Envariabelanalys Del 2

2015-03-20

Lösningar.

1 a)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} x^2 = t & x=\sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = \pi/2 \\ 2x\,dx = dt & x=0 \Rightarrow t=0 \\ x\,dx = \frac{dt}{2} & \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\Big/ \sin t \Big/_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1/2$$

b)

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}\,dx = \int_1^2 \frac{(x+1)+1}{x+1}\,dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \Big/ x + \ln(x+1) \Big/_1^2 = (2+\ln 3)-(1+\ln 2) = \boxed{1+\ln 3/2}$$

2

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x}\,y = \frac{1}{x}.$$

Linjär av första ordn.

Redan på standard form.

a) Integrerande faktor:

x>0 givet!

$$e^{\int \frac{1}{1+x}dx} = e^{\ln(1+x)} = (1+x)$$

b) Multiplicera in den:

$$(1+x)\cdot y' + y = \frac{1+x}{x}$$ eller

$$\frac{d}{dx}\left((1+x)\cdot y\right) = \frac{1+x}{x} \quad \text{så}$$

$$(1+x)\cdot y = \int \frac{1+x}{x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = \ln x + x + C$$

och $\underline{y = \frac{\ln x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{C}{x+1}}$.

Sätt $x=1$: $y(1) = \underbrace{\frac{\ln 1}{2}}_{=0} + \frac{1}{2} + \frac{C}{2} = 1$ ger $C=1$

och $y = \frac{\ln x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{\ln x}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} = \frac{\ln x}{x+1} + 1$

Svar: $\boxed{y = \frac{\ln x}{x+1} + 1}$

---

3 a) Vi undersöker termernas storlek:

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \frac{n^{1/2}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{n^{3/2}(1+1/n^2)}}}$$

Jämför (i kvotform) med $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\frac{\frac{1}{n^{3/2}(1+1/n^2)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Och eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerar ($p = 3/2 > 1$)

så $\boxed{\text{konvergerar}}$ även den givna serien.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots$

är en geometrisk serie med kvot $\frac{1}{3} < 1$ så

serien har summan $\frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ och serien är:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}}_{\text{TAR UT VARANDRA}} - \underbrace{\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}}_{\text{DITO}} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$= \frac{1}{3}$ (Teleskopserie)

---

(4) Partialbråksuppdela integranden

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{\boxed{x^3(A+C) + x^2(B+D) + x(A) + B}}{x^2(1+x^2)}$$

Identifikation ger

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

så $A=C=0$

$B=1,\ D=-1$

och vi har

$$\int_1^X \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \Big/_1^X -\frac{1}{x}-\arctan x \Big/ =$$

$$= \Big(\underbrace{-\frac{1}{X}}_{\substack{\to 0 \\ X\to\infty}} \underbrace{-\arctan X}_{\substack{\to \pi/2 \\ X\to\infty}}\Big)-\left(-1-\arctan 1\right) \to -\frac{\pi}{2}+1+\underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} =$$

$$= \boxed{1-\pi/4}$$ (>0 ok!)

---

(5) a) Homogen ekv. $y''+y'-2y=0$

Karakt. ekv. $r^2+r-2=0,\ r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$

så $r=1,-2$ och $\underline{y_H=Ae^{x}+Be^{-2x}}$

b) Partikulärlösning: $\begin{cases} y_p=Ax^2+Bx+C \\ y_p'=2Ax+B \\ y_p''=2A \end{cases}$

Sätt in:

$$2A + (2Ax+B) - 2(Ax^2+Bx+C) = 2+2x-2x^2$$

$$(2A+B-2C) + (2A-2B)x - 2Ax^2 = 2+2x-2x^2$$

$$\begin{cases} 2A+B-2C = 2 & C=0 \\ 2A-2B = 2 & B=0 \\ -2A = -2 & A=1 \end{cases}$$

$$\underline{y_p = x^2}$$

Allmän lösning: $\boxed{y = y_H + y_p = Ae^x + Be^{-2x} + x^2}$

b) $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=k \end{cases}$ $\quad y(0) = A+B = 1$
$\quad y'(0) = A-2B = k$

$3B = 1-k \quad B = \frac{1-k}{3}$

$A = 1-B = \frac{2+k}{3}$

$$\boxed{y = \frac{2+k}{3}e^x + \frac{1-k}{3}e^{-2x} + x^2}$$

$$(y-x^2) = \frac{2+k}{3}\underbrace{e^x}_{\substack{\to\infty \\ x\to\infty}} + \frac{1-k}{3}\underbrace{e^{-2x}}_{\substack{\to 0 \\ x\to\infty}}$$

Vi måste ha $\frac{2+k}{3} = 0$, dvs. $k=-2$ $\quad \left(\frac{1-k}{3} = 1\right)$

Då är $\underline{y - x^2 = e^{-2x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0}$. $\quad$ Svar: $\boxed{k=-2}$

(6) a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

Vi har $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ och

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ är konvergent (i $x=0$). p-integral i 0 med $p=\frac{1}{2}$

Då ger olikheten att även den givna integralen är konvergent.

b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$. Även här kan vi uppskatta:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent p integral, $p=2$

så olikheten ger konvergens även i detta fall.

---

(7) Vi får direkt $\frac{dA}{dt} = k \cdot A(t)$ (k negativ)

Separabel: $\frac{dA}{A} = k\,dt$ $\int \frac{dA}{A} = \int k\,dt$ $\ln A = kt + C$

$$A = e^{kt+C}$$

$$A = e^{kt+c} = e^{c} \cdot e^{k\cdot t}$$

$$\text{Men } A(0) = \begin{cases} e^{c} \cdot e^{0} = e^{c} \\ A_0 \text{ enl. uppgift.} \end{cases}$$

så $e^{c} = A_0$ och $\boxed{A = A_0 e^{k\cdot t}}$

Om $A(t_{1/2}) = A_0/2$ har vi

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{kt_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k\cdot t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow k \cdot t_{1/2} = \ln 1/2 = -\ln 2 \quad \text{så}$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{k}}$$

8

$$I(a) = \int_0^{\pi} (\sin^2 x - a)^2 \, dx$$

(Inte så viktigt!!!)

Dubbla vinkeln upprepad!

$$I(a) = \int_0^{\pi} (\sin^4 x - 2a \sin^2 x + a^2) \, dx$$

$$\begin{cases} \sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \\ = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{cases}$$

ger

$$I(a) = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 2a \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + a^2 \right] dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 4x}{8} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{3}{8} - a + a^2\right) \right) dx =$$

$$\Big/ \underbrace{\frac{\sin 4x}{32}}_{\text{ger } 0 \text{ i } 0 \text{ och } \pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \underbrace{\frac{\sin 2x}{2}}_{\text{Dito}} + \left(\frac{3}{8} - a + a^2\right) x \Big/_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{3}{8} - a + a^2\right)\pi.$$

$$\Rightarrow \frac{d\,I(a)}{da} = \pi(-1 + 2a) = 0 \quad \text{om } a = 1/2.$$