Information 1TD403, 231026

Betygskrav

Det är maximalt 2 poäng per uppgift i del A, och maximalt 8 poäng per uppgift i del B. Detta medför maximalt 32 poäng på tentan. Tentan bedöms dock efter uppnådda delmål (implementation, begrepp, algoritmer och analys).

För betyg 3 krävs: Att man klarar varje delmål för betyg 3. För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna för respektive delmål. Det här motsvarar 8 poäng, som måste vara fördelat över alla målen.

Du kan också komplettera ett missat delmål genom att klara motsvarande mål på del B.

För betyg 4 krävs: Att man klarar både betyg 3 och minst en uppgift korrekt i del B. Detta motsvarar minst 8 poäng på en uppgift i del B.

För betyg 5 krävs: Att man klarar betyg 3, samt i huvudsak båda uppgifterna för högre betyg (smärre felaktigheter är tillåtna). Detta motsvarar ca 14 poäng på del B.

Hjälpmedel

Formelbladet för kursen och Scipy/Python online. Dessa finns under "Resurser" i Inspera. Du kan använda Python som miniräknare och givetvis också för att skriva program. Dessutom är vanlig miniräknare tillåten (men inte nödvändig).

Det finns länkar till två olika online Python resurser, men den ena får fungera som reserv eftersom SciPy inte går att använda där (däremot kan det fungera som "miniräknare". Dessutom finns en länk till ScyPy online, som fungerar för Python, NumPy och ScyPy.

Lösningarna skriver du in direkt här i Inspera men du kan även lämna in lösningar på papper (gäller även uppgifterna i del A). Om du lämnar in på papper, ange detta i textfältet. Det är då också viktigt att du skriver din kod på varje lösningsblad.

ⁱ Delmål 1, 1TD403

Delmål 1: kunna skriva ett program (i Python eller Matlab) som gör en numerisk simulering av något fenomen, givet en matematisk modell av fenomenet

För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna.

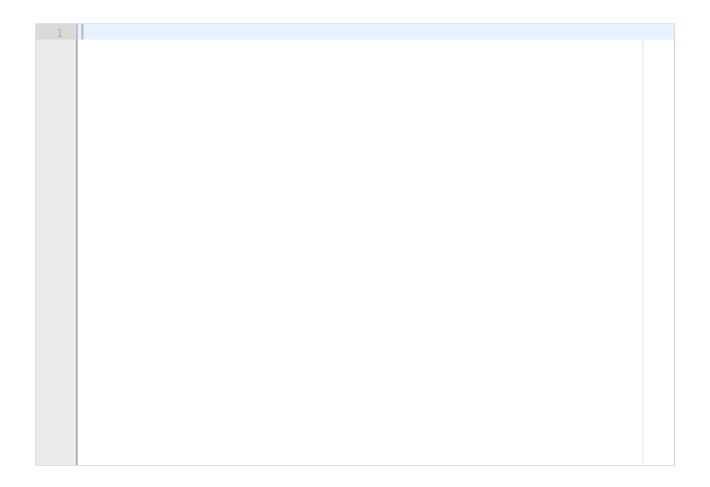
¹ ODE, implementation

Givet den ordinära differentialekvation $y'(t)-sin(y^2(t))=0$. Beräkna och plotta lösningen på $0\leq t\leq 5$, då y(0)=0.5.

Lös problemet i Python genom att använda SciPy och solve_ivp.

Använd ScyPy online och klistra in koden i textrutan nedan. Du behöver inte redovisa plotten, men koden för plottning ska finnas med. Koden ska vara körbar.

Skriv in ditt svar här



² ODE, hjärtsimulering

De elektriska signalerna som leder till hjärtats sammandragningar kan mätas med EKG. Signalerna kan även simuleras med en ODE:

$$egin{cases} u''(t)-c\cdot(1-u^2)\cdot u'(t)+d\cdot u(t)=0\ u(0)=0\ u'(0)=-0.5 \end{cases}$$

där u(t) är signalens amplitud vid tid t, c och d är parametrar. Skriv ett Pythonprogram som beräknar u(t) på tidsintervallet $t \in [0, 100]$ med hjälp av funktionen **solve_ivp**. Använd c = 10 och d = 0.5. Plotta även u(t) (notera, en graf, inte två).

Du kan antingen lösa problemet i SciPy online och klistra in koden i rutan nedan. Du behöver inte redovisa plotten. Alternativt kan du skriva koden mer i "algoritmform". Mindre syntaxfel ger då inga avdrag.

