1 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + x^2/2 + x^3 H_1(x) - \cancel{x} - x^3/6 + x^5 H_2(x) - \cancel{1}}{x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4 H_3(x)\right)}$$ (2p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + x^3 H_4(x)}{x^2 + x^3 H_5(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + x H_4(x)}{1 + x H_5(x)} = \frac{1}{2}$$

(2p) (1p)

2 $f(x) = 3x^7 - 7x^3$, $-\frac{1}{2} \le x \le 2$. Derivation ger

$f'(x) = 21x^6 - 21x^2 \Rightarrow f'(x) = 0$ Stationära punkter

är $x=0$, $x=1$, $x=-1$, men $x=-1$ ligger utanför $[-\frac{1}{2}, 2]$ (1p)

x		$-\frac{1}{2}$		0		1		2	
$f'(x)$			$-$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$			↘		↘		↗		

(2p)

Från tabellen framgår att $x=1$ är lok min och

$x=-\frac{1}{2}$, $x=2$ lok max (2p)

3

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow$

$x = -1,\ x = -3$

x		-3		-2		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-6	$\searrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$

2p

Från tabellen framgår att $x = -3$ lok max

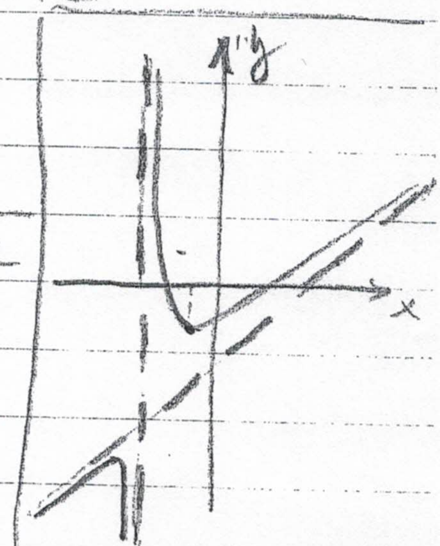
$x = -1$ lok min

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

2p

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2-3}{x+2} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2-3}{x+2} = -\infty$

$\therefore$ $x = -2$ är lodrät asymptot



$f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2} = x - 2 + \dfrac{7}{x+2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (x-2)\right) = 0$

$\therefore$ $y = x - 2$ är sned asymptot

Alternativt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ och $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = -2$

$f(x) - (x-2) = \dfrac{7}{x+2} \Rightarrow$ $f(x)$ ligger över asymptoten

då $x \to +\infty$ och $f(x)$ ligger under $x-2$ då $x \to -\infty$.

$f''(x) = 7(x+2)^{-3}$

x		-2	
f''	$-$	$*$	$+$
f	Konkav		Konvex

1p

4 $V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ (1 p)

Partiell integration:

$x = u, \quad \sin x \, dx = dv$

$dx = du \quad -\cos x = v$ (3p)

$V = 2\pi \left(\left[x(-\cos x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \right)$

$2\pi \left(\pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi^2$

Svar: $2\pi^2$ (1p)

5 (a) $\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int_0^{\infty} e^{-y} dy$ (sätt $y = \frac{1}{x}$)

$= \left[-e^{-y} \right]_0^{\infty} = 1 \implies$ Integralen konvergerar

Alt: $\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx = \int_0^1 x^{-2} e^{-1/x} dx + \int_1^{\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx$

$\lim_{x \to 0^+} (e^{-1/x}) x^{-2} = 0 \implies x^{-2} e^{-1/x}$ kan utvidgas till en kont funk på $[0, 1] \implies$ $\int_0^1 x^{-2} e^{-1/x} dx$ är konvergent. Eftersom

$x^{-2} e^{-1/x} \leq \frac{1}{x^{-2}}$ på $[1, \infty)$ och $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ är konv så konvergerar även

$\int_1^{\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx$.

5b $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ då $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergerar

omm $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergerar. Eftersom

detta är fallet $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$. För

$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ har vi att $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$ på

$[1,\infty)$. Eftersom $\int_1^\infty e^{-x}\,dx < \infty$

(ty $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{1}{e}$)

så konvergerar $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

6 $xy' + y = 4x^3$, $y(1) = 2$

$y' + \frac{1}{x} y = 4x^2$

Integrerandefaktorn $= \mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ 2p

$\Rightarrow xy' + y = 4x^3$

$(xy)' = 4x^3 \Rightarrow xy = x^4 + C$ 2p

$y = x^3 + \frac{C}{x}$

$y(1) = 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \boxed{y = x^3 + \frac{1}{x}}$ 1p

Alt: inse att $xy' + y = (xy)'$ direkt. osv

7 $y'' - 2y' + y = e^x$

Karakteristiska ekv: $r^2 - 2r + r = 0$

$\Longrightarrow r_1 = r_2 = 1$

$y_h = (A + Bx)e^x$ 1p

$y_p = ax^2 e^x \Longrightarrow y_p' = (2ax + ax^2)e^x$

$y_p'' = (2a + 4ax + ax^2)e^x$ 1p

$y_p'' - 2y_p' + y_p = \left[(2a + 4ax + ax^2) - 2(2ax + ax^2) + ax^2\right] e^x = e^x$

$\therefore \quad 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^x \longrightarrow$ 2p

$y_{allmän} = (A + Bx)e^x + \frac{x^2}{2} e^x$

1p $\begin{cases} y(0) = A = 0, \quad y(1) = (A+B)e + \frac{e}{2} = e \\ \Rightarrow B + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\boxed{y = \frac{x}{2} e^x + \frac{x^2}{2} e^x}$$

8 (a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\sin\frac{1}{k} - \sin\frac{2}{k}$:

$$2\sin\frac{1}{k} - \sin\frac{2}{k} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + \frac{1}{k^5}H_1\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{2}{k} - \frac{8}{6k^3} + \frac{1}{k^5}H_2\left(\frac{2}{k}\right)\right) \text{ då } k \to \infty$$

$$= \frac{-1}{3k^3} + \frac{4}{3k^3} + \frac{1}{k^5}H_3\left(\frac{1}{k}\right) \text{ då } k \to \infty$$

$$= \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^5}H_3\left(\frac{1}{k}\right) \overset{2p}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(2\sin\frac{1}{k} - \sin\frac{2}{k}\right) \Big/ \frac{1}{k^3} = 1 \quad 1p$$

Eftersom $\sum \frac{1}{k^3}$ är en konvergent p-serie

så konvergerar även $\sum\left(2\sin\frac{1}{k} - \sin\frac{2}{k}\right)$

(b) Använd kvotkriteriet: $a_k = (k!)^2/(2k)!$

$$a_{k+1} = ((k+1)!)^2/(2(k+1))! = \frac{(k+1)^2(k!)^2}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4} < 1$$

2p

Serien konvergerar.