1. Gamla tentamen till träning.

På de följande sidor finnas lösningar till några av de 6 gamla tentor, som jag laddade upp tidigare. I uppgift 7 i tenta 130528 är lösningen dock fel. Beräkningen av $\iiint_K$ av divergensen är över fel mängd.

Lösningar till tentamen i
FLERVARIABELANALYS/
FLERVARIABELANALYS M
Spår ODE: 1MA016
Spår TOP: 1MA183 2015–01–11

Lösning till problem 1. För att beräkna en kurvintegral måste vi ha derivaten av kurven:

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\begin{aligned}\int_C x + y ds = \int_0^\pi (\cos t + \sin t)\|\vec{r}'(t)\|dt = \int_0^\pi (\cos t + \sin t)dt = \\ =[\sin t - \cos t]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2.\end{aligned}$$

Lösning till problem 2. Funktionen har ett största och minsta värde eftersom $\mathcal{D}$ är kompakt och f är kontinuerlig. Förste hittar vi stationära punkter för f:

$$(0,0) = \nabla f = (7x^6, 7y^6)$$

vilket enbart har lösningen $(x, y) = (0, 0)$. Så analyserar vi randen av $\mathcal{D}$ (med lagrangemultiplikatorer) vi ser att

$$1 = g(x, y) = x^2 + y^2$$

definierar randen och $\nabla g = (2x, 2y)$. Vi ska hitta de punkter där ∇g och ∇f är parallella det vill säga där följande determinant är 0:

$$0 = \begin{vmatrix} \nabla g \\ \nabla f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7x^6 & 7y^6 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 7x^6y - 7y^6x = 7xy(x^5 - y^5).$$

Denna är noll omm $x = 0$ eller $y = 0$ eller $y = x$. Detta ger 6 punkter på randen:

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (-1,0), \quad (0,-1), \quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vi vet alltså att maximum och minimum antas i ett av de syv punkter. Så vi ska bara kolla funktionsvärden i dessa 7 punkter:

$$\begin{gathered} f(1,0) = f(0,1) = 1, \quad f(-1,0) = f(0,-1) = -1, \\ f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{\sqrt{2}}{8} < 1, \quad f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{8} > -1, \quad f(0,0) = 0. \end{gathered}$$

Maximum och minimum är alltså 1 och -1.

Lösning till problem 3. Kroppen är z-enkel med skugga i xy-planet given av det begränsade området inom kurvan:

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2.$$

Vi kallar detta områda $\mathcal{D}$. Vi kan alltså beräkna volymen genom att integrera

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{2x+2y+2}^{x^2+y^2} 1dz \right) dA = \iint_{\mathcal{D}} -x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2dA = \iint_{\mathcal{D}} 4 - (x-1)^2 - (y-1)^2 dA.$$

För att beräkna detta använder vi polärakoordinater (med centrum i punkten $(1, 1)$):

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r d\theta dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = 2\pi [2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4]_0^2 = 8\pi.$$

Lösning till problem 4. a) Först beräknar vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} + 2x^3y\frac{\partial f}{\partial v}$$

vilket satt in i diffekvationen ger

$$0 = 2x\frac{\partial f}{\partial x} - 3y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\left(y\frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) - 3y\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + 2x^3y\frac{\partial f}{\partial v}\right) = -xy\frac{\partial f}{\partial u} = -u\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Denna är ekvivalent med $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ (då $u > 0$) och därför är

$$f(u,v) = g(u) \qquad \Rightarrow \qquad f(x,y) = g(v) = g(x^3y^2)$$

där $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ är en funktion av klass C^1.

b) mängden är given av $u > 0, v > 0$. Detta ses genom att koordinatbytet tillbaka från denna mängd kan skrivas som

$$x = \frac{v}{u^2} \qquad y = \frac{u^3}{v}$$

(och denna är en tvåsidat invers till det ursprungliga koordinatbyte).

Lösning till problem 5. Vi beräkna att

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 6yx^2 - 6yx^2 = 0$$

så vektorfältet är rotationsfritt. Då $\mathbb{R}^2$ är enkeltsammanhängande är det också konservativt. Det betyder att integrationen längs en kurva enbart beror av ändapunkterna. Så vi får samma resultat om vi integrerar över kurvan $C : \vec{r}(t) = (t, 0), t \in [-1, 1]$. Detta ger

$$\int_C (x^4 + 3y^2x^2)dx + (y^3 + 2yx^3 + e^{\pi\sqrt{y^2+1}})dy = \int_{-1}^{1} t^4 \cdot 1 + e^{\pi} \cdot 0 dt =$$
$$= \int_{-1}^{1} t^4 = [\tfrac{1}{5}t^5]_{-1}^{1} = \tfrac{2}{5}.$$

Alternativ: Använda Green's sats till att säga att de två integralerna är lika. Mera precist - eftersom de två kurvorna (med den ena motsatt orienterad) är den orienterade randen av ett område i $\mathbb{R}^2$ där vi kan använda Green's sats är de lika.

Lösning till problem 6. I stället för att integrera över halvsfären S kan vi använda divergensteoremet:

$$\int_S \vec{F} \bullet d\vec{S} + \int_B \vec{F} \bullet d\vec{S} = \int_K \mathrm{div}\vec{F} dV \tag{1}$$

Där $K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ som har den orienterade randen S union med

$$B : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \qquad \text{(orienterad med normal med negativ } z\text{-koordinat).}$$

Först beräknas $\mathrm{div}\vec{F} = 0 + 0 + 2ze^{z^2} = 2ze^{z^2}$. Så beräknar vi högresidan av Ekvation (1) som en itererad integral:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2ze^{z^2}dz\right)dA =^{[s=z^2]} \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_0^{1-x^2-y^2} e^s ds\right)dA =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(e^{1-x^2-y^2} - 1\right)dA =^{[\text{polära koordinater}]}$$

$$= \pi\int_0^1 \left(2e^{1-r^2} - 2\right)rdr =$$

$$= \pi[-e^{1-r^2} - r^2]_0^1 = \pi(e-2).$$

Så beräknar vi ytintegral över B också från Ekvation (1):

$$\int_B \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \vec{F}\bullet(0,0,-1)dA =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} -e^0 dA = -\pi.$$

Svaret blir då (enligt Ekvation (1)):

$$\int_S \vec{F}\bullet d\vec{S} = \pi(e-2) - (-\pi) = \pi(e-1).$$

Lösning till problem 7. Arean av den parametriserade ytan kan beräknas med följande formel:

$$\int_0^1\int_0^1 \left\|\frac{\partial q}{\partial u}\times\frac{\partial q}{\partial v}\right\| dudv.$$

Så vi hittar

$$\frac{\partial q}{\partial u} = (2u, 2u, 2u), \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = (0,0,1) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial q}{\partial u}\times\frac{\partial q}{\partial v} = (2u, -2u, 0).$$

Detta ger (med $u \geq 0$):

$$\left\|\frac{\partial q}{\partial u}\times\frac{\partial q}{\partial v}\right\| = \sqrt{(2u)^2 + (2u)^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}u.$$

Så arean blir

$$\int_0^1\int_0^1 2\sqrt{2}ududv = \int_0^1 2\sqrt{2}[\tfrac{1}{2}u^2]_0^1 dv = \int_0^1 \sqrt{2}dv = \sqrt{2}.$$

Lösning till problem 8. (i) Diffekvationen är exakt då $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}$ med $2xydx + (x^2 + 1)dy = Q(x,y)dx + P(x,y)dy$. Så vi kan hitta en integrerande faktor φ genom att integrera (hitta potential):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x,y) = x^2y + g(y).$$

Detta ger då

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad g'(y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x,y) = x^2y + y + c$$

med $c \in \mathbb{R}$ en godtycklig konstant. Det betyder att lösningskurvorna till diffekvationen är nivåkurvor för dessa. Det vill säga beskrivet av ekvationen:

$$x^2y + y = k$$

för någon konstant $k \in \mathbb{R}$.

(ii) För fixerad x konvergerar

$$\frac{n}{nx+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{x}$$

då $n \to \infty$. Så gränsfunktionen är $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi kollar efter likformig konvergens genom att se på differensen:

$$\left|\frac{n}{nx+1} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{nx - nx - 1}{(nx+1)x}\right| = \frac{1}{(nx+1)x} \leq \frac{1}{(n\delta+1)\delta} \to 0$$

då $n \to \infty$. Detta var alltså en begränsning av differensen som är OBEROENDE av x och som går mot 0. Vi har därför vist likformig konvergens.

Lösningsförslag till tenta i flervariabelanalys augusti 2015. Med förbehåll för fel (skrivet snabbt). Om du har frågar eller hittar fel skicka gärna en email till mig (`thomas.kragh@math.uu.se`).

