UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

TENTAMEN i matematik
1MA025: Linjär algebra och geometri I
gylärarma1, KandDv1, KandGeo1
21 Mars 2019 klockan 8.00–13.00

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs godkänt på varje moment samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. Minst 3 poäng på uppgifterna 1 till 4 ger godkänt på motsvarande moment (men andra uppgifter kan också bidra till att bli godkänd på moment).

1. *Moment linjära ekvationssystem.* Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 - 4x_2 -{}} 2x_3 + 2x_4 = c \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

för varje värde på $c \in \mathbb{R}$.

2. *Moment matrisräkning.* Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$BAXB = I.$$

3. *Moment vektorer.* Låt $\vec{a} = (1,2,0,0)$, $\vec{b} = (2,3,0,0)$, $\vec{c} = (0,0,1,2)$ och $\vec{d} = (0,1,2,3)$ vara vektorer i rummet $\mathbb{R}^4$.

a) Visa att $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

b) Hitta koordinatorna för punkterna

$$A : (1,2,3,4), \quad B : (3,3,7,7), \quad C : (0,0,0,\pi)$$

i denna bas.

4. *Moment geometri.* Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\pi : x + 2y - 4z = 0$.

a) Hitta S:s standardmatris $[S]$.

b) Hitta spegelbilderna av punkterna $P : (2,1,1)$ och $Q : (3,2,1)$ i planet π.

Var god vänd!

5. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning som uppfyller

$$T(1,2) = (3,4,5,6) \qquad \text{och} \qquad T(7,8) = (9,10,11,12).$$

a) Hitta standard matrisen $[T]$ för T.

b) Vad är bilden av $(5,5)$ under den linjära avbildning T.

6. Låt $A : (7,-1,2)$, $B : (2,-1,3)$, $C : (-2,3,1)$ och $D : (1,1,1)$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$.

a) Hitta arean av någon parallellogram där 3 av hörnen är A, B och C.

b) Hitta volymen av någon parallellepiped där 4 av hörnen är A, B, C och D.

7. Låt

$$\begin{aligned} l :&(x,y,z) = (1,2,3) + t(-1,2,3), t \in \mathbb{R} \\ k :&(x,y,z) = (0,0,2) + s(3,-2,3), s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vara två linjer i $\mathbb{R}^3$.

a) Hitta en ekvation för det plan som är parallell med båda l och k och som går genom punkten $(0,1,0)$.

b) Bestäm om de två linjerna är på samma sida eller på olika sidor om planet?

8. Låt $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ vara en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$. Visa att

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

där (c_1, c_2) är koordinaterna för $\vec{w}$ i basen $\underline{\mathbf{v}}$.

Lycka till!

Lösningar till provet i 1MA025: Linjär algebra och geometri I 21 Mars 2019 klockan 8.00–13.00

Lösning till problem 1. Totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & c \\ 2 & -4 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & c-16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 21-\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{c}{2}-8 \end{array}\right)$$

Alla lösningar (parametriserat med $x_2 = t$):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (21 - \tfrac{c}{2} + 2t, t, 8, \tfrac{c}{2} - 8), t \in \mathbb{R}.$$

Lösning till problem 2. Om A och B är inverterbara så gäller:

$$BAXB = I \quad \Leftrightarrow \quad AXB = B^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad XB = A^{-1}B^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B^{-1}B^{-1} = A^{-1}B^{-2}.$$

Om man beräknar B^2 och så tar inversen eller B^{-1} först och då tar kvadraten för man samma sak, B^{-2}. Man kan beräkna dessa inverser på olika sätt (och därigenom också visa att de är inverterbara). Oavsett får man att:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och därför att

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 3. Vi gör båda delar samtidigt:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 7 & \pi \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & \pi \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -\pi \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -17 & 2\pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 10 & -\pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -\pi \end{array}\right)$$

Andra matrisen är en trappstegsmatris och vi ser att vi har ledande element i varje rad och kolonn till vänster om strecken, och därför är matrisen till vänster om strecken inverterbar. Därför är de fyra vektorer en bas (svar på a)). Koordinatorna för de tre vektorer i b) är de tre kolonnvektorer till höger om strecken.

