UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Veronica Crispin Quiñonez

Kortfattade svarsförslag till tentamen
Linjär algebra II 5 hp 1MA024
2019-03-18 kl 8-13

- *Varje uppgift är värd 5 p. För betyget 3, 4, 5 krävs 18, 25 respektive 32 p.*
- **Varje svar ska motiveras noga! Enbart svar utan motivering ger 0p.**

Rätt resonemnag med mindre räkne/-avskrivningsmisstag som råkar leda till fel svar ger poäng, om misstaget inte förenklar problemet väsentligt eller det felaktiga svaret är uppenbart (exempelvis genom enkel insättning). Fel resonemang med rätt svar ger inte poäng.

(1) Vilka av nedanstående delmängder är delrum i respektive vektorrum? För varje delrum, ange dess dimension.

(a) Delmängden av alla symmetriska matriser i vektorrummet av alla 3×3-matriser med vanlig matrisaddition och multiplikation med skalär;

Svar. Ja; $\dim \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ a & d_2 & c \\ b & c & d_3 \end{pmatrix} \right\} = 6,$ ty vi kan välja fritt 6 parametrar.

(b) $\{(x, y, z)^T \,|\, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$; **Svar.** Nej, ty vektorer med nollskilt y saknar invers.

(c) $\{p(x) \,|\, p(0) = 1\} \subseteq P_n(\mathbb{R})$; **Svar.** Nej, ty 0 saknas.

(d)
$$\left\{\mathbf{x} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 3\mathbf{x} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Svar. Ja; ekvationen ger $(3x_1, x_2)^T = (3x_1, 3x_2)^T$, vilket har delvektorrummet/lösningsmängden $\{(x_1, 0)\}$ med dim 1.

Rättning. 1p per rätt svar; 0,5p per rätt dimension.

(2) Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla matriser av storlek 2×2 och betrakta delmängden S som består av följande matriser:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange en bas för det linjära höljet av S, Span(S).

Svar. Ur $\sum_{i=1}^4 a_i M_i = 0_{2\times 2}$ fås att man kan välja vilka 2 valfria matriser som bas. Alternativt, *ser* man att t.ex. $M_2 = M_1 - M_3, M_4 = M_1 - 2M_3$.

(b) Avgör om matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

tillhör Span(S). Uttryck en av dem som $\sum_{i=1}^4 a_i M_i$ på minst två olika sätt.

Svar. Bara $B \in \text{Span}(S)$; $\sum_{i=1}^4 a_i M_i = B$ har lösning $a_1 = -2 - a_3 + a_4$, $a_2 = 3 + a_3 - 2a_4$ så att t.ex. för $a_3 = a_4 = 1$ respektive $a_3 = 0, a_4 = 1$ är $B = -2M_1 + 2M_2 + M_3 + M_4 = -M_1 + M_2 + M_4$.

Rättning. (a) 2p; (b) 1p per matris och 0,5p per linjär kombination.

(3) Låt $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotation $\pi/2$ radianer moturs kring z-axeln och $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal projektion på planet $x + z = 0$.

(a) Ange standardmatriserna $[R]$ och $[P]$ för respektive linjär avbildning. Vad blir $P\big((\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})^T\big)$ och $P\big((\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2})^T\big)$?

Svar.

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ [P] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$[P]$ kan fås på minst 2 olika sätt. Genom att välja en bas för $\mathbb{R}^3$ med $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i planet, t.ex. $(1,0,-1)^T$ och $(0,1,0)^T$, så att $P(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ och $\mathbf{v}_3 = (1,0,1)^T$ (planets normalvektor) så att $P(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$. Då är

$$[P] = T_{\mathbf{v}\to\mathbf{e}}[P]_{\mathbf{v}}T_{\mathbf{e}\to\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Alternativt kan man direkt räkna ut vad standardvektorerna avbildas på: $P((1,0,0)^T) = (1,0,0)^T - \mathrm{proj}_{(1,0,1)^T}(1,0,0)^T = (1,0,0)^T - \big((1,0,0)\cdot(1,0,1)^T\big)\frac{(1,0,1)^T}{(\sqrt{2})^2} =$ $= (1/2,0,-1/2)^T$, vilket exakt är första kolumnen i $[P]$, och så vidare.. Förutom direkt matrismultiplikation är svaret på sista frågan: $P\big((\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})^T\big) = P\big((\sqrt{2},0,\sqrt{2})^T\big) + P\big((0,\sqrt{3},0)^T\big) = \mathbf{0} + (0,\sqrt{3},0)^T$ och $P\big((\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2})^T\big) = (\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2})^T$, då $(\sqrt{2},0,\sqrt{2})^T \perp$ planet och de övriga ligger i planet.

(b) Ange standardmatrisen för den sammansatta avbildningen av att först projicera en vektor på $x+z=0$ och sedan rotera $\pi/2$ radianer moturs kring z-axeln. Ange kärnan (kernel) för denna sammansatta avbildning.

Svar.

$$[R][P] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Rättning. (a) 2,5p matriserna, 1p vektorerna; (b) 0,5p matris och 1p kärnan.

(4) (a) Definiera begreppet *diagonaliserbar* matris.

Svar. $A_{n\times n}$ är diagonaliserbar $\Leftrightarrow P^{-1}AP = D$, inverterbar P, diagonal D.

