Uppsala Universitet
Matematiska institutionen
Isac Hedén

Algebra I, 5 hp
2013-01-11
Tentamen

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och linjal. Varje problem ger maximalt 5 poäng – om inget annat anges krävs att lösningarna skall vara åtföljda av klar och tydlig förklarande text för full poäng. Gränserna för betygen 3, 4 och 5 går vid 18, 25 och 32 poäng respektive (inklusive eventuella bonuspoäng från duggan). Påbörja varje uppgift på ett nytt blad.
Skrivtid: *08.00–13.00.*

1. På den första uppgiften krävs inga motiveringar, endast svar.

a) Ge exempel på ett icke-konstant reellt polynom $p(x)$ sådant att $p(1+i) = 0$.

b) Ge exempel på två olika polynom som är associerade med varandra.

c) Ange tre heltal x som uppfyller $0 \leq x \leq 15$ och $x \equiv 3^5 \pmod 5$.

d) Ge exempel på ett heltal b sådant att den diofantiska ekvationen

$$2013x + by = 32$$

har oändligt många heltalslösningar x, y.

e) Bestäm sammansättningen $(f \circ g)(x)$ av följande två funktioner:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \quad \text{och} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 1.$$

Glöm inte att ange sammansättningens definitions- och målmängd.

Lösning:

a) Det reella polynomet $p(x) = (x-1-i)(x-1+i) = x^2 - 2x + 2$ har $1+i$ som nollställe.

b) Vi kan ta polynomen x och $2x$.

c) Eftersom $3^5 \equiv 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \equiv (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \equiv 3 \pmod 5$, är de sökta talen $3, 8$ och 13.

d) Ett heltal b sådant att $\mathrm{SGD}(b, 2013) = 1$ duger, så vi kan till exempel ta $b = 1$.

e) Sammansättningen är

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 4x^2 + 4x + 1, \end{aligned}$$

eftersom $f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

2. **a)** Skriv talet $(137)_{\text{nio}}$ i basen 3.

b) Visa att $6 | (n-1)n(n+1)$ för varje heltal $n \geq 0$.

Lösning:

a) Vi har $(137)_{\text{nio}} = 9^2 + 3 \cdot 9 + 7 = 3^4 + 3^3 + 7 = 3^4 + 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 = (11021)_{\text{tre}}$

b) Något av de tre på varandra följande talen $(n-1)$, n och $(n+1)$ måste innehålla en faktor tre, och minst ett av dem måste innehålla en faktor två. Alltså är deras produkt delbar med $2 \cdot 3 = 6$.

3. Vilken är den minsta positiva rest som kan erhållas vid division av 19^{18} med 17?

Lösning: Vi räknar modulo 17:

$$19^{18} \equiv 2^{18} \equiv 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2 \equiv (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \equiv 4.$$

Svaret är alltså 4.

4. Gröna stearinljus kostar 11 kronor styck och silverfärgade stearinljus kostar 16 kronor styck.

a) Bestäm samtliga heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $11x + 16y = 1$.

b) När Adam köpte stearinljus av de två sorterna blev det totala priset 312 kronor. Vilket är det högsta sammanlagda antalet ljus han kan ha köpt?

Lösning:

a) Med hjälp av Euklides algoritm (fram- och baklänges) finner vi en lösning $(x, y) = (3, -2)$. Eftersom $\mathrm{SGD}(11, 16) = 1$, har ekvationen den allmänna lösningen

$$\begin{cases} x = 3 - 16n \\ y = -2 + 11n \end{cases} \quad , n \in \mathbb{Z}.$$

b) Den totala kostnaden för x stycken gröna ljus och y stycken silverfärgade är $11x + 16y$, så vi behöver lösa ekvationen $11x + 16y = 312$. Vi får en lösning genom att multiplicera lösningen $(x, y) = (3, -2)$ från ekvationen i **a)** med 312, och den allmänna lösningen blir

$$\begin{cases} x = 936 - 16n \\ y = -624 + 11n \end{cases} \quad , n \in \mathbb{Z}.$$

Det finns två värden på n som ger icke-negativa värden på x och y, nämligen $n = 57$ som ger $(x, y) = (24, 3)$ och $n = 58$ som ger $(x, y) = (8, 14)$. Det största antalet ljus som Adam kan ha köpt är alltså $24 + 3 = 27$ stycken.

