UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Andersson

Linjär algebra och geometri I
Tentamen, Lösningsförslag
2018–03–12

1. (Uppgiften behöver ej lösas för er som fick godkänt på duggan 2018-02-05) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} = a \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

Svar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (R2 \to R2 + R1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 & a-1 \end{array}\right) \qquad (R_2 \leftrightarrow R_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 & a-5 \end{array}\right) \qquad (R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} & \frac{5-a}{4} \end{array}\right) \qquad (R_3 \to -R_3/4)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} & \frac{5-a}{4} \end{array}\right) \qquad (R_1 \to R_1 + R_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3+a}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} & \frac{5-a}{4} \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} R_1 \to R_1 - 2R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{pmatrix}$$

De fria variablerna är x_4 och x_5. Vi ansätter $x_4 = s$ och $x_5 = 4t$ (att ansätta $x_5 = t$ fungerar också men på detta sätt slipper vi bråkräkning) och får parameterlösningen

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a+1}{2} - 2t \\ x_2 = \frac{3+a}{4} - t \\ x_3 = \frac{5-a}{4} + s - 3t \\ x_4 = s \\ x_5 = 4t \end{cases}$$

2. Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$B^2XA = A,$$

där

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -13 & -27 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: Både matriserna A och B är inverterbara då faktumet att matriserna är övertriangulära ger $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ och $\det(B) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$. Genom att multiplicera med A^{-1} från höger får vi att ekvationen $B^2XA = A$ ger $B^2X = I$ där I är identitetsmatrisen. Genom att därefter multiplicera ekvationen med B^{-1} från vänster två gånger får vi $X = (B^{-1})^2$. Jacobis metod ger

$$(B|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vi har att

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

och att

$$X = (B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Svar: Genom att först lägga till rad 2 till rad 1, sedan faktorisera ut $x + 1$ från rad 1, sedan subtrahera rad 1 från rad 2, rad 3 och rad 4 för att därefter utveckla efter rad 4 och slutligen använda att vi har determinanten av en övertriangulär matris får vi

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-1 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ x-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = -(x+1)(x-1)^3.$$

Determinantekvationen har lösningen $x = \pm 1$.

4. Punkterna $A : (-1, 1, 1)$, $B : (1, -1, -1)$ och $C : (0, 2, 3)$ utgör hörnen i en triangel. Bestäm

   (a) vektorerna $\overrightarrow{AB}$ samt $\overrightarrow{AC}$.

   Svar: Vi har att $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, -1) - (-1, 1, 1) = (2, -2, -2)$ och $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 3) - (-1, 1, 1) = (1, 1, 2)$

   (b) skalärprodukten $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   Svar: Vi har att $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2, -2, -2) \cdot (1, 1, 2) = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 2 - 2 - 4 = -4$.

   (c) kryssprodukten $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

   Svar: Vi har att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (2, -2, -2) \times (1, 1, 2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, -6, 4).\end{aligned}$$

   (d) normen $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

   Svar:

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|(-2, -6, 4)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 4^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

   (e) arean av triangeln.

   Svar: Arean av triangeln är halva arean av parallelltrapetsen som spänns upp av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Arean av parallelltrapetsen ges av normen av kryssprodukten av vektorerna. Vi får alltså att arean är

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

   areaenheter.

5. De tre punkterna $A : (1, 0, 1), B : (1, 1, 0)$ och $C : (0, 1, 2)$ ligger i ett plan π. Bestäm det minsta avståndet mellan punkten $(2, 3, 4)$ och planet π samt i vilken punkt i planet π som avståndet antags.

   Svar: Vi har vektorerna $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1)$ och $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 1)$. En normalvektor $\vec{n}$ till planet kan till exempel fås som kryssprodukten av två vektorer i planet så vi kan till exempel välja

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1) \times (-1, 1, 1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, 1).\end{aligned}$$

Låt $P = (2,3,4)$ och låt Q vara punkten i planet där det minsta avståndet antags. Vi får att $\overrightarrow{AP} = (2,3,4) - (1,0,1) = (1,3,3)$ och vi har att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \operatorname{Proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3}{2^2 + 1^2 + 1^2}(2,1,1) = \frac{8}{6}(2,1,1) = \frac{4}{3}(2,1,1).\end{aligned}$$

Vi har att avståndet mellan planet och punkten är $\|\overrightarrow{QP}\| = \frac{4}{3}\sqrt{2^2+1^2+1^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ samt att $Q = P - \overrightarrow{QP} = (2,3,4) - \frac{4}{3}(2,1,1) = \frac{1}{3}(-2,5,8)$.

