Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich, Martin Herschend

Civilingenjörsprogrammen F, IT, STS, W
Kandidatprogrammet i matematik
Gymnasielärarprogrammet

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2014–06–09

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ definieras enligt $f(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$. Med f:s *kärna* menas delrummet $\ker(f) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid f(A) = 0\}$ i $\mathbb{R}^{3\times 3}$, och med f:s *bild* menas delrummet $\operatorname{im}(f) = \{r \in \mathbb{R} \mid f(A) = r \text{ för något } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}\}$ i $\mathbb{R}$. Finn dimensionen av $\ker(f)$ och dimensionen av $\operatorname{im}(f)$. Motivera!

2. Låt $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 2)$ och $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som uppfyller

$$f(v_1) = v_1 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 - v_2, \quad f(v_3) = 2v_1 + v_3.$$

(a) Visa att $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) Hitta f:s matris i basen $\underline{v}$.

(c) Hitta f:s matris i standardbasen.

3. Låt P_2 vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 utrustat med den inre produkten

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

(a) Hitta en ortonormal bas i delrummet $W = \{a_0 + a_2x^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$ till P_2.

(b) Hitta den ortogonala projektionen av $p(x) = x$ på W.

4. Låt V vara vektorrummet av alla (2×2)-matriser och $f : V \to V$, $f(A) = A + 2A^T$, där A^T betecknar transponatet av A. Med standardbasen i V menas basen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

(a) Bestäm matrisen för f i standardbasen.

(b) Visa att f är inverterbar och bestäm matrisen för f^{-1} i standardbasen.

Var god vänd!

5. (a) För vilka värden på konstanterna a och b är

$$\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 6x_2y_2 + ax_1y_2 + bx_2y_1$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$?

(b) Är det sant att olikheten

$$(3x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1)^2 \leq (3x_1^2 + 6x_2^2 + 8x_1x_2)(3y_1^2 + 6y_2^2 + 8y_1y_2)$$

gäller för alla reella tal x_1, x_2, y_1, y_2? Motivera ditt svar!

6. Ytan Y består av alla punkter (x, y, z) i $\mathbb{E}^3$ som uppfyller ekvationen

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz = 6.$$

Bestäm ytans typ, och ytans minsta avstånd från origo. Finn även de punkter på ytan som ligger närmast origo. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

7. Den linjära avbildningen $F : P_3 \to P_3$ ges av $F(p(x)) = x(p'(x) - p(2)) + p(1)$.

   (a) Är F injektiv?

   (b) Är F surjektiv?

   (c) Är F bijektiv?

Motivera dina svar!

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' &=& 3y_1 \\ y_2' &=& y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &=& y_1 + 2y_3 \end{array}\right.$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 3.$

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Finn en 3×3-matris X så att $X^7 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar 2014-06-09

1. Enligt dimensionssatsen är $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$.

$\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$ medför att $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$, alltså $\dim(\ker(f)) = 9-1 = 8$.

Svar. $\dim(\ker(f)) = 8$, $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$.

2. (a) $T_{\underline{e}\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ har $\det(T_{\underline{e}\underline{v}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

Alltså är $T_{\underline{e}\underline{v}}$ inverterbar, och därmed är $\underline{v}$ en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) $[f]_{\underline{v}} = \left([f(v_1)]_{\underline{v}} \middle| [f(v_2)]_{\underline{v}} \middle| [f(v_3)]_{\underline{v}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $[f] = T_{\underline{e}\underline{v}} [f]_{\underline{v}} T_{\underline{v}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{v}} [f]_{\underline{v}} T_{\underline{e}\underline{v}}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Svar. (a) $T_{\underline{e}\underline{v}}$ är inverterbar, (b) $[f]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $[f] = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. (a) En bas i W är $(1, X^2)$. En on-bas i W är $GS(1, X^2) = \left(1, \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2-1)\right)$.

Uträkning. $\frac{1}{\|1\|} = 1$, då $\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow \|1\| = 1$.

$\frac{X^2 - \langle X^2, 1\rangle 1}{\| \text{dito} \|} = \frac{X^2 - \frac{1}{3}1}{\| \text{dito} \|} = \frac{X^2 - \frac{1}{3}1}{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2-1)$, då $\langle X^2, 1\rangle = \frac{1}{3}$ och

$\|X^2 - \frac{1}{3}1\|^2 = \langle X^2 - \frac{1}{3}1, X^2 - \frac{1}{3}1\rangle = \int_0^1 (x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})\,dx = \frac{4}{5\cdot 9}$

(b) $\text{proj}_W(p) = \langle p, 1\rangle 1 + \langle p, \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2-1)\rangle \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2-1)$

$= \langle p, 1\rangle 1 + \frac{5}{4}\langle p, 3X^2-1\rangle (3X^2-1)$

$= \frac{1}{2} 1 + \frac{5}{4}\frac{1}{4}(3X^2-1) = \frac{1}{2} 1 + \frac{5}{16}(3X^2-1)$

$= \frac{3}{16} 1 + \frac{15}{16} X^2$

Uträkning. $\langle p, 1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, och $\langle p, 3X^2-1\rangle = \int_0^1 (3x^3-x)\,dx = \frac{1}{4}$.

