UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sebastian Pöder

Prov i matematik
IT2, KandMa1, Fristående
Linjär algebra och geometri I
2017–10–24

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (Ej för den med godkänd dugga.) Utför multiplikationen

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z & w \end{pmatrix}$$

och finn alla x, y, z, w så att produkten blir $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Avgör för vilka reella x som $A = \begin{pmatrix} x & 2 & x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2x^2 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

3. Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $L\colon\ -x + 3y = 0$ genom origo.

(a) Finn f:s matris.

(b) Finn den punkt på L som är närmast $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Finn avståndet mellan P och L.

4. Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör vilka $\vec{v}_i$ som är ortogonala mot linjen

$$L\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

genom origo.

(b) Avgör om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$.

Var god vänd!

5. Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $A = (-2,-2,-2), B = (-1,0,1)$ och $C = (0,2,1)$, samt bestäm volymen av parallellepipeden med kanter $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{OC}$.

7. Låt E vara ett plan ortogonalt mot vektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ och F planet med ekvation $2x - y + 4z = 0$. Bestäm för vilka reella a och b som planen E och F skär i en linje, och finn för dessa värden på a och b en riktningsvektor till skärningslinjen.

8. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges som rotation med 90° kring $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och operatorn s på $\mathbb{R}^3$ ges av spegling i planet $E\colon x + y + z = 0$ genom origo. Visa att sammansättningen $f \circ s$ är lika med sammansättningen $s \circ f$.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2017–10–24

Lösning till problem 1. Vi har

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z & 2x+3w \\ y+4z & 2y+4w \end{pmatrix},$$

och $\begin{pmatrix} x+3z & 2x+3w \\ y+4z & 2y+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ precis då

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} + 3z \phantom{{}+4w} = 4 \\ \phantom{2x+{}} y + 4z \phantom{{}+4w} = 5 \\ 2x \phantom{{}+2y+4z} + 3w = 5 \\ \phantom{2x+{}} 2y \phantom{{}+4z} + 4w = 6 \end{cases}.$$

Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{ll} -2 & \\ & -2 \\ & \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{6} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{lll} & & \\ & & \\ 8 & -3 & -4 \\ & & \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sätt $w = t$, $t \in \mathbb{R}$, ger lösningarna $(x, y, z, w) = (\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t, 3 - 2t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 2. A är inverterbar $\iff$ $\det A \neq 0$. Vi beräknar:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2x^2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 0 & 2x^2 - x \end{vmatrix} = (2x^2 - x)\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix}$$

$$= (2x^2 - x)(x^2 - 4) = 2x(x - \frac{1}{2})(x+2)(x-2),$$

så A är inverterbar för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \dfrac{1}{2}, -2, 2\}$.

Lösning till problem 3. (a) Vi ser att $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en normal till L, alternativt att $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor till L, så

$$f(\vec{u}) = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{u} = \vec{u} - \frac{-u_1 + 3u_2}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad f(\vec{u}) = \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{3u_1 + u_2}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I vilket fall är

$$f(\vec{e}_1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så

$$[f] = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Den sökta punken N är precis ortogonal projektion av P på L, dvs

$$N = f\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Avståndet ges av $\|\overrightarrow{NP}\| = \|\begin{pmatrix}2-3\\4-1\end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\| = \sqrt{10}.$

Lösning till problem 4. (a) Linjen L har riktningsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, och

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v}_1 &= -2-1+3 = 0\\
\vec{u}\cdot\vec{v}_2 &= 2-2 \quad\; = 0\\
\vec{u}\cdot\vec{v}_3 &= 2-3+1 = 0\\
\vec{u}\cdot\vec{v}_4 &= 4-7+3 = 0
\end{aligned}$$

så varje $\vec{v}_i$ är ortogonal mot L.

