UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Andre Laestadius, Robert Algervik

Prov 2
ENVARIABELANALYS
2015-08-21

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För godkänd deltentamen krävs minst 18 poäng. LÖSNINGARNA SKALL VARA VÄLSKRIVNA OCH INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Beräkna följande integraler

$$\text{(a)} \quad \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$$

och ange speciellt den lösning som uppfyller $y(0) = 3$ och $y'(0) = 0$.

3. Avgör om följande serier är konvergenta eller ej

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^5}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'(x) = 4xe^{x^2-y}.$$

(b) Ange den lösning till differentialekvationen i (a) som uppfyller

$$y(1) = \ln(3) + 1.$$

5. Låt D vara området som definieras av olikheten

$$e^{-x} \le y \le e^x, \quad 0 \le x \le \ln(2).$$

Beräkna volymen av den kropp som bildas då D roterar ett varv kring x-axeln.

Var god vänd!

6. Beräkna följande integral

$$\int_0^1 \frac{7-x}{6-x-x^2}\,dx.$$

7. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = e^{2x}\sin(3x).$$

8. Låt $p > 0$ och definiera den generaliserade integralen

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3)^p}\,dx.$$

(a) Visa att $I(p)$ är divergent då $0 < p \leq 1$.

(b) Bestäm $I(p)$ uttryckt i termer av p för $p > 1$.

LYCKA TILL!!

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$