UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
DAN STRÄNGBERG

Tentamen i matematik
ALGEBRA 1
2017-04-18

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Börja med att läsa igenom hela tentan så att du kan ställa eventuella frågor under lärarbesöket. Lycka till!

1. Låt A, B vara två utsagor. Använd utsagorna A och B tillsammans med de logiska operatorerna $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ för att bilda utsagor P, Q, R som uppfyller följande sanningsvärdestabeller. OBS: Endast svar krävs.

(a) (1 poäng)

A	B	P
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

(b) (2 poäng)

A	B	Q
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	S

(c) (2 poäng)

A	B	R
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Lösning. (a) Exempelvis $A \wedge B$.

(b) Exempelvis $A \vee \neg A$.

(c) Exempelvis $A \Leftrightarrow \neg B$.

□

2. (a) Visa att den Diofantiska ekvationen $180x-462y = 2$ saknar lösningar. (2 poäng)
   (b) Lös den Diofantiska ekvationen $180x - 462y = 6$ fullständigt. (3 poäng)

Lösning. (a) Vi använder Euklides algoritm för att bestämma SGD$(180, 462)$:

$$\begin{aligned} 462 &= 2 \cdot 180 + 102 \\ 180 &= 102 + 78 \\ 102 &= 78 + 24 \\ 78 &= 3 \cdot 24 + 6 \\ 24 &= 4 \cdot 6\,. \end{aligned}$$

Den sista nollskilda resten är 6, alltså gäller SGD$(180, 462) = 6$. Eftersom $6 \nmid 2$ saknar ekvationen lösningar.

(b) Genom att använda Euklides algoritm baklänges får vi:

$$\begin{aligned} 6 &= 78 - 3 \cdot 24 \\ &= 78 - 3 \cdot (102 - 78) \\ &= 4 \cdot 78 - 3 \cdot 102 \\ &= 4 \cdot (180 - 102) - 3 \cdot 102 \\ &= 4 \cdot 180 - 7 \cdot 102 \\ &= 4 \cdot 180 - 7 \cdot (462 - 2 \cdot 180) \\ &= 18 \cdot 180 - 7 \cdot 462\,. \end{aligned}$$

En lösning till den Diofantiska ekvationen $180x - 462y = 6$ ges alltså av $x = 18$, $y = 7$ (observera tecken). Slutligen förkortar vi ekvationen:

$$180x - 462y = 6 \iff 30x - 77y = 1\,.$$

Den allmänna lösningen ges därför av $x = 18 + 77n$, $y = 7 + 30n$ där $n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

3. (a) Skriv talet 517 i bas 5. (2 poäng)

(b) Bestäm resten som fås då $13^{281} + 9^{179}$ delas med 7. (3 poäng)

Lösning. (a) $517 = 4 \cdot 125 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = (4032)_5$.

(b) Vi kan bestämma resten genom att använda kongruens modulo 7:

$$\begin{aligned} 13^{281} + 9^{179} &\equiv (-1)^{281} + 2^{179} \pmod 7 \\ &\equiv -1 + 2^{177} \cdot 2^2 \pmod 7 \\ &\equiv -1 + (2^3)^{59} \cdot 4 \pmod 7 \\ &\equiv -1 + 8^{59} \cdot 4 \pmod 7 \\ &\equiv -1 + 1^{59} \cdot 4 \pmod 7 \\ &\equiv -1 + 4 \pmod 7 \\ &\equiv 3 \pmod 7\,. \end{aligned}$$

Resten är alltså 3.

$\square$

4. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

för alla naturliga tal $k \geq 1$. (5 poäng)

Lösning. Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ och $HL_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Vi vill alltså visa att $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$.

Basfall: För $n = 1$ har vi $VL_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = HL_1$, så basfallet stämmer.

Induktionsantagande: Antag att $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

Induktionssteg: För $n = p+1$ har vi

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{p} k(k+1) + (p+1)(p+2) \\ &\overset{\text{IA}}{=} \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + (p+1)(p+2) \\ &= \frac{p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)}{3} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} \\ &= HL_{p+1}\,. \end{aligned}$$

Vi har alltså att $VL_p = HL_p \Rightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Tillsammans med basfallet och induktionsprincipen följer det därför att $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$.

$\square$

5. Relationen R på heltalen ges av $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow 4 \mid ab$. Avgör, med bevis eller motexempel, vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, och transitiv som relationen R uppfyller. (5 poäng)

Lösning. **Reflexiv:** Relationen R är inte reflexiv eftersom t.ex. $4 \nmid 1 \cdot 1$ så 1 står inte i relation till sig självt.