6. Planen $\pi_1 : x-y+2z = 4$ och $\pi_2 : x+y+z = 2$ skär varandra i en linje l. Planet π_3 går genom punkten $(1,2,1)$ och är ortogonal mot vektorn $\vec{v} = (2,-1,1)$

   (a) Bestäm linjen l's ekvation på parameterform.

   Svar: För att få linjens ekvation så löser vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

   Vi radreducerar totalmatrisen till radkanonisk form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right),$$

   där vi först adderat första raden till rad 2, sedan delat rad 2 med 2 och slutligen adderat rad 2 till rad 1. Om vi ansätter $z = 2t$ så får vi parameterlösningen

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

   som är linjens ekvation på parameterform.

   (b) Bestäm planet π_3's ekvation på standardform (normalform).

   Svar: Planets ekvation fås genom $\vec{v} \cdot (x-1, y-2, z-1) = 0$, dvs $2(x-1) - (y-2) + (z-1) = 0$ som ger följande ekvation på standardform: $2x - y + z = 1$.

   (c) Bestäm eventuella skärningspunkter mellan planet π_3 och linjen l eller motivera varför de inte finns.

   Svar: Vi bestämmer eventuella skärningspunkter genom att sätta in linjens ekvation i planets ekvation. Vi får $2(3-3t) - (-1+t) + 2t = 1$ som ger $6 - 6t + 1 - t + 2t = 1$ och $5t = 6$ dvs $t = \frac{6}{5}$. Vi får skärningspunkten

$$(3-3t, -1+t, 2t) = \frac{1}{5}(-3, 1, 12).$$

7. Låt $\vec{v_1} = (1,1,1,0)$, $\vec{v_2} = (1,2,3,4)$, $\vec{v_3} = (-1,-1,1,1)$, $\vec{v_4} = (3,2,1,0)$ och $\vec{v_5} = (1,1,1,-1)$. Avgör om

   Svar: Vi påminner om att en uppsättning vektorer utgör en bas för ett rum om de är linjärt oberoende och spänner upp rummet.

   (a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.
   Svar: Eftersom vi har 3 vektorer i $\mathbb{R}^4$ och $3 < 4$ så spänner vektorerna inte upp rummet och vektorerna utgör därför ej en bas.

   (b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.
   Svar: Eftersom vi har 4 vektorer i $\mathbb{R}^4$ och $4 = 4$ så spänner vektorerna upp rummet om och endast om de är linjärt oberoende vilket de är om och endast om determinanten som har vektorerna som kolonnvektorer är nollskiljd. Vi beräknar determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

   I uträkningen av determinanten har vi vid första likhetstecknet subtraherat första raden från rad 2 och rad 3 samt vid andra likhetstecknet utvecklat vid kolonn 1, vid tredje likhetstecknet adderat kolonn 1 till kolonn 3 och vid fjärde likhetstecknet använt att vi har determinanten av en undertriangulär matris. Eftersom determinanten är nollskiljd så utgör vektorerna $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ en bas för $\mathbb{R}^4$.

   (c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$. Motivera noggrant.
   Svar: Eftersom vi har 5 vektorer i $\mathbb{R}^4$ och $5 > 4$ så är vektorerna linjärt beroende och utgör därför ej en bas.

8. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $-2x+y = 0$ och låt den linjära avbildningen $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ha standardmatrisen $[Y] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   Bestäm standardmatrisen för avbildningen T, samt standardmatrisen för den sammansatta avbildningen $Y \circ T$.

   Svar: Matrisen $[T]$ för avbildningen beräknas enligt

$$[T] = (T(\vec{e_1})|T(\vec{e_2})),$$

   där $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi har normalvektorn $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ till linjen och får att speglingen i linjen av en vektor $\vec{v}$ ges av

$$T(\vec{v}) = \vec{v} - 2\,\mathrm{Proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \vec{v} - 2\frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

   Vi får speciellt

$$T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{(-2)^2 + 1^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

samt

$$T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{(-2)^2 + 1^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det följer att

$$[T] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för den sammansatta avbildningen $[Y \circ T]$ blir

$$[Y \circ T] = [Y][T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -2 & 11 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}.$$