4. (a) $[f] = \left([f(E^{11})]_{\underline{E}} \middle| [f(E^{12})]_{\underline{E}} \middle| [f(E^{21})]_{\underline{E}} \middle| [f(E^{22})]_{\underline{E}} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) f är inverterbar $\Leftrightarrow$ $[f]$ är inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det[f] \neq 0$, och

$\det[f] = 3\cdot 3\cdot(1-4) = -27 \neq 0$.

$[f^{-1}] = [f]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) $\langle x, y\rangle = x^T A y$ för $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 6 \end{pmatrix}$; $\langle x, y\rangle$ är additiv och homogen;

$\langle x, y\rangle$ är symmetrisk $\Leftrightarrow$ A är symmetrisk $\Leftrightarrow$ $a = b$

$\langle x, y\rangle$ är positivt definit $\Leftrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 6 \end{pmatrix}$ är positivt definit $\Leftrightarrow$ $3 > 0 \wedge 18 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow |a| < 3\sqrt{2}$

Svar (a). $a = b$ och $|a| < 3\sqrt{2}$.

(b) Med $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ är $\langle x, y\rangle = x^T A y = 3x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$, enligt (a). Alltså gäller CS-olikhet

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$, vilket är just uppgiftens olikhet, för alla $x,y \in \mathbb{R}^2$.

6. $Y:\quad x^TAx = 6$, för $A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{bmatrix}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-11 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda-11 & 4 \\ 4 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6 \\ 1 & \lambda-11 & 4 \\ 4 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} = (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-11 & 4 \\ 4 & 4 & \lambda-14 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-12 & 3 \\ 4 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-12)(\lambda-18)$$

löses av $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 18$. Alltså finns det en on-egenbas (b_1, b_2, b_3) i E^3 så att för alla $x = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 \in E^3$ gäller

$$x \in Y \quad \Leftrightarrow \quad x^TAx = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad 6y_1^2 + 12y_2^2 + 18y_3^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y_3^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

Härav framgår att Y <u>är en ellipsoid</u> med radierna $1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$. <u>Ytans minsta avstånd från origo är</u> $\sqrt{\frac{1}{3}}$. <u>Den antas i punkterna</u>

$$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\,b_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Uträkning.</u> b_3 är normerad basvektor i $E(\lambda_3) = E(18) = N(18I - A)$.

$$18I - A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

visar att $E(\lambda_3) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, och $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ duger.

7. $\left.\begin{array}{l} F(1) = X(0-1)+1 = 1-X \\ F(X) = X(1-2)+1 = 1-X \end{array}\right\}$ visar att F är inte injektiv.

Då F är en linjär operator, är F inte surjektiv, och inte bijektiv heller.

8. $y' = Ay$, där $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

löses av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

$E(1) = N(I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är bas i $E(1)$.

$$I - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

$E(2) = N(2I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är bas i $E(2)$.

$$2I - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

$E(3) = N(3I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är bas i $E(3)$.

$$3I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

Matrisekvationen $S^{-1}AS = D$ löses av $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$.

$z' = Dz$ löses av $\left\{\begin{array}{l} z_1 = c_1 e^{x} \\ z_2 = c_2 e^{2x} \\ z_3 = c_3 e^{3x} \end{array}\right. \Rightarrow y' = Ay$ löses av $y = Sz$, dvs.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \\ z_2 + z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 e^{3x} \\ c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \\ c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \end{pmatrix}$$

Begynnelsevillkoren är uppfyllda omm $\begin{cases} c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_2 + c_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$

Svar. $\begin{cases} y_1 = e^{3x} \\ y_2 = -e^{x} + 2e^{2x} + e^{3x} \\ y_3 = 2e^{2x} + e^{3x} \end{cases}$

8.' Med A, S, D som i uppgift 8 söker vi en lösning till matrisekvationen

$$X^7 = A = SDS^{-1}$$

Med $Y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt[7]{2} & \\ & & \sqrt[7]{3} \end{pmatrix}$ gäller $Y^7 = D$, alltså $A = SY^7S^{-1} = (SYS^{-1})^7$.

Alltså duger

$$X = SYS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ -\alpha+\beta & 1 & -1+\alpha \\ -\alpha+\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{där } \alpha = \sqrt[7]{2},\ \beta = \sqrt[7]{3}.$$