2014-04-23

(1) $2x_3+2x_4=c \Rightarrow x_4=\frac{c}{2}-x_3$

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2-x_3+\frac{c}{2}-x_3=-1 \\ -3x_1+6x_2+2x_3-\frac{c}{2}+x_3=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -1-\frac{c}{2} \\ -3 & 6 & 3 & 3+\frac{c}{2} \end{array}\right] \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -1-\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+\frac{c}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}c \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -1-\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}-\frac{c}{4} \end{array}\right]$$

Om $\frac{3}{2}-\frac{c}{4}\neq 0$ saknas lösning,

dvs om $c\neq 6$.

Antag att $c=6 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$ sätt $x_2=s,\ x_3=t$

$\Rightarrow x_1=-2+2s+t$ och $x_4=3-t$

Svar: $c\neq 6$ saknas lösning, om $c=6$ $\begin{cases} x_1=-2+2s+t \\ x_2=s \\ x_3=t \\ x_4=3-t \end{cases}$

(2) $AX = BA - X$

$$AX + X = BA$$

$$(A+I)X = BA$$

$$X = (A+I)^{-1} BA$$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$ (använd t.ex Jacobismetod)

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 2x & -2 & x & 2 \\ 1 & 2x & 2 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 0 & -4 & -x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} (+1) = \begin{vmatrix} (x+1) & x & 1 & x \\ (x+1) & 1 & x & 1 \\ 0 & -4 & -x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= \begin{vmatrix} (x+1) & x & 1 & x \\ 0 & (1-x) & (x-1) & (1-x) \\ 0 & -4 & -x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-1) \begin{vmatrix} (x+1) & x & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -x & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)(x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & -x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

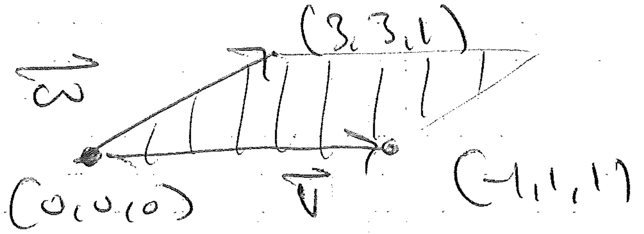
$$= -(x-1)(x+1) \begin{vmatrix} -4 & -x \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)(x+1)(-4+x^2) =$$

$$= -(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$$

<u>Svar</u> $x=-1$, $x=-2$, $x=1$, $x=2$.

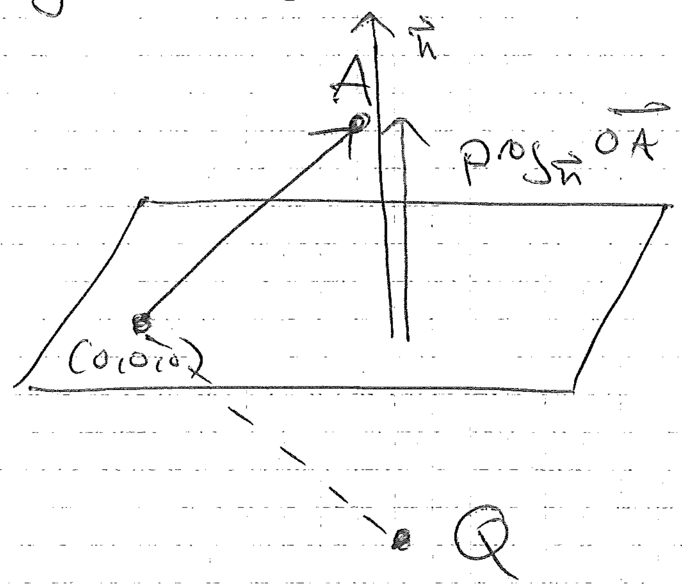
(4)



normalvektor $\vec{n}$:

