UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend

Tentamen i matematik
Linjär algebra och geometri I
gylärarma1, STS1, X1,
KandKe1, K1
2019–01–10

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs godkänt på varje moment samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. Minst 3 poäng på uppgifterna 1 till 4 ger godkänt på motsvarande moment.

1. *Moment Linjära ekvationssystem.* Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = b \\ -x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

för varje värde på $b \in \mathbb{R}$.

2. *Moment Matrisräkning.* Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vilka av matriserna A och B är inverterbara?

(b) Lös ekvationen $ABX = B$.

3. *Moment Vektorer.* Låt $A : (1, 0, 1)$, $B : (2, 2, 4)$ och $C : (2, 1, 0)$ vara tre punkter i rummet.

(a) Beräkna vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$.

(b) Beräkna skalärprodukten $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(c) Visa att punkterna A, B och C utgör hörnen i en rätvinklig triangel.

(d) Bestäm arean av triangeln i (c).

4. *Moment Geometri.* Låt Π vara planet som ges av ekvationen $x + y - 2z = 0$. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på Π.

(a) Bestäm standardmatrisen för P.

(b) Ange två olika vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som uppfyller $P(\vec{v}) = P(\vec{w})$.

VAR GOD VÄND!

5. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4x-2 \\ x & 1 & x & 1 & x \\ 1 & 2 & x^2 & 2 & x^2 \\ 3x & 4 & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Låt $\vec{u}_1 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, 1, 0)$ och $\vec{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$.

(a) Visa att $\underline{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ är en bas i $\mathbb{R}^4$.

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{v} = (2, 5, 4, 5)$ i basen $\underline{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.

(c) Är vektorerna $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ och $\vec{u}_4$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar!

7. Låt $A : (-1, 3, 1)$, $B : (0, 3, 2)$ och $C : (1, 4, 2)$ vara tre punkter i rummet.

(a) Bestäm ekvationen för planet Π som innehåller punkterna A, B och C.

(b) Visa att linjen

$$L : (x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(5, 2, 3)$$

inte skär planet Π.

(c) Bestäm avståndet från linjen L till planet Π.

8. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som uppfyller

$$T(\vec{v}_1) = (1, 0, 0), \quad T(\vec{v}_2) = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad T(\vec{v}_3) = (0, 0, 1).$$

för vissa vektorer $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Visa att T är inverterbar.

(b) Visa att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

LYCKA TILL!