(b) Visa att om en matris A är diagonaliserbar (över ett reellt vektorrum), så är även A^{-1} diagonaliserbar.

Svar. Om A^{-1} existerar, är $\det(D) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) \neq 0 \Rightarrow D$ är inverterbar. (Alt: A är inv. $\Leftrightarrow$ alla egenvärden $\neq 0 \Leftrightarrow D$'s diagonal består av nollskilda tal $\Leftrightarrow D$ är inv.) Slutligen: $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ diagonaliserbar per definition. (Kortare svar är ok.)

(c) Avgör vilken av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

som är diagonaliserbar och förklara varför de två andra inte är det.

Svar. A och B har samma karakteristiska polynom $(\lambda-2)(\lambda-3)^2$; egenrummet med egenvärdet 2 har dim 1 för A och dim 2 för B, så B är diagonaliserbar men inte A. C's karaktertistiska polynom är $(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+9)$ som bara har en reell rot så C är inte diagonaliserbar över ett reellt vektorrum.

Rättning. (a) 1p; (b) 1p; (c) 1p per matris.

(5) Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 &+ & y_2 &- & y_3 \\ y_2' &= y_1 &+ & 4y_2 &- & y_3 \\ y_3' &= 3y_1 &+ & 3y_2 \end{cases}.$$

Svar. Karakteristiska polynomet är $(\lambda-2)(\lambda-3)^2$. Tillhörande egenvektorer är $(1,1,3)^T$ respektive $(1,-1,0)^T, (1,0,1)^T$. Basbytesmatrisen P bestående av egevektorer som kolumner ger $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$, där $u_1' = 2u_1, u_2' = 3u_2, u_3' = 3u_3$ så att $u_1 = c_1e^{2x}, u_2 = c_2e^{3x}, u_3 = c_3e^{3x}$. $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ på dessa u_i ger $y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{3x}, y_2 = c_1e^{2x} - c_2e^{3x}, y_3 = 3c_1e^{2x} + c_3e^{3x}$.

Rättning. 1p egenvärden, 2p egenvektorer med P, 1p för $\mathbf{u}$ och 1p för $\mathbf{y}$.

(6) Definiera en inre produkt på $P_2(\mathbb{R})$ genom $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

(a) Räkna ut normen av standardpolynomen $1, x$ och x^2 samt vinkeln mellan 1 och x.

Svar. $||1|| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1^2dx} = 1$, $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2dx} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $||x^2|| = \sqrt{\int_0^1 (x^2)^2dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\langle 1, x\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ och $\theta = arccos(\frac{\langle 1,x\rangle}{||1||\cdot||x||}) = arccos(\frac{1/2}{1/\sqrt{3}}) = arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi/6$.

(b) Ange en ON-bas för Span($\{1, x\}$).

Svar. $p_1 = 1$ har norm 1 och tas som första basvektorn. Låt $q_2 = x - \langle x, 1\rangle \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$. Eftersom $||q_2|| = \sqrt{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, blir andra basvektorn $p_2 = \frac{q_2}{||q_2||} = \sqrt{3}(2x-1)$.

Rättning. (a) 2p för de tre normerna, 1p vinkel; (b) 0,5p för $p_1 = 1$ med motivering, 0,5p för $2x-1$ och 1p för resten.

(7) Låt $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$ och $g(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2$.

(a) Gör ett ON-basbyte så att den blandade termen i $f(x_1, x_2)$ försvinner. Vilken geometrisk figur beskriver $f(x_1, x_2) = 1$?

Svar. Standarduträkning ger egenvärdena 7 och -1 så att det enligt spektralsatsen finns ett ON-basbyte så att $f(y_1, y_2) = 7y_1^2 - y_2^2 = 1$ är ekvationen för en hyperbel. Egenvektorerna med respektive egenvärde är $(1,1)^T$ och $(-1,1)^T$, som efter normering ger matrisen för ON-basbyte

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Variabelbyte } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \text{ ger}$$

(b) Vilken geometrisk figur beskriver $g(x_1, x_2) = 1$ efter samma variabelbyte som är gjord i (a)?

Svar. Den geometriska figuren förblir densamma efter ON-basbyte, en cirkel, liksom ekvationen för densamma (men för en ellips hade ekvationen förändrats).

Rättning. (a) 1p egenvärden, 1p -vektorer, 1p ON-matris, 1p figur; (b) 1p.

(8) (a) Definiera begreppet *linjär avbildning*.

(b) Visa att om T är en linjär avbildning, är $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Svar. Se i boken. Alternativt $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; addition med $-T(\mathbf{0})$ på båda sidor ger resultatet.

(c) Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vara en bas för ett vektorrum V och låt en linjär operator $T : V \to V$ vara definierad via $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$. Ange en bas för operatorns kärna Ker(T) respektive bildrum/värderum $R(T)$.

Svar. $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + a_3(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$ ger $a_1 = a_2 = -a_3$ så att $\mathrm{Ker}(T) = a_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$.
$R(T) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$, där det sistnämnda kan fås även som kolumnrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rättning. (a) 1p; (b) 1p; (c) 1p rätt resonemang (det finns flera), 1p kärnans bas, 1p värderummets bas.