1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + 2y + 3z = k \end{cases}$$

för alla värden på $k \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & 2 & 3 & k \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-k & k-2 \end{array}\right)$$

1) När $k = 2$ kommer systemet att innehålla en nollrad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \\ \leftarrow \text{kan tas bort} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Systemet blev:

$$\begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) När $k \neq 2$ kan rad 3 delas med $2-k$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -(k+2) \quad 1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k+3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -k-3 \\ 0 & 1 & 0 & k+3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Så $\begin{cases} x = -k-3 \\ y = k+3 \\ z = -1 \end{cases}$

<u>Svar</u>: När $k = 2$ är lösningarna

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

När $k \neq 2$ är lösningarna

$$\begin{cases} x = -k-3 \\ y = k+3 \\ z = -1 \end{cases}$$

② Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

För vilka reella tal är A inverterbar? Beräkna inversen A^{-1} för dessa A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (a) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(1-a) & -a & 1 & a \\ 0 & -1 & 1-a & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a(1-a) & -a & 1 & a \end{array}\right)$$

Matrisen är inte inverterbar om $a = 0$ eller $a = 1$. Om $a \neq 0$ och $a \neq 1$ får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a(1-a)} & \frac{1}{1-a} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -(a-1) \quad -a \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a(1-a)} & \frac{1}{1-a} \end{array}\right) \; -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a-1} \end{array}\right).$$

Så A^{-1} existerar för $a \neq 0$, $a \neq 1$, och är lika med

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{a}{a-1} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Kontrol: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{a}{a-1} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a-1} & -\frac{1}{a(a-1)} & -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1+a}{a-1} & \frac{\cancel{1}+a-\cancel{1}}{a(a-1)} - \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a-1}{a-1} \end{pmatrix} = I.$$

(3) Antag att A och B är inverterbara matriser med inverserna A^{-1} och B^{-1}. Bestäm den matris X som uppfyller $AXB = AB + A^2$. Beräkna X om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AXB = AB + A^2 \iff$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I}XB = \underbrace{A^{-1}AB}_{=I} + \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{=I}\cdot A \iff$$

$$XB = B + A \iff$$

$$X\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{=I} = \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{=I} + A\cdot B^{-1} \iff$$

$$\boxed{X = I + A\cdot B^{-1}}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-5)(-1)-2\cdot 3}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

Svar:
$X = I + AB^{-1}$;
$X = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) Lös ekvationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ -1 & x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ -1 & x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & -1-x^2 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \text{kofaktorutv.} \\ \text{kolumn 1} \end{matrix} \right] =$$

$$= \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1}}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ -1 & x & 1 \\ 1 & x & -1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & x & -2-x^2 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} \text{kofaktorutv.} \\ \text{rad 1} \end{matrix} \right]$$

$$= x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ x & -2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= x \left(\underbrace{x(-2-x^2) - 2x}_{= -x^3 - 4x} \right) = -x^2(x^2+4)$$

Ekvationen blev

$$-x^2(x^2+4)=0.$$

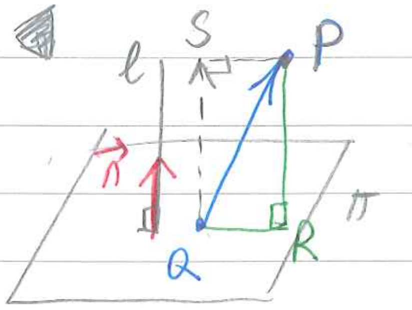
Eftersom $x^2+4 \neq 0$ är detta ekvivalent med

$$-x^2=0.$$

Lösningen är $x=0$ (dubbelrot).

Svar: $x=0$.

(5) Beräkna avståndet mellan punkten $P=(0,0,1)$ och planet π som innehåller punkt $Q=(-3,1,7)$ och är vinkelrätt mot linjen $\ell: (x,y,z)=(3t+2,-4,4t)$.



