UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Magnus Jacobsson, Hania Uscka-Wehlou

Tentamen i matematik
Flervariabelanalys 10hp, 1MA016
20 augusti 2019

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Det maximala poängtalet för varje uppgift är 5 *poäng. För betygen* 3, 4, 5 *krävs minst* 18, 25 *resp.* 32 *poäng. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar, sammanbindande text och hänvisningar till relevant teori. Skriv din tentakod på varje ark.*

1. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x,y) = y^2 - xy - 3y + 2x$ i triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(4,0)$ och $(0,4)$. (5)

2. Lös den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^2, \quad x > 0,\ y > 0.$$

genom att införa nya variabler

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

(5)

3. Låt $g(x,y) = x^3 - 2xy - y^3 + 2$.

(a) Ange en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan $g(x,y) = 0$ i punkten $P = (1,1)$.

(b) Ange en ekvation för den andragradskurva som bäst approximerar $g(x,y) = 0$ i punkten $P = (1,1)$.

(5)

4. Betrakta vektorfältet

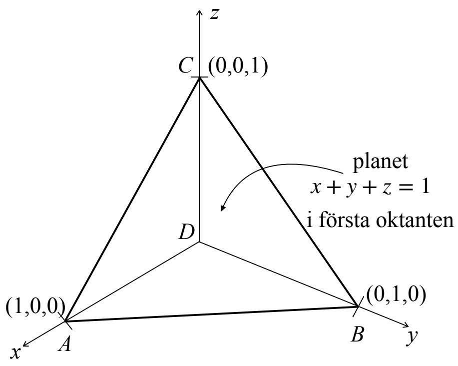
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{1}{y^2+1}, ze^{yz} - \frac{2xy}{(y^2+1)^2}, ye^{yz} + 2z).$$

(a) Beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$.

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

där γ är stycket av kurvan $\mathbf{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ från punkten $(1,0,0)$ till punkten $(1,0,2\pi)$. (5)



5. Låt T vara tetraedern med hörn i punkterna A, B, C och D som i bilden. Bestäm det totala flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom begränsningsytan ∂T om

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz^2 + e^{yz},\ \sin xz - y,\ z + e^{xy}).$$

(5)

6. Beräkna

$$\iiint_K (x+y+z+5)\,dxdydz \qquad \text{där} \qquad K = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4,\ \ z \geq 2\}.$$

(5)

7. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\gamma (e^{\sin x} - x^2 y)\,dx + e^{y^2}\,dy$$

där γ är enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ genomlöpt en gång i positivt led (moturs). (5)

8. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$(2x\sin y - y^2 \sin x)dx + (x^2\cos y + 2y\cos x + 1)dy = 0.$$

(b) Ange en ekvation för den lösningskurva som går igenom punkten $(x,y) = (0,\pi)$.

(5)

Lycka till!