UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jakob Zimmermann

Prov i matematik
IT, K, KandKe, GymLär, W
Envariabelanalys
2019–05–27

Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.
Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon
Tentan består av 8 frågor värda 5p vardera; totalt 40 poäng.
Gränserna för betyg 3, 4, 5 är 18p, 25p respektive 32p.
På den här tentamen tillgodoräknas eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgiften.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. I denna uppgift ska du ange några definitioner av viktiga begrepp som gicks igenom under kursens gång. Du behöver inte använda exakt de ord som vi använde på föreläsningen, men din definiton måste vara matematiskt entydig och korrekt.

a) Låt $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en talföljd och $a \in \mathbb{R}$. Ange definitionen av $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dvs $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerar mot a när n går mot oändligheten.

b) Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad på ett öppet intervall I med $a \in I$. Definiera vad som menas med att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a$.

c) Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ som är definierad på $\mathbb{R}$ med en hävbar diskontinuitet i $x = 1$. (OBS: I denna uppgift ingår att du visar att ditt exempel uppfyller alla krav som uppgiften ställer.)

Lösning 1. **a)** Vi säger att a_n konvergerar mot a och skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ så att $|a - a_n| < \varepsilon$ för alla $n > N$.

b) Att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ betyder dels att $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och dels att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

c) Här finns det många möjliga svar. Ta till exempel följande funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x \neq 1 \\ 1, & \text{om } x = 1 \end{cases}$$

Funktionen är inte kontinuerlig i $x = 1$ då $\lim_{x\to 1} = \lim_{xto1} 0 = 0 \neq 1 = f(1)$. Men diskontinuiteten är hävbar, vi kan sätta $f(1) = 0$ och har då en kontinuerlig funktion.

2. **a)** Ange Taylorserien av $\ln(1+x)$ kring $x = 0$. (Du får använda ordo eller ... så länge det framgår tydligt vad de resterande termerna är.)

b) Ange Taylorserien av $\ln(1+x^2)$ kring $x = 0$. (Se ovan)

c) Beräkna följaden gränsvärde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) + 2\cos(x) - 2}{x^4}$$

Lösning 2. **a)** Vi vet från föreläsningen att

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Var god vänd

b) Insättning av x^2 i taylorutvecklingen ovan ger

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

c) Här har vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)+2\cos(x)-2}{x^4} = \lim x \to 0 \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) + 2(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)) - 2}{x^4}$$

$$= \lim x \to 0 \frac{-\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{12}+O(x^6))}{x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{5}{12} + O(x^2) = -\frac{5}{12}$$

3. Låt $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

a) Skissa grafen för $y = f(x)$ och bestäm alla eventuella lokala och globala extrempunkter, ekvationer för alla grafens asymptoter samt ange på vilka intervall $f(x)$ är växande resp. avtagande.

b) Har $f(x)$ något globalt minimum eller maximum på $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$? Bestäm denna/dessa eller förklara varför de inte finns.

Lösning 3. **a)** Vi ser att $f(x)$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ och vet från föreläsningen att funktionen är kontinuerlig på sin definitionsmängd.

Extremvärden:

Enligt ett känt resultat från föreläsningen kan vi bara ha extremvärden i stationära och/eller singulära punkter. För att bestämma de stationära punkterna deriverar vi och får

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

Stationära punkter har vi när $f'(x) = 0$, dvs $0 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2)}$ vilket bara är uppfyllt när $x = 0$. Vi har med andra ord bara en stationär punkt i $x = 0$. Vidare ser vi att derivatan ovan är definierad på hela D_f och därmed har $f(x)$ inga singulära punkter.

		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	odef	$+$	0	-	odef	-
$f(x)$	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	odef	$\searrow$

Tillsammans får vi att $f(x)$ har bara en extrempunkt, ett lokalt maximum i $x = 0$. Vidare ser vi att $f(x)$ är växande på $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ och avtagande på $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

Asymptoter:

Vi har att

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0,$$

med andra ord har $f(x)$ en vågrät asymptot. Dessutom ser vi att $f(x)$ är positivt på $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$, det vill säga att $f(x)$ närmar sig sin våräta asymptot uppifrån.

Vidare är $f(x)$ odefinierad i $x = \pm 1$ och kan därmed har lodräta asymptoter i dessa punkter. Vi får att

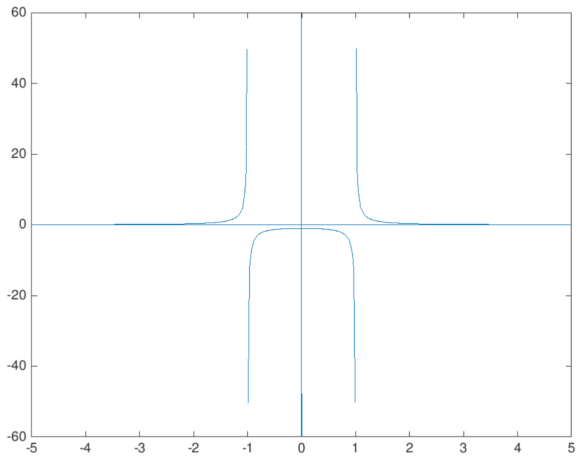
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} \overset{x^2-1>0}{=} +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} \overset{x^2-1<0}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} \overset{x^2-1<0}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} \overset{x^2-1>0}{=} +\infty$$

