UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jens Fjelstad

2015-12-16
1MA025

Tentamen – Linjär Algebra och Geometri 1

Skrivtid: 08:00-13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Varje korrekt löst uppgift kan ge högst 5 poäng. För betyg 3 *krävs minst 18 poäng, för betyg* 4 *krävs minst 25 poäng, och för betyg* 5 *krävs minst 32 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.* **Lycka till!**

1. (Ej nödvändig att lösa om man är godkänd på duggan)
Bestäm lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + cy + z &= c \\ cx + y + z &= 1 \\ x + y + cz &= c^2 \end{cases}$$

för alla värden på $c \in \mathbb{R}$ där lösningar existerar.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Är B inverterbar? Beräkna i så fall AB^{-1} (dvs A multiplicerad med inversen av B) (2p)

(b) Lös ekvationen $(AX + I)^T = B$, där I är identitetsmatrisen. (3p)

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Låt $\vec{u} = (a, 0, a+2, 0, a)$, $\vec{v} = (0, a+1, 0, a+1, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, 3, 2, 1)$, där a är ett reellt tal.

(a) Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. (2p)

(b) För vilka värden på talet a är vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$, och $\vec{w}$ linjärt oberoende? (3p)

Var god vänd

5. (a) Bildar vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 5)$, $\vec{u}_2 = (-5, 1)$, och $\vec{u}_3 = (2, -1)$ en bas för $\mathbb{R}^2$? I så fall, beräkna koordinaterna för vektorn $\vec{x} = (4, 4)$ i denna bas.

(b) Bildar vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 4)$, och $\vec{v}_3 = (3, 2, 2)$ en bas för $\mathbb{R}^3$? I så fall, beräkna koordinaterna för vektorn $\vec{y} = (2, 0, -6)$ i denna bas.

6. Betrakta punkterna $A : (1, 1, 1)$, $B : (2, 0, 0)$, $C : (0, 1, 1)$.

(a) Beräkna arean för triangeln med hörn A, B, och C. (2p)

(b) Bestäm koordinaterna för en punkt D sådan att A, B, C, och D är hörnen i ett parallellogram (det finns flera sådana punkter, välj en). (3p)

7. Låt π_1 vara planet $y - z = 0$, och låt π_2 vara det plan som är parallellt med π_1 och som innehåller linjen $l : (x, y, z) = (2t, -1 - t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm avståndet mellan π_1 och π_2, samt koordinaterna för den punkt på π_2 som befinner sig närmast punkten $A : (1, 1, 1)$ (observera att A är en punkt på planet π_1).

8. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ och $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara definierade enligt $T(x, y) = (y, -x, x + y)$, $S(x, y, z) = (z - y, z - x)$.

(a) Bestäm standardmatriserna $[T]$ och $[S]$. (2p)

(b) Bestäm $(S \circ T)(x, y)$ samt $(T \circ S)(x, y, z)$ för godtyckliga vektorer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ respektive $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (2p)

(c) Är $S \circ T$ respektive $T \circ S$ inverterbara? (1p)

Lösningar

1. Vi löser medels Gauss-Jordan elimination utgående från ekvationssystemets totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & c \\ c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & c^2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad -c \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & c \\ 0 & 1-c^2 & 1-c & 1-c^2 \\ 0 & 1-c & c-1 & c^2-c \end{array}\right)$$

Totalmatrisens rang beror på värdet på c. Om $c = 1$ blir den sista matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket svarar mot ett ekvationssystem med den allmäna lösningen

$$(x, y, z) = (1 - s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Om $c \neq 1$ kan vi multiplicera den andra och den tredje raden med $\frac{1}{1-c}$, vilket ger matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & c \\ 0 & 1+c & 1 & 1+c \\ 0 & 1 & -1 & -c \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -(1+c) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & -c \\ 0 & 0 & c+2 & (1+c)^2 \end{array}\right)$$

Här ser vi att koefficientmatrisens rang beror på c. Om $c = -2$ har vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

vilket svarar mot ett inkonsistent ekvationssystem. Alltså finns inga lösningar då $c = -2$. Om $c \neq 1, -2$ kan vi mutliplicera den sista raden med $\frac{1}{2+c}$ vilket ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+c)^2}{2+c} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1 \quad -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 0 & -\frac{1}{2+c} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2+c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+c)^2}{2+c} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -c \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1+c}{2+c} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2+c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1+c)^2}{2+c} \end{array}\right)$$

