UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
ERNST DIETERICH, JENS FJELSTAD, MARTIN HERSCHEND

DIVERSE PROGRAM

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2015–08–22

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Hitta en bas i $\mathbb{R}^4$ bland vektorerna $v_1 = (1,-2,0,1)$, $v_2 = (-2,4,0,-2)$, $v_3 = (-1,3,3,0)$, $v_4 = (1,-1,3,2)$, $v_5 = (0,1,2,3)$ och $v_6 = (1,-1,2,1)$. Motivera ditt svar!

2. Vektorerna $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ och $u_3 = (0,1,1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Låt f vara den linjära operatorn på $\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$f(u_1) = u_2, \quad f(u_2) = u_3, \quad \text{och} \quad f(u_3) = u_1.$$

(a) Bestäm f:s matris i basen (u_1, u_2, u_3).

(b) Bestäm f:s matris i standardbasen.

3. Vektorrummet $\mathcal{P}_2$ består av alla polynom av grad högst 2. Visa att den linjära avbildningen $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(p) = 2p - 4p' + p''$ är inverterbar. Bestäm även $T^{-1}(q)$ där $q(x) = 2 - 6x + 2x^2$.

4. Den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ är definierad enligt

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, b, b+c, a+d).$$

(a) Bestäm en bas för f:s kärna och en bas för f:s bild.

(b) Avgör huruvida f är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

VAR GOD VÄND!

5. I det euklidiska rummet $\mathcal{P}_2$ av alla polynom av grad högst 2, med $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, bildar polynomen $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $p_3(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$ en ON-bas. Polynomet $q \in \mathcal{P}_2$ ges av $q(x) = 30x^2 - 24x + 1$.
(a) Finn q:s koordinater i basen (p_1, p_2, p_3).
(b) Beräkna längden av q, med avseende på den inre produkten ovan.

6. Vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ utrustas med den inre produkten

$$\langle X, Y\rangle = X_{11}Y_{11} + 2X_{12}Y_{12} + 2X_{21}Y_{21} + X_{22}Y_{22}.$$

För vilka värden på t är vinkeln α mellan matriserna $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{pmatrix}$ med avseende på denna inre produkt (a) trubbig, (b) rät, (c) spetsig?

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. En diagonalmatris D vars samtliga diagonalelement är lika med $1, -1$ eller 0 kallas *tröghetsform* till A, om $S^T A\ S = D$ gäller för någon inverterbar matris S.
(a) Finn A:s tröghetsform D.
(b) Vilken typ har ytan $Y : 2x^2 - z^2 - 2xy + 4yz = 1$?

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' &= & & y_2 \\ y_2' &= & -2y_1 & +3y_2 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 7$.

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Beräkna A^{41}, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar 2015-08-22

1. $$A = \begin{matrix} -1 & 2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -1 & -3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & -1 \\ & & & & & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ & & 1 & * & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = T$$

$T_{\cdot 1}, T_{\cdot 3}, T_{\cdot 5}, T_{\cdot 6}$ är pivotkolonnerna i T

$\Rightarrow A_{\cdot 1}, A_{\cdot 3}, A_{\cdot 5}, A_{\cdot 6}$ är en bas i $K(A)$

$\Rightarrow v_1, v_3, v_5, v_6$ är en bas i $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_6)$.

$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_6) \subset \mathbb{R}^4$ och $\dim(\mathrm{span}(v_1, \dots, v_6)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ medför att $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_6) = \mathbb{R}^4$.

Svar. (v_1, v_3, v_5, v_6) är en bas i $\mathbb{R}^4$.

