UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ketil Tveiten

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I - 1MA025
2016-10-19

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Tentamen består av **8 frågor** *om* **5 poäng** *för totalt* **40 poäng**. *De preliminära betygsgränserna är som följer: 18 till 24 poäng ger betyget 3, 25 till 31 poäng ger betyget 4, 32 till 40 poäng ger betyget 5.*

1. (5 p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

(Denna uppgift kan skippas om du har klarat duggan.)

Lösning: Systemets totalmatris är radekvivalent med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

och det följer att systemet har lösning $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -2, 3, 0) + t(2, -3, 0, 1)$, där $t \in \mathbb{R}$ är en reell parameter.

2. (5 p) Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$ABX + X = C + BAX,$$

där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $(AB - BA + I)X = C$, och om $(AB - BA + I)$ är inverterbar, med $X = (AB - BA + I)^{-1}C$. Matrisen $AB - BA + I$ är

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

och produkten $X = (AB - BA + I)^{-1}C$ kan beräknas genom Gauss-Jordans metod vid radreduktion av blockmatrisen $(AB - BA + I|C)$, villket ger

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 1 \\ 0 & -1/5 & -1 \\ 0 & -4/5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. (5 p) Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & x \\ 0 & 3 & x & 3 \\ 4 & x & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning: Determinanten är lika med $24x^2 - x^4 = -x^2(x^2 - 24)$, som har nollställen $0, \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$.

4. (5 p) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 \\ a & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Hitta inversen A^{-1} för dom a där inversen finns.

Lösning: $det(A) = 2 - a^2$, så A^{-1} finns om $a \neq \pm\sqrt{2}$. Inversen ges av $A^{-1} = \frac{1}{2-a^2} \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1-a \\ 1 & -a-1 & 1 \\ 1-a^2 & a^2+a-1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vad är $rang(A)$? (2 p)

(b) Är vektorerna $v_1 = (2,4,6,1)$, $v_2 = (1,6,2,1)$ och $v_3 = (0,0,2,0)$ linjärt oberoande? (2 p)

(c) Vad är $rang(A^T)$? (1 p)

Lösning: (a) Matrisen är radekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så den har rang 3. Av detta följer att motsvarande linjäravbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ är injektiv, villket innebär att vektorerna som utgör matrisens kolumner är linjärt oberoande, så svaret på delfråga (b) är *ja*. Dessa vektorer är också raderna i A^T, och eftersom dom är linjärt oberoande, följer att även denna matris har rang 3, som besvarar (c).

6. (5 p) Beräkna minsta avståndet mellan punkten $P = (1, 0, 2)$ och planet π som innehåller punkterna $Q : (1, 1, 1)$, $R : (2, 2, 2)$ och $S : (-1, -2, 1)$.

Lösning: Det finns många sätt att beräkna avståndet, t.ex. genom att beräkna volymen av parallellepipeden definierad av vektorerna QP, QR och QS (given av determinanten av matrisen med dessa kolumner), och sen dela på arean av parallellogrammet definierad av QR och QS (given av längden av deras kryssprodukt). Avståndet är $1/\sqrt{14}$.

7. (5 p) Betrakta följande linjäravbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: S, given av spegling i x-axeln; T, given av spegling i linjen $x = y$, och U, given av rotation om origo med vinkel $-\pi/2$ (alltså i riktning *medurs*). Vad är standardmatrisen för den samansatte avbildningen $U \circ T \circ S$?

Lösning: Vi har $[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $[U] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man kan då lätt se att produkten $[U][T][S]$ av dessa matriser är I_2, 2×2-identitetsmatrisen.

8. (5 p) Punkterna $P_1 = (2, 2, 3)$, $P_2 = (8, 0, -1)$ och $P_3 = (0, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^3$ bildar en triangel. Bestäm arean på denna triangel.

Lösning: Arean ges av $1/2$ gånger normen till kryssprodukten til t.ex. vektorerna P_3P_1 och P_3P_2; denna vektor är $(0, 20, -10)$, som har norm $10\sqrt{5}$, arean är då $5\sqrt{5}$.

LYCKA TILL!!