Symmetrisk: Relationen är symmetrisk eftersom $ab = ba$ så $4 \mid ab \;\Rightarrow\; 4 \mid ba$.

Transitiv: Relationen är inte transitiv. Ett motexempel ges av t.ex. $1\ R\ 4$ och $4\ R\ 2$ men det är inte sant att $1\ R\ 2$.

$\square$

6. (a) Konstruera en injektion $f\colon \mathbb{Z} \to [-1,1]$. Kom ihåg att visa att din funktion faktiskt är injektiv. (4 poäng)

   (b) Kan funktionen f vara surjektiv? Varför/varför inte? (1 poäng)

Lösning. (a) Låt f ges av

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Detta fungerar eftersom för varje nollskilt heltal n gäller att $\frac{1}{n} \in [-1,1]$. För nollskilda n_1, n_2 har vi

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \\ &\Leftrightarrow\; n_1 = n_2\,. \end{aligned}$$

Vi har också $f(0) = f(n) \;\Leftrightarrow\; 0 = f(n) \;\Leftrightarrow\; n = 0$. Alltså gäller $f(n_1) = f(n_2) \;\Rightarrow\; n_1 = n_2$ så funktionen är injektiv.

(b) Nej funktionen kan inte vara surjektiv eftersom det skulle innebära att $\mathbb{R} =_c [-1,1] \leq_c \mathbb{Z} =_c \mathbb{N}$, vilket är en motsägelse eftersom $\mathbb{N} <_c \mathbb{R}$.

$\square$

7. Polynomet $2x^3 + (4-3i)x^2 + (-2-6i)x + 3i$ har ett rent imaginärt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

Lösning. Vi ansätter lösningen $x = bi$ där $b \in \mathbb{R}$. Vi får

$$2(bi)^3 + (4-3i)(bi)^2 + (-2-6i)bi + 3i = -2b^3 i - (4-3i)b^2 + (-2-6i)bi + 3i = 0$$

Genom att dela upp i realdel och imaginärdel får vi de två ekvationerna

$$\begin{aligned} -4b^2 + 6b &= 0, \\ -2b^3 + 3b^2 - 2b + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger oss

$$\begin{aligned} 0 &= -4b^2 + 6b \\ &= 2b(-2b+3) \\ \Leftrightarrow \quad b &= 0, \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vi kan se direkt att $b = 0$ inte kan vara en lösning eftersom polynomet har en nollskild konstantterm. Vi faktoriserar därför ut $2x - 3i$:

$$\begin{array}{rl}
 x^2 + 2x - 1 & \\ \hline
 2x^3 + (4-3i)x^2 + (-2-6i)x + 3i & \multicolumn{1}{|l}{2x - 3i} \\ \cline{2-2}
 -(2x^3 - 3ix^2) \qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
 4x^2 + (-2-6i)x + 3i & \\
 -(4x^2 - 6ix) \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
 -2x + 3i & \\
 -(-2x + 3i) & \\ \cline{1-1}
 0 \quad &
\end{array}$$

Vi ser alltså att $b = \frac{3}{2}i$ verkligen är ett nollställe och att $2x^3 + (4-3i)x^2 + (-2-6i)x + 3 = (2x-3i)(x^2+2x-1)$. Polynomet x^2+2x-1 har nollställen $-1 \pm \sqrt{2}$ enligt exempelvis p-q-formeln. Samtliga sökta nollställen är alltså $x = \frac{3}{2}i, -1 \pm \sqrt{2}$. $\square$

8. (a) Låt $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 12x + 3$ och $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ vara två polynom. Bestäm $\mathrm{SGD}(f, g)$. (3 poäng)
   (b) Använd $\mathrm{SGD}(f, g)$ för att faktorisera f och g fullständigt. (2 poäng)

Lösning. (a) Vi använder Euklides algoritm för polynom:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)g(x) - 3x^2 - 9 \\ g(x) &= (x-2)(x^2+3) \end{aligned}$$

Observera att $-3x^2 - 9$ och $x^2 + 3$ är associerade polynom. Eftersom $x^2 + 3$ är den sista nollskilda resten så ser vi att $\mathrm{SGD}(f, g) = x^2 + 3$.

(b) När vi använde Euklides algoritm såg vi att $g(x) = (x-2)(x^2+3) = (x-2)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$. Från det får vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)g(x) - 3(x^2+3) \\ &= (x-2)(x-2)(x^2+3) - 3(x^2+3) \\ &= (x^2 - 4x + 1)(x^2+3) \\ &= (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)\,. \end{aligned}$$

$\square$