Lösningar
Tenta Baskurs i matematik
2014-10-24

1)
$$\ln(x^2-1) - 2\cdot\ln\sqrt{x+1} =$$

$$= \ln(x^2-1) - \ln(x+1) =$$

$$= \ln\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = \ln(x-1).$$

2)
$$\frac{(x^2)^3}{x^{-3}\cdot\sqrt{x}} = x^{2\cdot 3-(-3)-1/2} = x^{17/2}.$$

3)
$$\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{x-2+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

4)
$$\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

5) $|x-3|>2$

$\Leftrightarrow \quad x-3>2 \quad \text{eller} \quad x-3<-2$

$\Leftrightarrow \quad x>5 \quad \text{eller} \quad x<1.$

6) $$\operatorname{Re}\frac{z}{w}=\operatorname{Re}\frac{2-3i}{1+i}=\operatorname{Re}\frac{(2-3i)(1-i)}{2}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{2-5i-3}{2}=-\frac{1}{2}$$

7) $$\sum_{k=1}^{5}(2k-5)=-3-1+1+3+5=5$$

8) $3^x=2$

$\Leftrightarrow \quad x\cdot\ln 3=\ln 2$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \left(=\log_3 2\right)$$

9) $\log_2(x+6) = 3 - \log_2(x-1)$

$\Rightarrow \log_2\big((x+6)(x-1)\big) = 3$

$\Leftrightarrow (x+6)(x-1) = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{-5 \pm 9}{2}.$

$x_1 = -7$ är falsk rot ty $\log_2$ ej definierad för negativa argument.

Kontroll av $x_2 = 2$:

$VL = \log_2(2+6) = 3$ och

$HL = 3 - \log_2(2-1) = 3.$

<u>svar:</u> $x = 2$

10) Enl. faktorsatsen kan $x^3 - 2x^2 - 5x + 10$ skrivas som $(x-2) \cdot p(x)$, där p är polynom av grad 2.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2 - 5} & \\
\hline
x^3 - 2x^2 - 5x + 10 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - 2x^2) & \\
\cline{1-1}
\quad -5x - 10 & \\
\quad -(-5x + 10) & \\
\cline{1-1}
\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

De två övriga rötterna är nollställen till $p(x) = x^2 - 5$.

Vi har

$$x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\sqrt{5}.$$

<u>Svar</u>: $x = 2$, $x = \pm\sqrt{5}$.

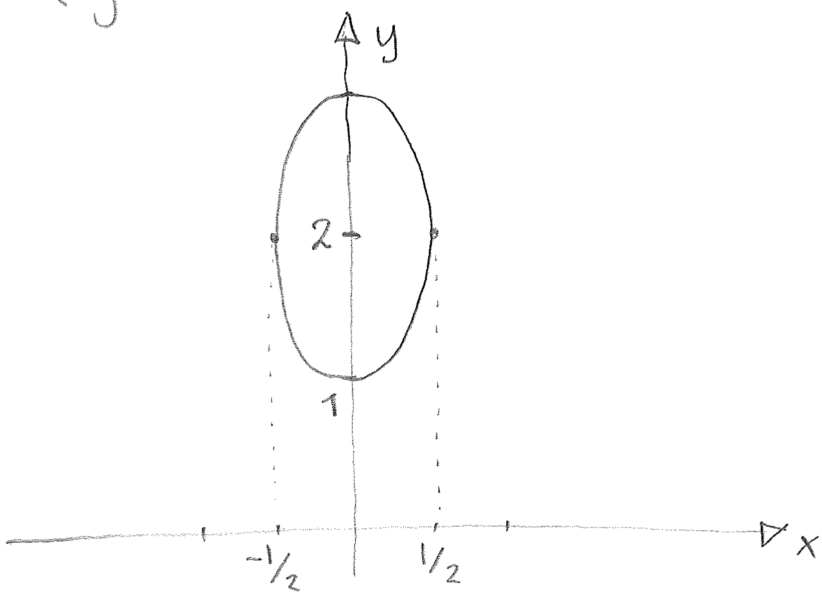
11)

$$0 = 4x^2 + y^2 - 4y + 3 =$$

$$= 4x^2 + (y-2)^2 - 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1/4} + (y-2)^2 = 1$$



<u>Svar</u>: Medelpunkt (0, 2)

Axlarnas längder är 1 och 2.

