Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich, Martin Herschend

Civilingenjörsprogrammen F, IT, STS, W
Kandidatprogrammet i matematik
Gymnasielärarprogrammet

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2014–03–11

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan 2014-02-14 får hoppa över den första uppgiften.

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Hitta en bas i kolonnrummet $K(A)$.

(b) Hitta en bas i nollrummet $N(A)$.

(c) Ange dimensionen av $K(A)$ och dimensionen av $N(A)$.

2. Vektorrummet $\mathcal{P}_2$ består av alla polynom av grad högst 2. Avgör om den linjära operatorn $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2,\ f(p) = p + p' + p''$ är inverterbar. Om så är fallet, finn $f^{-1}(q)$ för polynomet $q(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

3. Hitta alla värden på a så att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & -a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar. Finn, för var och en av dessa a, en inverterbar matris T och en diagonal matris D så att

$$T^{-1}AT = D.$$

4. Den linjära operatorn f på $\mathbb{E}^3$ ges som rotation med vinkel $\frac{\pi}{2}$ kring den axel L genom origo som har riktningsvektor $\ell = (1, 1, 1)$. Rotationen sker moturs om man tittar på $L^\perp$ så att vektorn ℓ pekar mot betraktarens öga.

(a) Finn f:s matris i standardbasen.

(b) Finn $f(x)$ för $x = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$.

Var god vänd!

5. Vektorerna $(1,0,1,0)$ och $(0,1,1,0)$ spänner upp ett delrum U i $\mathbb{E}^4$. Finn det kortaste avståndet från vektorn $w=(1,1,1,1)$ till U, samt den vektor u i U som ligger närmast w.

6. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Speciellt är polynomen $p(x)=1+x$ och $q(x)=1+x^2$ vektorer i $\mathcal{P}$.

(a) Beräkna längderna $\|p\|$ och $\|q\|$.

(b) Beräkna den inre produkten $\langle \frac{p}{\|p\|}+\frac{q}{\|q\|}, \frac{p}{\|p\|}-\frac{q}{\|q\|}\rangle$.

(c) Bestäm vinkeln α mellan vektorerna $\frac{p}{\|p\|}+\frac{q}{\|q\|}$ och $\frac{p}{\|p\|}-\frac{q}{\|q\|}$.

7. Ytan Y i $\mathbb{E}^3$ består av alla punkter (x_1,x_2,x_3) som uppfyller

$$3x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 = 1.$$

Bestäm ytans typ, kortaste avståndet till origo och de punkter där det kortaste avståndet antas. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0)=3$ och $y_2(0)=5$.

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Bestäm A^n för alla heltal n, där $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar till tentan 2014-03-11

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $(A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2})$ är en bas i $K(A)$, exempelvis.

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 5x_4 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 \end{cases}$ Sätt $\begin{cases} x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$. Då är

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2s+5t \\ s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alltså är $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en bas i $N(A)$, exempelvis.

(c) $\dim(K(A)) = 2 = \dim(N(A))$.

2. $\underline{X} = (1, X, X^2)$ är en bas i $\mathcal{P}_2$. f:s matris i $\underline{X}$ är

$$A = \left([f(1)]_{\underline{X}} \,\middle|\, [f(X)]_{\underline{X}} \,\middle|\, [f(X^2)]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \Rightarrow A$ är inverterbar $\Rightarrow f$ är inverterbar.

$$[f^{-1}(q)]_{\underline{X}} = [f^{-1}]_{\underline{X}} [q]_{\underline{X}} = [f]_{\underline{X}}^{-1} [q]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Svar. f är inverterbar. $f^{-1}(q) = -1 - 4X + 3X^2$.

3. $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2-a & a \\ & \lambda-1 & -1 \\ & & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-a)$ löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$.

Om $a=1$, då är $\dim(E(1)) = 1$, eftersom

$$I - A = \begin{pmatrix} 0&1&1\\ &0&-1\\ &&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} &1&0\\ &&1 \\ && \end{pmatrix}.$$

Om $a \neq 1$, då är $\dim(E(a)) = 1$ och $\dim(E(1)) = \begin{cases} 1 & \text{om } a \neq 2 \\ 2 & \text{om } a = 2 \end{cases}$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0&2-a&a\\ &0&-1\\ &&1-a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0&2-a&0\\ &&1\\ && \end{pmatrix}.$$

Alltså är A diagonaliserbar omm $a=2$. I detta fall är

$$I - A \sim \begin{pmatrix} &&1\\ &&\\ && \end{pmatrix}, \text{ alltså } b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ en bas i } E(1), \text{ och}$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1&0&2\\ &1&-1\\ &&0\end{pmatrix}, \text{ alltså } b_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \text{ en bas i } E(2).$$

Ekvationen $T^{-1}AT = D$ löses alltså av $T = \begin{pmatrix} 1&&-2\\ &1&1\\ &&1\end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1&&\\ &1&\\ &&2\end{pmatrix}$, exempelvis.

