UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson, Qimh Xantcha

Baskurs i matematik
Lösningar
2017–10–27

Del A

1. Av lagarna $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ och $\cos y = -\cos(\pi - y)$ följer att

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

2. Vi skriver $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{3/2}$, varav 3-logaritmen avläses som exponenten, alltså $\frac{3}{2}$.

   Alternativt kan logaritmlagarna nyttjas för att få

$$\log_3\sqrt{27} = \log_3 27^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 27 = \frac{1}{2}\log_3 3^3 = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

3. Riktningskoefficienten beräknas till

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{1-0} = -1.$$

   Eftersom linjen passerar punkten $(0, 2)$, är skärningen med y-axeln $m = 2$. Linjens ekvation är $y = -x + 2$.

4. Med Konjugatregeln fås

$$\frac{1-x^4}{1-x^2} - x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2} - x^2 = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x^2} - x^2 = (1+x^2) - x^2 = 1.$$

5. Rita figur. Talet $2 - 2i$ ligger i fjärde kvadranten. Argumentet är (exempelvis) $-\frac{\pi}{4}$ eller $\frac{7\pi}{4}$.

6. Absolutbeloppet är

$$|(1+i)(3-i)| = |3 - i + 3i - i^2| = |4 + 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

7. Förenkling ger

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2}}.$$

8. Uträkning av summan ger

$$\sum_{k=2}^{4} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 29.$$

Del B

9. Två familjer av lösningar finns, nämligen

$$3x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$$

och

$$3x = \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2n\pi = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3},$$

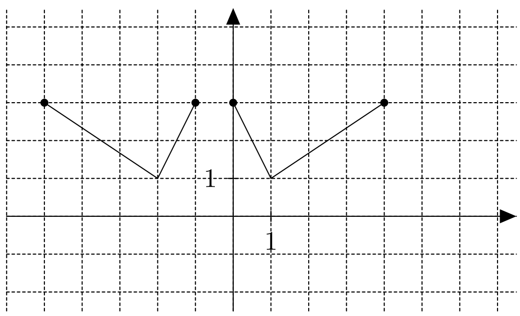
där n är ett godtyckligt heltal.

10. Cirkelns ekvation kvadratkompletteras till

$$\begin{aligned} 0 = x^2 - 6x + y^2 + 2y + 7 &= (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 7 \\ &= (x-3)^2 + (y+1)^2 - 3, \end{aligned}$$

alltså $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 3$. Medelpunkten är $(3, -1)$ och radien är $\sqrt{3}$.

11. Den vänstra kurvan är $y = f(-x)$ och den högra är $y = f(x+1)$.



12. Med nyttjande av definitionen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och Trigonometriska ettan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ fås

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

13. Förutsatt att båda logaritmerna är definierade, kan logaritmlagarna transformera ekvationen till den ekvivalenta

$$1 = \lg x + \lg(x-3) = \lg x(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 10^1 = 10^{\lg x(x-3)} = x(x-3).$$

Andragradsekvationen $x^2 - 3x - 10 = 0$ har nu lösningarna $x = 5$ och $x = -2$. Den senare är falsk, ty logaritmerna är ($\lg(-2)$ och $\lg(-5)$) är då ej definierade. Men $x = -2$ är äkta, ty

$$\lg 5 + \lg 2 = \lg 10 = 1.$$

Ekvationen har alltså lösningen $x = 5$.

14. Bestäm koefficienten framför x^{30} i utvecklingen av Binomialteoremet ger utvecklingen

$$(2-x^2)^{70} = \sum_{k=0}^{70} \binom{70}{k} 2^{70-k}(-x^2)^k.$$

Koefficienten för x^{30} erhålles då $k = 15$ och är

$$\binom{70}{15} 2^{70-15}(-1)^{15} = -2^{55}\binom{70}{15}.$$

(Binomialkoefficienten $\binom{70}{15} = \frac{70!}{15!55!}$ är uppenbarligen för otymplig att räkna ut explicit.)

15. Sättes parabelns ekvation $x^2 = 1 - y$ in i cirkelns, så fås

$$3 = x^2 + y^2 = 1 - y + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2, -1.$$

Första möjligheten ger $x^2 = -1$, som saknar lösning. Andra möjligheten ger $x^2 = 2$, alltså $x = \pm\sqrt{2}$. De två skärningspunkterna är då $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, -1)$.

Alternativt kan vi substituera parabelns ekvation som $y = 1 - x^2$ i cirkelns ekvation, vilket ger

$$3 = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

Löses denna andragradsekvation i x^2 (substituera $t = x^2$), fås lösningarna $x^2 = -1$, som tydligen är falsk, och $x^2 = 2$. Ånyo får vi $x = \pm\sqrt{2}$ samt $y = 1$.

16. (a) Fyra personer skall väljas bland nio, utan hänsyn till ordningen. Detta kan göras på

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

sätt.

(b) De två männen kan väljas på $\binom{3}{2}$ sätt och de två kvinnorna på $\binom{6}{2}$ sätt. Enligt Multiplikationsprincipen kan det då bildas

$$\binom{3}{2}\binom{6}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 45$$

olika föreningar.

17. Betrakta den algebraiska ekvationen

$$x^4 = 2x^3 + 2x + 1.$$

(a) Direkt uträkning ger

$$2i^3 + 2i + 1 = -2i + 2i + 1 = 1 = i^4,$$

så att i löser ekvationen.

(b) Enligt Konjugerade rotsatsen skall även $-i$ vara en rot. Polynomet $x^4 - 2x^3 - 2x - 1$ skall då, enligt Faktorsatsen, vara delbart med

$$(x+i)(x-i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1.$$

Polynomdivision ger faktoriseringen

$$0 = x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = (x^2+1)(x^2 - 2x - 1).$$

Andragradsekvationen $0 = x^2 - 2x - 1$ har rötterna $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Sammanfattningsvis har fjärdegradsekvationen de fyra rötterna $\pm i$ och $1 \pm \sqrt{2}$.

18. Låt n vara ett positivt heltal, och definiera

$$T_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-5) + (3n-2).$$

(a) Talen i summan är på formen $3k - 2$, där k tillåts variera från 1 till n. Summan skrivs

$$T_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-5) + (3n-2) = \sum_{k=1}^{n} (3k-2).$$

(b) Formeln gäller för $n = 1$, ty

$$T_1 = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1).$$

Antag nu, att formeln gäller för något visst tal $n = p$, alltså att

$$T_p = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3p-5) + (3p-2) = \frac{1}{2} p(3p-1).$$

Då gäller formeln även för $n = p + 1$, eftersom då

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3p-5) + (3p-2) + (3p+1) \\ &= \frac{1}{2}p(3p-1) + (3p+1) = \frac{1}{2}(3p^2 - p + 6p + 2) \\ &= \frac{1}{2}(3p^2 + 5p + 2) = \frac{1}{2}(p+1)(3p+2). \end{aligned}$$

Enligt Induktionsprincipen gäller då formeln $T_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ för alla positiva heltal n.