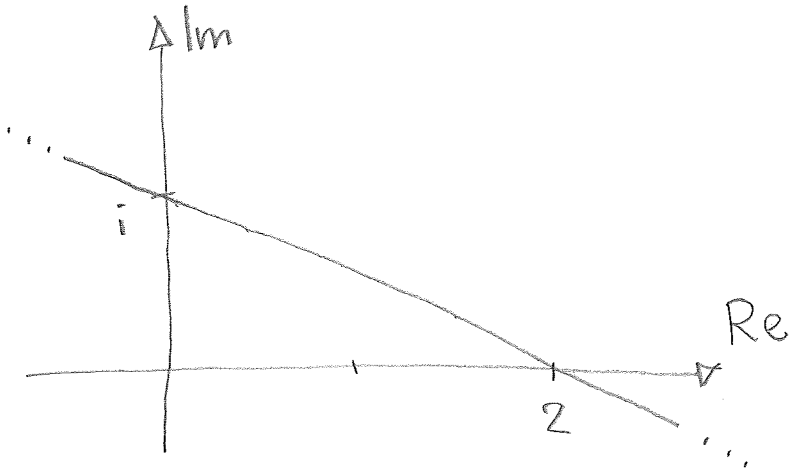
12) Låt $z = x + iy$.

$$2 \cdot \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y + x = 2$$

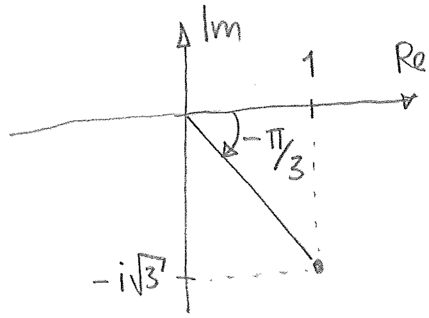
$$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 1.$$

Detta är ekvationen för en rät linje i komplexa planet.



13

$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$



$\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

$(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n =$

$= \left\{\begin{array}{l}\text{enl} \\ \text{de Moivres} \\ \text{formel}\end{array}\right\} = 2^n \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi n}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi n}{3}\right)\right).$

Vi ser att med $n=1$ eller $n=2$ så får vi inte ett reellt tal, men med $n=3$ blir

$\sin\left(\frac{-\pi n}{3}\right) = 0$.

<u>Svar:</u> $n = 3$

(Kan lösas genom att direkt beräkna $(1 - i\cdot\sqrt{3})^n$ för $n = 1, 2$ och 3.)

14)

Låt A ha n element.

Då har A $\binom{n}{2}$ delmängder med 2 element.

Vi söker alltså positivt heltal n sådant att

$$\binom{n}{2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 10$$

$$\Leftrightarrow n \cdot (n-1) = 20$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = \frac{1 \pm 9}{2}.$$ Så $n_1 = -2$ och $n_2 = 5$.

$n_1 = -2$ duger ej (negativt tal)

Svar A har 5 element.

(Kan lösas m.h.a. Pascals triangel.)

15

$$\sin(3x) + \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin(3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(-3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right).$$

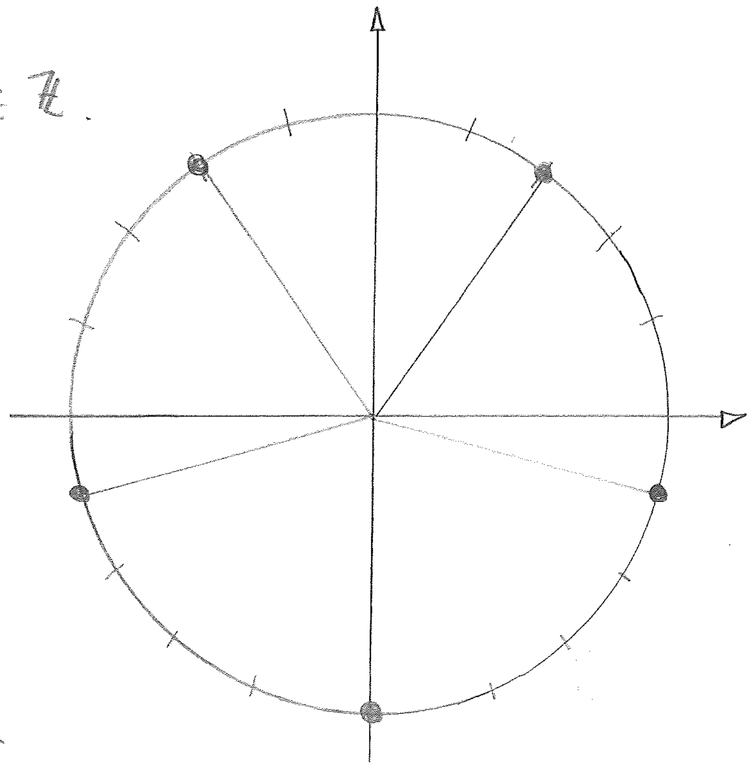
① $2x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