Om $c \neq 1, -2$ har systemet alltså den entydiga lösningen

$$(x, y, z) = (-\frac{1+c}{2+c}, \frac{1}{2+c}, \frac{(1+c)^2}{2+c})$$

2. (a) $|B| = 8$, så det följer att B är inverterbar. Jacobis metod t.ex. ger

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $(AX+I)^T = B \Leftrightarrow AX+I = B^T \Leftrightarrow AX = B^T - I$. Matrisen A har determinant 1 och är därför inverterbar, så vi kan multiplicera båda led av ekvationen med A^{-1} med resultat $AX = B^T - I \Leftrightarrow X = A^{-1}(B^T - I)$. Valfri metod ger $A^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, vilket resulterar i

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Beräkna först vänsterledet:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad -1 \quad = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2}{=} -(x-2) \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad -1 \; -2$$

$$= -(x-2) \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 1-x & x-2 \\ 0 & 1-2x & -3 \end{vmatrix} \overset{K_1}{=} -(x-2) \begin{vmatrix} 1-x & x-2 \\ 1-2x & -3 \end{vmatrix} = -2(x-2)(x^2 - x - \tfrac{1}{2})$$

Ekvationen lyder således $-2(x-2)(x^2-x-\frac{1}{2}) = 0$, och lösningarna är $x = 2, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

4. (a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, så vinkeln mellan vektorerna är $\pi/2$.

(b) Vi beräknar rangen av matrisen $V = (\vec{w}\ \vec{u}\ \vec{v})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a+1 \\ 3 & a+2 & 0 \\ 2 & 0 & a+1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2(1-a) & 0 \\ 0 & -2a & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Om $a = 1$ läser vi av $\text{rang}(V) = 2$, och på samma sätt om $a = -1$ ser vi $\text{rang}(V) = 2$. Om $a \neq \pm 1$ kan vi multiplicera den andra raden med $\frac{1}{2(1-a)}$, och fortsatta radoperationer ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Med andra ord har vi $\text{rang}(V) = 3$ =antal kolonner. Vi har visat att $\vec{u}$, $\vec{v}$, och $\vec{w}$ är linjärt oberoende omm $a \neq \pm 1$.

5. (a) Nej, eftersom tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ aldrig kan vara linjärt oberoende (t.ex. gäller $3\vec{u}_1 + 11\vec{u}_2 + 26\vec{u}_3 = \vec{0}$)

(b) VI försöker att lösa ekvationssystemet $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{y}$, och i lösningen kan vi läsa av huruvida vektorerna bildar en bas eller ej. Gauss-Jordan elimination ger:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

De tre första kolonnerna bildar den radkanoniska matrisen radekvivalent med $V = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$, så $\text{rang}(V) = 3$ och alltså bildar $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, och $\vec{v}_3$ en bas för $\mathbb{R}^3$. Dessutom har vi visat att koordinaterna för vektorn $\vec{y}$ i denna bas är $(-26, 20, -4)$.

6. (a) Triangelns area $= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$, dvs $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1) \times (-1, 0, 0) = (0, 1, -1)$. Alltså gäller att den sökta arean $= \frac{1}{2}\|(0, 1, -1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Vi kan t.ex. välja punkten D att vara punkten man når genom följa vektorn $\overrightarrow{AB}$ från punkten C, dvs punkten med koordinater $(0, 1, 1) + (1, -1, -1) = (1, 0, 0)$. Punkterna A, B, C, D bildar då hörnen i ett parallellogram eftersom $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (per definition) och $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

7. Observera att punkten $Q : (0, -1, 0)$ ligger på linjen l och därför också i planet π_2. Eftersom vektorn $\vec{n} = (0, 1, -1)$ är normal mot båda planen är avståndet mellan planen normen av vektorn $\text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QA})$. Det gäller $\overrightarrow{QA} = (1, 1, 1) - (0, -1, 0) = (1, 2, 1)$, och alltså $\text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QA}) = \frac{(1,2,1)\bullet(0,1,-1)}{2}(0, 1, -1) = \frac{1}{2}(0, 1, -1)$. Avståndet mellan π_1 och π_2 är därmed $\frac{1}{2}\|(0, 1, -1)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Punkten P på π_2 närmast A har ortsvektor $\overrightarrow{OA} - \text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QA}) = (1, 1, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, -1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, dvs den sökta punkten är $P : ((1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

8. (a) Vi läser av:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $[S \circ T] = [S][T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, och $[T \circ S] = [T][S] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Det följer att $(S \circ T)(x, y) = (2x + y, x)$ och $(T \circ S)(x, y, z) = (z - x, y - z, 2z - x - y)$.

(c) $\det([S \circ T]) = -1 \neq 0$ så $S \circ T$ är inverterbar. $\det([T \circ S]) = 0$ så $T \circ S$ är inte inverterbar.