UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

DUGGA i matematik
1MA025: Linjär algebra och geometri I
gylärarma1, KandDv1, KandGeo1
19 februari 2019 klockan 14.00–16.00

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För godkänt på momentet *Linjära ekvationssystem* krävs minst 6 poäng på de två första uppgifterna. För godkänt på momentet *Matrisräkning* krävs minst 6 poäng på de två sista uppgifterna.

Moment Linjära ekvationssystem

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + ax_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

för varje värde på $a \in \mathbb{R}$.

2. Hitta rangen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

för varje värde på $b \in \mathbb{R}$.

Moment Matrisräkning

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$AXB + CB = AB$$

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3x & 4x & 4x \\ x^2 & 2x & 2x & 2x \\ x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2019x & 2x & x \end{vmatrix} = 0.$$

LYCKA TILL!

Lösningar till provet i 1MA025: Linjär algebra och geometri I 19 februari 2019 klockan 14.00–16.00

Lösning till problem 1. Vi skriver ut totalmatrisen och gör radoperationer:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & a & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & a-3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13-3a & 0 \end{array}\right) = M$$

Vi delar nu upp i fall: Fall 1: Om $13 - 3a \neq 0$. I detta fall dividerar vi rad 3 med $13 - 3a$ och ser att matrisen M är radekvivalent med

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 5-a \quad -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser att vi har en fri variabel och parametriserar med $x_2 = t$. Detta ger alla lösningar som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t, t, -1, 0), t \in \mathbb{R}.$$

Fall 2: Om $13 - 3a = 0$. I detta fall är $a = \frac{13}{3}$ och matrisen M är

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3}-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I detta fallet har vi två fria variabler och parametriserar dessa med $x_2 = t$ och $x_4 = s$ och skrivar alla lösningar som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t - \tfrac{11}{3}s, t, -1 + \tfrac{2}{3}s, s), s, t \in \mathbb{R}.$$

Alltså - lösningarna är:

- Om $13a - 3 \neq 0 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t, t, -1, 0), t \in \mathbb{R}$.
- Om $13a - 3 = 0 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - t - \frac{11}{3}s, t, -1 + \frac{2}{3}s, s), s, t \in \mathbb{R}.$.

Lösning till problem 2. Vi måste hitta en trappstegsmatris radekvivalent med A:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \quad -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & b-2 & b^2-4 & b-2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2-b \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & b^2-5b+6 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta är en trappstegsmatris oavsett vad b är. Hur många ledande element den har (rangen) beror på om $b^2 - 5b + 6 = (b - 2)(b - 3) = 0$ eller inte. Svar:

- Om $b \neq 2$ och $b \neq 3$ är rangen 3.
- Om $b = 2$ eller $b = 3$ är rangen 2.

Lösning till problem 3. Vi ser att $\det(A) = 5 - 4 = 1$ och $\det(B) = 0 - 1 = -1$ så båda är inverterbara och följande fungerar:

$$\begin{aligned} &AXB + CB = AB \quad \Leftrightarrow \quad (AX + C)B = AB \quad \Leftrightarrow \quad AX + C = A \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &AX = A - C \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}(A - C) = I - A^{-1}C \end{aligned}$$

Notera, att även om B inte är en del av formeln vet vi bara att formeln är korrekt om B var inverterbar (eftersom vi "förkortar" bort B i andra steget). Så, om man glömmer att visa detta får man avdrag.
Vilken av de två sista formlerna vi använder för att beräkna X gör inte så stor skillnad så vi använder den sista. Vi beräknar föst

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

så

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 4. Vi beräknar vänstersidan:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3x & 4x & 4x \\ x^2 & 2x & 2x & 2x \\ x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2019x & 2x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 3x & 0 & 4x \\ x^2 & 2x & 0 & 2x \\ x^2 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2019x & x & x \end{vmatrix} \; K3 \quad = -x \begin{vmatrix} x^2 & 3x & 4x \\ x^2 & 2x & 2x \\ x^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

-1

$$= -x^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix} \; K3 \quad = -x^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} - x^4(1 - 2x) = (2x - 1)x^4$$

-1

Vi ser att detta är noll precis när $x = 0$ eller $x = \frac{1}{2}$.