UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Örjan Stenflo, Ketil Tveiten

Linjär algebra och geometri I, 1MA025

Linjär algebra och geometri I, 1MA025

Tenta 160824 med svar

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, resp. 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Svar:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 4, -\frac{1}{2}, 0) + t(10, -20, -1, 8),\ t \in \mathbb{R}$$

2. Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX^T - AB = C,$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Svar:

$$X = (B + A^{-1}C)^T = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 5 \\ 15 & -10 & 5 \\ 17 & -13 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ x-1 & 0 & x \end{vmatrix} = x$$

Svar: $x \in \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$

4. För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & -1 & a-2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm inversen A^{-1} för de parametrar a där inversen existerar.

Svar: Då $\det(A) = 5a(1-a)$, är A inverterbar om $a \notin \{0,1\}$, med

$$A^{-1} = \frac{1}{5a(1-a)} \begin{pmatrix} 2-3a & 2-2a & a \\ -2a^2+a-2 & 2a^2-2 & -a^2+4a \\ 1+a & 1-a & -2a \end{pmatrix}$$

5. Bestäm avståndet mellan punkten $P : (1,0,0)$ och den punkt i planet med ekvation $x+y-z=1$ som ligger närmast punkten $Q : (1,0,2)$.

Svar:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ} - \text{proj}_{(1,1,-1)}\overrightarrow{PQ}\| &= \|(0,0,2) - (-2/3,-2/3,2/3)\| = \|(2/3,2/3,4/3)\| \\ &= \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

6. Bestäm arean av triangeln med hörn i $A : (0,-1,0)$, $B : (0,0,2)$ och $C : (3,3,5)$.

Svar:

Lösning: Bilda vektorerna $\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, och $\overrightarrow{AC} = (3,4,5)$.

Då arean av den triangel som har punkterna A,B,C, som sina hörn är halva arean av det parallellogram som har dessa punkter som tre av sina hörn är

$$\begin{aligned} \text{Arean} &= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|/2 \\ &= \left\| \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) \right\| /2 \\ &= \|(-3,6,-3)\|/2 = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2}/2 = \sqrt{54}/2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

7. Betrakta de fyra vektorerna $\vec{v}_1 = (3,2,1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,0,0,6)$ och $\vec{v}_4 = (-1,0,0,2)$ i $\mathbb{R}^4$.

   (a) Avgör om $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^4$.

   (b) Uttryck vektorn $\vec{w} = (3,4,0,1)$ som en linjärkombination av vektorerna i S eller visa att detta är omöjligt.

Svar:

(a) S är en bas ty
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

(b) $\vec{w} = 4\vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{v}_3$.

8. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotation medurs med vinkeln $\pi/2$ och låt $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i y-axeln.

   (a) Bestäm standardmatriserna för F och G.

   (b) Bestäm standardmatrisen för rotation medurs med vinkeln $\pi/2$ följt av spegling i y-axeln.

Svar:

(a)
$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$[G] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$[G][F] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$