(1) a)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + \sin(y), \cos(y)x).$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \cos(0) \cdot 1 = 1 \neq 0$$

och $f(1,0) = 1$. Så implicita funktionssatsen säger att y är definierad som funktion av x i en omgivning av $(1,0)$ genom ekvationen $f(x,y) = 1$. Vi försökar också isolera y:

$$1 = x^3 + \sin(y)x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = \frac{x^3 - 1}{x} = x^2 - \tfrac{1}{x}$$

Da $\arcsin(0) = 0$ fungerar detta som en lösning i en omgivning $(x,y) = (1,0)$. Så

$$y = \arcsin(x^2 - \tfrac{1}{x})$$

i en omgivning. Första del av b) följer från den andra delen om man nämner att denna lösning till ekvationen fungerar alltid när $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (eller bara nära 0) och x är nära 1.

(2) S är given som $G(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 + z^2 = 1$ och normalen till planet är $(1,1,0)$. En normal till tangentplanet av S i punkten (x,y,z) är

$$\nabla G = \left(2(\sqrt{x^2+y^2} - 3)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2(\sqrt{x^2+y^2} - 3)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z\right).$$

I punkter där planen är parallella är dessa också parallella. Så för att denna är parallell med $(1,1,0)$ måste $z = 0$ och de första två koordinater lika (och vi måste vara i en punkt på ytan - det vill säga $(x,y,z) \in S$):

$$2(\sqrt{x^2+y^2} - 3)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2(\sqrt{x^2+y^2} - 3)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y$$

eftersom $\sqrt{x^2+y^2} \notin \{0,3\}$ i de punkter på S där $z = 0$. Detta ger lösningarna $(x,x,0)$ på S. Så vi löser när dessa ligger i S:

$$(\sqrt{x^2+x^2} - 3)^2 + 0^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 3 \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}.$$

Så i de motsvarande 4 punkter är:

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \text{ och } (-1,-1,0) \text{ och } (1,1,0) \text{ och } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

Alla planer med normalvektor $(1,1,0)$ har en ekvation av typen $x + y = d$ och de fyra planen genom dessa punkterna med normalvektor $(1,1,0)$ har därför ekvationerna

$$x + y = -2\sqrt{2}, \quad x + y = -2, \quad x + y = 2, \quad \text{och} \quad x + y = 2\sqrt{2}.$$

Eftersom vi i varje fall känner denna summan i en av punkterna på planet.

(3)

$$\nabla g = (2x + 6y, 18y^2 + 6x).$$

I stationära punkter är denna lika med $(0,0)$ så $x = -3y$ och antar vi detta löser vi:

$$18y^2 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18y^2 - 18y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \{0, 1\}.$$

Så de stationära punkter är $(x, y) \in \{(0,0), (-3,1)\}$. Hessianen i punkten (x, y) är

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 36y \end{pmatrix}$$

Så i punkten $(0,0)$ har denna ett 0 i nedre vänster hörn. Så den associerade kvadratiska formen är:

$$Q(h, k) = 2h^2 + 12hk = 2(h + 3k)^2 - 18k^2 = 2a^2 - 18b^2$$

Då koordinatbytet $(h, k) \mapsto (h+3k, k) = (a, b)$ är inverterbart har vi identifierad en riktning med krökning uppåt (längs a) och en riktning en med krökning nedåt (längs b). Så denna punkt är en sadelpunkt.

I punkten $(-3, 1)$ är nedre vänster hörn av hessianen 36 och därför är den kvadratiska formen:

$$Q(h, k) = 2h^2 + 12hk + 36k^2 = 2(h + 3k)^2 + 18k^2 = 2a^2 + 18b^2$$

med samma koordinatbyta som ovan. Denna gång har vi enbart uppåt krökande riktningar ($(a, b) = (0, 0)$ är ett strikt minimum) så denna punkten är ett lokalt minimum.

(4) **Alternativ 1**: klotet innanför sfären har volym $\frac{4}{3}\pi$ (välkänd). Ellipsoiden är skalning med 7 längs x axel av detta klot. Det vill säga multiplication med matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denna har determinant 7 och skalera därför om area med denna faktor. Så ellipsens volym är 7 gånger sfärens. Volymen av kroppen imellan de två är därför differensen av dessa

$$7\tfrac{4}{3}\pi - \tfrac{4}{3}\pi = 6\tfrac{4}{3}\pi = 8\pi.$$

Alternativ 2: Skuggan av båda ellipsoiden och klotet i yz planet är $y^2 + z^2 \leq 1$, och över varje punkt i denna är kroppen vi ska hitta volymen av bestämt av ekvationen

$$\sqrt{1 - z^2 - y^2} \leq |x| \leq 7\sqrt{1 - z^2 - y^2}.$$

Per symmetri kan vi ignorera de negative x lösningar och multiplicera volymen med 2. Så vi får

$$\begin{aligned}
V =&2\iint_{y^2+z^2\leq 1}\left(\int_{\sqrt{1-z^2-y^2}}^{7\sqrt{1-z^2-y^2}} 1dx\right)dydz = \\
=&12\iint_{y^2+z^2\leq 1}\sqrt{1-z^2-y^2}dydz =^{[\text{polärkoordinatbyt}]} \\
=&12\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdrd\theta = \\
=&-12\pi\int_1^0\sqrt{s}ds = 12\pi[\tfrac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}]_0^1 = 8\pi
\end{aligned}$$

(5) Då $-x \leq y \leq x$ är $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$ och därför är funktionen $\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x}) > 0$ när också $x \geq 1$. Det betyder att vi kan avgöra konvergens genom att integrerar över en ”utfyllande” sekvens av kompakta regelbundna mängder. Till exempel

$$\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq n, -x \leq y \leq x\}.$$

Dessa är y-enkla och vi kan därför skriva integralen över dessa som ett upprepad integral. Vi beräknar med detta den generaliserade integralen:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}}\tfrac{1}{x}\cos(\tfrac{y}{x})dA = &\lim_{n\to\infty}\iint_{\mathcal{D}_n}\tfrac{1}{x}\cos(\tfrac{y}{x})dA = \\
=&\lim_{n\to\infty}\int_1^n\int_{-x}^x\tfrac{1}{x}\cos(\tfrac{y}{x})dydx =^{[\text{subts. } s=\frac{y}{x}\Rightarrow ds=\frac{1}{x}dy]} \\
=&\int_1^\infty\int_{-1}^1\sin(s)dsdx = \int_1^\infty 2\sin(1)dx = \infty.
\end{aligned}$$

Så integralen är divergent.

(6) Låt $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (xy + x\ln(x^2+1), 4x + e^{y^2} + 3\arctan y)$. Enligt Greens sats är

$$\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{r} + \int_{\gamma_2}\vec{F}\bullet d\vec{r} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dA.$$

Där $\gamma_2(t) = (t,0), t \in [-1,1]$ är botton av halvdisken $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Här används att γ och γ_2 utgör den orienterad randen av K. Så vi beräknar integranden av högresidan:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - x.$$

Vi bräkner också kurvintegralen över γ_2:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \int_{-1}^{1} \vec{F}(t,0) \bullet \gamma_2'(t)dt = \\ &= \int_{-1}^{1} (t\ln(t^2+1), 4t) \bullet (1,0)dt = \\ &= \int_{-1}^{1} t\ln(t^2+1)dt = \int_{2}^{2} \ln(s)\tfrac{1}{2}ds = 0\end{aligned}$$

Vi sätter i hop och ser:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} (4-x)dA = \iint_{\mathcal{D}} 4dA = 4(\frac{1}{2}\pi) = 2\pi.$$

Faktorn $-x$ gick bort per symmetrin av $\mathcal{D}$ givet av:

$$(x,y) \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad (-x,y) \in \mathcal{D}.$$

(Alternativ: använda polära koordinater och integrera vanligt).