Eftersom $\ell \perp \pi$, är linjens riktningsvektor vinkelrätt mot planet. Linjens ekvation kan skrivas på vektorformen som

$$(x,y,z)=(2,-4,0)+\underbrace{(3,0,4)}_{\text{riktningsvektorn}}t$$

så normalvektorn till planet är $\vec{n}=(3,0,4)$. Avståndet till planet är då

$$\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{QS}\| = \|\text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{QP}\| =$$

$$= \left\| \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{(3,0,4)(3,-1,-6)}{3^2+0^2+4^2}(3,0,4) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{9-24}{25}(3,0,4) \right\| =$$

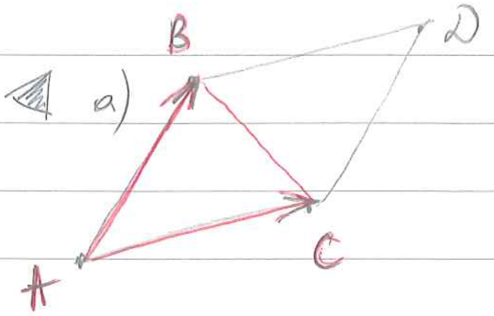
$$= \left\| -\frac{15}{25}(3,0,4) \right\| = \frac{3}{5}\cdot 5 = 3.$$

⑥ Betrakta $A:(2,4,5)$, $B:(2,1,5)$, $C:(3,3,6)$

a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C.

b) Bestäm ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna A, B, och C

a)



Låt ABCD vara ett parallellogram s a $CD \parallel AB$ och $BD = AC$.

Då är arean av $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ arean $ABCD =$

$$= \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

$$\vec{AB} = (2-2, 1-4, 5-5) = (0,-3,0)$$
$$\vec{AC} = (3-2, 3-4, 6-5) = (1,-1,1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [\text{kofaktorutv. rad } 2]$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3(\vec{i} - \vec{k}) = -3\vec{i} + 3\vec{k}$$

$$= (-3, 0, 3)$$

Arean av $\Delta ABC = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 3^2} =$

$$= \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

b) Observera att $\vec{AB} \times \vec{AC}$ är ortogonal mot både $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$ $\Rightarrow$ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

är ortogonal mot det plan där triangeln ΔABC ligger. Med andra ord, är $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (3,0,-3)$ planets normalvektor.

Eftersom planet innehåller punkten $A:(2,4,5)$ och har $\vec{n} = (3,0,-3)$ som normalvektorn, är planets ekvation

$$3(x-2) + 0(y-4) - 3(z-5) = 0$$

eller

$$3x - 6 - 3z + 15 = 0$$

$$3x - 3z + 9 = 0$$

$$\boxed{x - z + 3 = 0}$$

Svar a) Arean är $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) planets ekvation är

$$x - z + 3 = 0.$$

(7) a) Visa att $\vec{v_1} = (1,0,0,0)$, $\vec{v_2} = (2,1,0,0)$, $\vec{v_3} = (3,2,0,1)$, $\vec{v_4} = (4,3,1,2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$

b) Bestäm koordinaterna för $\vec{w} = (1,0,1,1)$ i denna bas.

a) Fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$ precis när de är linjärt oberoende. Ett sätt att kontrolera detta är att beräkna det A där $A = (\vec{v_1} \mid \vec{v_2} \mid \vec{v_3} \mid \vec{v_4})$.

I vårt fall är detta

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{kofaktorut-} \\ \text{veckling, kolumn 1} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{kofaktorutvec} \\ \text{kling, kolumn 1} \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \neq 0,$$

vilket innebär att $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ är linjärt oberoende.

Så $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ är en bas.

b) Vi söker $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ s a

$$\vec{w} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3} + c_4\vec{v_4} \iff$$

$$(1,0,1,1) = (c_1,0,0,0) + (2c_2, c_2, 0, 0) + $$
$$+ (3c_3, 2c_3, 0, c_3) + (4c_4, 3c_4, c_4, 2c_4)$$

$$(1,0,1,1) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4,\ c_2 + 2c_3 + 3c_4,$$
$$c_4,\ c_3 + 2c_4)$$

Detta ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = 1 \\ c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \\ c_4 = 1 \\ c_3 + 2c_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = 1 \\ c_2 + 2c_3 + 3c_4 = 0 \\ c_3 + 2c_4 = 1 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 = 1 - 2c_2 - 3c_3 - 4c_4 \\ c_2 = -2c_3 - 3c_4 \\ c_3 = 1 - 2c_4 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 = 1 - 2(-1) - 3(-1) - 4\cdot 1 = 2 \\ c_2 = -2(-1) - 3\cdot 1 = -1 \\ c_3 = 1 - 2 = -1 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

Svar:

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

b) $c_1 = 2,\ c_2 = -1$
$c_3 = -1,\ c_4 = 1$

8) Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara $T(x,y,z) = (x,z,y)$

a) visa utifrån definitionen att T är en linjär avbildning

b) bestäm standartmatrisen $[T]$ till T.

c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till T.

d) T är en spegling i ett plan genom origo. Använd resultatet från c) för att beskriva detta plan.

a) Kontrolerar!

