UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend, Anna Sakovich,
Ketil Tveiten

Tentamen
LINJÄR ALGEBRA OCH GEOMETRI I
2017-08-18
Diverse program

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng, och för betyg 5 krävs minst 32 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

2. För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar? Bestäm inversen A^{-1} för dessa a.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -a \\ -3 & a & 1 \\ -18 & a & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Antag att A är en inverterbar matris med inversen A^{-1}. Bestäm den matris X som uppfyller matrisekvationen

$$AXA^{-1} = B,$$

om $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 4 & 3x \\ 1 & 3 & 9 & 2x \\ 1 & x & x^2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Låt π beteckna planet $2x - y + 3z = 0$ och P punkten $(5, -1, 1)$.

a) Bestäm ekvationen för den linje genom P som är vinkelrätt mot π.

b) Bestäm den punkt där denna linje skär planet.

c) Beräkna avståndet från punkten P till planet π.

VAR GOD VÄND!

6. Betrakta punkterna $A: (1, -1, 1)$, $B: (3, 2, 1)$, $C: (-1, -1, 1)$, $D: (2, 2, -3)$.

a) Undersök om punkterna A, B, C och D ligger i samma plan.

b) Bestäm koordinaterna för en punkt E sådan att A, B, C och E är hörnen i ett parallellogram (det finns flera sådana punkter, välj en).

7. a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ utgör de fyra vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, a, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, a, 2, 0)$ och $\vec{v}_4 = (0, 1, 1, 0)$ en bas i $\mathbb{R}^4$?

b) Låt $a = 0$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{w} = (1, 0, 0, 0)$ i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

8. En matris A är *ortogonal* om $A^T A = A A^T = I$ där I är identitetsmatrisen.

a) Visa att en ortogonal matris A alltid är kvadratisk och inverterbar, och att inversen A^{-1} också är en ortogonal matris.

b) Låt $A = \begin{pmatrix} x & \frac{1}{2} \\ y & z \end{pmatrix}$, där $y > 0$ och $z > 0$, vara en ortogonal matris. Bestäm x, y och z.

LYCKA TILL!

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Systemets totalmatris är radekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket motsvarar ett ekvationssystem med den allmäna lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9 - s + 10t, s, -7 + 7t, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Matrisen A är inverterbar precis när $\det A = -4a^2 + 36 \neq 0$, d v s när $a \neq \pm 3$. Inversen för dessa a är

$$A^{-1} = -\frac{1}{4(a^2-9)} \begin{pmatrix} 11a & -24 - a^2 & 2 + a^2 \\ 18 & -6a & 2a \\ 15a & -a^2 - 36 & a^2 + 6 \end{pmatrix}.$$

3. Ekvationens lösning är $X = A^{-1}BA$. Inversen till den givna matrisen A är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

så att

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ -3 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

för de givna A och B.

4. Genom att använda de elementära rad-/kolumnoperationerna kan man beräkna att determinanten i vänsterledet är lika med $-2(x-1)(x-2)(x-3)$. Ekvationen är därför ekvivalent med $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ och har lösningarna $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

5.

a) Planets normalvektor är $(2, -1, 3)$ så den sökta linjens ekvation kan skrivas på parameterformen som $(x, y, z) = (5 + 2t, -1 - t, 1 + 3t)$, där $t \in \mathbb{R}$.

b) Insättning $(x, y, z) = (5 + 2t, -1 - t, 1 + 3t)$ i planets ekvation $2x - y + 3z = 0$ ger att linjen skär planet i den punkt där $t = -1$, d v s i punkten $Q : (3, 0, -2)$.

c) Avståndet från punkten P till planet π är lika med $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14}$.

6. a) Notera att $\overrightarrow{AB} = (2,3,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (1,3,-4)$ och att

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Detta innebär att A, B, C och D inte ligger i samma plan.

b) Man kan t ex hitta en sådan punkt E att $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$. Låt (a,b,c) vara koordinaterna till E, då är $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ ekvivalent med $(a-1, b+1, c-1) = (-4,-3,0)$, vilket ger $E = (-3,-4,1)$.

7. a) Eftersom

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 1$$

utgör de fyra vektorerna $\vec{v}_1 = (1,1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (1,2,a,1)$, $\vec{v}_3 = (1,a,2,0)$ och $\vec{v}_4 = (0,1,1,0)$ en bas i $\mathbb{R}^4$ om $a \neq 1$.

b) Låt $a = 0$. Vi söker $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ sådana att $\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4$. För detta löser vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

och får att $\vec{w}$ har coordinaterna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2,0,-1,-2)$ i den givna basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

8. a) Om A är $n \times m$-matris då är A^T en $m \times n$-matris, och matriserna A^TA och AA^T har storlekarna $m \times m$ respektive $n \times n$. Eftersom $A^TA = AA^T = I$ följer det att $m = n$ och att A är inverterbar med $A^{-1} = A^T$. Notera att i detta fall

$$(A^{-1})^TA^{-1} = (A^T)^TA^T = AA^T = I = A^TA = A^T(A^T)^T = A^{-1}(A^{-1})^T$$

så inversen är också en ortogonal matris.

b) För den givna A har vi

$$A^TA = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & \frac{1}{2}x + yz \\ \frac{1}{2}x + yz & \frac{1}{4} + z^2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad AA^T = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{1}{4} & xy + \frac{1}{2}z \\ xy + \frac{1}{2}z & y^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

Från $A^TA = AA^T = I$ följer det att $y^2 = \frac{1}{4}$, $z^2 = \frac{3}{4}$, och att $\frac{1}{2}x + yz = 0$. När y och z är positiva, får vi att $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, och $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d v s

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$