4. Om $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ är en on-bas i E^3 så att b_1 har samma riktning som ℓ och b_3 är högerhandorienterad m.a.p. (b_1, b_2), då är

$$A = [f] = T[f]_{\underline{b}}T^T, \text{ där } T = (b_1 | b_2 | b_3) \text{ och } [f]_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1&&\\ &0&-1\\ &1&0\end{pmatrix}.$$

I enlighet med detta tar vi $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, väljer $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, och får

$$b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Därmed blir

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{och}$$

$$[f(x)] = [f][x] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> (a) $[f] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0) = (1, 1, -2)$.

4. Vektorerna $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildar en bas i U. Alltså bildar vektorerna

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\| \text{dito} \|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\| \text{dito} \|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en on-bas i U. Därmed är $u = \text{proj}_U(w) = (w \cdot b_1)\, b_1 + (w \cdot b_2)\, b_2$

$$= \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{och}$$

$$d(w,\mathcal{U}) = d(w,u) = \|w-u\| = \left\| \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} .$$

<u>Svar.</u> $d(w,\mathcal{U}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$.

6. (a) $\|p\|^2 = \langle p,p \rangle = \int_0^1 (1+x)^2\,dx = \int_0^1 (1+2x+x^2)\,dx = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{7}{3}$

<u>medför att</u> $\|p\| = \sqrt{\frac{7}{3}}$;

$$\|q\|^2 = \langle q,q \rangle = \int_0^1 (1+x^2)^2\,dx = \int_0^1 (1+2x^2+x^4)\,dx = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+3}{15} = \frac{28}{15}$$

<u>medför att</u> $\|q\| = \sqrt{\frac{28}{15}} = 2\sqrt{\frac{7}{15}}$.

(b) $$\left\langle \frac{p}{\|p\|} + \frac{q}{\|q\|}, \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\rangle = \frac{\langle p,p \rangle}{\|p\|^2} - \frac{\langle p,q \rangle}{\|p\|\|q\|} + \frac{\langle q,p \rangle}{\|q\|\|p\|} - \frac{\langle q,q \rangle}{\|q\|^2}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

(c) $$\cos\alpha = \frac{\left\langle \frac{p}{\|p\|} + \frac{q}{\|q\|}, \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\rangle}{\left\| \frac{p}{\|p\|} + \frac{q}{\|q\|} \right\| \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\|} \underset{(b)}{=} 0$$ <u>medför att</u> $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

7. Y: $q(x) = x^T A x = 1$, där $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\big((\lambda-3)\lambda - 4\big)$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$ löses av

$\lambda = 1$ och $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$.

Alltså är $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ egenvärdena till A. Om $b_i \in E(\lambda_i)$ är normerad $\forall\, i \in \underline{3}$, då är $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en on-egenbas till A i $\mathbb{E}^3$, och för alla $x \in \mathbb{E}^3$ gäller

$$q(x) = 4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \quad , \quad \text{där } y = [x]_{\underline{b}} .$$

<u>Ytan</u> $Y : 4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ <u>är en enmantlad hyperboloid</u>. Vidare gäller $\forall\, x \in Y$

$$y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y_3^2 \quad ,$$

alltså

$$d(x,0)^2 = \|x\|^2 = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 + y_3^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}y_3^2 \geq \frac{1}{4} \quad ,$$

där $d(x,0)^2 = \frac{1}{4}$ omm $y_2 = y_3 = 0$ och $y_1 = \pm\frac{1}{2}$.

$$d(Y,0) = \frac{1}{2} \ \underline{\text{antas alltså i punkterna}}\ x = \pm\frac{1}{2}b_1 \underset{\text{se nedan}}{=} \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} .$$

$$E(\lambda_1) = E(4) = N(4I-A) = \left\{ \begin{bmatrix}2t\\t\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \right\} . \text{ Tag } b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} .$$

$$4I-A = \begin{bmatrix}1 & -2 & \\ -2 & 4 & \\ & & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ & & 1\\ & & \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Sätt } x_2 = t .$$

8. $y' = Ay$, där $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\4 & -3\end{bmatrix}$ och $y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -4 & \lambda+3\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+3) + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$$E(1) = N(I-A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är bas i } E(1).$$

$$I - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = x_2. \text{ Sätt } x_2 = t.$$

$$E(-1) = N(-I-A) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ är bas i } E(-1).$$

$$-I - A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2. \text{ Sätt } x_2 = t$$

Matrisekvationen $S^{-1}AS = D$ löses av $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

Det diagonala systemet $z' = Dz$ har den allmänna lösningen $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{x} \\ z_2 = c_2 e^{-x} \end{cases}$, där $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Det givna systemet $y' = Ay$ har den allmänna lösningen

$$y = Sz = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 + 2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x} \end{pmatrix}, \quad \text{där } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Denna uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$Sc = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Svar. $\begin{cases} y_1 = e^{x} + 2e^{-x} \\ y_2 = e^{x} + 4e^{-x} \end{cases}$

8'. Med S och D som i uppgift 8 gäller $S^{-1}AS = D \Rightarrow A = SDS^{-1}$.

Detta medför för alla $n \in \mathbb{N}$ att

$$A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{cases} SIS^{-1} = I & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ SDS^{-1} = A & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases},$$

samt $A^{-n} := (A^{-1})^n = A^n$.

Svar. För alla $n \in \mathbb{Z}$ gäller at $A^n = \begin{cases} A & \text{om } n \text{ är udda} \\ I & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$