

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell om utsagan $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee \neg B)$ alltid är sann.
(b) Låt $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\}$ och $N = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$. Bestäm $M \cap N$.

2. (a) Bestäm $\text{SGD}(1820, 748)$.
(b) Använd resultatet från (a) för att lösa den Diofantiska ekvationen

$$1820x + 748y = 20.$$

3. (a) Skriv talet $(1303)_4$ i bas 7.
(b) Bestäm resten som fås då 3^{761} delas med 5.
4. På mängden av reella tal införs en relation R som ges av $aRb \Leftrightarrow a - b > 0$. Bestäm vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, transitiv som relationen R uppfyller.

5. Visa att för alla positiva heltal n gäller

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 + k) = n^3 + 2n^2 + n.$$

6. Låt funktionen $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ vara given av $f((a, b)) = |a| + |b|$.
(a) Undersök om funktionen f är injektiv respektive surjektiv.
(b) Kan vi utifrån detta dra slutsatsen att $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ är uppräknelig? Varför/varför inte?

7. Polynomet $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ har ett dubbelt nollställe. Faktorisera polynomet fullständigt.

8. Bestäm ett reellt tal a sådant att ekvationen $x^3 - 5x^2 + ax - 5 = 0$ har en ikkerekall rot med realdel 2. Lös sedan ekvationen fullständigt.