(b)

$$\begin{aligned}
&\text{Varje } \vec{v}_i \text{ är ortogonal mot } \vec{u}\\
\Rightarrow&\text{Varje linjärkombination av } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \text{ är ortogonal mot } \vec{u}\\
\Rightarrow&\vec{u} \text{ kan } \textit{inte} \text{ ligga i spannet av } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\\
\Rightarrow&\text{Spannet av } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \text{ är } \textit{inte} \text{ hela } \mathbb{R}^4\\
\Rightarrow&\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \text{ utgör } \textit{ej} \text{ en bas för } \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

Alternativt kan vi observera att antalet vektorer är rätt (fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$) men vi beräknar det $\begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4\end{pmatrix} = 0$, så de kan inte vara en bas för $\mathbb{R}^4$.

Lösning till problem 5. Låt

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}4 & 1\\-8 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Då är

$$\det A = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix} = 2-3+1-2 = -2 \neq 0, \quad \det B = 6-4 = 2 \neq 0,$$

så A och B är inverterbara. Vi kan alltså skriva om ekvationen som

$$AXB = C \iff XB = A^{-1}C \iff X = A^{-1}CB^{-1}.$$

På valfritt sätt beräknas

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\2 & 0 & -2\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 6\end{pmatrix}$$

så

$$X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\2 & 0 & -2\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\-8 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 6. Triangelns med hörn i A, B, C har halva arean av parallellogrammet med sidor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, som i sin tur har area $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. Vi beräknar

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så arean av triangeln är

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{36+9} = \frac{1}{2}\sqrt{45}.$$

Parallellepipeden med kanter $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ har volym

$$\left|\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left| - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |-(-2+8)| = 6.$$

Lösning till problem 7. E och F skär i en linje
$\iff$ E och F är *ej* parallella
$\iff$ deras normaler är *ej* parallella.

E har normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ och vi läser av att $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ är en normal till F. Dessa är parallella om det finns $k \in \mathbb{R}$ så att

$$k\vec{n} = \vec{u} \longleftrightarrow \begin{cases} 2k &= 1 \\ -k &= a \\ 4k &= b \end{cases}.$$

Från första raden får vi $k = \frac{1}{2}$, dvs planen E och F skär i en linje för alla a, b *utom* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.
En riktningsvektor till skärningslinjen ges av

$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & a & b \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 2b-4 \\ -1-2a \end{pmatrix}.$$

Notera att $\vec{v} \neq \vec{0}$ precis då $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Alternativ: Planen E, F skär i en linje $\iff$ deras normaler är *ej* parallella $\iff$ vektorprodukten av deras normaler är nollskild. Med $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$ som ovan fås samma slutsats.

Lösning till problem 8. Notera att $\vec{a}$ är en normal till planet E, så linjen $L\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}$, som är rotationsaxel, är ortogonal till E. Varje vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas som

$$\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_E,$$

där $\vec{u}_L \in L$ och $\vec{u}_E \in E$. ($\vec{u}_L$ fås som $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\,\vec{u}$, $\vec{u}_E = \vec{u} - \vec{u}_L$.)

Notera att

$$f(\vec{u}) = f(\vec{u}_L + \vec{u}_E) = f(\vec{u}_L) + f(\vec{u}_E) = \vec{u}_L + f(\vec{u}_E)$$

och

$$s(\vec{u}) = s(\vec{u}_L + \vec{u}_E) = s(\vec{u}_L) + s(\vec{u}_E) = s(\vec{u}_L) + \vec{u}_E$$

eftersom dessa är en rotation kring L respektive spegling i E. Den viktiga biten är att

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_E) &\in E \quad \text{eftersom } L \perp E, \text{ och} \\ s(\vec{u}_L) &\in L \quad \text{eftersom } L \perp E. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} f \circ s(\vec{u}) &= f(s(\vec{u}_L) + \vec{u}_E) = s(\vec{u}_L) + f(\vec{u}_E) \text{ och} \\ s \circ f(\vec{u}) &= s(\vec{u}_L + f(\vec{u}_E)) = s(\vec{u}_L) + f(\vec{u}_E) \end{aligned}$$

för varje vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, så $f \circ s = s \circ f$.

Alternativ: beräkna avbildningarnas matriser

$$[s] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

och kontrollera att $[s][f] = [f][s]$. Eller beräkna att båda avbildningarna $f \circ s$ och $s \circ f$ ges av uttrycket

$$f \circ s(\vec{u}) = s \circ f(\vec{u}) = \vec{a} \times \vec{u} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{a}.$$