(7) **Alternative 1**: Ytan S har fyra delar:

$$\begin{aligned} S_1 =& \{-1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, x = -1\}. \\ S_2 =& \{-1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, x = 1\}. \\ S_3 =& \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq z \leq 1, y = -1\}. \\ S_4 =& \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq z \leq 1, y = 1\}. \end{aligned}$$

Enhets normalvektorn (utåt pekande) till den förste är $\vec{n}_1 = (-1,0,0)$ liknande för de andra. Den är parametriserad av (y,z) koordinaterna och detta är area bevarande (liknande för de andra). Vi beräkner

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \vec{F} \bullet d\vec{S} &= \iint_{-1\leq y\leq 1, -1\leq z\leq 1, x=-1} (2x, -y^2, z^3) \bullet (-1,0,0)dA = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2dydz = 8.\end{aligned}$$

Integralen för S_2 är precis samma utom att $x = 1$ men normalvektorn ändrar också tecken (då den pekar ut åt det annat håll) så vi får därför också 8. Så vi beräknar nu

$$\begin{aligned}\int_{S_3} \vec{F} \bullet d\vec{S} &= \iint_{-1\leq x\leq 1, -1\leq z\leq 1, y=-1} (2x, -y^2, z^3) \bullet (0,-1,0)dA = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1dydz = 4.\end{aligned}$$

Integralen för S_4 är precis samma utom att $y = 1$, men detta ändrar inte $-y^2$, dock ändrar vi normalvektorn till $(0,1,0)$ (på den andra sidan av kuben pekar normalvektorn åt annat hållet) så detta integral ger -4. Samlad får vi:

$$\int_{S} \vec{F} \bullet d\vec{S} = 8 + 8 + 4 - 4 = 16.$$

Alternative 2: Divergens satsen säger att vi kan integrerar divergensen av $\vec{F}$:

$$\operatorname{div} F = 2 - 2y + 3z^2$$

över hela kuben och subtrahera flödet ut av toppen och botten:

$$\begin{aligned} T =& \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, z = 1\}. \\ B =& \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, z = -1\}. \end{aligned}$$

Så vi integerar

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2 - 2y + 3z^2 dzdydx = & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2 + 3z^2 dzdydx = \\ =& 16 + 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z^2 dzdydx = \\ =& 16 + 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\tfrac{1}{3}z^3]_{-1}^{1} dxdy = \\ =& 16 + 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tfrac{2}{3} dxdy = 16 + 8 = 24 \end{aligned}$$

Flödet ut T är

$$\begin{aligned} \int_T \vec{F} \bullet d\vec{S} =& \iint_{-1\le x\le 1, -1\le y\le 1, z=1} (2x, -y^2, z^3) \bullet (0,0,1) dA = \\ =& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1 dydz = 4. \end{aligned}$$

Flödet ut B är

$$\begin{aligned} \int_B \vec{F} \bullet d\vec{S} =& \iint_{-1\le x\le 1, -1\le y\le 1, z=-1} (2x, -y^2, z^3) \bullet (0,0,-1) dA = \\ =& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1 dydz = 4. \end{aligned}$$

Så svaret är $24 - 4 - 4 = 16$.

(8) **Alternative 1 - lång men direkt**: Parametrisera kurvan C genom:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases}$$

Denna har skugga i xy planet (glömma bort z koordinat) given av en ellips och z koordinaten kan avläsas i sista ekvationen:

$$C: \vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t, \sqrt{3}\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Observera att denna parametrisering har den korrekta orientering då skuggan i xy planet går moturs runt. Derivaten av denna är

$$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, \cos t, \sqrt{3}\cos t), t \in [0, 2\pi]$$

Sättas detta in direkt i formeln för kurvintegral fås:

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C \vec{F}(x,y,z) \bullet d\vec{r} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(-2(\sin t)^3(2\cos t)^2, (2\cos t)^3(\sin t)^2, \sqrt{3}\sin t\Big) \bullet \Big(-2\sin t, \cos t, \sqrt{3}\cos t\Big) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(16(\cos t)^2(\sin t)^4 + 8(\cos t)^4(\sin t)^2 + 3\cos t \sin t\big) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(16(\cos t)^2(\sin t)^4 + 8(\cos t)^4(\sin t)^2\big) dt =$$
$$=8 \int_0^{2\pi} (\cos t)^2(\sin t)^2 \big(2(\cos t)^2 + (\sin t)^2\big) dt =^*$$
$$=8 \int_0^{2\pi} (\cos t)^2(\sin t)^2 \big(\tfrac{3}{2}(\cos t)^2 + \tfrac{3}{2}(\sin t)^2\big) dt$$
$$=8 \int_0^{2\pi} (\cos t)^2(\sin t)^2 \tfrac{3}{2} dt = 8\tfrac{\pi}{4}\tfrac{3}{2} = 3\pi.$$

I ekvationstecknet med $*$ användes att

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^2(\cos t)^2(\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (\sin t)^2(\cos t)^2(\sin t)^2 dt$$

Eftersom både funktioner är 2π periodiska och den ena är förskjutningen av den andra med $\pi/2$.

Alternative 2: Enligt Stokes kan vi beräkna denna kurvintegralen om vi kan hitta en yta S där C är den orienterad randen genom:

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{S}.$$

En sådan yta är lätt att hitta eftersom C ligger i planet $z = \sqrt{3}y$ och vi kan därför välja den del av planet som C begränsar. Denna yta måste ha orienterad normalvektor pekande med positiv z koordinat (så att orienteringarna passar i hop). Vi måste parametrisera denna yta för att beräkna ytintegralen. Om vi skriver lite om på ekvationerna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3y^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ z = \sqrt{3}y \end{cases}$$

ser vi att skuggan av C till xy-planet är ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ och vi kan därför använda graf parametrisering över denna:

$$S : (x,y,z) = (x, y, \sqrt{3}y) = (x, y, G(x,y))$$

Denna har normalvektor (som använder parametriseringen för att få skalningen korrekt):

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial G}{\partial x}, -\frac{\partial G}{\partial y}, 1\right) = (0, \sqrt{3}, 1).$$

och rotationen av vektorfältet är

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{F} =& \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \\ =& (0, 0, 3x^2y^2 + 6y^2x^2) = (0, 0, 9x^2y^2)\end{aligned}$$

Ytintegralen blir därför:

$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot } \vec{F} \bullet d\,\vec{S} =& \int_{x^2+4y^2\leq 4} (0, 0, 9x^2y^2) \bullet (0, \sqrt{3}, 1)dxdy = \\ =& \int_{x^2+4y^2\leq 4} 9x^2y^2 dxdy =^{[(u,v)=(\frac{1}{2}x,y)\Rightarrow 2dudv=dxdy]} \\ =& \int_{u^2+v^2\leq 1} 72u^2v^2 dudv =^{[\text{polärt koordinatbyta}]} \\ =& \int_0^{2\pi} \int_0^1 72r^5(\cos t)^2(\sin t)^2 dr d\theta = \\ =& 72[\tfrac{1}{6}r^6]_0^1 \cdot \tfrac{\pi}{4} = 3\pi\end{aligned}$$

Lösningar till tentamen i FLERVARIABELANALYS/ FLERVARIABELANALYS M Spår ODE: 1MA016 Spår TOP: 1MA183 2015–05–29

Lösning till problem 1. Vi beräknar enligt kedjeregeln de relevanta derivatorna i de nya koordinaterna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + 2015x^{2014}\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u}$$

Det betyder att i de nya koordinater kan differentialekvationen skrivas som

$$yx\frac{\partial f}{\partial u} - x(y\frac{\partial f}{\partial u} + 2015x^{2014}\frac{\partial f}{\partial v}) = 0 \Leftrightarrow 2015x^{2014}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Denna är lätt att lösa på mängden $u > 0, v > 0$ (som är i bijektiv överensstämmelse med $x > 0, y > 0$):

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad \Rightarrow \quad f(u,v) = g(u)$$

där $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ är godtycklig av klass C^1. I de gamla koordinaterna betyder detta att

$$f(x,y) = g(xy).$$

Lösning till problem 2. Då tangentplanet har normalvektor given av gradienten $(4x^3, 4y^3, 4z^3)$ (av funktionen $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$) ska vi hitta de punkter på ytan där denna är parallell med $(8,8,1)$ (som är normalvektor för planet). Detta göres genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 33 \\ 4x^3 = 8\lambda \\ 4y^3 = 8\lambda \\ 4z^3 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow^{\lambda = \frac{1}{2}s} \quad \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 33 \\ x^3 = s \\ y^3 = s \\ 8z^3 = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 33 \\ x^3 = y^3 = 8z^3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 33 \\ x = y = 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 16z^4 + 16z^4 + z^4 = 33 \Rightarrow z = \pm 1.$$

Så vi har två punkter som löser detta (kan glömma s):

$$(2,2,1) \qquad \text{och} \qquad (-2,-2,-1).$$

tangentplanet genom den första av dessa uppfyller $8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 1 = 33$ och den sista $8 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2) + (-1) = -33$ så de två planekvationerna är

$$8x + 8y + z = 33 \qquad \text{och} \qquad 8x + 8y + z = -33$$

Lösning till problem 3. Då $\mathcal{D}$ är kompakt (sluten och begränsad) har vi enligt sats att den antar sitt maximum och minimum. Vi har också en sats som säger att dessa ska hittas i stationära punkter, singulära punkter eller randpunkter. Då funktioner är deriverbar har vi inga singulära punkter. Vi hittar nollpunkter för gradienten (stationära punkter):

$$\vec{0} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad (0,0,0) = (2x, 2y+2) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,-1).$$

