Baskurs dugga 2015-02-12

1. $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5}$

(för $2 < 4 < 5$)

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{5}}{3}$ Svar: (tex.) $\frac{2}{3}$

2. $|16 - x| \leq 7$

$\Leftrightarrow -7 \leq 16 - x \leq 7$

Så $-7 \leq 16 - x$

$\Rightarrow x \leq 23$ (1)

och $16 - x \leq 7$

$\Rightarrow x \geq 9$ (2)

(1) och (2) ger $9 \leq x \leq 23$

3. $$\frac{2x^2 - 6x - 20}{x - 5} = \frac{2(x^2 - 3x - 10)}{x - 5} = \frac{2(x-5)(x+2)}{x-5} = 2(x+2)$$

4. $$i^{19} = i^{16} i^3 = (i^4)^4 i^2 i = 1^4(-1)i = -i$$ Svar: $-i$

5. $|5 - x| = |2x|$

$x < 0$: $5 - x = -2x$
$x = -5$

$0 \leq x \leq 5$: $5 - x = 2x$
$3x = 5$
$x = 5/3$

$x > 5$: $-5 + x = 2x$
$x = -5$

Svar: $x_1 = -5, x_2 = 5/3$

6. $$\frac{11 + 2i}{1 + 2i} \cdot \frac{(1 - 2i)}{(1 - 2i)} = \frac{11 + 2i - 22i + 4}{5} = \frac{15 - 20i}{5} = 3 - 4i$$

7. $$\sum_{k=1}^{6} \frac{2k-1}{2} = \frac{6 \cdot \left(\frac{2\cdot 6 - 1}{2} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2}\right)}{2} = 3 \cdot \left(\tfrac{11}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 3 \cdot 6 = 18$$ Svar: 18

8. Av Binomialsatsen
$$\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{2}{x}\right)^k x^{10-k}$$

x^2 sker om
$$x^{-k} \cdot x^{10-k} = x^2$$
$$x^{10-2k} = x^2$$
$$10 - 2k = 2$$
$$2k = 8$$
$$k = 4$$

Om $k = 4$
$$\binom{10}{k} \cdot 2^k = \binom{10}{4} \cdot 16 = \frac{10!}{6!4!} \cdot 16 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 16 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 16 = 160 \cdot 21 = 3360$$

9. $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{9^{n+1} - 9}{8}$

Basfall $P(1)$: VL av $P(n) = 9$
HL av $P(n) = \frac{81 - 9}{8} = \frac{72}{8} = 9$

Antag $P(m)$ är sant. (induktions-antagandet)

Betrakta
$$\sum_{k=1}^{m+1} 9^k = 9^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} 9^k = 9^{m+1} + \frac{9^{m+1} - 9}{8} \quad \text{av } P(m)$$
$$= \frac{8 \cdot 9^{m+1} + 9^{m+1} - 9}{8} = \frac{9 \cdot 9^{m+1} - 9}{8} = \frac{9^{m+2} - 9}{8}$$

Så $P(m+1)$ är sant.

$P(m) \Rightarrow P(m+1)$ och $P(1)$ är sant så $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq 1$.

10. Av multiplications principen
$$\binom{6}{2} \cdot \binom{k}{2} = 90 \Rightarrow \binom{k}{2} = 90 / \binom{6}{2} \quad (*)$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Så $(*)$ ger $\binom{k}{2} = 90/15 = 6$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\binom{4}{2} = 6$ syns i Pascals Δ

Alltså $k = 4$