UPPSALA UNIVERSITET | PROV I MATEMATIK
Matematiska Institutionen | Sannolikhet och statistik, 1MS321
Ingemar Kaj | 2017-06-01

Hjälpmedel: Räknedosa, formelsamling och tabellsamling för kursen 1MS321.
För betygen 3, 4, resp 5 krävs normalt minst 18, 25, resp 32 poäng inkl ev bonuspoäng.

1. Låt X vara en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion $p_X(k) = k/10$, $k = 1, 2, 3, 4$. Beräkna kovariansen $C(X^2, 1/X)$ mellan variablerna X^2 och $1/X$. (5p)

2. Antag att tio oberoende stationer använder en gemensam länk för överföring av pakettrafik. Länkens kapacitet är ett paket per tid-slot. Stationerna sänder varje ny slot oberoende av varandra och med samma sannolikhet p ett paket. Om precis en station sänder under en slot skickas paketet. Om fler än en station sänder samtidigt uppstår en kollision och inget paket överförs. Under nästa slot fortsätter trafiken oberoende på samma slumpmässiga sätt som tidigare. (Förenklat CSMA/CD system.)

   a) Låt X vara antal paket som stationerna tillsammans önskar skicka under en viss slot. Vilken fördelning har X? (1p)
   b) Beräkna som funktion av p sannolikheten att ett paket överförs under en viss slot. (2p)
   c) Bedöm systemets maximala prestanda och kommentera hur denna kan optimeras med avseende på p (2p)
   d) För $p = 0.05$ vad är det förväntade antalet paket per slot som fördröjs pga kollision? (1p)

3. Vid planeringen av en omfattande bioinformatisk forskningsstudie används simulerade slumptal $x_1, \ldots, x_n$ som anger söktiden X mätt i millisekunder för hämtning av lagrad genomdata i en viss databas. Slumptalen beräknas med den så kallade inversmetoden, enligt
$$x_k = 6(1 - \sqrt{1 - u_k}), \quad k = 1, \ldots, n,$$
där u-värdena är likformigt fördelade slumptal på intervallet $[0, 1]$. Beräkna täthetsfunktionen för X. (5p)

4. En hiss tål belastningen 1000 kg. Man vill sätta upp en skylt *Högst n personer.* Antag att hisspassagerarnas vikter är oberoende och $N(70, 100)$-fördelade. Hur ska n väljas om risken för överbelastning då n personer finns i hissen får vara högst 1 %? (6p)

5. En basstation i ett mobilt nätverk är avsedd att täcka in samtliga användare som befinner sig i ett cirkelformat område med basstationen i mittpunkten. Enligt den spatiala Poisson-modellen kan vi anta att avståndet i kilometer från en typisk användare till basstationen ges av en stokastisk variabel X med täthetsfunktion
$$f_X(x) = \frac{2x}{r^2}, \quad 0 \leq x \leq r,$$
där parametern r är täckningsområdets radie (Kompendium, exercise 3.3). Vid en viss tidpunkt då ett stort antal användare är uppkopplade har man slumpmässigt valt ut 20 av dessa och mätt avstånden $x_1, \ldots, x_{20}$, och sedan erhållit medelvärdet $\bar{x} = 3.4$ km.

   a) Beräkna väntevärdet av X som funktion av r. (1p)
   b) Beräkna standardavvikelsen för X som funktion av r. (1p)

c) Ange en väntevärdesriktig punktskattning $\widehat{r}$ av r (1p)

d) Ange medelfelet för $\widehat{r}$. (1p)

e) Bestäm ett approximativt 95 % konfidensintervall för r. (1p)

f) Systemets leverantör hävdar att täckningsradien är minst 4 km. Bedöm om leverantörens påstående kan bekräftas eller avvisas utifrån resultatet av den statistiska undersökningen. (1p)

6. En Markovkedja i diskret tid med tillstånden $\{1, 2, 3, 4\}$ har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjan startar i tillstånd 1 eller tillstånd 3 med lika sannolikheter.

a) Med vilken sannolikhet befinner den sig i tillstånd 4 efter två övergångar? (2p)

b) Man kan visa att kedjan har en entydig asymptotisk fördelning. Beräkna denna. (4p)

7. Enligt specifikation ska en beräkningsmjukvara klara av ett visst omfattande matrisberäkningsproblem på 12 sekunders CPU-tid. För att testa detta görs sex körningar med slumpmässigt valda matriselement varvid uppmäts

11.65 13.56 8.34 11.30 11.42 11.87

Antag att observationerna kommer från en normalfördelning $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ med okända parametrar μ och σ^2. Bedöm med konfidensgrad 0.95 om mjukvaran kan anses uppfylla kriteriet. (6p)