulering av något fenomen, givet en matematisk modell av fenomenet.*

1. Skriv ett Matlabscript som med hjälp av Trapetsmetoden löser differentialekvationen

$$y'(t) + 1000 \cdot y(t)^3 - t = 0, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

för $0 \leq t \leq 1$ och steglängden $h = 0.1$. I algoritmen kan du använda funktionen `fzero` som hittar nollstället till en funktion.

2. När man simulerar trafikflöden, t ex i en stad kan man använda stokastiska modeller och Monte Carlo-simuleringar. Med hjälp av en stokastisk process kan man då studera hur många fordon som finns vid olika trafikkorsningar en viss tidpunkt, eller hur antalet förändras med tiden.

   Antag att det finns en Matlabfunktion

```
function f = traffic(f0, T)
```

   som simulerar trafikfödet från tidpunkt 0 till tidpunkt `T`, givet ett visst antal fordon `f0` vid tidpunkt 0. Ett anrop till funktionen ger alltså *en* simulering. Utparametern `f` är en vektor som innehåller antalet fordon vid alla korsningar. Om det exempelvis finns 10000 korsningar, så är `f` en vektor av längd 10000.
   Nu är man intresserad av att simulera antalet fordon vid korsning nummer 5 (dvs position 5 i vektorn). Skriv ett Matlabscript som med Monte Carlo beräknar det förväntade antalet fordon i korsning nummer 5 vid tidpunkten T.

Delmål 2: *känna till viktiga begrepp i anslutning till numerisk simulering*

3. När man ska lösa differentialekvationer numeriskt måste man ta hänsyn till om ekvationen är **styv**. Vad kännetecknar en styv ODE. Ett eller flera alternativ kan vara rätt, ange alla rätta alternativ. För godkänd lösning krävs att alla rätta alternativ anges men inga felaktiga, med högst ett misstag.

   (a) Lösningen kan variera snabbt

   (b) Lösningen varierar långsamt i alla områden

   (c) Kräver litet tidssteg för stabilitet i explicita metoder

   (d) Explicita metoder är fördelaktiga

   (e) Implicita metoder är fördelaktiga

   (f) Lambda är stort för motsvarande testekvation

   (g) Noggrannheten är viktigare än stabiliteten och bestämmer steglängden

   (h) Stabiliteten är viktigare än noggrannheten och bestämmer steglängden

   (i) ODEn saknar analytisk lösning

   (j) ODEn är inte rättställd

   (k) Kan ha kraftigt skilda skalor för olika lösningskomponenter vid system

4. Förklara och ange skillnaden på begreppen *lokalt trunkeringsfel* och *globalt trunkeringsfel.*

Delmål 3: *kunna formulera och använda de olika algoritmer och numeriska metoder som ingår i kursen*

5. När man spelar Yatzy med tärningar vill man gärna samla på så många sexor som möjligt. Sannolikheten p(k) att få k sexor i n kast är binomialfördelad. Med fem kast får vi då följande fördelning:
   p(0)=0.4019
   p(1)=0.4019
   p(2)=0.1608
   p(3)=0.0322
   p(4)=0.0032
   p(5)=0.0001

   Antag nu att vi vill simulera fall ur denna fördelning och använder då likformigt fördelade slumptal i intervallet 0 till 1. Det slumptal som vi drar är

   0.4134, 0.9997, 0.2401, 0.8002, 0.1423, 0.9123

   Använd ITS-algoritmen för att bestämma vilka utfall dessa slumptal motsvarar.

