

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. Låt  $P(x)$  och  $Q(x)$  vara två öppna utsagor vars sanningsvärde beror på en variabel  $x$  i ett universum  $X$  och låt  $A, B$  vara mängderna  $A = \{x \in X: P(x)\}$  och  $B = \{x \in X: Q(x)\}$ . Beskriv följande mängder i termer  $A$  och  $B$  med hjälp av snitt, union, mängddifferens och komplement.
  - (a)  $\{x \in X: P(x) \wedge Q(x)\}$ , (1 poäng)
  - (b)  $\{x \in X: P(x) \Rightarrow Q(x)\}$ , (2 poäng)
  - (c)  $\{x \in X: (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge Q(x))\}$ . (2 poäng)
2. Visa att den Diofantiska ekvationen  $91x + 50y = 2$  har lösningar. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)
3.
  - (a) Skriv talet  $(110321)_4$  i bas 10. (2 poäng)
  - (b) Bestäm resten som fås då  $9^{387}$  delas med 7. (3 poäng)
4. Låt relationen  $R$  på heltalen vara definierad av  $xRy \Leftrightarrow 12 \mid x - y$ .
  - (a) Relationen  $R$  har ett speciellt namn. Vilket? (1 poäng)
  - (b) Visa att relationen  $R$  är en ekvivalensrelation. (3 poäng)
  - (c) Hur många ekvivalensklasser har  $R$ ? (1 poäng)
5. Visa med induktion att  $n^3 \leq 3^n$  för alla heltal  $n \geq 3$ . (5 poäng)
6.
  - (a) Vad betyder det att en funktion är injektiv respektive surjektiv? Återge definitionerna. (2 poäng)
  - (b) Konstruera en surjektiv funktion. Bevisa att funktionen är surjektiv. (3 poäng)
7. Hitta samtliga nollställan till polynomet  $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 42$ . (5 poäng)

8. Låt  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  och  $p_3(x)$  vara tre polynom.

(a) Visa att om  $p_3 \mid p_1$  och  $p_3 \mid p_2$  så gäller även att  $p_3 \mid p_1 + p_2$ . (2 poäng)

(b) Visa att om  $p_3 \mid p_2$  så gäller även att  $p_3 \mid p_2 p_1$ . (2 poäng)

(c) För division med heltal är resten alltid mindre än delaren, d.v.s. att om  $n = qm + r$  så gäller alltid  $0 \leq r < m$ . Vad är motsvarande förhållande mellan delare och rest för division av polynom? (1 poäng)