Lösningar till tentamen, Baskurs i matematik, 2013-06-11

1. $$\frac{a^2-4b^2}{2b^2-ab} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{b(2b-a)} = -\frac{a+2b}{b} = -2-\frac{a}{b}.$$

2. $$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 = 2\cdot\frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}.$$

3. $$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. $$\operatorname{Im}(z\bar{w}) = \operatorname{Im}\big((2+i)(3+2i)\big) = \operatorname{Im}(6+4i+3i-2) = 7$$

5. $$\log_8 4 = 2\cdot\log_8 2 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\log_8 2^3 = \frac{2}{3}.$$

6. $$5 = 2^x \iff \ln 5 = x\cdot\ln 2 \iff x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

7. $$3-2x > 2 \iff 2x < 1 \iff x < 1/2$$

8 $$|2x-1| = 5 \iff 2x-1 = \pm 5 \iff x = \frac{1\pm 5}{2},$$

dvs lösningarna är

$x = 3$ och $x = -2$.

9 Lös ekvationen $\sin(3x) = \sin(2x)$.

Lösning

① $3x = 2x + 2\pi n$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 2\pi n}$

② $3x = \pi - 2x + 2\pi n$

$\Leftrightarrow 5x = \pi + 2\pi n$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \cdot n}$

---

10 Kvot och rest får vi med polynomdivision.

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2 + 3x} & \\
\hline
x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - x^2) & \\
\cline{1-1}
\quad 3x^2 - 3x + 1 & \\
\quad -(3x^2 - 3x) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 1 &
\end{array}
$$

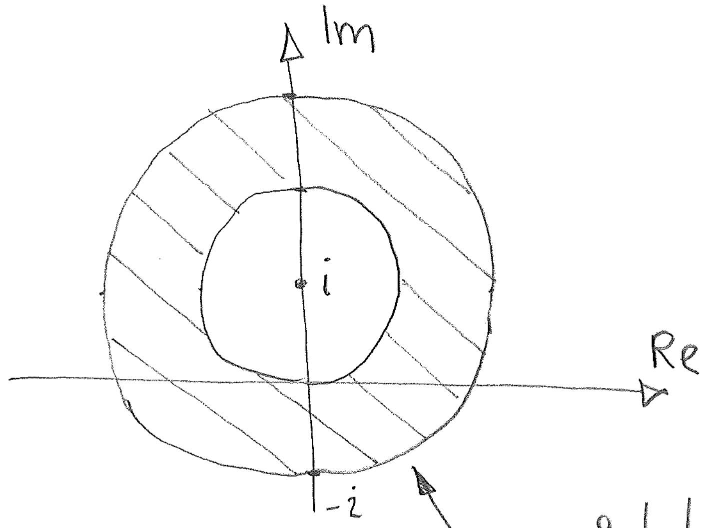
Svar: Resten är 1 och kvoten är $x^2 + 3x$.

11) Boken kan väljas på 5 sätt och tidningarna på $\binom{7}{2}$ sätt. Enligt multiplikationsprincipen är antalet sätt att välja boken och tidningarna

$$5 \cdot \binom{7}{2} = 5 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 5 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 105.$$

---

12) $|z-i|$ är avståndet från i till z.



området där olikheterna $1 \leq |z-i| \leq 2$ gäller – mellan cirklarna med centrum i i och radier 1 resp. 2.

13

Kvadratkomplettering:

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

Så, $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Svar: Radie $= 2$, medelpunkt $= (-2, 1)$.

14

$$\log_3 (x-5) + \log_3 (x+3) = 2$$

$\Rightarrow \log_3 (x-5)(x+3) = 2$

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 9$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{25} = 1 \pm 5$.

Vi ser att $x = -4$ är falsk rot ty $\log_3 (x-5)$ är ej definierat för $x = -4$. Men $x = 6$ är rot ty vänster led blir $\log_3 1 + \log_3 3^2 = 2$.

Svar: $x = 6$

15 Lös olikheten $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 1$.

<u>Lösning</u>: Olikheten kan skrivas: $-1 < \frac{x-1}{x+2} < 1$.

Vi löser dessa två olikheter var för sig.

<u>1:a olikheten</u>: $-1 < \frac{x-1}{x+2} \iff 0 < \frac{x-1}{x+2} + 1 = \frac{2x+1}{x+2}$.

Teckenschema:

		-2		$-1/2$	
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x+1}{x+2}$	$+$	ξ	$-$	0	$+$

Så 1:a olikheten gäller för $x < -2$ och $x > -1/2$.

<u>2:a olikheten</u>

$\frac{x-1}{x+2} < 1 \iff 0 < 1 - \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x+2}$.

Denna olikhet gäller om $x+2 > 0$, dvs om $-2 < x$

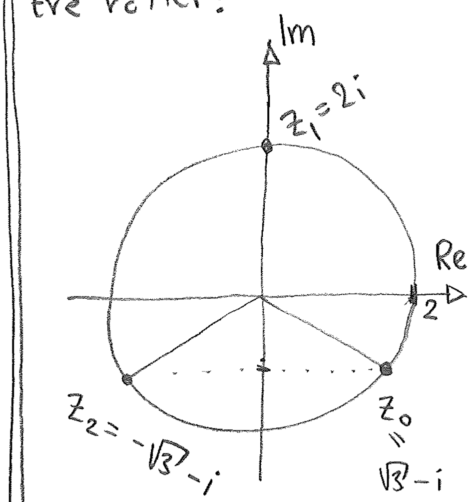
För att både 1:a och 2:a olikheten ska gälla måste

alltså $x > -1/2$.

<u>Svar</u>: $x > -1/2$.

16 Lös ekvationen $z^3 = -8i$

Svar: Evationens tre rötter:



Lösning: Skriv på polär form:

$$-8i = 8 \cdot \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right)$$

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z^3 = r^3 \cdot (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$ (enl. De Moivre)

Så z är rot om $\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vi får 3 rötter för $n = 0, 1, 2$.

$$z_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i.$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i.$$

17 Finn koefficienten till x^7 i utvecklingen av $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{20}$.

Lösn.

Enl. binomialsatsen har vi

$$\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (x^2)^{20-k} \cdot \left(\frac{-3}{x}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot (-1)^k \cdot 3^k \cdot x^{40-3k}.$$

Vi får x^7-term om $40 - 3k = 7 \iff k = 11$.

Svar:

Sökt koefficient är $-3^{11} \cdot \binom{20}{11}$.

1.8 Vi ska med induktion bevisa formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \quad (*)$$

för alla tal $n = 0, 1, 2, \dots$

(1) Basfall Tag $n=0$ i $(*)$. Vi får vänsterled = högerled = $2/3$, så $(*)$ gäller för $n=0$.

(2) Induktionssteg

Tag $m \in \mathbb{N}$ och antag $(*)$ sann för $n=m$, dvs antag att

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{m+1}}.$$

Detta är induktionsantagandet (IA). Vi ska m.h.a. IA visa att $(*)$ är sann för $n=m+1$. Vi har

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{m+2}} = \left\{\begin{matrix}\text{enligt} \\ \text{IA}\end{matrix}\right\} = 1 - \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+2}} =$$

$$= 1 - \frac{3}{3^{m+2}} + \frac{2}{3^{m+2}} = 1 - \frac{1}{3^{m+2}},$$

d.v.s. IA medför $(*)$ för $n=m+1$. Enligt induktionsprincipen är då $(*)$ sann för alla $n = 0, 1, 2, \dots$ Beviset klart.