UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sebastian Pöder

Prov i matematik
MaKand, IT, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2018-10-23

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs godkänt i varje moment samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. Minst tre poäng på uppgifterna 1-4 ger godkänt på motsvarande moment.

1. *Moment Linjära ekvationssystem.*

(a) Lös ekvationssystemen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 = 1 \end{cases} \text{och} \begin{cases} y_1 + y_2 - 2y_3 = -2 \\ \qquad y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - 4y_3 = -4 \\ -y_1 \qquad + 2y_3 = 1 \end{cases}.$$

(b) Bestäm rangen av respektive systems totalmatris.

2. *Moment Matrisräkning.* Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Finn alla matriser X som uppfyller

$$AXB = I.$$

3. *Moment Vektorer.* Beräkna volymen av parallellepipeden med kanter $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och avgör om $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ är linjärt oberoende.

4. *Moment Geometri.* Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $L\colon 2x - 3y = 0$ genom origo.

(a) Finn f:s matris.

(b) Finn spegelbilden av punkten $P = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ i linjen L.

(c) Finn avståndet mellan P och L.

5. Planet E ges av ekvationen $-x + 2y + z = 6$, och planet F är ortogonalt mot vektorn $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och går genom punkten $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm skärningen av planet E med planet F.

6. Finn alla reella x för vilka matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & x-5 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & x-1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar.

7. Tre operatorer f, g och h på $\mathbb{R}^3$ ges var och en av rotation med vinkel π, f kring axeln $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, g kring $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och h kring $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Låt $i \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara sammansättningen $i = h \circ g \circ f$. Bestäm i:s matris och tolka operatorn geometriskt.

8. En kvadratisk matris M kallas symmetrisk om $M^T = M$ och antisymmetrisk om $M^T = -M$.

(a) Låt A vara en kvadratisk matris. Visa att matrisen $\frac{1}{2}(A + A^T)$ är symmetrisk.

(b) Visa att varje kvadratisk matris kan skrivas som summan av en symmetrisk och en antisymmetrisk matris.

Lycka till!

Svar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018-10-23

1. (a) Vänstra systemet saknar lösning. Högra systemet har lösningen $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 1)$.

(b) 4 respektive 3.

2. $X = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

3. Volymen är 0. De är inte linjärt oberoende.

4. (a) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $\sqrt{13}$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

6. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$

7. $[i] = I$, och i är identitetsoperatorn som bevarar varje vektor som den är.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2018-10-23

Lösning till problem 1. (a) Systemen har samma koefficientmatris (vänsterled). Vi löser dem med Gausseliminering i den gemensamma totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \;\; 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1 \;\; -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -1/2 \\ -1/2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Från sista raden avläser vi, för det vänstra systemet, $0 = 1$, så ingen lösning. För det högra systemet avläser vi den unika lösningen $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 1)$.

(b) För det vänstra systemet har vi

$$\operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 4,$$

och för det högra har vi

$$\operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Lösning till problem 2. Om B är inverterbar är

$$AXB = I \leftrightarrow AXBB^{-1} = IB^{-1} \leftrightarrow AX = B^{-1}.$$

Vi beräknar $\det(B) = -2 + 1 + 4 - 2 + 2 - 2 = 1$, så detta fungerar. Vi beräknar

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och finner X med Gausseliminering i totalmatrisen:

$$(A|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \;\; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 11 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 10 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 11 & -8 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 2 \;\; -2 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Vi avläser lösningen $X = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. (Man kan även beräkna A:s invers och $X = A^{-1}B^{-1}$.)

Lösning till problem 3. Volymen av parallellepipeden med kanter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ har volym beloppet av skalärtrippelprodukten $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Vi beräknar

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |-1 + 1 + 3 + 1 - 3 - 1| = 0.$$

Volymen är noll, dvs de tre vektorerna ligger i ett plan. Alltså är de linjärt *beroende* - ej linjärt *oberoende*. (Detta kan även kollas med definitionen eller med hjälp av en sats.)

Lösning till problem 4. (a) Vi söker f:s matris, som ges av $[f] = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2))$. Speglingen i linjen L ges av uttrycken

$$f(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,\mathrm{proj}_{\vec{n}}\,\vec{v}$$

där $\vec{n}$ är en normal till L, eller av

$$f(\vec{v}) = 2\,\mathrm{proj}_{\vec{r}}\,\vec{v} - \vec{v}$$

där $\vec{r}$ är en riktningsvektor till L. En normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ kan avläsas, och vi beräknar

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{2}{2^2 + (-3)^2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ och } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{-3}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $[f] = (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)) = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) Spegelbilden P' uppfyller $\overrightarrow{OP'} = f(\overrightarrow{OP})$. Vi beräknar

$$f(\overrightarrow{OP}) = [f]\overrightarrow{OP} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(c) Avståndet mellan P och L är hälften av avståndet mellan P och spegelbilden P'. Vi beräknar

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{1}{2}\|\begin{pmatrix} 17 - 13 \\ 7 - 13 \end{pmatrix}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{52} = \sqrt{13}.$$

Lösning till problem 5. Planet F har ekvation

$$3(x-1) - 2(y-1) + 1(z-3) = 0 \leftrightarrow 3x - 2y + z = 4.$$

Alltså är skärningen av de två planen de punkter som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}.$$

Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} \boxed{3} \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 22 \end{array}\right)\begin{matrix} -1 \\ 1/4 \end{matrix} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 11/2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \boxed{2} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 11/2 \end{array}\right).$$

Sätt $z = t, t \in \mathbb{R}$; vi avläser $y = \dfrac{11}{2} - z$ och $x = 5 - z$, så lösningarna (skärningen) är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Lösning till problem 6. Matrisen A är inverterbar precis då $\det(A) \neq 0$. Vi beräknar

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & x-5 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & x-5 \\ x-5 & x-1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x+2 & x+2 & x+2 \end{vmatrix} \left((x-1)^2 - (x-5)^2\right) = \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ((x-1-(x-5))(x-1+(x-5))) = \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (4(2x-6)) = (x+2)(x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 8(x-3) = \\
&= 8(x+2)(x-1)^2(x-3).
\end{aligned}
$$

Vi avläser att $\det(A) = 0$ precis då $x = -2, x = 1$, eller $x = 3$. Alltså är A inverterbar för alla $x \neq -2, 1, 3$.

Lösning till problem 7. Geometriskt eller med formel inses att

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2, f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3.$$

Alltså är f:s matris

$$[f] = (f(\vec{e}_1) f(\vec{e}_2) f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt är

$$[g] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } [h] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är i:s matris

$$[i] = [h \circ g \circ f] = [h][g][f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

identitetsmatrisen, och i är identitetsoperatorn som bevarar varje vektor som den är: $i(\vec{v}) = \vec{v}$.

Lösning till problem 8. (a) Vi kontrollerar med definitionen och räkneregler:

$$\left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T),$$

så matrisen $\frac{1}{2}(A + A^T)$ är symmetrisk.

(b) Vi undersöker transponatet av matrisen $A - \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(A - A^T)$:

$$\left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T).$$

Alltså är matrisen $\frac{1}{2}(A - A^T)$ antisymmetrisk, så uppdelningen

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

är en summa av en symmetrisk och en antisymmetrisk matris.