Skriv in ditt svar här

1	

ⁱ Delmål 2, 1TD403

Delmål 2: *känna till viktiga begrepp i anslutning till numerisk simulering*För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna.

³ Begrepp, Markovprocess

Metoderna/modellerna i vänstra kolumnen är antingen en kontinuerlig Markovprocess, en diskret Markovprocess, eller inget av dem. För varje metod/modell, ange vilket som gäller i det fallet. Minst 6 (av 8) svar måste vara korrekta för full poäng.

Matcha ihop värdena:

	Diskret Markovprocess	Ingen av de båda	Kontinuerlig Markovprocess
Deterministisk modell av radioaktivt sönderfall	0	0	0
Stokastisk Predator-Prey modell (rovdjur-bytesdjur)	0	0	0
Diffusion (spridning) av partiklar	0	0	0
Brownsk rörelse	0	\circ	0
En differentialekvation (ODE)	0	\circ	0
En Monte Carlometod	0	0	0
Stokastisk modell av radioaktivt sönderfall	0	0	0
Kan simuleras med SSA (Gillespies algoritm)	0	0	0

4 Olika begrepp

Nedan finns några olika viktiga begrepp som ingår i kursen beskrivna. Skriv vilket begrepp som beskrivs i respektive textfält.

(a) Om flyttalsberäkning fl(1+x) = 1	(dvs talet x "försvinner") så är talet x mindre än
(b) En	modell, är en modell som innehåller slumpinslag så att
utdata inte beror entydigt på indata. (c) <i>h</i> -potensen i det globala diskretise brukar kallas	eringsfelet hos en numerisk metod för lösning av ODEer
(d) En ordinär differentialekvation sor kallas	m innehåller mycket snabbt förlopp under kort tid brukar
	Totalpoäng: 2

i Delmål 3, 1TD403

Delmål 3: kunna formulera och använda de olika algoritmer och numeriska metoder som ingår i kursen

För att visa att du har nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna.

⁵ Monte Carlo, partikel i cell

Antag att du har tillgång till en funktion **partikel(t)**, som innehåller en stokastisk simulering (en stokastisk process) av hur en partikel i cell rör sig under *t* sekunder. Funktionen returnerar värdet **dist**, som anger hur långt från utgångspunkten en partikel har rört sig vid tidpunkt *t*.

Skriv en algoritm som besvarar frågan "hur långt från utgångspunkten har en partikel i cellen i genomsnitt rört sig under 2 sekunder".

Skriv in ditt svar här			

⁶ Algoritm, Heuns metod

Visa att du förstår Heuns metod, genom att använda metoden för att beräkna en approximation till y(0.1) för följande ODE

$$egin{cases} y'(t) = -3y^2 + t^2 & t \geq 0 \ y(0) = 2 \end{cases}$$

Använd steglängd h=0.1.

Du kan använda Python som en miniräknare, men skriv ner formler och beräkningar i textrutan (alternativt lämna in handskriven lösning).

Skriv in ditt svar här

Teckenf	- B	I <u>U</u>	Xa	$\mathbf{x}^{a}\mid \underline{\mathbf{I}}_{x}\mid \widehat{\ }_{\widehat{\square}}$	= C	:≣ Ω	Σ
X							
							Ord: 0

Totalpoäng: 2

ⁱ Delmål 4, 1TD403

Delmål 4: känna till egenskaper hos numeriska metoder och matematiska modeller samt kunna genomföra analys för att undersöka dessa egenskaper För att visa att du nått delmålet behöver du klara minst en av de följande två uppgifterna.

⁷ Analys tidsåtgång ODE

Antag att en differentialekvation är löst på tidsintervallet $t = [0 \ 100]$ sekunder och att Eulers metod, Heuns metod respektive klassisk Runge-Kutta används. Olika steglängd h används så att alla tre metoderna ger samma noggrannhet i beräkningarna.

Metoderna och de valda steglängderna är angivna i tabellen nedan. Dessutom anges beräkningstiden för ett tidssteg, totalt antal tidsteg för hela beräkningen, och den totala beräkningstiden.

Tyvärr saknas en del siffror i tabellen. Med hjälp av den data som är given, uppskatta siffrorna i de tomma rutorna.

Metod	Tidsteg, h	Tid, ett tidsteg (sekunder)	Totalt antal tidssteg	Total beräkningstid (sekunder)
Euler	0.0016	0.00005	62500	3.125
Heun	0.04			
KI. R-K	0.5			

Totalpoäng: 2

8 Analys av Fel i ODE-beräkning

Antag att du löser en ordinär differentialekvation med Heuns metod och steglängd h=0.1, och beräkningen har ett relativt fel som uppskattas till e=0.05.

