UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

DUGGA i matematik
1MA024: Linjär algebra II
F, W, IT, Lärare
22 November 2019 klockan 14.00 – 16.00

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger max. 6 poäng. Ett resultat på minst 8, 12, 16, resp. 20 poäng ger 1, 2, 3, resp. 4 bonuspoäng som endast tillgodoräknas vid den ordinarie tentamen 9/1 2019 (under förutsättning att 16 poäng eller mer uppnåtts på tentamen). Motivera svaren!

1. (a) Ge en definition av dimensionen av att vektorrum V.

(b) Hitta en bas och ange dimensionen av delrummet

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

i $\mathbb{R}^4$.

2. (a) Visa att

$$B = (x^2 + x + 1, x^2 - 1, x^2) \qquad \text{och} \qquad B' = (x + 1, x - 1, x^2)$$

är två olika baser för P_2.

(b) Vilket polynom p har koordinaterna $(p)_B = (1, 1, -2)$ i basen B?

(c) Hitta basbytesmatrisen $P_{B',B}$ (i boken kallat $P_{B \to B'}$).

(d) Vad är koordinaterna för p i B'?

3. (a) För en linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2019}$ har vi fått informationen att den antingen är injektiv eller surjektiv. Är det möjligt att avgöra vilken?

(b) Två vektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ i $\mathbb{R}^{2019}$ är givna så att $T(1, 1) = \vec{v}_1$ och $T(1, -1) = \vec{v}_2$. Ge en formel i termer av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ för den första kolonnvektorn i standard matrisen för T. Ge en liknande formel för den andra kolonnvektorn.

4. (a) Ge en definition av begreppet egenvektor.

(b) Hitta nollrummet $N(A)$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(c) Vad har $N(A)$ med egenvärdena för A att göra?

(d) Hitta alla egenvärdena för matrisen A.

Lycka till!

Lösningar till provet i 1MA024: Linjär algebra II 22 November 2019 klockan 14.00 – 16.00

Lösning till problem 1.

(a) Dimensionen av V är n om V har en bas med n vektorer annars är dimensionen ∞.

(b) Vi sätter in vektorerna som kolonner i en matris och radreducera. Här är hur man kan få Python till att göra detta (går ju dock inte till en tenta/dugga):

```
Python 2.7.13 (default, Sep 26 2018, 18:42:22)
[GCC 6.3.0 20170516] on linux2
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> from sympy import *
>>> from numpy import *
>>> A=Matrix([[1,1,0,2,2],[3,2,1,7,5],[4,3,1,9,7],[0,1,-1,-1,1]])
>>> A
Matrix([
[1, 1,  0,  2, 2],
[3, 2,  1,  7, 5],
[4, 3,  1,  9, 7],
[0, 1, -1, -1, 1]])
>>> A.rref()
(Matrix([
[1, 0,  1,  3, 1],
[0, 1, -1, -1, 1],
[0, 0,  0,  0, 0],
[0, 0,  0,  0, 0]]), [0, 1])
>>>
```

Vi ser att det finns ledande 1:or i kolonn ett och två, vilket visar enligt metod/sats att

$$\left(\begin{bmatrix}1\\3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}\right)$$

är en bas och dimensionen är 2 (antalet vektorer i basen).

Lösning till problem 2.

(a) För både sätter vi in koordinater i standard basen som kolonner i en matris:

$$B : \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B' : \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

I både fallen visar den radekvivalenta trappstegsform att rangen är 3 (ledande element i varje kolonn/rad) så de tre vektorerna är linjärt oberoende och därför enligt sats en bas för det 3-dimensionella rummet P_2.

(b) Koordinaterna $(1, 1, -2)$ i basen B betyder polynomet:

$$1(x^2 + x + 1) + 1(x^2 - 1) - 2(x^2) = x.$$

(c) För att beräkna koordinater i basen B' för varje polynom måste vi lösa:

$$\begin{aligned} c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3x^2 &= x^2 + x + 1 \\ c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3x^2 &= x^2 - 1 \\ c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3x^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Dessa är varje för sig väldigt enkla linjära ekvationssystem och lösningarna till varje av dessa motsvarar kolonnerna i basbytesmatrisen:

$$P_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Men för lite perspektiv framåt i kursen så ser man faktiskt att om man löser alla dessa på en gång med vanlig metod så ska man lösa det ekvationssystemet med augmenterat matris:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \frac{1}{2} \quad 1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Och vi ser att matrisen till höger är svaret.

(d) Vi kunna använda matrisen och multiplicera på koordinaterna $(1, 1, -2)$, men det är nästen enklare att bara se på hur man kunna skriva x i basen och inse att:

$$x = \tfrac{1}{2}(x+1) + \tfrac{1}{2}(x-1)$$

och därför $(p)_{B'} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Lösning till problem 3.

(a) Ja: den är injektiv. Det finns inga surjektiv linjär funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^{2019}$ eftersom $2019 > 2$.

(b) Den första kolonnen i standard matrisen är

$$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = T(\tfrac{1}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(1,-1)) = \tfrac{1}{2}T(1,1) + \tfrac{1}{2}T(1,-1) = \tfrac{1}{2}\vec{v}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{v}_2.$$

På liknande sätt är andra kolonnen:

$$T(\vec{e}_2) = T(0,1) = T(\tfrac{1}{2}(1,1) - \tfrac{1}{2}(1,-1)) = \tfrac{1}{2}T(1,1) - \tfrac{1}{2}T(1,-1) = \tfrac{1}{2}\vec{v}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{v}_2.$$

Lösning till problem 4.

(a) En egenvektor är en vektor $\vec{x}$ som löser $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. (I bland krävs att $\vec{x} \neq \vec{0}$ - men det bryr vi os inte om).

(b) Nollrummet $N(A)$ är alla lösningar $\vec{x}$ till $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 & -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så alla lösningar kan skrivas med parameter $x_3 = t$:

$$(x, y, z) = t(1, -2, 1), t \in \mathbb{R}$$

alltså är $N(A) = \text{Span}\{(1, -2, 1)\}$.

(c) Nollrummet är alla egenvektorer med egenvärde 0 - också kallat $E_0 = E_0(A)$.

(d) Vi måste lösa den karakteristiska ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} &= ((1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) + 2\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 4) - \\ &-((1-\lambda)4\cdot 4 + 2\cdot 2(5-\lambda) + 3(3-\lambda)3) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 16\lambda + 4\lambda + 9\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda \end{aligned}$$

Detta ger egenvärdena/lösningarna $\lambda \in \left\{ \dfrac{9-\sqrt{105}}{2}, 0, \dfrac{9+\sqrt{105}}{2} \right\}$.