UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson
Sebastian Pöder
Hania Uscka-Wehlou

Prov i matematik
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand, IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018–06–05

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Avgör för vilka värden på konstanten p ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -p \\ 3x_1 + 5x_2 - px_3 = 3 \\ px_1 + 3px_2 + x_3 = p \end{cases}$$

(a) har exakt en lösning

(b) har oändligt många lösningar

(c) saknar lösningar (är inkonsistent).

Bestäm även rangen till koefficientmatrisen för varje $p \in \mathbb{R}$.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ och $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att A är inverterbar och ange inversen A^{-1}.

(b) Finn alla matriser X sådana att $A^T X A = 2I$.

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} -1 & -x & x & x+1 \\ -1 & -1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 & -x-1 \\ x+1 & 2x & -2x & -3x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Punkterna $A : (-8, 11, 1), B : (-3, 9, 5)$ och $C : (1, 7, 5)$ är givna. Finn en punkt D sådan att A, B, C, D är hörnen i ett parallellogram, och finn arean av detta parallellogram.

Var god vänd!

5. Planen $E : x - 2y + z = 3$ och $F : -x + y + z = -2$ skär i en linje l. Planet G går genom punkten $(1, 0, 1)$ och är ortogonal mot vektorn $\vec{u} = (1, 1, -5)$.

(a) Bestäm linjen l:s ekvation på parameterform.

(b) Bestäm planet G:s ekvation på normalform (standardform).

(c) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan planet G och linjen l eller motivera varför de inte finns.

6. Finn avståndet mellan punkten $P : (1, 2, 3)$ och linjen $L : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, samt den punkt på L som är närmast P.

7. Avgör om vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. I så fall, bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i denna bas.

8. Låt den linjära avbildningen S från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $(x, y) = t(1, 2),\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm S:s matris i standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

(b) Finn bilden av $(1, 4)$ under avbildningen S.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018–06–05

Lösning till problem 1. Ett ekvationssystem har exakt en lösning $\leftrightarrow$ koefficientmatrisen har nollskild determinant. Determinanten är

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -p \\ p & 3p & 1 \end{vmatrix} = -p^2 - 8p - 7 = -(p+7)(p+1).$$

De två fallen $p = -1$ och $p = -7$ kollas separat. För $p = -1$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och för $p = -7$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ -7 & -21 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 13 & -18 \\ 0 & 7 & -13 & 42 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right).$$

(a) För alla $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -7\}$ har vi exakt en lösning. Rangen är tre (full rang).

(b) För $p = -1$ har vi oändligt många lösningar. Rangen är två.

(c) För $p = -7$ saknas lösningar. Rangen är två.

Lösning till problem 2. (a) Vi har $\det A = 6 \neq 0$, så A är inverterbar med invers enligt formel eller via Jacobis metod

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(b) Obs att för matrisen A gäller $A^T = \det(A)A^{-1}$, så $A^T X A = 2I \leftrightarrow$

$$X = (A^T)^{-1} 2IA^{-1} = (\det(A)A^{-1})^{-1} 2IA^{-1} = \frac{1}{\det A} A2IA^{-1} = \frac{1}{6} 2IAA^{-1} = \frac{1}{3} I = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 3. Vi beräknar

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & -x & x & x+1 \\ -1 & -1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 & -x-1 \\ x+1 & 2x & -2x & -3x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -x & x & x \\ -1 & -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x-1 & -x \\ x+1 & 2x & -2x & -2x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & -x & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & -1 \\ x+1 & 2x & -2x & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 2x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & x-1 & -1 \\ x-1 & 2x-2 & -4x-2 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 2x-1 \\ 0 & 0 & x \\ x-1 & 2x-2 & -4x-2 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 0 & 1-x \\ x-1 & 2x-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2(x-1)^2.$$

Vi har två dubbelrötter $x = 0$ och $x = 1$.

Lösning till problem 4. Det finns tre val av D. Exempelvis väljer vi D sådan att $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, vilket ger $D = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$. I vilket fall är arean lika med

$$\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| = \| \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{8^2 + 16^2 + 2^2} = \sqrt{324}.$$

Lösning till problem 5. (a) Vi löser ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Sätter vi $z = t$ ger detta $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

(b) $1(x-1) + 1(y) - 5(z-1) = 0 \leftrightarrow x + y - 5z = -4$.

(c) Eftersom $\vec{u}$ är ortogonal mot linjen l kommer planet G antingen innehålla hela l, eller inte skära l. Vi kontollerar en punkt: $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in l$, men $Q \notin G$. Alltså skär inte l och G.

Lösning till problem 6. Välj en punkt på L, t ex $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L$. Då är $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och

$$\vec{w} := \operatorname{proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $\vec{v}$ är en riktningsvektor till l, exempelvis $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger avståndet som $\|\overrightarrow{QP} - \vec{w}\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$ och närmaste punkten $Q + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning till problem 7. Antalet vektorer är rätt (tre vektorer i $\mathbb{R}^3$), så de utgör en bas precis då matrisen $A = (\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2 \;\; \vec{v}_3)$ är inverterbar. Vi beräknar

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

så de utgör en bas. Koordinaterna till $\vec{v}_4$ är c_1, c_2, c_3 som löser $A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{v}_4$. Vi beräknar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1/3 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1 \;\; -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right)$$

så koordinaterna är $(14/3, -1/3, 4/3)$.

Lösning till problem 8. (a) Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vara linjens riktningsvektor. S verkar som $S(\vec{u}) = 2\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} - \vec{u}$, så $S(e_1) = 2\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ och $S(e_2) = 2\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ varför

$$[S] = (S(e_1) \;\; S(e_2)) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi beräknar $S\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = [S]\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}$.