② $2x = -\frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Lösningarna i ② omfattar alla lösningar från ①.

Svar: $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$

16)

$$x^4 \cdot \left(\frac{2}{x} - 3x^2\right)^{10} = x^4 \cdot \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^k \cdot (-3x^2)^{10-k} =$$

$$= x^4 \cdot \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 2^k \cdot (-3)^{10-k} \cdot x^{20-3k}.$$

Vi får konstant term när $20-3k = -4$.

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{24}{3} = 8.$$

Svar: Konstanta termen är

$$\binom{10}{8} \cdot 2^8 \cdot (-3)^2 = 9 \cdot 2^8 \cdot \binom{10}{2}.$$

17 Skriv $16i$ och z^4 på polär form.

$|16i| = 16$ och $\arg(16i) = \pi/2$, så

$$16i = 16 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Låt $|z| = r$ och $\arg(z) = \theta$. Då har vi $z = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$. Enl de Moivres formel blir

$$z^4 = r^4 \cdot (\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)).$$

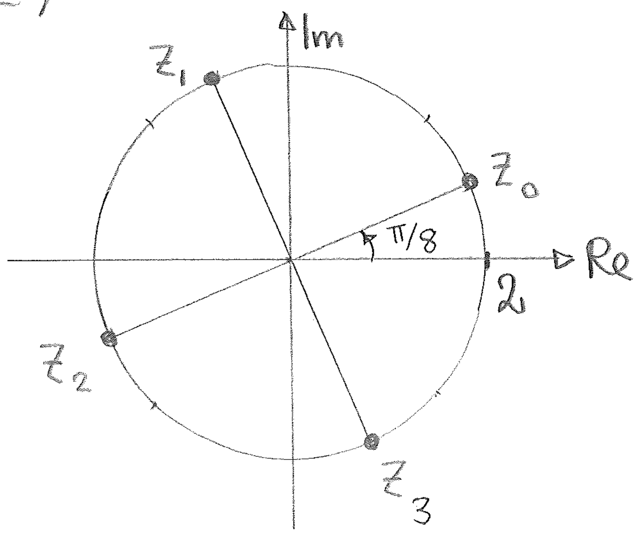
Så z är rot till ekv. om

$r^4 = 16 \iff r = 2$ och

$4\theta = \pi/2 + 2\pi n \iff \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\cdot n$, $n = 0,1,2,3$.

Svar: $z_n = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$,

$n = 0,1,2,3$.



18 Bevisa att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \circledast$$

(använd induktion).

<u>Bevis:</u> <u>Basfall.</u> Låt $n=1$.

$$VL \text{ i } \circledast = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \text{ och}$$

$$HL \text{ i } \circledast = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1, \text{ så } \circledast \text{ sann för } n=1.$$

<u>Induktionsantagande:</u> Låt m vara heltal, $m \geq 1$.
Antag $\circledast$ sann för $m = n$.

<u>Induktionssteg:</u> Gör härledningen av

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{enl.} \\ \text{induktions} \\ \text{antagandet} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \left\{ \text{bryt ut } \frac{m+1}{6} \right\} =$$

18 forts.

$$= \frac{m+1}{6} \cdot \left(m \cdot (2m+1) + 6(m+1) \right) =$$

$$= \frac{m+1}{6} \cdot \left(2m^2 + 7m + 6 \right) =$$

$$= \frac{m+1}{6} \cdot (m+2)(2m+3).$$

(För att se att sista likheten stämmer kan man enklast multiplicera ihop $(m+2)(2m+3)$.)

Induktionssteget är klart.

Enligt induktionsaxiomet är ⊛ sann för alla heltal n, $n \geq 1$.