**Uppsala Universitet**
**Matematiska institutionen**
Martin Blomgren

**Algebra I, 5hp**
2014-01-07 kl. 08.00–13.00
Tentamen i kurs `1MA004`

*Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Föreliggande tentamen utgörs av åtta problem; varje problem ger högst fem poäng. Tabellen nedan ger relationen mellan totalpoäng och betyg. Ange eventuellt godkänt resultat på inlämningsuppgifterna i kommentarsfältet hörande till uppgift 1, vilken då tillgodoräknas med full poäng. Notera att uppgift 1 skall i så fall* **ej** *lösas.*

| $\sum$ | 0-17 | 18-24 | 25-31 | 32-40 |
|---|---|---|---|---|
| Betyg | U | 3 | 4 | 5 |

**1.** Låt $p, q, r$ vara utsagor. Är "$p \to q \to r$" otvetydigt? D.v.s gäller det att

$$((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))?$$

**2.** Bestäm det minsta icke-negativa heltal $r$ sådant att

$$3^{43} + 17 \equiv r \pmod{16}.$$

**3.** Visa med induktion

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

för $n \geq 2$.

**4.** Lös fullständigt den diofantiska ekvationen

$$31x + 17y = 144.$$

Bestäm även de lösningar $(x, y)$ sådana att $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

**5.** Låt $f(X) = X^5 + 5X^3 + X^2 + 6X + 3$ och $g(X) = X^5 + X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3$ vara polynom i $X$. Bestäm $\mathrm{SGD}(f(X), g(X))$.

**6.** Låt $A$ vara mängden som utgörs av de tal i intervallet $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, vilkas decimalbråksutveckling slutar med en oändlig svit av 3:or. Ett tal $x \in A$ är

$$x = 0,00897148912363333333333333333333333\ldots$$

Visa att $A$ är uppräknelig.

**7.** Låt $R$ vara relationen på $\mathbb{R}$ sådan att för $x, y \in \mathbb{R}$ så $xRy$ om, och endast om $x^2 - y^2 = \sqrt{2}n$ för något $n \in \mathbb{Z}$.
(a) Visa att $R$ är en ekvivalensrelation.
(b) Finns det ett $x \in \mathbb{R}$ sådant att $xR(1 + x)$?

**8.** Låt $a$ och $b$ vara heltal sådana att $a \equiv 2 \pmod 5$ och $b \equiv 1 \pmod 5$ samt låt $f(X) = X^3 + aX + b$. Visa att $f(X)$ är irreducibelt över $\mathbb{Z}$.