6. Antag att vi vill lösa följande problem:

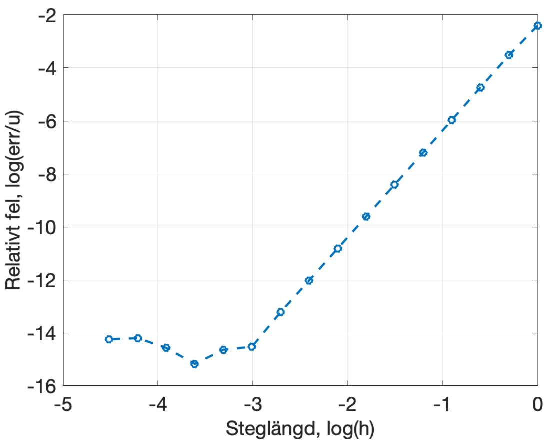
$$
\begin{aligned}
&y'' + 2y' + \frac{x}{(x+1)^2} y = \sin(x^2), \qquad x \geq 0 \\
&y(0) = 1, \quad y'(0) = 0
\end{aligned}
$$

Ställ upp Euler framåt (explicita Euler) för problemet och utför ett steg med steglängden h=0.1.

Delmål 4: *känna till egenskaper hos numeriska metoder och matematiska modeller samt kunna genomföra analys för att undersöka dessa egenskaper*

7. Härled stabilitetsvillkoret för Heuns metod tillämpad på testekvationen, $y' = \lambda y$ där $Re(\lambda) \leq 0$. Tillämpa sedan stabilitetsanalysen på problemet $y' + \frac{1000}{2+\sin(x)} y - x = 0$. Vilket är det största tidssteget som vi kan välja för att Heun ska vara stabil för det givna problemet.

8. Du har kommit över en ODE-lösare men vet inte vilken metod som ligger bakom och inte heller vilken noggrannhet den har. Du ställer då upp ett experiment där du löser en ODE med en känd analytisk lösning. På så sätt kan du jämföra den numeriska lösningen med den analytiska lösningen och beräkna felet för en given steglängd. Dina experiment genererar följande graf, se Figur 1. Förklara de olika delarna/regionerna



Figur 1: *Experiment med ODE-lösare.*

i grafen där felet beter sig olika, dvs förklara varför felet beter som det gör i dessa områden och vad det beror på. Bestäm metodens noggrannhetsordning.

Delmål 5: *kunna använda kunskap om egenskaper för att värdera och argumentera för olika metoders och modellers lämplighet i anslutning till en given problemställning*

9. När man ska välja en ODE-lösare till ett givet problem så kan man antingen välja *i) en explicit metod, ii) en implicit metod* eller *iii) en adaptiv metod.* För var och en av metoderna ange när de är tillämpliga och fördelaktiga samt ge exempel på en tillämpning eller en specifik ODE där man ska välja respektive metod och som är det bästa valet för det problemet.

10. ODEr kan också lösas stokastiskt med Gillespies algoritm, i vilka fall kan detta vara lämpligt/olämpligt och varför. Diskutera fallen *i) epidemimodellering med litet antal individer, ii) epidemimodellering med stort antal individer, iii) dubbelpendel med små vinklar, iv) dubbelpendel med stora vinklar, v) en modell för aktiekurser.*

Del B (betyg 4/5)

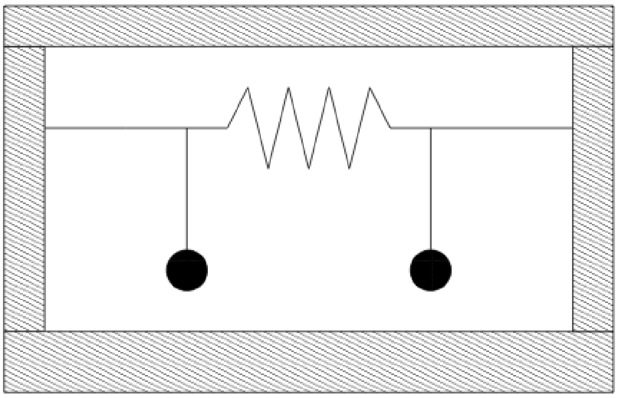
11. I den här uppgiften ska du beräkna en integral med Monte Carlometoden och uppskatta dess beräkningskomplexitet. Vi delar upp uppgiften i mindre delar och delfrågor. Delfrågorna kan komplettera eventuellt missade mål från del A men för att nå upp till betyg 4 bör uppgiftens samtliga delar besvaras och mål uppfyllas.

