1 Använd Taylor (Maclaurin) utvecklingar:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 H_1(x) \Rightarrow x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + x^5 H_1(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^5 H_2(x) \Rightarrow x - \sin x = \frac{x^3}{6} - x^5 H_2(x)$$

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{2} + x^5 H_1(x) - x + \frac{x^3}{6} - x^5 H_2(x)}{\frac{x^3}{6} - x^5 H_2(x)}$$

$$= \frac{-\frac{2x^3}{6} + x^5 H_3(x)}{\frac{x^3}{6} - x^5 H_2(x)} = \frac{-\frac{1}{3} + x^2 H_3(x)}{\frac{1}{6} - x^2 H_2(x)}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = -2$$

<u>Alternativt:</u> L'hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x} \overset{\text{derivera}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x + \cos x - \cos x}{1 - \cos x} \overset{\text{derivera}}{=} \lim \frac{-x\cos x - \sin x}{\sin x}$$

$$\overset{\text{derivera}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - 2\cos x}{\cos x} = \frac{0-2}{1} = -2$$

2 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$, $x \in [0,2]$

Först betraktar vi funktionen på $(0,2)$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ och $x = -2$ (Stationära punkte

Bland dessa är $x = -2 \notin (0,2)$ så vi behåller

bara $x = 1$ och $f(1) = -3$

Nu betraktar vi ändpunkterna av intervallet $[0,2]$

$f(0) = 4$, $f(2) = 8$

Slutsatsen är att det största värdet av

f är 8 som antas i punkten $x = 2$ och

det minsta värdet är -3 som antas i $x = 1$

3

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f är udda

stationära punkter: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	+	0	−	*	−	0	−	*	−	0	+
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗
		lok max $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$								lok min $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x		-1		0		1	
f''	−		+	0	−		+
f	konkav		konvex		konkav		konvex
				inflex punkt			

$f''(x$

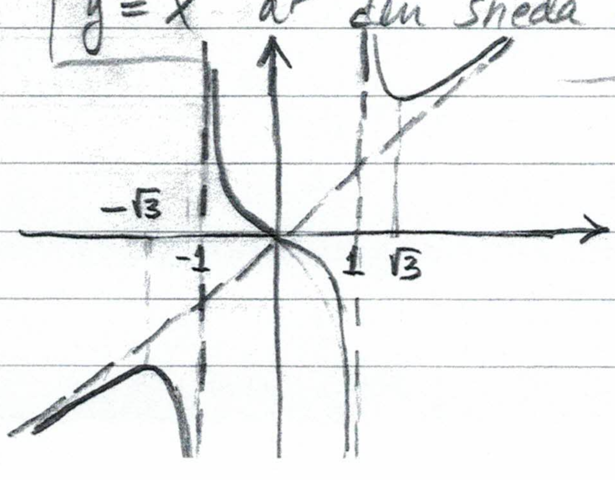
$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

$\therefore$ $\boxed{x = 1 \text{ och } x = -1 \text{ är lodräta asymptoter}}$

$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

$\therefore$ $\boxed{y = x \text{ är den sneda asymptoten till } f(x)}$



4 $$\text{Volymen} = \pi\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos x+\cos^2 x\right)dx =$$

$$\pi\int_0^{2\pi}1\,dx - 2\pi\int_0^{2\pi}\cos x\,dx + \pi\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$$

$$= 2\pi^2 - 2\pi\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} + \pi\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= 2\pi^2 - 0 + \pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx$$

$$2\pi^2 + \pi^2 + \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 + \pi^2 + \frac{\pi}{2}(0)$$

$$= 3\pi^2$$

5a a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$\dfrac{1}{1+x} < 1$ då $0<x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

då $0<x<1$. Eftersom $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergerar

enligt p-test (med $p=\frac{1}{2}<1$) så får vi att

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ är också konvergent.

Vi har också $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}\,x} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ då

$x \to +\infty$. Eftersom $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\right) \Big/ \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = 1$

så gäller att konvergensen av

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ hänger på konvergensen av $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$

Men denna integral är konv enligt p-testet

med $p=\frac{3}{2}>1$.

Slutsats: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ är konv.

5b $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$:

$x^2 = y \Rightarrow dy = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2} dy$

$\int_0^R x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \left[-e^{-y} \right]_0^{R^2}$

$= \frac{1 - e^{-R^2}}{2} \Rightarrow \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{R \to \infty} \frac{1 - e^{-R^2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Integralen $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ är konvergent.

6 $y' - \frac{x}{1+x} y = 1$, $y(0) = 0$

Ekvationen är linjär så den integrerande faktorn ges av $\mu = e^{-\int \frac{x}{1+x} dx}$

$$\mu = e^{-\int\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)dx} = e^{-\left(\int dx - \int \frac{dx}{x+1}\right)} = e^{-x} e^{\ln(x+1)}$$

$= (x+1)e^{-x}$. Multiplicera ekvationens sidor med $\mu \Longrightarrow \left(y(x+1)e^{-x}\right)' = e^{-x}(x+1)$

$$\Longrightarrow y(x+1)e^{-x} = \int e^{-x}(x+1)\,dx + C_1$$

partiell integration $\begin{cases} u = x+1, & dv = e^{-x} \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{cases}$

$$ye^{-x}(x+1) = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x} dx + C_1$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y = \frac{-(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C}{e^{-x}(x+1)} = -1 - \frac{1}{x+1} + \frac{Ce^{x}}{x+1}$$

$$y = \frac{Ce^{x}}{x+1} - \frac{1}{x+1} - 1 \quad , \quad y(0) = C - 1 = 0$$

$$C = 1 \Longrightarrow \boxed{y = \frac{e^{x}}{x+1} - \frac{1}{x+1} - 1}$$

7 Först betraktar vi den homogena ekv

$y'' + 3y' + 2y = 0 \Rightarrow$ karakteristiska ekv

$r^2 + 3r + 2 = 0$, $r_1 = -2$, $r_2 = -1$

$y_{hom}(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

Nu skall vi hitta en särlösning till $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

Vi använder ansatsen

$y_p(x) = x^m(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ och inser att

m kan tas lika med 0. Således är ansatsen

$y_p(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

$y_p'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$, $y_p'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$

$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = -C_1 \sin x - C_2 \cos x + 3C_1 \cos x \to$

$- 3C_2 \sin x + 2C_1 \sin x + 2C_2 \cos x$

$= (C_1 - 3C_2)\sin x + (C_2 + 3C_1)\cos x = \sin x$

$\therefore \begin{cases} C_1 - 3C_2 = 1 \\ C_2 + 3C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 + 9C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{10}$

$C_2 = -3C_1$ $\qquad C_2 = \frac{-3}{10}$

$y_{allmän} = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$

8a $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2^k}{3^k - k^3}$; Kvotkriteriet:

$$a_k = \frac{2^k}{3^k - k^3} \quad , \quad a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} - (k+1)^3}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} - (k+1)^3} \cdot \frac{3^k - k^3}{2^k}$$

$$= \frac{2\,(3^k - k^3)}{(3^{k+1} - (k+1)^3)} = \frac{2\left(1 - \frac{k^3}{3^k}\right)}{\left(3 - \frac{(k+1)^3}{3^k}\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{Serien konvergerar}$$

8b $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ jämför med $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \overset{\ln x = t}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} \quad \text{som är divergent}$$

$$dt = \frac{dx}{x}$$

alltså $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är också divergent