Denna punkt ligger i $\mathcal{D}$ och kan därför vara ett max eller min så vi kollar funktionsvärdet:

$$f(0,-1) = 0^2 + (-1)^2 + 2(-1) = -1.$$

Vi måste också kolla randen. Detta kan göras genom att hitta extrempunkt för f på randen, som vi kan genom att använde Lagrange:s metod med bivillkor. Det betyder att vi ska hitta punkter där ∇f är parallell med gradienten $(\frac{2x}{9}, \frac{y}{2})$ för bivillkoret: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Det betyder vi ska lösa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{2x}{9} = \lambda 2x \\ \frac{y}{2} = \lambda(2y+2) \end{cases}$$

Andra ekvationen ger att antigen är $x = 0$ eller också är $\lambda = \frac{1}{9}$. Vi delar upp i fall

- $x = 0$:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{y}{2} = \lambda(2y+2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2.$$

- $\lambda = \frac{1}{9}$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{9}(2y+2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 9(1 - \frac{4}{25}) \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vi har alltså 4 möjliga extrempunkter:

$$(0,2), \quad (0,-2), \quad (\tfrac{3}{5}\sqrt{21}, \tfrac{4}{5}) \quad \text{och} \quad (-\tfrac{3}{5}\sqrt{21}, \tfrac{4}{5})$$

Funktionsvärden i dessa är

$$F(0,2) = 0^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 8, \quad F(0,-2) = 0, \quad F(\pm\tfrac{3}{5}\sqrt{21}, \tfrac{4}{5}) = \tfrac{9}{25}21 + \tfrac{16}{25} + 2\tfrac{4}{5} = \tfrac{189+16+40}{25} = \tfrac{49}{5}.$$

Maximum är: $\frac{49}{5} > 8$ (antas i en randpunkt). Minimum är: -1 (antas i en inre stationär punkt).

Lösning till problem 4. Kroppen K är z-enkel och projektionen (skuggan) i xy-planet är de (x,y) som uppfyller

$$\mathcal{D}: e^{x^2+y^2+1} \leq e^{3-x^2-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+1 \leq 3-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

Alltså enhetsskivan (enhetsklotet). Det betyder att trippelintegraler över K kan räknas som upprepada integraler.

a) Diskussionen ovan ger att

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{1}{z} dV &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{e^{x^2+y^2+1}}^{e^{3-x^2-y^2}} \tfrac{1}{z} dz \right) dxdy = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} [\ln z]_{e^{x^2+y^2+1}}^{e^{3-x^2-y^2}} dxdy = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} 2 - 2x^2 - 2y^2 dxdy =^{\text{[Polärt koordinatbyte]}} \\ &= 2\pi \int_0^1 (2-2r^2) r dr = 2\pi[r^2 - \tfrac{1}{2}r^4]_0^1 = \pi \end{aligned}$$

b) När man ska beräkna volym av en kropp K måste man integrera funktionen 1. Så detta är liknande a), men integralen blir lite annorlunda:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K 1dV =& \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\int_{e^{x^2+y^2+1}}^{e^{3-x^2-y^2}} 1dz \right) dxdy = \\ =& \iint\limits_{\mathcal{D}} [z]_{e^{x^2+y^2+1}}^{e^{3-x^2-y^2}} dxdy = \\ =& \iint\limits_{\mathcal{D}} e^{3-x^2-y^2} - e^{x^2+y^2+1} dxdy =^{\text{[Polära koordinatbyte]}} \\ =& 2\pi \int_0^1 (e^{3-r^2} - e^{r^2+1}) rdr = \pi \int_0^1 (e^{3-t} - e^{t+1}) dt = \\ =& \pi[-e^{3-t} - e^{t+1}]_0^1 = \pi(e^3 + e^1 - 2e^2).\end{aligned}$$

Lösning till problem 5. Alternativ 1: ytan S är en del av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ som har utåt pekande enhetsnormalvektor $(x, y, 0)$. Så integralen kan skrivas som:

$$\iint_S (x, y+z^2, 0) \bullet (x, y, 0) dS = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2 y) dS = \iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_S 1Ds = \text{Area}(S).$$

Här går termen z^2y bort pga symmetrin: $(x, y) \in S \Leftrightarrow (x, -y) \in S$. Arean av S kan beräknas på flera sätt, men om man kommer ihåg formeln att för en cylinder är arean bottenkurvans (baskurvans) längd gånger höjden får man gärna använda denna. Bottenkurvan har längd π (halv cirkel med radie 1). Så då höjden är 4 (eftersom $-2 \leq z \leq 2$) är

$$\text{Area}(S) = 4\pi.$$

Så detta är flödet genom S.
Alternativ 2: Divergensen av $\vec{F}$ är given som

$$\text{Div}\,\vec{F} = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Så om vi definierar $K : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, -2 \leq z \leq 2$ så säger Gauss att

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iiint_K 2dV = 2\,\text{Volym}(K).$$

Denna volym är arean π av botton (halvcirkel) gånger höjden 4.
Randen ∂K består av fyra yt-delar (rita själv en figur): S, S_1, S_2 och S_3 där

$$\begin{aligned} S_1 &: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z = -2 \\ S_2 &: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, z = 2 \\ S_3 &: x = 0, -1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2 \end{aligned}$$

Dock ser vi att S_1 och S_2 är parallella med xy-planet och då $\vec{F}$ är parallell med denna (har ingen z-koordinat) är det inte något flöde genom dessa. Vi ser också att på mängden $x = 0$ är $\vec{F} = (0, y + z^2, 0)$ som är parallell med yz-planet. Så där är inte något flöde genom S_3 heller. Det betyder att

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint_{S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint_{\partial K} \vec{F} \bullet d\vec{S} = 4\pi.$$

Lösning till problem 6. Låt C vara en sådan kurva. Då finns det en orienterad yta S innehållen i ytan $z = x^2 + y^2$ så att $\partial S = C$ (med kompatibel orientering). Enligt Stokes är

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl} \vec{F} \bullet d\vec{S}.$$

Så vi beräknar

$$\operatorname{Curl} \vec{F} = (1 - 0, 0 - (-1), 2x - (-2y)) = (1, 1, 2x + 2y).$$

Ytan $z = x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - z = 0$ har tangentplan-normalvektor given av $(2x, 2y, -1)$. Då dessa är ortogonala:

$$(1, 1, 2x + 2y) \bullet (2x, 2y, -1) = 0$$

är det inte något flöde genom ytan S. vilket ger

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_S \operatorname{Curl} \vec{F} \bullet d\vec{S} = 0$$

oberoende av kurvan C.

Lösning till problem 7. a) Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{q}}{\partial v} =& \frac{\partial}{\partial v}\Big(((3 - \cos u)(\cos v, \sin v, 0) + (0, 0, \sin u))\Big) = \\
=& \left(\frac{\partial}{\partial v}(3 - \cos u)\right)(\cos v, \sin v, 0) + (3 - \cos u)\frac{\partial}{\partial v}(\cos v, \sin v, 0) + \frac{\partial}{\partial v}(0, 0, \sin u) = \\
=& (3 - \cos u)(-\sin v, \cos v, 0) \\
\frac{\partial \vec{q}}{\partial u} =& \frac{\partial}{\partial u}\Big(((3 - \cos u)(\cos v, \sin v, 0) + (0, 0, \sin u))\Big) = \\
=& \left(\frac{\partial}{\partial u}(3 - \cos u)\right)(\cos v, \sin v, 0) + (3 - \cos u)\frac{\partial}{\partial u}(\cos v, \sin v, 0) + \frac{\partial}{\partial u}(0, 0, \sin u) = \\
=& \sin u(\cos v, \sin v, 0) + (0, 0, \cos u).
\end{aligned}$$

Vi använder (bara för att förenkla lite - inte nödvändigt) nu att $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ och $(c_1\vec{a}) \times (c_2\vec{b}) = c_1 c_2(\vec{a} \times \vec{b})$ och beräknar varje del för sig:

$$\begin{aligned}
&\Big((3 - \cos u)(-\sin v, \cos v, 0)\Big) \times \Big(\sin u(\cos v, \sin v, 0)\Big) = \\
&\qquad = (\sin u)(3 - \cos u)((-\sin v, \cos v, 0) \times (\cos v, \sin v, 0)) = \\
&\qquad = (\sin u)(3 - \cos u)(0, 0, -1). \\
&\Big((3 - \cos u)(-\sin v, \cos v, 0)\Big) \times \Big(0, 0, \cos u\Big) = \\
&\qquad = (\cos u)(3 - \cos u)((-\sin v, \cos v, 0) \times (0, 0, 1)) = \\
&\qquad = (\cos u)(3 - \cos u)(\cos v, \sin v, 0).
\end{aligned}$$

Så därför blir summan

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial u} = (\cos u)(3 - \cos u)(\cos v, \sin v, 0) - (\sin u)(3 - \cos u)(0, 0, 1).$$

b) För att hitta arean av en parametriserad yta (kallas T för torus) som denna är formeln:

$$\iint_T 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\frac{\partial \vec{q}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial u}\| du dv.$$

Denna norm kan beräknas direkt, men observerar man att de två vektorerna $(\cos v, \sin v, 0)$ och $(0, 0, 1)$ alltid är ortogonala enhetsvektorer ser man att

$$\|\frac{\partial \vec{q}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial u}\| = \sqrt{(\cos u)^2(3-\cos u)^2 + (\sin u)^2(3-\cos u)^2} = 3 - \cos u.$$

Så

$$\iint_T 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 3 - \cos u du dv = 3\,\mathrm{Area}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) = 12\pi^2.$$

Här gick termen $\cos u$ bort pga av symmetri.