2. (a) $$[f]_{\underline{u}} = \left([f(u_1)]_{\underline{u}} \middle| [f(u_2)]_{\underline{u}} \middle| [f(u_3)]_{\underline{u}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $$[f]_{\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{u}} [f]_{\underline{u}} T_{\underline{u}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{u}} [f]_{\underline{u}} T_{\underline{e}\underline{u}}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. T är inverterbar omm $[T]_{\underline{X}}$ är inverterbar, där $\underline{X} = (1, X, X^2)$.

$$[T]_{\underline{X}} = \left([T(1)]_{\underline{X}} \,\middle|\, [T(X)]_{\underline{X}} \,\middle|\, [T(X^2)]_{\underline{X}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ & 2 & -8 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$ är inverterbar, då

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ & 2 & -8 \\ & & 2 \end{vmatrix} = 8 .$$

$$[T^{-1}(q)]_{\underline{X}} = [T^{-1}]_{\underline{X}} [q]_{\underline{X}} = [T]_{\underline{X}}^{-1} [q]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ & 2 & -8 \\ & & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

medför att $T^{-1}(q) = 2 + X + X^2$.

4. (a) Låt $\underline{E} = (E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22})$ och $\underline{e} = (e_1, \dots, e_4)$ vara standardbaserna i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ och $\mathbb{R}^4$. Då är

$$A = [f]_{\underline{e}\underline{E}} = \left([f(E^{11})]_{\underline{e}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [f(E^{22})]_{\underline{e}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} = T$$

$N(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ visar att $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en bas i $N(A)$. Alltså är $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en bas i $\ker(f)$.

$K(A)$ har basen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alltså är $(1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,0,1,0)$ en bas i $\operatorname{im}(f)$.

(b) $\ker(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ ej injektiv $\Rightarrow f$ ej bijektiv.

$\operatorname{im}(f) \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow f$ ej surjektiv.

5.(a) Vi söker $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [q]_{\underline{p}}$. Pga $T_{\underline{X}\underline{p}}\, x = T_{\underline{X}\underline{p}} [q]_{\underline{p}} = [q]_{\underline{X}}$ löser x det linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}\cdot \\ \frac{1}{6}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} & -24 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -3\sqrt{5} & -12 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3} & 0 & -4 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ & \sqrt{3} & 0 & 3 \\ & & \sqrt{5} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & -1 \\ & 1 & & \sqrt{3} \\ & & 1 & \sqrt{5} \end{array}\right).$$

<u>Svar</u> (a). $[q]_{\underline{p}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

(b) Då $\underline{p}$ är en on-bas, gäller $\|q\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{1+3+5} = 3$.

6. α är $\begin{cases} \text{trubbig} \\ \text{rät} \\ \text{spetsig} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha$ är $\begin{cases} > 90^\circ \\ = 90^\circ \\ < 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \cos\alpha$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|}$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle A,B\rangle$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2t+2$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t+1$ är $\begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$

<u>Svar.</u> α är $\begin{cases} \text{trubbig} & \text{om } t < -1 \\ \text{rät} & \text{om } t = -1 \\ \text{spetsig} & \text{om } t > -1 \end{cases}$

7.(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = D$

$\frac{1}{2}$, 4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \sqrt{7} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ $\qquad$ 4 $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \; \sqrt{2} \; \frac{1}{\sqrt{7}}$

Svar (a). $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\quad$ $\mathrm{sign}(A) = (1, 1, -1)$ visar att A har två positiva egenvärden $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ och ett negativt egenvärde $\lambda_3 < 0$. Alltså är ytan Y en enmantlad hyperboloid.

8. $\quad$ Vi skriver systemet som matrisekvation $y' = Ay$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$. Med $y = Tz$ gäller $y' = Ay$ omm $z' = Dz$.

Den allmänna lösningen till $z' = Dz$ är $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{2x} \end{pmatrix}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Den allmänna lösningen till $y' = Ay$ är därmed

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Den uppfyller begynnelsevillkoren omm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Svar. $\quad \begin{cases} y_1 = 3e^{x} + 2e^{2x} \\ y_2 = 3e^{x} + 4e^{2x} \end{cases}$

8'. Matrisekvationen $T^{-1}AT = D$ (diagonal) löses av $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$.

$A = TDT^{-1}$ medför att

$$A^{41} = (TDT^{-1})^{41} = TD^{41}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2^{41} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{41} \\ 1 & 2^{42} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{41} & -1+2^{41} \\ 2-2^{42} & -1+2^{42} \end{pmatrix}.$$