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2,4,-6)$$

velj $\vec{n} = (1,-2,3)$



$$\vec{OQ} = \vec{OA} - 2\, proj_{\vec{n}} \vec{OA}$$

$$\vec{OA} = (1,3,-3)$$

$$proj_{\vec{n}} \vec{OA} = \frac{(1,-2,3) \cdot (1,3,-3)}{1+4+9} (1,-2,3)$$

$$= -(1,-2,3)$$

$$\vec{OQ} = (1,3,-3) + 2(1,-2,3) = (1+2, 3-4, -3+6)$$

$$= (3,-1,3)$$

 svar $(3,-1,3)$

5 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \end{array}$

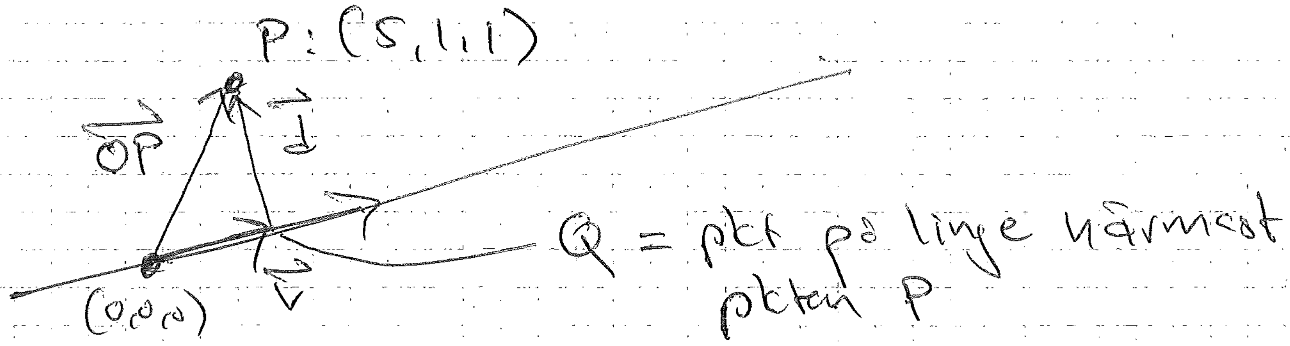
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{3}) \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1) \end{array}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ sätt $z=t \Rightarrow$

$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

linjen på parameterform:

$(x,y,z) = t(-1,0,1) = t\vec{v}$



$\overrightarrow{OP} = \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{OP} + \vec{d} \Rightarrow$

$\vec{d} = \overrightarrow{OP} - \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{OP}$

$\text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{OP} = \dfrac{(-1,0,1)(5,1,1)}{1+1}(-1,0,1) = (2,0,-2)$

$\vec{d} = (5,1,1) - (2,0,-2) = (3,1,3), \ \|\vec{d}\| = \sqrt{19}$

avstånd $= \sqrt{19}$ $\quad$ Q: $(2,0,-2)$

6

a) $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{n}\,\vec{n}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \quad 1 \times 3$

$$\vec{n}^T \vec{n} = (2, 1, -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4+1+1 = 6$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

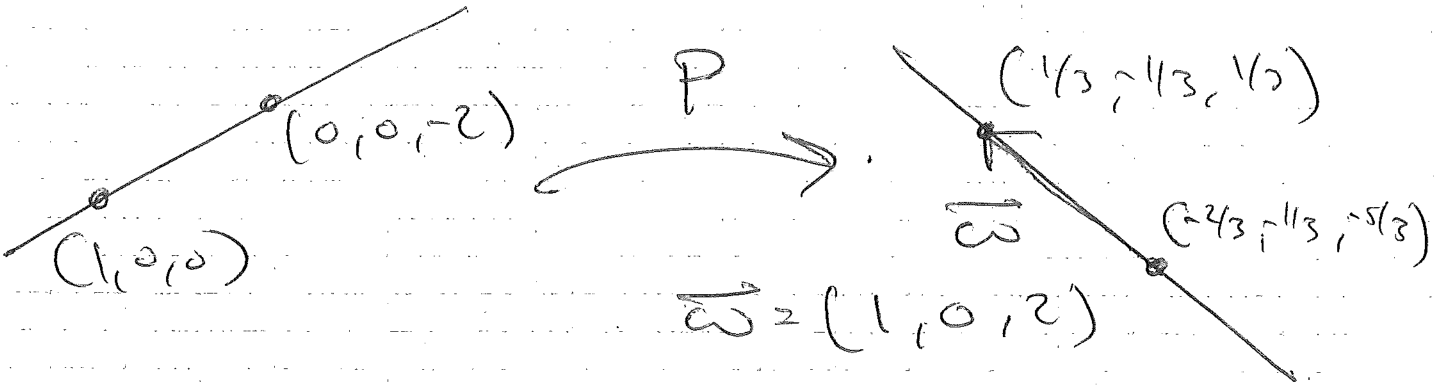
$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ <u>svar</u>

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ avbildas enligt:

$$[P]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Välj en annan pkt på linjen, t.ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ som avbildas enligt:

$$[P]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Svar $\frac{1}{3}(1,-1,1)+t(1,0,2)$, $t \in \mathbb{R}$.

7

(a) En bas i $\mathbb{R}^n$ är n st linjärt oberoende vektorer $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ som uppfyller $\text{span}\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$.

(b) $$V = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ bas i $\mathbb{R}^3$ omm $\det V \neq 0$

$$\det V = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ bildar inte en bas i $\mathbb{R}^3$.

(c) $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$V\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

på matrisform: $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 3 & 1 & 1\\2 & 0 & 4 & 1\end{array}\right]$ -2

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$ saknas lösning

(d) $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$$V\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

på matrisform: $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1 & 1\\2 & 0 & 4 & 0\end{array}\right]$ -2 $\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ $c_3 = t \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2t \\ c_2 = \dfrac{1-t}{3}\end{cases}$

t.ex $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

(8)

(a) $$\frac{1}{171}\begin{bmatrix} 122 & -77 & 7 \\ -77 & 50 & 11 \\ 7 & 11 & 170 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{171}\begin{bmatrix} 122\cdot(-7) + (-77)(-11) + 7\cdot 1 \\ (-77)\cdot(-7) + 50\cdot(-11) + 11\cdot 1 \\ 7(-7) + 11(-11) + 170\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{171}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs $[T]\vec{v} = 0\vec{v}$.

(b) Om T är ortogonal projektion så måste $\vec{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara normalvektor till planet. Planets ekvation är i så fall $7x + 11y - z = 0$, vilket på parameterform kan skrivas

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$. Eftersom

$[T]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ och $[T]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$

så är T ortogonal projektion på planet $7x + 11y - z = 0$.