Dugga – Linjär Algebra och Geometri 1
Lösning

KandGeo1-2, KandDv1, MatemA, gylärma1, fristående kurs

Skrivtid: 08:00-10:00. Tillåtna hjälpmedel: penna. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt krävs minst 12 poäng

1. Bestäm för vilka reella värden på parametern b ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 - (1+b^2)x_3 = b \end{cases}$$

har inga, en, respektive oändligt antal lösningar, och bestäm lösningen i de fall den existerar.

2. Definiera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2a & 3 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Bestäm inversen A^{-1} för de värden på a som A är inverterbar.

3. Finn alla matriser X som löser ekvationen

$$AX = X + B,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 & x \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Lösningar:

1. Starta med Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -(1+b^2) & b \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1-b^2 & b-1 \end{array}\right)$$

Då $1-b^2 = (1+b)(1-b)$ så skiljer vi på fallen $b=1$, $b=-1$, och $b \neq \pm 1$. Om $b=-1$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

dvs ekvationssystemet har inga lösningar.

Om $b=1$ får vi istället

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Variabeln x_3 är således en fri parameter, och det finns oändligt många lösningar. Vi sätter $x_3 = t \in \mathbb{R}$ och erhåller lösningarna

$$(x_1, x_2, x_3) = (10t + 8, -3t - 5/2, t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Om $b \neq \pm 1$ så fortsätter vi enligt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1-b^2 & b-1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{1-b^2} \quad -3 \quad 1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{b-1}{2(b+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-5b}{2(b+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{b+1} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8b-2}{b+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-5b}{2(b+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{b+1} \end{array}\right)$$

Från sista ledet läser vi av den *entydiga* lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{b+1}(8b - 2, (1-5b)/2, -1).$$

2. Sarrus regel ger

$$\det(A) = 4a - 3a - 2a^3 = a(1-2a^2).$$

Med andra ord har vi $\det(A) \neq 0$ omm $a \neq 0, \pm 1/\sqrt{2}$, och A är inverterbar precis när $\det(A) \neq 0$. Antag därför att $a \neq 0, \pm 1/\sqrt{2}$ och använd Jacobis metod för att bestämma A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 3 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -a \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2-a^2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-a^2 & -a & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \frac{2}{1-2a^2} \quad -3 \quad -a$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{1-2a^2} & \frac{a}{1-2a^2} & -\frac{2a}{1-2a^2} \\ 0 & 2a & 0 & \frac{6a}{1-2a^2} & \frac{4-2a^2}{1-2a^2} & -\frac{6}{1-2a^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2a}{1-2a^2} & -\frac{1}{1-2a^2} & \frac{2}{1-2a^2} \end{array}\right) \frac{1}{2a} \quad 1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{1-2a^2} & \frac{2}{a(1-2a^2)} & -\frac{3+2a^2}{a(1-2a^2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-2a^2} & \frac{2-a^2}{a(1-2a^2)} & -\frac{3}{a(1-2a^2)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2a}{1-2a^2} & -\frac{1}{1-2a^2} & \frac{2}{1-2a^2} \end{array}\right)$$

Vi har därför

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-2a^2} & \frac{2}{a(1-2a^2)} & -\frac{3+2a^2}{a(1-2a^2)} \\ \frac{3}{1-2a^2} & \frac{2-a^2}{a(1-2a^2)} & -\frac{3}{a(1-2a^2)} \\ -\frac{2a}{1-2a^2} & -\frac{1}{1-2a^2} & \frac{2}{1-2a^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a(1-2a^2)} \begin{pmatrix} 4a & 2 & -(3+2a^2) \\ 3a & 2-a^2 & -3 \\ -2a^2 & -a & 2a \end{pmatrix}$$

3. Notera

$$AX = X + B \Leftrightarrow AX - X = B \Leftrightarrow (A-I)X = B,$$

så om $A - I$ är inverterbar kan vi multiplicera med inversen från vänster, med resultatet

$$X = (A-I)^{-1}B.$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sarrus regel ger

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

så $A - I$ är inverterbar. Vi beräknar härnäst den adjungerade matrisen till $A - I$:

$$\operatorname{Adj}(A-I) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Formeln

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \operatorname{Adj}(M)$$

ger

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och slutligen

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

4. Beräkna determinanten:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 & x \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & -1 \\ x-1 & -(x-1) & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ x+1 & x & 1 & x \end{vmatrix} \overset{R2}{=} -(x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2x & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & x \end{vmatrix} = -(x-1) \begin{vmatrix} 1-3x & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-x & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{R2}{=} -(x-1) \begin{vmatrix} 1-3x & -1 \\ 1-x & x \end{vmatrix} = -(x-1)(x(1-3x) + (1-x)) = 3(x-1)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Lösningarna till ekvationen är således $x = 1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.