Lösning till problem 8.

(i) **Alternativ 1:** skriva om till

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x} = -1 + \tfrac{y}{x}$$

och använd att för sådana homogena ekvationer är $y(x) = z(x)x$ ett bra variabelbyte som ger

$$x\frac{dz}{dx} + z = -1 + z \qquad \Leftrightarrow \qquad x\frac{dz}{dx} = -1.$$

Denna kan separeras och lösas genom

$$dz = -\tfrac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad z = -\ln x + c \quad \Rightarrow \quad \tfrac{y}{x} = -\ln x + c$$

Så alla lösningskurvor är nivåkurvor för $\frac{y}{x} + \ln x$. Eller den omskrivna differentialekvationen har lösningsfunktionerna:

$$y = -x \ln x + cx.$$

Alternativ 2. Försöka att hitta integrerande faktor $\mu(x, y)$ så att

$$\mu(x, y)(x-y)dx + \mu(x, y)xdy = 0$$

är exakt. För att denna ska vara exakt måste derivaten med avseende på y av första del vara lika med derivaten med avseende på x av andra delen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu \cdot (x-y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu \cdot x\Big) \quad \Leftrightarrow \quad -\mu + (x-y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu + x\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Vi ser nu på denna ekvation att om $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ så får vi en ekvation som enbart beror på x (vilket vi kan lösa):

$$-\mu = \mu + x\frac{d\mu}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}d\mu = -\frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln x + c \quad \Rightarrow \quad \mu = \pm a x^{-2}$$

med $a > 0$. Så vi ser att till exempel $\mu = x^{-2}$ fungerar som integrerande faktor. Denna är inte noll när $x > 0$ så vi ändrar inte alls på lösningarna genom att multiplicera med denna. Så vi ska alltså lösa den exakta ekvation

$$x^{-2}(x-y)dx + x^{-1}dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\tfrac{1}{x} - \tfrac{y}{x^2})dx + \tfrac{1}{x}dy = 0.$$

Vi ska nu hitta en potentialfunktion Φ för vektorfältet $(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}, \frac{1}{x})$ vilket vi gör genom:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \tfrac{1}{x} - \tfrac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \tfrac{y}{x} + \ln x + h(y).$$

andra ekvationen ger att $h'(y) = 0$ så att $\Phi(x, y) = \frac{y}{x} + \ln x$ är en potentialfunktion. Lösningskurvorna är nu nivåkurvarna för Φ:

$$\tfrac{y}{x} + \ln x = c.$$

(ii) Först ses att för fixerat $x > 0$ går $n^{-x} \to 0$ då $n \to \infty$. Så $f_n(x) \to 0$ punktvis på $x > 0$.

a) Vi ska begränsa skillnaden av $f_n(x)$ och 0-funktionen för stora n oberoende på $x \in [\delta, \infty)$. Detta görs genom

$$\sup_{x \in [\delta, \infty]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [\delta, \infty]} f_n(x) = f_n(\delta) = n^{-\delta}$$

eftersom n^{-x} är positiv och avtagande för $n > 1$ eftersom $f_n'(x) = -(\ln n)n^{-x} < 0$ för $x > 0$.

b) För godtycklig fixerad n så går funktionen

$$f_n(x) = n^{-x} \to 1 \qquad \text{då} \qquad x \to 0$$

igen då dessa funktioner är positiva och avtagande betyder detta att

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in (0, \infty)} f_n(x) = \lim_{x \to 0} f_n(x) = 1.$$

Då denna inte går mot 0 har vi inte likformig konvergens på detta interval.

UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Thomas Önskog

Tentamen
Flervariabelanalys (1MA016)
Flervariabelanalys M (1MA183)
Diverse program
9 januari 2014

Skrivtid: 08.00-13.00. Hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang är lätta att följa. Kontrollera alltid rimligheten i dina svar. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng på tentamen. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Observera att uppgifterna ej är ordnade efter svårighetsgrad.

1. Bestäm alla punkter på ytan

$$xy + yz + zx = 3,$$

där tangentplanet är parallellt med planet

$$x + y + z = 0.$$

Bestäm också tangentplanets ekvation i dessa punkter.

Lösningsförslag: För att tangentplanet till den givna ytan ska vara parallell med det givna planet, så måste ytans gradient i denna punkt vara parallell med planets normalvektor, dvs

$$(y + z, x + z, x + y) = \lambda (1, 1, 1),$$

för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Detta ger ekvationerna

$$y + z = \lambda, \quad x + z = \lambda, \quad x + y = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = y = z.$$

Insättning av villkoret $x = y = z$ i ekvationen för ytan ger

$$x^2 + x^2 + x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Gradienten till ytan är alltså parallell med planets normalvektor i punkterna

$$(x, y, z) = \pm (1, 1, 1),$$

och i dessa punkter är gradienten till nivåytan $f(x, y, z) = xy + yz + zx - 3 = 0$ lika med

$$\nabla f (1, 1, 1) = (2, 2, 2) \quad \text{respektive} \quad \nabla f (-1, -1, -1) = (-2, -2, -2).$$

Tangentplanet till ytan i punkten $(1, 1, 1)$ är

$$2 (x - 1) + 2 (y - 1) + 2 (z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 3,$$

och tangentplanet till ytan i punkten $(-1, -1, -1)$ är

$$-2 (x + 1) - 2 (y + 1) + -2 (z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = -3.$$

2. Avgör om funktionen

$$f (x, y) = x^2 - y,$$

har ett största och ett minsta värde på området $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}$ och bestäm i så fall dessa värden.

Lösningsförslag: Eftersom funktionen f är kontinuerlig och området D är kompakt, så har f ett största och ett minsta värde på D. Eftersom den partiella derivatan $\partial f/\partial y = -1$ är nollskild, så saknar funktionen kritiska punkter och alla extrempunkter finns på randen av området. Randen består av två delar: en cirkelbåge och en rät linje. Cirkelbågen kan parametriseras som $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, och längs denna ges funktionen f av

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t.$$

Vi undersöker funktionen g:s värden på intervallet $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Derivering ger de kritiska punkterna

$$\begin{aligned} & g'(t) = 2\cos t(-\sin t) - \cos t = -\cos t(2\sin t + 1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \cos t = 0 \text{ eller } 2\sin t = -1 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\pi/2 \text{ eller } t = -\pi/6. \end{aligned}$$

I de kritiska punkterna har vi funktionsvärdena

$$\begin{aligned} g(-\pi/2) &= f(0,-1) = 0^2 - (-1) = 1, \\ g(-\pi/6) &= f\left(\sqrt{3}/2, -1/2\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}, \\ g(\pi/2) &= f(0,1) = 0^2 - 1 = -1, \end{aligned}$$

Linjestycket kan parametriseras som $(x,y) = (0,t)$, $t \in [-1,1]$ och längs denna ges funktionen f av

$$g(t) = f(0,t) = -t,$$

som är en strikt avtagande funktion med maximum 1 för $t = -1$ och minimum -1 för $t = 1$. Vi har nu undersökt de båda randstyckena och deras ändpunkter och kan konstatera att -1 är det minsta värdet på f i D och att $\frac{5}{4}$ är det största värdet på f i D.