Lösning till problem 4. a) För en spegling vet vi att $S(\vec{n}) = -\vec{n}$ för en normalvektor till planet och at $S(\vec{v}) = \vec{v}$ om $\vec{v}$ är parallell med planet. Vi hittar 3 vektorer som dessa (2 parallell med planet), men som också är en bas (tillräckligt att de två vektorer parallell med planet inte är parallella med varandra):

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1,2,-4) &\qquad& \text{har } S(1,2,-4) = (-1,-2,4) \\ \vec{v} &= (-2,1,0) && \text{har } S(-2,1,0) = (-2,1,0) \\ \vec{w} &= (4,0,1) && \text{har } S(4,0,1) = (4,0,1) \end{aligned}$$

Detta ger ekvationen för $[S]$:

$$[S]\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi hittar inversen (som existerar precis för att vi valde en bas):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 17 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

och därmed också

$$[S] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 17 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -4 & 8 \\ -4 & 13 & 16 \\ 8 & 16 & -11 \end{pmatrix}$$

b)

$$[S]\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad [S]\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 57 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Observera att den första ju faktiskt låg i planet.

Lösning till problem 5. a) Vi har följande formel för:

$$[T]\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}(-\tfrac{1}{6})\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 12 & -18 \\ 18 & -24 \\ 24 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$[T]\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 6. a) Vi tar parallellogrammen med sidorna

$$\overrightarrow{AB} = (-5, 0, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-9, 4, -1)$$

och

$$\begin{aligned}\text{Arean} =& \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \left\| \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -9 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} \right) \right\| = \\ =& \|(-4, -14, -20)\| = \sqrt{16 + 196 + 400} = \sqrt{612} = 2\sqrt{153} = 6\sqrt{17}\end{aligned}$$

b) Vi tar parallellepipeden med sidorna: de två vektorer ovan och

$$\overrightarrow{AD} = (-6, 2, -1)$$

Volymen är absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -9 & 4 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6, 2, -1) \cdot (-4, -14, -20) = 24 - 28 + 20 = 16.$$

Her utvecklade vi efter rad 3 och så att skalär produkten av vektorn (som vi använde ovan) med denna rad precis ger denna utveckling.

Lösning till problem 7. a) Vektorprodukten av de två riktningsvektorer är ortogonal mot båda riktningar och kan därför används som en normalvektor för planet:

$$(-1, 2, 3) \times (3, -2, 3) = (12, 12, -4).$$

Vi skalar om till $\vec{n} = (3, 3, -1)$ och får att planet kan beskrivas som

$$3x + 3y - z = d$$

för något d. Detta d hittas genom att sätta in punkten $(0, 1, 0)$ och vi ser att

$$3x + 3y - z = 3$$

er en ekvation för planet.

b) Lösning variant 1: Punkten $(0, 1, 0)$ ligger i planet och därför är vektorerna

$$(1, 2, 3) - (0, 1, 0) = (1, 1, 3)$$
$$(0, 0, 2) - (0, 1, 0) = (0, -1, 2)$$

vektorer som pekar från planet till l respektive k. Vi tar skalärprodukten med normalvektorn

$$(1, 1, 3) \cdot (3, 3, -1) = 3$$
$$(0, -1, 2) \cdot (3, 3, -1) = -5$$

och eftersom dessa har olika tecken måste linjerna ligga på olika sidor om planet (om man bildar en spetsig vinkel med $\vec{n}$ pekar man på den sida som $\vec{n}$ pekar och bildar man en trubbig vinkel med $\vec{n}$ pekar man åt andra hållet än $\vec{n}$).

Lösning variant 2: Inse att de två sidor a planet kan beskrivas som:

$$3x + 3y - z > 3 \qquad \text{och} \qquad 3x + 3y - z < 3.$$

Sätta in punkterna från linjerna $(1, 2, 3)$ och $(0, 0, 2)$ i formeln $3x + 3y - z$ och beräkna att

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 > 3 > 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2.$$

Detta visar då att de är på olika sidor om planet.

Lösning till problem 8. Det att (c_1, c_2) är koordinatorna för $\vec{w}$ i basen betyder att

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\|^2 &= \vec{w} \cdot \vec{w} = (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) \cdot (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = \\ &= c_1^2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) + 2c_1c_2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + c_2^2(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) = \\ &= c_1^2 + c_2^2\end{aligned}$$

eftersom $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1$ och $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ för en ONB.