1) $T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$

2) $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$

där $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ och $c \in \mathbb{R}$.

Låt $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\underline{T(\vec{v}+\vec{w})} = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) =$$

$$= (x_1+x_2, z_1+z_2, y_1+y_2) =$$

$$= (x_1, z_1, y_1) + (x_2, z_2, y_2)$$

$$= \underline{\underline{T(\vec{v}) + T(\vec{w})}}. \quad \text{OK!}$$

$$\underline{T(c\vec{v})} = T(cx_1, cy_1, cz_1) =$$

$$= (cx_1, cz_1, cy_1) = c(x_1, z_1, y_1) =$$

$$= c\,T(x_1, y_1, z_1) = \underline{\underline{cT(\vec{v})}}. \quad \text{OK!}$$

b) Standartmatrisen till T:

$$[T] = \left(T(\vec{e_1}) \,\middle|\, T(\vec{e_2}) \,\middle|\, T(\vec{e_3}) \right)$$

där $T(\vec{e_1}) = T(1,0,0) = (1,0,0)$
$T(\vec{e_2}) = T(0,1,0) = (0,0,1)$
$T(\vec{e_3}) = T(0,0,1) = (0,1,0)$.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Egenvärdena till t är lösningarna till den karakteristiska ekvationen

$$\det([T] - \lambda I) = 0 \quad (*)$$

kofaktorutveckling rad 1

$$\det([T]-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) =$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

$(*) \Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, egenvärdena är $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 1$:

dessa är lösningarna $\vec{v}$ till

$$([T] - \overset{=1}{\lambda} I)\vec{v} = \vec{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ \cancel{y - z = 0} \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$(\star)\quad \vec{v} = (t, s, s) = t\underbrace{(1,0,0)}_{=\vec{v}_1} + s\underbrace{(0,1,1)}_{=\vec{v}_2},\ t, s \in \mathbb{R}$$

Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = -1$

Dessa är lösningarna $\vec{w}$ till

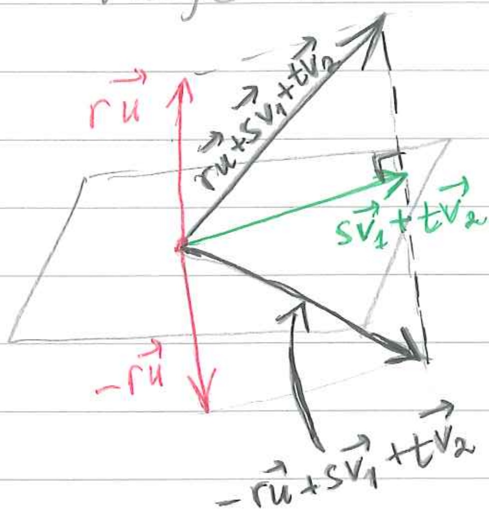
$$([T] - \overset{=-1}{\lambda} I)\vec{w} = 0 \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ \cancel{y + z = 0} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{w} = (0, t, -t) = t\underbrace{(0, 1, -1)}_{=\vec{u}},\ t \in \mathbb{R}$$

d) Vektorerna $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$, och $\vec{u}$ är vinkelrätt mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. Varje vektor i $\mathbb{R}^3$ kan då skrivas som $r\vec{u} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ för $r, s, t \in \mathbb{R}$.



Vi har

$T(r\vec{u} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2) =$

$= -r\vec{u} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$

Men det är precis hur speglingen i planet $t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$, $s, t \in \mathbb{R}$ fungerar!

Så avbildningen är speglingen i planet

$$\boxed{\pi : (x, y, z) = t(1, 0, 0) + s(0, 1, 1) \quad s, t \in \mathbb{R}.}$$

(vektorformen)

eller

$\boxed{\pi : y - z = 0}$ – normalformen,

då planet går genom origo och är vinkelrätt mot $\underline{\vec{u} = (0, 1, -1)}$.