3. Funktionen

$$h(x,y) = g(x^2 - y),$$

där g är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av en reell variabel, satisfierar differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = x^2 - y.$$

Bestäm $h(x,y)$ utifrån denna information.
Lösningsförslag: Sätt $u = x^2 - y$. Kedjeregeln ger då

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= g'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 2xg'(u), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = -g'(u). \end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xg'(u)) = 2g'(u) + 2xg''(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 2g'(u) + 4x^2 g''(u), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-g'(u)) = -g''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = g''(u). \end{aligned}$$

Insättning i den partiella differentialekvationen för h ger sedan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(x^2 - y\right) &= \left(2g'(u) + 4x^2 g''(u)\right) - 4x^2 \left(g''(u)\right) - u \\ &= 2g'(u) - u = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(u) = \frac{u}{2}.\end{aligned}$$

Integration av båda sidor ger direkt

$$g(u) = \frac{u^2}{4} + C,$$

så den sökta lösningen är

$$h(x, y) = g\left(x^2 - y\right) = \frac{\left(x^2 - y\right)^2}{4} + C,$$

för någon godtycklig reell konstant C.

4. Beräkna, om den konvergerar, den generaliserade integralen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

Lösningsförslag: Uttryckt i polär form $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ så kan integrationsområdet $\mathbb{R}^2$ skrivas $0 \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Jacobianen vid övergång till polär form är r, så vi får

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r} r dr$$

Partiell integration ger

$$\int e^{-r} r dr = -e^{-r} r - \int -e^{-r} dr = -e^{-r} r + \int e^{-r} dr = -e^{-r} r - e^{-r} = -e^{-r}(r+1),$$

så från definitionen av generaliserade integraler så får vi

$$\begin{aligned}2\pi \int_0^{\infty} e^{-r} r dr &= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_0^R r e^{-r} dr = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-r}(r+1)\right]_0^R \\ &= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R}(R+1) + e^{-0}(0+1)\right) = 2\pi(-0+1) = 2\pi,\end{aligned}$$

eftersom exponentialfunktioner växer snabbare än potensfunktioner.

5. Beräkna volymen av den begränsade kropp som avgränsas av ytorna $z = x^2 + 2y^2$ och $2x + z = 0$.
Lösningsförslag: Eftersom den första ytan ligger ovanför xy-planet, så kommer kroppens projektion D på xy-planet att ges av de punkter som uppfyller

$$-2x \ge x^2 + 2y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 2y^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + 2y^2 \le 1,$$

vilket utgör en ellips. Kroppens volym är

$$V = \iint_D \int_{x^2+2y^2}^{-2x} dz dA = \iint_D \left(-2x - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) dA.$$

Ytan D kan parametriseras

$$\begin{aligned}x &= -1 + r\cos\theta, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta,\end{aligned}$$

för $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobianen vid detta variabelbyte är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos^2\theta - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin^2\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}r,$$

så vi får

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-2(-1+r\cos\theta) - (-1+r\cos\theta)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2 - 2r\cos\theta - 1 + 2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right)\frac{1}{\sqrt{2}}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}rdrd\theta = \sqrt{2}\pi\int_0^1 \left(r - r^3\right)dr = \sqrt{2}\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \text{ v.e.} \end{aligned}$$

6. Låt γ vara det räta linjestycket från punkten $(2,0)$ till punkten $(0,2)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma x\ln\left(x^2+y^2\right)dx + y\ln\left(x^2+y^2\right)dy.$$

Lösningsförslag: Vi undersöker om vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \left(x\ln\left(x^2+y^2\right), y\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$ är konservativt och således har en potential $\phi(x,y)$. En eventuell potential uppfyller

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= F_1(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right), \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= F_2(x,y) = y\ln\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

Integration av den första ekvationen med avseende på x ger, med variabelsubstitutionen $u = x^2+y^2$, $du = 2xdx$,

$$\phi(x,y) = \int x\ln\left(x^2+y^2\right)dx = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}\int 1\cdot\ln u du.$$

Partiell integration ger sedan

$$\int 1\cdot\ln u du = u\ln u - \int u\frac{1}{u}du = u\ln u - u = u(\ln u - 1),$$

så

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(\ln\left(x^2+y^2\right) - 1\right) + f(y).$$

Om vi deriverar detta uttryck med avseende på y och sedan jämför med andra ekvationen, så får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y} &= y\left(\ln\left(x^2+y^2\right) - 1\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{2y}{x^2+y^2} + f'(y) \\ &= y\ln\left(x^2+y^2\right) + f'(y) = y\ln\left(x^2+y^2\right) \quad\Rightarrow\quad f'(y) = 0 \quad\Rightarrow\quad f(y) = C. \end{aligned}$$

Vektorfältet är således konservativt och har potentialen

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(\ln\left(x^2+y^2\right) - 1\right).$$

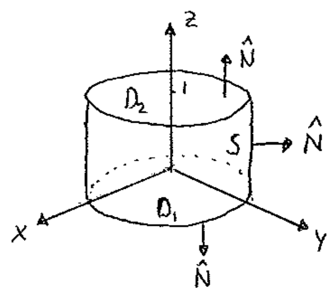
Kurvintegralen blir därmed

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma} x\ln\left(x^2+y^2\right)dx + y\ln\left(x^2+y^2\right)dy \\
= \;& \phi(0,2)-\phi(2,0) = \frac{1}{2}\left(0^2+2^2\right)\left(\ln\left(0^2+2^2\right)-1\right) - \frac{1}{2}\left(2^2+0^2\right)\left(\ln\left(2^2+0^2\right)-1\right) \\
= \;& 2(\ln 4 - 1) - 2(\ln 4 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz^2, 2xy, z^2-1\right)$, ytan S är mantelytan till cylindern $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le 1$ och $\widehat{\mathbf{N}}$ är den enhetsnormal till S som är riktad bort från punkten $(0,0,1/2)$.
Lösningsförslag: Vi skissar cylindern



och låter D_1 beteckna bottenytan samt D_2 toppytan till cylindern. Enligt Gauss sats gäller då

$$\iiint_V \mathrm{div}F dV = \iint_{S\cup D_1\cup D_2} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS + \iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS + \iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS,$$

så

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \iiint_V \mathrm{div}F dV - \iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS - \iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS.$$

Vi beräknar först volymsintegralen. Divergensen för vektorfältet är

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z^2 + 2x + 2z,$$

så

$$\iiint_V \mathrm{div}F dV = \iiint_V \left(z^2+2x+2z\right)dV.$$

Den mellersta termen i integralen ger inget bidrag till integralen eftersom integrationsvolymen är symmetrisk kring x-axeln. Vi får

$$\iiint_V \left(z^2+2z\right)dV = \iint_{D_1}\int_0^1 \left(z^2+2z\right)dzdA = \iint_{D_1}\left[\frac{z^3}{3}+z^2\right]_0^1 dzdA = \frac{4}{3}\iint_{D_1} dA = \frac{4}{3}\pi,$$

eftersom D_1 är en cirkel med radie 1. Flödet ut genom bottenytan D_1 ges, eftersom $\widehat{\mathbf{N}} = (0,0,-1)$ och $z = 0$ på D_1, av

$$\iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \iint_{D_1} (0,2xy,-1)\cdot(0,0,-1)\,dA = \iint_{D_1} dA = \pi.$$

Flödet ut genom toppytan D_2 ges, eftersom $\widehat{\mathbf{N}} = (0,0,1)$ och $z = 1$ på D_2, av

$$\iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \iint_{D_1} (x,2xy,0)\cdot(0,0,1)\,dA = 0.$$

Sammanfattningsvis blir flödet ut ur cylinderns mantelyta

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \frac{4\pi}{3} - \pi - 0 = \frac{\pi}{3}.$$

8. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yz, 3x + y + e^z)$ och γ är skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och planet $y + z = 1$ orienterad medurs sett från origo.

Lösningsförslag: Vi använder Stokes sats och beräknar först vektorfältets rotation.

$$\text{rot}F = \left|\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & 3x + y + e^z \end{pmatrix}\right| = (1 - y, x - 3, 0)\,.$$

Låt S vara den del av planet $y + z = 1$ som omringas av kurvan γ. Givet orienteringen av γ, så blir normalvektorn till ytan då $(0,1,1)$ och enligt Stokes sats så gäller

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS = \iint_D (1-y, x-3, 0)\cdot(0,1,1)\,dA = \iint_D (x-3)\,dA,$$

där D är projektionen av S på xy-planet. Vi bestämmer nu projektionen av γ på xy-planet (eftersom denna projicerade kurvan utgör randen till D) och får

$$x^2 + y^2 + (1-y)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad x^2 + y^2 + 1 - 2y + y^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\quad 2x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

vilket är en ellips med centrum i $(0,1/2)$ och area $\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$. Eftersom området D är symmetriskt kring origo i x-led så försvinner x-termen i integralen av symmetriskäl och vi får slutligen

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-3)\,dA = -\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}.$$

UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Thomas Önskog

Tentamen
Flervariabelanalys (1MA016)
Flervariabelanalys M (1MA183)
F, KandMa, GyLärareMa
28 maj 2013

Skrivtid: 08.00-13.00. Hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang är lätta att följa. Kontrollera alltid rimligheten i dina svar. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs totalt minst 18, 25 respektive 32 poäng på tentamen. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den första uppgiften löses endast av de studenter som inte godkänts på duggan den 4 mars 2013. Observera att uppgifterna ej är ordnade efter svårighetsgrad.