5. Bevisa med induktion att

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning: Bassteget ($n = 1$) innebär att kontrollera att $\frac{1}{2}$ är lika med $2 - \frac{1+2}{2^1}$, vilket stämmer. Låt nu $p \geq 1$ vara ett godtyckligt heltal, och antag att formeln stämmer för $n = p$. Då följer det att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{p}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} &= 2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\ &= 2 - \frac{2p + 4 - p - 1}{2^{p+1}} \\ &= 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}. \end{aligned}$$

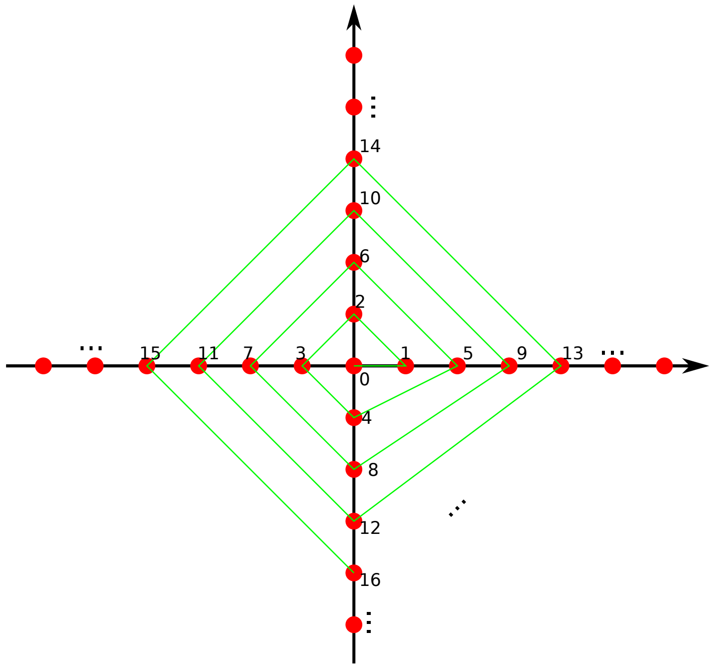
så att formeln stämmer även för $n = p + 1$. Det slutför induktionsbeviset.

6. Låt $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = 0\}$, det vill säga A är den mängd som består av alla punkter i planet med koordinater (x, y) sådana att x och y är heltal och deras produkt är noll.

a) Åskådliggör mängden A i en figur.

b) Visa att A är uppräknelig genom att konstruera en bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Bijektionen f kan beskrivas på sluten form, rekursivt eller med hjälp av figuren från **a)**.

Lösning: Mängden A består av alla punkter på koordinataxlarna med heltalskoordinater, de är rödmarkerade i figuren. I figuren är även en bijektiv funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ beskriven: funktionsvärdet $f(n)$ är lika med den punkten i A som är markerad med talet $n \in \mathbb{N}$. På sluten form ges funktionen av följande uttryck:



$$f(n) = \begin{cases} \left(0, -\frac{n}{4}\right) & \text{om } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \left(\frac{n+3}{4}, 0\right) & \text{om } n \equiv 1 \pmod 4 \\ \left(0, \frac{n+2}{4}\right) & \text{om } n \equiv 2 \pmod 4 \\ \left(-\frac{n+1}{4}, 0\right) & \text{om } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Man kan också beskriva f rekursivt – om man vill det så kan man med fördel tänka sig att figuren ligger i det komplexa planet $\mathbb{C}$ istället för $\mathbb{R}^2$. Den rekursiva definitionen blir: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ och

$$f(n+1) = \begin{cases} if(n) & \text{om } \mathrm{Im}\,(f(n)) \geq 0 \\ if(n) + 1 & \text{annars} \end{cases}$$

om $n \geq 1$. Här betecknar i den imaginära enheten, alltså $i^2 = -1$.