Detta innebär att $f(x)$ har lodräta asymptoter i $x = \pm 1$.



b) Vi vet att $f(x)$ måste anta ett globalt maximum resp. minimum på $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ som en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall. Dessa kan antas i antingen randpunkterna, stationära eller singulära punkter. Från a) vet vi att $f(x)$ inte har några singulära punkter samt en stationär punkt i $x = 0$. Vi jämför funktionsvärdena i den stationär punkten med randpunkterna och får att

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}) &= -\frac{4}{3} \\ f(0) &= -1 \\ f(\tfrac{2}{3}) &= -\frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Därför antar $f(x)$ sitt globala maximum på intervallet i $x = 0$ och sitt globala minimum i $x = \dfrac{2}{3}$.

4. Bestäm konvergensradie och konvergensintervall för följande potensserier

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n^2 \cdot 4^n}$$

Lösning 4. **a)** Här har vi att koefficienter ges som $a_n = \frac{1}{2n}$. Vi beräknar konvergensradie med hjälp av en känd formel från föreläsningen som säger att om $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ så är $R = \frac{1}{L}$ i fall $L \in (0, \infty)$ om $L = 0$ så är $R = \infty$ och om $L = \infty$ är $R = 0$.

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2(n+1)} = 1.$$

Och vi ser att konvergensradien är $R = \frac{1}{1} = 1$. Vi ser dessutom att konvergensintervallet är centrerat i $x =$ och har då att serien konvergerar absolut på $(-1, 1)$. För att avgöra hela konvergensintervallet behöver vi sätta in $x = -1$ och $x = 1$ och ser om respektive serie är konvergent eller ej. Vi får då för $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Var god vänd

vilket är den alternerande harmoniska serien och från föreläsningen vet vi att den är konvergent. Alternativt kan vi använda konvergensteste för alternerande serier.
För $x = 1$ har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

vilket är den harmoniska serien som är divergent. Tillsammans har vi därför att konvergensintervallet är $[-1, 1)$.

b) Vi skriver först om serien och får då

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n^2 \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n^2}(x + \tfrac{2}{3})^n$$

Från denna omskrivning kan vi avläsa att konvergensintervallet är centrerat i $x = -\frac{2}{3}$. Analogt som ovan beräknar vi konvergensradien:

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}4^n(n+1)^2}{3^n 4^{n+1} n^2} = \frac{3}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{3}{4}.$$

Vilket ger att $R = \dfrac{4}{3}$ och att serien är absolut konvergent på $(-2, \frac{2}{3})$. Som i a) återstår det nu att vi testar randpunkterna. För $x = -2$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6+2)^n}{n^2 \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

vilket är en absolut konvergent p-serie ($p = 2$). För $p = \frac{2}{3}$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+2)^n}{n^2 \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

och även denna serie är en konvergent p-serie för samma p. Därför är konvergensintervallet här $[-2, \frac{2}{3}]$.

5. Betrakta området som ligger mellan x–axeln och kurvan $y = \sqrt{5 - x^2}$ och dessutom höger om linjen $x = 2$. Skissa området och beräkna volymen av den kropp som fås när området roteras kring y-axeln.

Lösning 5. Vi vet att $y = \sqrt{5 - x^2}$ definierar en halvcirkel med radie $\sqrt{5}$ och regionen den biten av cirkeln som ligger mellan 2 och $\sqrt{5}$. Enligt känd formel har vi att volymen ges som

$$V = 2\pi \int_2^{\sqrt{5}} x\sqrt{5 - x^2}dx = \begin{bmatrix} u = 5 - x^2 & x = 2 \to u = 1 \\ du = -2xdx & x = \sqrt{5} \to u = 0 \end{bmatrix} = -\pi \int_1^0 \sqrt{u}du = -\pi \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 = \frac{2\pi}{3}$$

6. Beräkna följande generaliserade integral

$$\int_0^{\infty} \frac{7x+1}{(x^2+1)(2x+1)}dx$$

Lösning 6. Vi ser att integranden är en rationell funktion vars täljare har en lägre grad än nämnaren. Vi testar att göra en partialbråksuppdelning.

$$\frac{7x+1}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1} \Leftrightarrow$$
$$\frac{7x+1}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{(Ax+B)(2x+1) + C(x^2+1)}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{(2A+C)x^2 + (2B+A)x + (B+C)}{(x^2+1)(2x+1)}$$

Därför får vi följande ekvationsystem

$$\begin{aligned} 2A + C &= 0 \\ 2B + A &= 7 \\ B + C &= 1 \end{aligned}$$

Vilket har lösningen $A = 1$, $B = 3$ och $C = -2$. Då kan vi skriva om integralen som