    (a) Beräkna integralen $I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\ln(x+2)}dx$ med Monte Carlometoden och 10 likformigt fördelade slumptal på intervallet $x \in [0, 1]$.

    (b) Om vi skulle göra om beräkningen med 10 nya slumptal skulle vi antagligen få ett nytt resultat. Varje upprepning av beräkningen kommer alltså ha ett fel som kan variera även om vi använder samma antal slumptal. För att då få en feluppskattning av integralberäkningen kan man använda sig av konfidensintervall, beskriv vad det är och hur det kan användas för feluppskattning.

    (c) Storleken på felet (feluppskattningen) i integralberäkningen kommer att bero av antalet punkter N som $1/\sqrt{N}$, dvs vi har noggrannhetsordning 0.5. Antag att vi vill förbättra lösningen från uppgift (a) med en faktor 1000, uppskatta hur många slumptal N vi skulle behöva använda då.

12. Differentialekvationer i riktiga tillämpningar innehåller ofta ett antal parametrar. Värdena på parametrarna kan vara svåra att bestämma exakt och kan vara störda av tex mätfel. Ett sådant exempel är väderprognoser där insamlingen av väderdata kan innehålla små fel av olika slag som är slumpmässigt fördelade. För att uppskatta säkerheten i en väderprognos lägger man då till små slumpmässiga störningar till parametrarna och beräknar prognosen upprepade gånger. Man gör s.k. *ensemble prognoser* och tittar på spridningen av dessa. Vi ska i den här uppgiften göra ensemble prognoser för ett modellproblem. Som exempel kan vi betrakta följande tillämpning.



Figur 2: *Dubbelpendel med fjäder.*

Här har vi två pendlar med samma massa och samma längd som är sammankopplade med en fjäder (se Figur 2).

Rörelseekvationerna för de två pendlarna kan beskrivas med differentialekvationerna

$$\theta_1'' + \sin(\theta_1) + \alpha(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\theta_2'' + \sin(\theta_2) - \alpha(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Här motsvarar θ_1 och θ_2 respektive vinkel för pendlarna och α en konstant som är beroende av längden och massan på pendeln samt av fjäderkonstanten hos fjädern mellan pendlarna. Parametern α inte är känd exakt och likaså har vi inte heller exakta värden på vinklarna θ_1 och θ_2 vid start. Din uppgift blir nu att lösa rörelseekvationerna för pendlarna med upprepade störningar i parametrarna α, θ_1 och θ_2. Du ska sedan beräkna väntevärde och standardavvikelse för $\theta_1(T)$ vid en sluttid T=10. Sätt också upp 95% konfidensintervall för $\theta_1(T)$. För att illustrera fördelningen av $\theta_1(T)$ rita upp ett histogram. Du ska också rita upp de olika lösningarna över alla t från t=0 till t=T i en figur för att få en uppfattning om prognosens säkerhet.

Antag att systemet startar från vila och använd följande variation på parametrarna:

$\alpha \in N(10, 0.1)$ *(Normalfördelat med väntevärde 10 och standardavvikelse 0.1)*
$\theta_1(0) \in N(\pi/10, \pi/100)$
$\theta_2(0) \in N(\pi/10, \pi/100)$

Skriv ett Matlabscript som löser uppgiften. Du kan använda Matlabs inbyggda funktioner för ODE-lösning och slumptalsgenerering. För betyg 4 räcker det med en algoritmbeskrivning men för betyg 5 bör det vara ett detaljerat och (nästan) körbart program med motivering till val av metoder, tex varför du väljer en viss ODE-lösare.