UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody
018–471 32 81
073–990 96 58

Prov i matematik

Algebra I
2013–01–14

Skrivtid 5 timmar. Hjälpmedel: skrivdon. Provet består av 8 uppgifter, om vardera 5 poäng, totalt 40 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. ***Inga bonuspoäng räknas.*** *Skriv tydligt och* ***motivera väl.*** *Lycka till!*

1. (a) Visa, med sanningsvärdestabell, att $(p \wedge q) \to r$ är ekvivalent med $p \to (q \to r)$ för allmänna utsagor p, q och r.

(b) Formulera $(p \wedge q) \to r$ och $p \to (q \to r)$ i ord, i fall p är utsagan "jag är trött", q är utsagan "jag lägger mig" och r är utsagan "jag somnar".

(c) Formulera algebrans fundamentalsats, utan bevis.

(d) Polynomet $x^2 + 1$ saknar reella nollställen. Motsäger detta algebrans fundamentalsats? Varför/varför inte?

2. I basen m gäller att $(25)_m \cdot (34)_m = (795)_m$. Bestäm m, och uttryck $(795)_m$ i basen 10.

3. Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ges av $f(n) = n/(n+1)$.

(a) Visa att f är injektiv men inte surjektiv.

(b) Kan man ur detta direkt dra slutsatsen att $\mathbb{Q}$ är uppräknelig? Varför/varför inte?

4. Definiera talföljden (a_n) rekursivt, genom att sätta

$$a_0 = 1 \qquad \text{och} \qquad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{för } n \geq 1.$$

Visa med induktion att $a_n = 2^n$ för varje $n \geq 0$.

5. Definiera relationen R på mängden av alla nollskilda komplexa tal enligt $xRy \iff x/y \in \mathbb{R}$. Visa att R är en ekvivalensrelation, och bestäm två ekvivalensklasser.

6. Alice tänker på ett tvåsiffrigt negativt tal. Detta tal är kongruent med 5 (mod 18). Det är även kongruent med 9 (mod 22). Vilket tal tänker hon på?

7. Polynomen $f(x) = x^4 + 6x^3 - x^2 - 12x - 2$ och $g(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 2$ har ett gemensamt nollställe. Finn samtliga nollställen till båda polynomen.

8. Ekvationen $3x^4 + x^3 + 25x^2 + 8x = -8$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.