1. Har funktionen

$$f(x,y) = 2x^4 - xy + 2y^4,$$

ett största och minsta värde på området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$? Bestäm i så fall dessa.

Lösningsförslag: Eftersom funktionen f är kontinuerlig och området D är kompakt, så har f ett största och ett minsta värde på D. För att hitta eventuella extrempunkter i det inre av området så undersöker vi de kritiska punkterna.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 8x^3 - y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 8y^3 = 0, \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $y = 8x^3$, vilket efter insättning i den andra ekvationen ger

$$-x + 8\left(8x^3\right)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(8^4x^8 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\left(2\sqrt{2}x\right)^8 - 1\right) = 0,$$

med lösningarna $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Vi får således de tre kritiska punkterna $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, av vilka den sista inte är av intresse eftersom den ligger utanför D. I de två första kritiska punkterna har vi funktionsvärdena

$$f(0,0) = 0 \quad \text{och} \quad f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = -\frac{1}{16}.$$

Randen består av fyra delar som kan parametriseras av $(0,t)$, $(t,0)$, $(1,t)$ respektive $(t,1)$ för $0 \leq t \leq 1$. Längs de två första randstyckena ges funktionen av

$$f(0,t) = f(t,0) = 2t^4,$$

som är en strikt växande funktion. Det minsta värdet antas därmed för $t = 0$ och är lika med 0 och det största värdet antas för $t = 1$ och är lika med 2. Längs de två andra randstyckena ges funktionen av

$$f(1,t) = f(t,1) = 2t^4 - t + 2,$$

som har den kritiska punkten

$$8t^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2},$$

med funktionsvärdet

$$f\left(1,\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+2=\frac{1-4+16}{8}=\frac{13}{8}.$$

Vi har redan undersökt tre av hörnen och i det sista hörnet $(1,1)$ är funktionsvärdet $f(1,1)=2-1+2=3$. Sammanfattningsvis så är $-\frac{1}{16}$ det minsta värdet på f i D och 3 är det största värdet på f i D.

2. Bestäm det största värde som funktionen

$$f(x,y,z)=xy\sqrt{z},$$

kan anta då x, y och z är positiva tal med summa 1.
Lösningsförslag: Vi vill maximera funktionen $f(x,y,z)=xy\sqrt{z}$ under bivillkoret $x+y+z=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. Mängden $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right\}$ är kompakt och funktionen f är kontinuerlig så vi kan vara säkra på att maximum existerar. Sätt $g(x,y,z)=x+y+z-1=0$. Enligt Lagrange multiplikatormetod så fås maximum i en punkt där gradienterna av f och g är parallella. Eftersom $\nabla f=\left(y\sqrt{z},x\sqrt{z},\frac{xy}{2\sqrt{z}}\right)$ och $\nabla g=(1,1,1)$, så får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} y\sqrt{z}=\lambda 1,\\ x\sqrt{z}=\lambda 1,\\ \dfrac{xy}{2\sqrt{z}}=\lambda 1,\\ x+y+z-1=0.\end{cases}$$

De två första ekvationerna ger

$$\frac{y\sqrt{z}}{x\sqrt{z}}=\frac{\lambda}{\lambda}=1 \quad\Rightarrow\quad y\sqrt{z}=x\sqrt{z} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{z}(y-x)=0,$$

med lösningarna $z=0$ respektive $x=y$. Men lösningen $z=0$ uppfyller inte den tredje ekvationen och kan försummas. Sätter vi in $x=y$ i den tredje ekvationen och dividerar andra och tredje ekvationen, så får vi

$$\frac{x\sqrt{z}}{\dfrac{x^2}{2\sqrt{z}}}=\frac{\lambda}{\lambda}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2z}{x}=1 \quad\Rightarrow\quad 2z=x.$$

Alltså gäller $x=y=2z$ i den punkt där maximum inträffar. Sätter vi in detta villkor i bivillkoret $g(x)=0$, så får vi

$$2z+2z+z=1 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{1}{5},$$

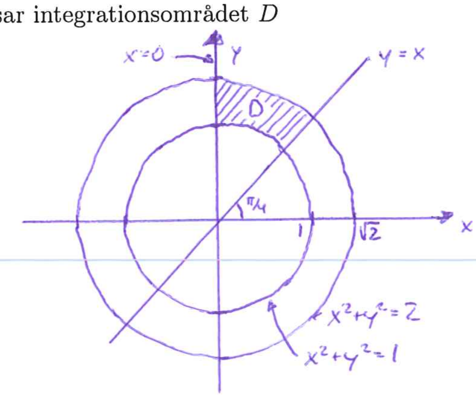
Det största värdet antas i $(x,y,z)=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ och är lika med

$$f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dA,$$

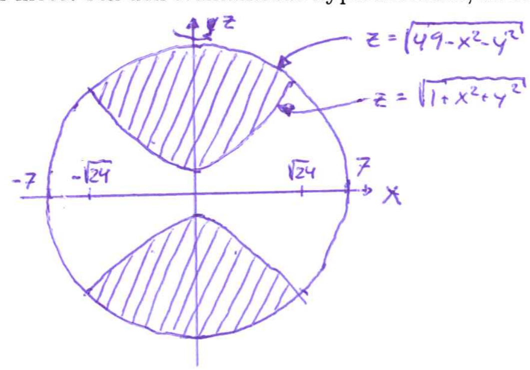
där D är det område i första kvadranten som begränsas av cirkelbågarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 2$ samt linjerna $x = 0$ och $y = x$.
Lösningsförslag: Vi skissar integrationsområdet D



och ser att i polär form $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ kan D skrivas $1 \le r \le \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Jacobianen vid övergång till polär form är r, så vi får

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dA &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r\cos\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} r dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r\cos\theta}{r^2} r dr d\theta \\
&= \left(\int_1^{\sqrt{2}} dr \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \right) = [r]_1^{\sqrt{2}} [\sin\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4. Klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 49$ delas av den tvåmantlade hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ i tre delar. Två av dessa delar har samma volym. Bestäm denna volym.
Lösningsförslag: Vi skissar klotet och den tvåmantlade hyperboloiden, så at det framgår vilken volym vi ska beräkna.



Vi bestämmer därefter projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ klotet och den tvåmantlade hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ genom att sätta z-koordinaterna i de båda ekvationerna lika. Vi får då

$$49 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 24.$$

Volymen av en av de båda lika stora delarna ges av

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 24} \left(\int_{\sqrt{1+x^2+y^2}}^{\sqrt{49-x^2-y^2}} dz \right) dA = \iint_{x^2+y^2\le 24} \left(\sqrt{49 - x^2 - y^2} - \sqrt{1 + x^2 + y^2}\right) dA.$$

Området $x^2 + y^2 \leq 24$ kan i polär form $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ skrivas $0 \leq r \leq \sqrt{24}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobianen vid övergång till polär form är r, så vi får

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{24}} \left(\sqrt{49-r^2} - \sqrt{1+r^2}\right) r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{24}} \left(r\sqrt{49-r^2} - r\sqrt{1+r^2}\right) dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\left(49-r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{24}} \\
&= 2\pi \left(-\frac{1}{3}25^{3/2} - \frac{1}{3}25^{3/2} + \frac{1}{3}49^{3/2} + \frac{1}{3}1^{3/2}\right) = \frac{2\pi}{3}(343 + 1 - 125 - 125) = \frac{188\pi}{3}.
\end{aligned}$$

5. Visa att den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = xe^{-2y},$$

i de nya variablerna

$$\begin{cases} u = xe^{-y}, \\ v = y, \end{cases}$$

kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = u.$$

Bestäm därefter alla lösningar till differentialekvationen.
Lösningsförslag: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}e^{-y}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -xe^{-y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}e^{-y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}e^{-2y}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}e^{-y}\right) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-e^{-y}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-y} \\
&= -e^{-y}\frac{\partial f}{\partial u} - xe^{-2y}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + e^{-y}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u},
\end{aligned}$$

Insättning i den partiella differentialekvationen ger nu

$$\begin{aligned}
& x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} - xe^{-2y} \\
&= x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}e^{-2y}\right) + \left(-e^{-y}\frac{\partial f}{\partial u} - xe^{-2y}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + e^{-y}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}e^{-y}\right) - xe^{-2y} \\
&= e^{-y}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - xe^{-2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = xe^{-y} = u.
\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till denna differentialekvation ges av