Om beräkningen upprepas, men nu med steglängd h=0.01, vilket fel skulle beräkningen approximativt leda till?

Motivera ditt svar (korrekt svar men utan eller med fel motivering ger inga poäng).

Skriv in ditt svar här					
ange detta i textrutan.					
Du kan skriva lösningen i textfältet.	. Alternativt går	det att lämna	in handskriven	lösning. I	så fall,

ⁱ Delmål 5, 1TD403

Delmål 5

Kunna använda kunskap om egenskaper för att värdera och argumentera för olika metoders och modellers lämplighet i anslutning till en given problemställning

För att visa att du nått delmålet behöver du klara minst en av de två uppgifterna.

OBS! Med tanke på vad det här delmålet handlar om är det viktigt att du verkligen åstadkommer en tydlig argumentation, som övertygar läsaren om att det alternativ du förespråkar skulle vara lämpligast.

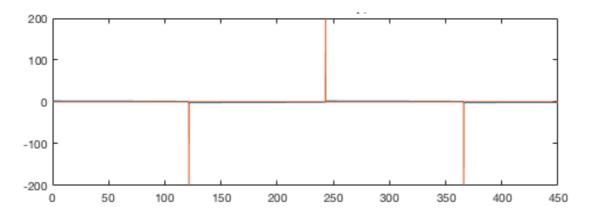
9 ODE, val av metod

I bilden nedan visas lösningen till en ODE. Antag att du ska lösa det specifika ODE-problemet med ScyPy:s **solve_ivp**. I referensmanulen till **solve_ivp** kan man läsa att man kan välja olika numeriska metoder för att lösa problemet. Ett utdrag ur referensmanualen: "Integration method to use:

- 'RK45' (default): Explicit Runge-Kutta method of order 5(4) ...
- 'RK23': Explicit Runge Kutta method of order 3(2) ...
- 'Radau': Implicit Runge-Kutta method of the Radau family of order 5(4) ...
- 'BDF': Implicit multi-step method variable-order (1 to 5) ...
- ... "

Värdera här vilken eller vilka (vilken grupp) av metoder som sannolikt är bäst i det fallet. Motivera varför, och ange också vad "bäst" betyder i det här sammanhanget (dvs vilken effekt ett val av metoder får framför en andra mindre bra metodval).

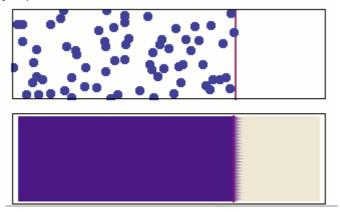
Notera, man kan inte här exakt ange en specifik metod, men det går att utifrån bilden ange vilka (vilken grupp) metoder som sannolikt är att föredra.



Skriv in ditt svar här

10 Deterministisk, stokastisk lösning

De två bilderna nedan visar ett rum (eller något annat utrymme) med en gas. Det röda strecket är en vägg, och vid en viss tidpunkt tas väggen bort, och gasen kommer då att spridas ut i det tomma utrymmet. I den övre bilden består gasen av ett mindre antal molekyler (de blå punkterna), och i den undre bilden en mycket stor mängd molekyler (storleksordning 10²⁰ molekyler).



Vi vill nu beräkna hur långt gasen spritt sig i det tomma utrymmet efter en viss tid. Spridning (diffusion) kan beskrivas både med en deterministisk modell och med en stokastiskt modell. Diskutera och argumentera för vilken av de båda modellerna som (sannolikt) är lämplig i respektive fall. Ange också vilken typ av stokastisk process som ingår i den stokastiska modellen. Du måste motivera dina val.

Skriv in ditt svar här	

Totalpoäng: 2

i Högre betyg, 1TD403

De följande två uppgifterna motsvarar betyg 4 respektive betyg 5. För betyg 4 räcker det om du klarar en av uppgifterna fullständigt. Detta motsvarar 8 poäng.

För betyg 5 bör du i stort sett klara av båda uppgifterna. Endast mindre fel är då tillåtna. Det här motsvarar minst ca 14 poäng.

Du måste också ha klarat av alla kursmålen, kravet för betyg 3, för att nå upp till de högre betygen. Observera att om du har missat ett delmål i del A kan du eventuellt komplettera det i del B.

