UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Andre Laestadius, Gunnar Berg

Prov 2
ENVARIABELANALYS
2015-06-11

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För godkänd deltentamen krävs minst 18 poäng, inklusive bonuspoäng från redovisningsuppgifterna. LÖSNINGARNA SKALL VARA VÄLSKRIVNA OCH INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Beräkna följande integraler

$$\text{(a)} \quad \int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - y(x) = 0$$

och ange speciellt den lösning som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

3. (a) Avgör om följande serie är konvergent eller ej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

(b) Antag att $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar och bestäm detta gränsvärde då $a_1 = 1$ och

$$a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'(x) - 2y(x) = x.$$

(b) Beräkna $y(1)$ då $y(x)$ är den funktion som uppfyller $y(0) = 1$ och

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + 2xy}{x+2}.$$

5. Beräkna volymen som uppstår då ytan mellan x-axeln för $1 \le x \le 2$ och kurvorna $y = \dfrac{x}{x+1}$ och $y = \dfrac{1}{x+1}$ roterar ett varv runt x-axeln.

Var god vänd!

6. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_6^\infty \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+3}}\,dx.$$

7. En hink som rymmer 10 liter är från början tom. Vid tidpunkten $t = 0$ börjar tanken fyllas på med vatten i en takt av $\dfrac{10}{t^2+4}$ liter per timme för $t > 0$. Kommer hinken att svämma över?

8. Bestäm den lösning till

$$\psi''(x) + \psi(x) = 0, \quad \psi(0) = \psi(\pi) = 0$$

på intervallet $[0, \pi]$ som uppfyller

$$\int_0^\pi \psi(x)^2\,dx = 1.$$

(ψ är grundtillståndets för en kvantmekanisk partikel instängd i en 1-dimensionell låda med oändliga väggar.)

LYCKA TILL!!

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$