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}u^2 + g(v) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}u^2 v + h(v) + k(u),$$

för några okända funktioner g, h och k (h är primitiv funktion till g). Uttryckt i x och y blir lösningen

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(xe^{-y}\right)^2 y+h(y)+k\left(xe^{-y}\right)=\frac{1}{2}x^2ye^{-2y}+h(y)+k\left(xe^{-y}\right).$$

6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y,z)=(2z,2y,1-x)$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $z=x^2+y^2$ och $z=1-y^2$ orienterad så att den positiva riktningen i punkten $(1,0,1)$ är $(0,1,0)$.
Lösningsförslag: Projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan ytorna fås genom att sätta z-koordinaterna lika, dvs

$$x^2+y^2=1-y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+2y^2=1,$$

vilket är en ellips med centrum i origo. Vi kan parametrisera denna kurva som $(x,y)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$ och får, eftersom $z=1-y^2$, parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right),$$

för skärningskurvan. Skärningskurvan har med denna parametrisering tangentvektorn

$$d\mathbf{r}=\left(-\sin\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,-\sin\theta\cos\theta\right).$$

Vi ser att punkten $(1,0,1)$ motsvaras av $\theta=0$ och för $\theta=0$ så gäller $d\mathbf{r}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, så parametriseringen ger korrekt orientering. Insättning av parametriseringen i kurvintegralen ger nu

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left(2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right),\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\theta,1-\cos\theta\right)\cdot\left(-\sin\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,-\sin\theta\cos\theta\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-2\sin\theta+\sin^3\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta=-\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0.\end{aligned}$$

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(xy^2,x^2y,x^3y^3\right)$, ytan S ges av $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $z\geq 0$ och $\widehat{\mathbf{N}}$ är den enhetsnormal till S som är riktad bort från punkten $(0,0,1)$.
Lösningsförslag: Randen till ytan S fås om vi sätter in $z=0$ i ekvationen $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, dvs $x^2+y^2=3$. Låt nu $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 3, z=0\right\}$. $S\cup D$ är då en sluten yta som innesluter kroppen K. Gauss sats ger nu

$$\begin{aligned}&\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS+\iint_D \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS=\iint_{S\cup D}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS=\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}dV\\ \Rightarrow\quad &\iint_S \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS=\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}dV-\iint_D \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS.\end{aligned}$$

På ytan D så är $\widehat{\mathbf{N}}=(0,0,-1)$ så vi får

$$\iint_D \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}dS=\iint_D\left(xy^2,x^2y,x^3y^3\right)\cdot(0,0,-1)\,dS=-\iint_D x^3y^3dS=0,$$

Lösningar till tentamen i Flerdimensionell analys 2001–05–30

Lösning till problem 1. (a) Låt $f(x, y) = xy^2$. $\Rightarrow f_x = y^2$, $f_y = 2xy \Rightarrow \nabla f(2, -1) = (1, -4)$. Tangentlinjens ekvation blir därför $(x - 2) - 4(y + 1) = 0$, medan normallinjen har ekvationen $(x, y) = (2, -1) + t(1, -4)$.
(b) Tangentplanet har ekvationen $z - 2 = (x - 2) - 4(y + 1)$. En normalvektor till ytan i punkten $(2, -1, 2)$ är $(f_x(2, -1), f_y(2, -1), -1) = (1, -4, -1)$. Normallinjen har därför ekvationen $(x, y, z) = (2, -1, 2) + t(1, -4, -1)$.

Lösning till problem 2. För fältet $\mathbf{F} = (z, y, x)$ gäller att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, dvs fältet är konservativt. En primitiv funktion till $\mathbf{F}$ är $f(x, y, z) = xz + y^2/2$ (dvs $\mathbf{F} = \nabla f$). Enligt sats gäller därför att

$$\int_C z\,dx + y\,dy + x\,dz = \big[xz + y^2/2\big]_{(-1,0,-1)}^{(1,0,2)} = 2 - 1 = 1.$$

Lösning till problem 3. Max och min existerar ty det är fråga om en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd. Då $f_y = 1 \neq 0$ måste båda extremvärdena antas i randpunkter. Av $0 = f(0, 0) \leq x^2 + y$ inser vi direkt att minimum är 0. På axlarna har vi $f(x, 0) = x^2 \leq 1 = f(1, 0)$ samt $f(0, y) = y \leq 1 = f(0, 1)$. På kvartscirkeln har vi $x^2 = 1 - y^2$ och därför $g(y) = f(x, y) = 1 - y^2 + y$, $0 \leq y \leq 1$. Då $g'(y) = -2y + 1 = 0$ då $y = 1/2$ ($\Rightarrow x = \sqrt{3}/2$) har vi en eventuell maxpunkt även i $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Då $f(\sqrt{3}/2, 1/2) = 5/4 > 1$ har vi i själva verket max där.

Lösning till problem 4. Då integranden är positiv är det bara att "räkna på": Övergång till polära koordinater ger

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_D \frac{e^{-r}}{r}\,r\,dr\,d\theta = 1 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

där D ges av $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Lösning till problem 5. Sätt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi har då att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

Kedjeregeln ger därför

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r^2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

samt

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{r^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Den transformerade ekvationen blir

$$0 = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + x^2}{r^2}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial v},$$

med lösningen $z = g(u) = g(\ln\sqrt{x^2 + y^2}) = h(x^2 + y^2)$, där $g(u)$ och därmed även $h(t)$ är godtyckliga deriverbara funktioner av en variabel.

Lösning till problem 6. En punkt på planet har lägesvektorn $\mathbf{r} = (x, y, 1/4 - x + 2y)$. Av detta följer att

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, -1), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, 2) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{S} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dx\, dy = (1, -2, 1) dx\, dy$$

och

$$dS = |d\mathbf{S}| = \sqrt{6}\, dx\, dy.$$

Parameterområdet ges av

$$0 \geq x^2 + 2y^2 - 1/4 + x - 2y = (x + 1/2)^2 + 2(y - 1/2)^2 - 1/4 - 2/4 - 1/4,$$

eller

$$(x + 1/2)^2 + 2(y - 1/2)^2 \leq 1,$$

d v s ellipsskivan D med centrum i $(-1/2, 1/2)$ och halvaxlarna 1 respektive $1/\sqrt{2}$. Den sökta arean blir därför

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{6}\, dx\, dy = A(D)\sqrt{6} = \pi \cdot 1 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \pi\sqrt{3}$$

Lösning till problem 7. Insättning av $x = 1$, $y = 0$ i ekvationen ger $\sin(z^5 + 1) + 1 = 1$, dvs $\sin(z^5 + 1) = 0$. Detta är uppfyllt om $z = -1$ (det finns andra lösningar men vi väljer den enklaste). Alltså $z(1, 0) = -1$. Implicit derivering, med utgångspunkt från att $z = z(x, y)$, ger

$$0 = (5z^4 z_x + 1)\cos(z^5 + x) + (yz + xyz_x)e^{xyz}$$

respektive

$$0 = (5z^4 z_y + 0)\cos(z^5 + x) + (xz + xyz_y)e^{xyz}$$

Insättning av $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ ger

$$0 = (5z_x + 1) + 0 = 5z_x + 1$$

samt

$$0 = (5z_y + 0) + (-1 + 0) = 5z_y - 1$$

Dessa ekvationer har lösningarna $z_x(1, 0) = -1/5$ och $z_y(1, 0) = 1/5$, dvs $\nabla z(1, 0) = (-1/5, 1/5)$. Då räkningarna gick bra följer existensen av $z(x, y)$ i en omgivning av $(1, 0)$ av implicita funktionssatsen.

Lösning till problem 8. S är randyta till en kropp K. Gauss' sats ger

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_K (\nabla \bullet \mathbf{F})\, dV = \iiint_K [1 - 2z^2 + 2xy - x^2 - 2y^2]\, dV.$$

Vi skall välja den kropp K som maximerar den sista integralen. Detta inträffar då K väljs som hela den mängd där integranden $f(x, y, z) = 1 - [x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z^2] = 1 - [(x-y)^2 + y^2 + (\sqrt{2}z)^2]$ är icke-negativ. Alltså skall K väljas som den solida ellipsoiden $(x - y)^2 + y^2 + (\sqrt{2}z)^2 \leq 1$. Vid evalueringen av trippelintegralen övergår vi till en variant av sfäriska koordinater; $u = x - y = \rho \sin\phi \cos\theta$, $v = y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $w = \sqrt{2}z = \rho\cos\phi$, $\Rightarrow$ $\sqrt{2}\, dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$, där $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi får

$$I_{\max} = \iiint_K f\, dV = \iiint \left[1 - \rho^2\right] \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 [-\cos\phi]_0^\pi\, [\theta]_0^{2\pi} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{15}.$$