¹¹ Pareto-fördelning

Fenomen av typen "20% av alla webbsidor genererar 80% av internet-trafiken" eller "genom att fixa 20% av de mest rapporterade buggarna, så kommer 80% av alla kraschar att undvikas", beskrivs med så kallad Pareto-fördelning. Fördelningen kan användas i Monte Carlo-simuleringar för att t ex studera sannolikheten för extrema händelser, t ex kraftiga regnmängder eller datorkraschar.

Pareto-fördelningen har täthetsfunktionen (PDF)

$$f_X(x) = egin{cases} rac{lpha x_m^lpha}{x^{lpha+1}}, & x \geq x_m \ 0 & x < x_m \end{cases}$$

där lpha och x_m är positiva konstanter.

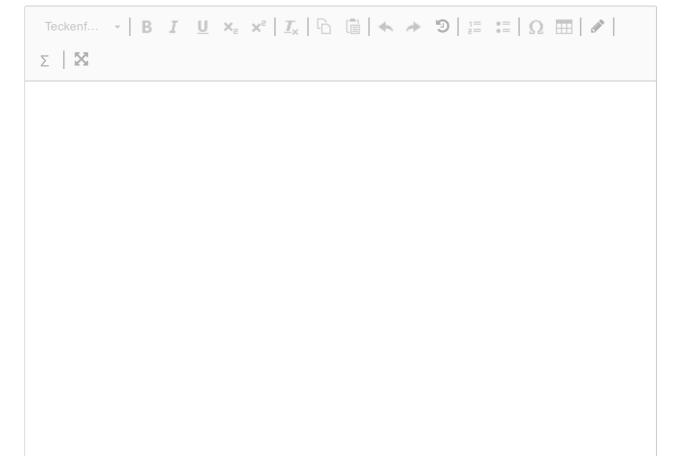
(Om du har svårt att läsa uttrycket ovan pga liten font, så lyder den första raden $(\alpha x_m^{lpha})/(x^{lpha+1})$).

Antag att du ska implementera en Monte Carlometod som innehåller Pareto-fördelning, men du måste skriva koden så att den fungerar även då Pareto-fördelningen inte finns tillgänglig i något programbibliotek. De fördelningar som kan tänkas finnas tillgängliga är normalfördelning respektive likformig fördelning på intervallet [0 1].

- Förklara med ord hur ett slumptal ur Pareto-fördelningen kan beräknas givet begränsningarna ovan (enbart normalfördelning och likformig fördelning tillgänglig).
- Under antagandet att $x_m = 1$, härled en formel som genererar ett slumptal ur Paretofördelningen givet begränsningen ovan.

Den här uppgiften är sannolikt enklare att lösa på papper, men om du vill kan du givetvis använda textrutan nedan. Om du lämnar in på papper, kom ihåg att ange detta i textrutan nedan.

Skriv in ditt svar här



1TD403	Numeriska	metoder	och	simu	le rin o
110403	Nullicliska	metoder	OCH	SIIIIU	

Ord: 0

¹² ODE, högre betyg

Kanske skulle det vara praktiskt med en metod för ODE:er där man kan ändra en parameter beroende på om problemet är styvt eller ej. Den skulle i så fall fungera bra både för styva och icke-styva problem. En sådan numerisk metod är

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot [(1 - \theta)f(t_i, y_i) + \theta(f(t_{i+1}, y_{i+1}))],$$

där θ är ett reellt tal och $0 \le \theta \le 1$. Detta är i själva verket inte en metod, utan en hel familj av metoder. För varje specifikt värde på θ får vi en specifik metod.

Nu är frågan givetvis frågan vilket värde på θ som är lämpligt att välja givet att ODE:n är styv alternativt icke-styv. Man vill också ha så hög noggrannhetsordning som möjligt.

Din uppgift är nu diskutera och utreda valet av θ med tanke på styvhet och noggrannhetsordning. Gör följande:

- Analysera vilket värde på heta som ger högst noggrannhetsordning. Redovisa din analys.
- Diskutera vilka värden på θ som är lämpliga då ODE:n är styv respektive icke-styv. Ta också hänsyn till resultaten i föregående punkt (noggrannhetsordningen) i din diskussion. Det är inte givet att det alltid är självklart vilket val man ska göra här.

Skriv in ditt svar här

Teckenf	- B	I <u>U</u>	× ₂ × ²	<u>r</u> , 🗅	*	<u> </u>	:= Ω	
ΣΙΣ								
								Ord: 0