UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ketil Tveiten

Dugga i matematik
Linjär algebra och geometri I - 1MA025
2016-09-26

Skrivtid: 14.00 – 16.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.
Duggan består av **4 frågor** *om* **5 poäng** *för totalt* **20 poäng**. *För godkänt krävs minst 12 poäng.*

1. (5 p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}.$$

2. (5 p) Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AX + B = ACX,$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (5 p) Lös ekvationen för x:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 2 & 0 & 1 & x \\ x-1 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. (5 p) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & a-1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Hitta inversen A^{-1} för dom a där inversen finns.

Lösningar:

1. Totalmatrisen är radekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -5/6 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

så lösningerna kan skrivas som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2/3, 1/3, 0, 0) + s(-3/2, 3/2, -1, 1, 0) + t(-3/2, 5/6, -1/3, 0, 1),$$

där $s, t \in \mathbb{R}$.

2. Ekvationen är ekvivalent med $B = (AC - A)X$, och om $AC - A$ är inverterbar, med $X = (AC - A)^{-1}B$.

$$AC - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har determinant -8, så den är inverterbar; uträkning (t.ex. Gauss-Jordan's metod) visar att inversen är

$$(AC - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/8 \\ 1 & -1 & 3/4 \\ -2 & 3 & -9/4 \end{pmatrix},$$

och produkten $(AC - A)^{-1}B$ är

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/8 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ -2 & -2 & -5/4 \end{pmatrix}.$$

3. Determinanten är lika med $-2x^3 - x^2 + x = -x(x+1)(2x-1)$, så ekvationen har lösningar $x = -1, 0, 1/2$.

4. Matrisen är inverterbar om $a \neq -2$, med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{a+2} \begin{pmatrix} a-1 & -a & a+1 \\ 4-a & a-2 & -a \\ 2-2a & 2a & -a \end{pmatrix}.$$

LYCKA TILL!!