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{7x+1}{(x^2+1)(2x+1)}dx &= \int_0^\infty \frac{x+3}{x^2+1} + \frac{-2}{2x+1}dx = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^\infty \frac{3}{x^2+1}dx - \int_0^\infty \frac{2}{2x+1}dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \end{bmatrix} = \int_1^\infty \frac{du}{\ln(u)} + \left[3\tan^{-1}(x) - \ln(2x+1)\right]_0^\infty = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2} + 3\tan^{-1}(x) - \ln(2x+1)\right]_0^\infty \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}\right) + 3\tan^{-1}(x)\right]_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\ln\left(\frac{\sqrt{R^2+1}}{2R+1}\right) + 3\tan^{-1}(R) - \ln\left(\frac{\sqrt{1}}{1}\right) - \tan^{-1}(0)\right] \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

7. **a)** Hitta den allmänna lösningen $y = y(x)$ till ekvationen

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 2e^{2x}, \quad x > 0.$$

b) Lös följande begynnelsevärdesproblem

$$y(x) = \int_0^x 1 + y(t)dt.$$

Lösning 7. **a)** Vi löser problemet med hjälp av en integrerande faktor. I vårt fall är $p(x) = \frac{1}{x}$ vilket medför att vi kan välja $\mu(x) = \ln|x| = \ln(x)$, då vi antar att $x > 0$ och vår integrande faktor är då $e^{\mu(x)} = x$. Vi multiplicerar ekvationen med x och får då att

$$\frac{d}{dx}(xy(x)) = 2xe^{2x}.$$

Integration ger

$$xy(x) = \int 2xe^{2x} = \begin{bmatrix} f(x) = 2x & g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \\ f'(x) = 2 & g'(x) = e^{2x} \end{bmatrix} = xe^{2x} - \int e^{2x}dx = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

Vilket ger oss att den allmänna lösningen är

$$y(x) = e^{2x} - \frac{e^{2x}}{x} + \frac{C}{x},$$

där $C \in \mathbb{R}$.

b) Först observerar vi att vi får från ekvationen att $y(0) = \int_0^0 1 + y(t)dt = 0$. Nu deriverar vi ekvationen och får enligt integralkalkylens fundamentalsats

$$y'(x) = 1 + y(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + y(x)$$

Nu ser vi att denna ekvation är separabel vilker ger oss

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1+y} &= \int dx \Leftrightarrow \\ \ln|1+y| &= x + C. \end{aligned}$$

Var god vänd

Från begynnelsevilkoret ser vi att $x = 0$ måste ligga i definitonsmängden och därmed måste $x > -1$ så att vi kan skriva $\ln|1 + y| = \ln 1 + y$. Då får vi

$$1 + y = e^{x+C} \Leftrightarrow y = De^x - 1$$

Insättning i begynnelsevilkoret ger oss att

$$0 = y(0) = D - 1 \Rightarrow D = 1.$$

Lösningen är $y(x) = e^x - 1$.

8. Bestäm den lösning $y = y(x)$ som uppfyller ekvationen

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2e^{-3x}$$

samt att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$.

Lösning 8. Vi löser först den homogena ekvationen $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$. Den karaktäristiska ekvationen är $r^2 + r - 6 = 0$ som löses av $r = 2$ och $r = -3$. Enligt ett resultat från föreläsningen har vi då att den allmänna homgena lösningen är $y_h = Ae^{2x} + B^{-3x}$.
För att bestämma en partikulär lösning gör vi ansatsen att $y_p = Cxe^{-3x}$, då e^{-3x} är en homogen lösning. Detta ger oss att $y_p' = Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x}$ och $y_p'' = 9Cxe^{-3x} - 6Ce^{-3x}$. Insatt i ekvationen får vi då att

$$\begin{aligned}
&9Cxe^{-3x} - 6Ce^{-3x} + Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x} - 6Cxe^{-3x} = 2e^{-3x} \Leftrightarrow \\
&-5Ce^{-3x} = 2e^{-3x} \Leftrightarrow \\
&C = -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Då får vi den allmänna lösningen till det inhomogena problemet

$$y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x} - \frac{2}{5}xe^{-3x}$$

och

$$y' = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x} - \frac{2}{5}e^{-3x} + \frac{6}{5}e^{-3x}.$$

Insättning av begynnelsevilkoren ger oss då

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = A + B \\
2 &= y'(0) = 2A - 3B - \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Vilket ger oss att $A = \frac{12}{25}$ och $B = -\frac{12}{25}$. Därmed är lösningen

$$y = \frac{12}{25}e^{2x} - \frac{12}{25}e^{-3x} + \frac{2}{5}xe^{-3x}$$

9. (Hjälpuppgift) Gå igenom alla dina svar och kolla att motivering finns med där relevant. Denna uppgift ger inga poäng i sig självt men kan spara dig poängavdrag i andra uppgifter.