

Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Tentan består av 8 frågor värda 5p vardera; totalt 40 poäng.

Gränserna för betyg 3, 4, 5 är 18p, 25p respektive 32p.

Skrivtid: 14.00–19.00.

Lösningarna SKALL åtföljas av förklarande text.

1. a) Fritt val: ange antingen definitionen av uttrycket $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ (där L är ett tal) eller definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten $x = c$. OBS: definitioner behöver anges med matematiskt entydiga termer.
- b) Om a_1, a_2, a_3, \dots är en talföljd, vad är definitionen av uttrycket $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
- c) Bestäm reella konstanter a, b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{om } x < 0 \\ b & \text{om } x = 0 \\ 2x + 5 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i alla punkter, *med hänvisning till definitionen av kontinuitet* i dina val.

2. a) Ange Taylorserien kring $x = 0$ för e^x . (Det är okej att skriva ... i ditt svar, så länge det är tydligt vad resterande termer är.)
- b) Ange Taylorserien kring $x = 0$ för e^{x^2} . (Samma kommentar som ovan.)
- c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 3 + 2 \cos(x)}{x^4}.$$

3. Låt $f(x) = \frac{x(4x-3)}{x-1}$.

- a) Sketcha grafen för $y = f(x)$, och bestäm alla lokala och globala extrempunkter samt ekvationer för alla grafens asymptoter.
- b) Har $f(x)$ något globalt minimum eller maximum på intervallet $[5/4, 3]$? Bestäm denna/dessa, eller förklara varför de inte finns.

4. Bestäm konvergensradie och konvergensintervall för följande potensserier.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^n$

5. Bestäm volymen av den kropp som bildas när grafen av $y = \frac{2x}{(x+1)^{1/2}(x^2+1)^{1/2}}$, för $0 \leq x \leq 1$, roteras runt x -axeln.

6. Bestäm om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2} + x^{3/2}} dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna dess värde; om den är divergent, förklara noggrant varför.

7. Bestäm de allmänna lösningarna $y = y(x)$ till de följande differentialekvationerna.

a) $y' = \frac{1}{3} \cos(x) e^{\sin(x)} y^4$

b) $y' + \frac{y}{x} = \ln x$, där $x > 0$

8. Bestäm den lösning $y = y(t)$ som uppfyller ekvationen

$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{3t}$$

samt att $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

9. (Hjälpuppgift) Gå igenom alla dina svar och kolla att motivering finns med där relevant. Denna uppgift ger inga poäng i sig självt men kan spara dig poängavdrag i andra uppgifter.

LYCKA TILL!