UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend

Prov i matematik

Algebra I
2014–06–03

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (**Obs:** denna uppgift löses **inte** om man har klarat duggan!)
Visa att utsagorna $(p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q))$ och $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$ är ekvivalenta.

2. Förkorta bråket

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$$

så långt som möjligt.

3. Bestäm alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

$$34x + 700y = 6.$$

4. Bestäm den rest som fås då $10^{10} + 100^{100}$ divideras med 7.

5. Visa med induktion att

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

för alla heltal $n \geq 2$.

6. Polynomet $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 3$ har ett rationellt nollställe.

(a) Bestäm alla nollställen till $f(x)$.
(b) Skriv $f(x)$ som en produkt av irreducibla rationella polynom.

7. Polynomet $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$ har ett rent imaginärt nollställe (det vill säga ett nollställe med realdel 0). Bestäm alla nollställen till $f(x)$.

8. Låt A vara mängden av reella tal x som uppfyller att x^2 är ett rationellt tal, det vill säga

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Visa att A är en uppräknelig mängd.

Lycka till!

Lösningar till duggan i Algebra I 2014–06–03

1. Båda utsagorna är sanna om och endast om precis en av p och q är sann. Därmed är utsagorna ekvivalenta.

2. Med hjälp av Euklides algoritm finner vi att x^2+2x+3 är en största gemensam delare till $x^4+2x^3+4x^2+2x+3$ och $x^4+2x^3+3x^2$. Genom att faktorisera får vi

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+2x+3}{x^4+2x^3+3x^2} = \frac{(x^2+1)(x^2+2x+3)}{x^2(x^2+2x+3)} = \frac{x^2+1}{x^2}.$$

3. Vi förenklar först till

$$17x+350y=3.$$

Sedan bestämmer vi $\mathrm{SGD}(350,17)$ med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 350 &= 20\cdot 17+10 \\ 17 &= 10+7 \\ 10 &= 7+3 \\ 7 &= 2\cdot 3+1. \end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{SGD}(350,17)=1$. Dessutom är

$$\begin{aligned} 1 &= 7-2\cdot 3 = 7-2(10-7), \\ &= -2\cdot 10+3\cdot 7 = -2\cdot 10+3(17-10) = \\ &= 3\cdot 17-5\cdot 10 = 3\cdot 17-5(350-20\cdot 17) = \\ &= -5\cdot 350+103\cdot 17. \end{aligned}$$

och därmed är $(x,y)=(103,-5)$ en lösning till $17x+350y=1$. Alltså är $(x,y)=(309,-15)$ en lösning till $17x+350y=3$. Eftersom $\mathrm{SGD}(350,17)=1$ är lösningarna till $17x+350y=3$ precis

$$\begin{cases} x = 309-350n, \\ y = -15+17n, \end{cases} \quad \text{där } n\in\mathbb{Z}.$$

4. Modulo 7 gäller att

$$10^{10}+100^{100} \equiv 3^{10}+2^{100} = (3^3)^3\cdot 3+(2^3)^{33}\cdot 2 = 27^3\cdot 3+8^{33}\cdot 2 \equiv (-1)^3\cdot 3+1^{33}\cdot 2 = -3+2 = -1 \equiv 6$$

Alltså är resten 6.

5. Om $n=2$ så är vänsterledet $\frac{2-1}{2^2}=\frac{1}{4}$ och högerledet $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Alltså stämmer utsagan i detta fall.
Låt $m\geq 2$ och antag att

$$\sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{2^k} = 1-\frac{m+1}{2^m}$$

Då gäller

$$\sum_{k=2}^{m+1}\frac{k-1}{2^k} = \sum_{k=2}^{m}\frac{k-1}{2^k}+\frac{m+1-1}{2^{m+1}} = 1-\frac{m+1}{2^m}+\frac{m}{2^{m+1}} = 1-\frac{2m+2-m}{2^{m+1}} = 1-\frac{m+1+1}{2^{m+1}}.$$

Det vill säga, om utsagan gäller för $n=m$ så gäller den även för $n=m+1$. Alltså följer med induktion att

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{2^k} = 1-\frac{n+1}{2^n}$$

gäller för alla heltal $n\geq 2$.

6. Eftersom f har heltalskoefficienter är varje rationellt nollställe på formen p/q där $p|3$ och $q|3$, vilket motsvarar $p/q \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 1/3\}$. Eftersom alla koefficienter är positiva måste dessutom $p/q < 0$. Alltså är $p/q \in \{-1, -3, -1/3\}$. Genom att beräkna $f(p/q)$ i de tre fallen ser vi att det enda rationella nollstället till f är $-\frac{1}{3}$. Alltså delar $3x+1$ polynomet $f(x)$. Divisionsalgoritmen ger

$$f(x) = (x^2 + x + 3)(3x + 1).$$

Ekvationen $x^2 + x + 3 = 0$ har lösningarna $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}i}{2}$. Nollställena till f är alltså $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}i}{2}$ och $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2}$.
Eftersom x_2 och x_3 har nollskild imaginärdel är de inte reella tal och därmed inte heller rationella tal. Därmed är $x^2 + x + 3$ irreducibelt över $\mathbb{Q}$. Polynomet $3x + 1$ har grad 1 och är därför också irreducibelt över $\mathbb{Q}$. Faktoriseringen

$$f(x) = (x^2 + x + 3)(3x + 1).$$

ger därmed f skrivet som en produkt av irreducibla rationella polynom.

7. Polynomet f har ett nollställe på formen bi där $b \in \mathbb{R}$. Alltså är $f(bi) = 0$, vilket betyder att

$$b^4 - 2b^3 i - 2b^2 + 8bi - 8 = 0$$

Genom att jämföra real- och imaginärdel får vi

$$\begin{cases} b^4 - 2b^2 - 8 = 0 \\ \quad -2b^3 + 8b = 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen är ekvivalent med $b \in \{0, 2, -2\}$. Insättning i den första ekvationen ger lösningarna $b = \pm 2$. Vi har alltså två nollställen $x_1 = 2i$ och $x_2 = -2i$. Därmed delar $(x-2i)(x+2i) = (x^2+4)$ polynomet $f(x)$. Divisionsalgoritmen ger

$$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 4).$$

Vilket ger ytterligare två nollställen $x_3 = -1 + \sqrt{3}$ och $x_4 = -1 - \sqrt{3}$

8. Låt $y \in \mathbb{Q}$. Då har ekvationen $x^2 = y$ två reella lösningar $x = \pm\sqrt{y}$ om $y > 0$, en reell lösning om $y = 0$ och inga reella lösningar om $y < 0$. Det följer att funktionen $f : \mathbb{Q} \to A$, som ges av

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{om } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{om } y < 0 \end{cases}$$

är bijektiv. Alltså finns en bijektion mellan A och $\mathbb{Q}$ (det vill säga A har samma kardinalitet som $\mathbb{Q}$). Eftersom $\mathbb{Q}$ är uppräknelig är därmed A uppräknelig.