UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend
Thomas Kragh
Sebastian Pöder

TENTAMEN i matematik
1MA025: Linjär algebra och geometri I
DivKand, GeoKand, KeKand, MaKand
IT, STS, X, K, Lärare, Fristående
21 Augusti 2019 klockan 8.00 – 13.00

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs godkänt på varje moment samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. Minst 3 poäng på uppgifterna 1 till 4 ger godkänt på motsvarande moment (men andra uppgifter kan också bidra till att bli godkänd på moment).

1. *Moment Linjära ekvationssystem.* Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \quad 3y + 2z - 3w = 0 \\ x \qquad + 5z - w = a \\ \quad 2y + 3z - 7w = 2 \end{cases}.$$

för alla reella värden på a.

2. *Moment Matrisräkning.* Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Lös matrisekvationen

$$AXBA^2 = A^4$$

3. *Moment Vektorer.* Låt $\vec{u} = (3, 2, 1)$, $\vec{v} = (-2, 13, 3)$, och $\vec{w} = (13, 2, 0)$.

(a) Är något par av dessa vektorer ortogonala mot varandra?

(b) Är något par av dessa vektorer parallella med varandra?

(c) Vad är volymen av den parallellepiped som de tre vektorerna spänner upp?

(d) Är $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en bas för $\mathbb{R}^3$?

4. *Moment Geometri.* Låt E vara planet som går genom origo och punkterna $(1, 1, 1)$ och $(0, 0, 7)$. Bestäm avståndet från planet E till punkten $P : (1, 5, 3)$. Hitta även den punkten på E som är närmast P.

Var god vänd!

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller

$$\begin{aligned} T(3,4,0) &= (1,2) \\ T(3,3,0) &= (0,0) \\ T(0,1,1) &= (1,1) \end{aligned}$$

(a) Bestäm standardmatrisen $[T]$.

(b) Bestäm bilden av linjen $l : (x,y,z) = (1,2,3) + t(3,2,1), t \in \mathbb{R}$ under T.

Ledning: En linjär avbildning avbildar en linje till en linje eller till en punkt.

6. Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $F : x + y - z = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen $[S]$.

(b) Bestäm bilden av planet $3x + 2y + z = 2$ under avbildningen S.

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hitta alla matriser X så att

$$\det(X + A) = \det(X).$$

8. Låt $\vec{a} = (1,3,5,7)$, $\vec{b} = (2,4,6,8)$, $\vec{c} = (3,5,7,9)$, $\vec{d} = (1,-3,2,1)$ och $\vec{e} = (0,1,2,13)$.

(a) Hitta en linjär relation mellan vektorerna $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$.

(b) Spänner vektorerna $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ och $\vec{e}$ upp hela $\mathbb{R}^4$?

Lycka till!