7. En relation R på $\mathbb{Z}$ definieras av $xRy \iff 5 | x^2 - y^2$.

a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

b) Visa att s och $s + 5t$ tillhör samma ekvivalensklass då $s, t \in \mathbb{Z}$.

c) Hur många ekvivalensklasser på $\mathbb{Z}$ ger R upphov till?

Lösning:

a) Låt $x, y, z \in \mathbb{Z}$ vara godtyckliga heltal. Relationen är reflexiv eftersom

$$xRx \iff 5 | x^2 - x^2 \iff 5 | 0.$$

Den är symmetrisk eftersom

$$xRy \iff 5 | x^2 - y^2 \iff 5 | -(x^2 - y^2) \iff yRx,$$

och den är transitiv eftersom

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\implies 5|(x^2-y^2) \wedge 5|(y^2-z^2) \\ &\implies 5|(x^2-y^2)+(y^2-z^2) = x^2-z^2 \\ &\implies xRz. \end{aligned}$$

Innan vi fortsätter, lägger vi märke till att $xRy \iff x^2 \equiv y^2 \pmod 5$.

b) Låt $s, t \in \mathbb{Z}$ vara godtyckliga heltal. Då har vi $s \equiv s + 5t \pmod 5$, och genom att kvadrera båda sidor får vi

$$s^2 \equiv (s+5t)^2 \pmod 5,$$

vilket innebär precis att $sR(s+5t)$. Alltså tillhör s och $s+5t$ samma ekvivalensklass.

c) Ekvivalensrelationen R ger upphov till tre ekvivalensklasser på $\mathbb{Z}$, nämligen $[0]$, $[1]$, och $[2]$ (där $[a]$ som vanligt den ekvivalensklass som innehåller a). För ett heltal x har vi nämligen fem möjligheter när vi räknar modulo 5: $x \equiv 0$, $x \equiv 1$, $x \equiv 2$, $x \equiv -2$, eller $x \equiv -1$. Om $x \equiv 0$ följer det att $x^2 \equiv 0^2$, så att $x \in [0]$. Om $x \equiv \pm 1$ följer det att $x^2 \equiv 1^2$, så att $x \in [1]$. Om slutligen $x \equiv \pm 2$ följer det att $x^2 \equiv 2^2$, så att $x \in [2]$.

8. **a)** Bestäm samtliga nollställen till polynomet $p(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 9$, givet att $p(t)$ har ett dubbelt nollställe.

b) Använd resultatet i **a)** och sambandet mellan ett polynoms nollställen och koefficienter för att hitta samtliga reella lösningar (x, y, z) till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+xz+yz=3 \\ xyz=-9 \end{cases}$$

Lösning:

a) Vi beräknar polynomets derivata:

$$p'(t) = 3t^2 - 10t + 3 = 3\left(t^2 - \tfrac{10}{3}t + 1\right).$$

Dess nollställen är $t = 3$ och $t = \frac{1}{3}$, alltså måste det dubbla nollstället till $p(t)$ vara en av dessa två. Eftersom $p(t)$ har heltalskoefficienter och ledande koefficient lika med 1, måste ett rationellt nollställe till $p(t)$ vara ett heltal, så nollstället är $t = 3$, och därmed är $(t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$ en faktor i $p(t)$. Division ger $p(t) = (t-3)^2(t+1)$, så att p:s nollställen är $t = 3$ (dubblet) och $t = -1$ (enkelt).

b) Antag att $x, y, z \in \mathbb{R}$ löser det givna ekvationssystemet. I så fall är

$$\begin{aligned} p(t) &= t^3 - 5t^2 + 3t + 9 \\ &= t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+xz+yz)t - xyz \\ &= (t-x)(t-y)(t-z), \end{aligned}$$

så x, y och z är nollställen till $p(t)$. Det lämnar bara tre möjligheter, nämligen

$$(x,y,z) = (3,3,-1),\ (3,-1,3),\ \text{eller } (-1,3,3).$$

Insättning av dessa i ekvationssystemet visar att dessa tre verkligen är lösningar.