UPPSALA
UNIVERSITET

Försättsblad tentamen/ Examination cover

Teknisk- naturvetenskapliga fakulteten /
Faculty of Science and Technology

Kursnamn / Course name

Algebra I

Kurskod / Course code	Provkod / Test code
1MA004	1000

Tentamensdatum / Examination date	Anonymkod / Anonymous code
Y/Y/Y/Y - M/M - D/D: 2019-01-07	AH-0053-RTH

Försättsblad

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Skrivningsdatum
2019-01-07

Inlämningstid:
kl 12.30

Denna lapp **skall** följa med skrivningen! Skriv bara på ena sidan av bladet! Skriv kodnummer på varje inlämnat blad! Använd ej rödpenna i lösningarna! Häfta ihop samtliga blad!

Kursens namn: Algebra I

Kodnummer: AH-0053-RTH

- ☐ Kandidatprogram/ma
- ☐ Kandidatprogram/fy
- ☐ Kandidatprogram/ke
- ☐ Kandidatprogram/geo
- ☐ Kandidatprogram/data
- ☐ Masterprogram/ma
- ☐ Masterprogram/TBV
- ☐ Masterprogram/data
- ☐ Lärarprogrammet
- ☐ Fristående kurs
- ☐ Byggnadsingenjörsprogrammet
- ☐ Elektronikingenjörsprogrammet
- ☐ Maskiningenjörsprogrammet
- ☒ Informationsteknologiprogrammet
- ☐ Kemiteknikprogrammet
- ☐ Miljö- och vattenteknikprogrammet
- ☐ Energisystemprogrammet
- ☐ Teknisk fysik m materialvetenskapsprogrammet
- ☐ Teknisk fysikprogrammet
- ☐ Elektroteknikprogrammet
- ☐ Molekylär bioteknikprogrammet
- ☐ System i teknik och samhälle
- ☐ Annat program, nämligen ______

Sätt ett kryss för varje behandlat problem!

	↓	Poäng	Sign.	Anm.
1	X	5+	JA	
2	X	4	JL	
3	X	4	my	
4	X	5	JA	
5	X	5	AS	
6	X	5	AS	
7	X	5−	JL	
8	X	5	EOW	
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Σ		38		

För institutionens anteckningar:

AH-0053-RTH

1 a) Vi undersöker sanningsvärdet med hjälp av en värdestabell:

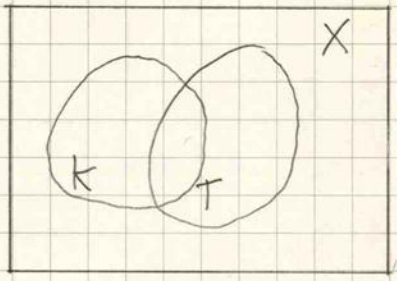
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\boxed{(A \wedge \neg B) \Rightarrow B}$
S	S	F	F	F	S
S	F	F	S	S	F
F	S	S	F	F	S
F	F	S	S	F	S

S = sann

F = falsk

1

b) Vi beräknar detta med ett venndiagram:



$X = 40$ $\quad K \cup T = 37$

$K \cap T = 17$ $\quad (K \cup T)^* = 3$

$K \setminus T = 16$

$T \setminus K = 4$

Vi får av uppgiften att det totalt arbetar 40 personer på MI, $X = 40$. Av dessa är det 17 st som både dricker te och kaffe, det är snittet mellan mängden K (kaffedrickare) och T (tedrickare), dvs $K \cap T = 17$. Vi vet sedan att det totalt finns 33 kaffedrickare, alltså är $K \setminus T = 33 - 17 = 16$. Vi vet även att det finns totalt 21 tedrickare, alltså är $T \setminus K = 21 - 17 = 4$. Det ger oss att unionen mellan K och T är summan av dessa mängder, dvs $K \cup T = 17 + 16 + 4 = 37$. Då vi vet att det totalt jobbar 40 personer på MI ser vi att det är 3 kvar som varken dricker kaffe eller te.

Svar: 3 personer dricker varken te eller kaffe. 1

1 c) $a = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^{11}$

$b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^7$

Vi ser att både a och b är primtalsfaktoriserade, det betyder att de ej går att faktorisera mer. SGD består utav de gemensama faktorerna som a och b har, dvs:

$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

Svar: $SGD(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^{11}, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^7) = 72$ 1

d) Ett exempel skulle kunna vara $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, detta eftersom det finns en surjektion $f: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \tan x$, vilket medför att $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är överräknelig. bra!

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är även en äkta delmängd av $\mathbb{R}$. 1^+

e) Om ekvationen har några heltalslösningar måste dessa vara någon av ± 1. Detta eftersom polynomet har heltalskoefficienter och därmed måste de rationella rötterna (om det finns några), $\frac{p}{q}$, uppfylla att $q \mid 1$ och $p \mid 1$. De enda $\frac{p}{q}$ som uppfyller detta är $\frac{p}{q} = \pm 1$ och varken 1 eller -1 löser ekvationen.

Svar: Nej, Ekvationen har inga heltalslösningar. 1

2. Vi beräknar först SGD(24,15) med euklides algoritm.

$24 = 1 \cdot 15 + 9$
$15 = 1 \cdot 9 + 6$
$9 = 1 \cdot 6 + 3$
$6 = 2 \cdot 3$

$SGD(24,15) = 3$

Eftersom $3 \mid 45$ vet vi att ekvationen har heltalslösningar. R

Vi använder nu Euklides algoritm baklänges för att beräkna hjälpekvationen $H: 15x_0 + 24y_0 = 3$

$$3 = 9 - 6 = (24-15) - (15-9) = 24 - 2 \cdot 15 + 9 = 24 - 2 \cdot 15 + (24-15) =$$
$$= 24 \cdot 2 + 15 \cdot (-3)$$

Alltså är lösningen till hjälpekvationen $x_0 = (-3)$ $y_0 = 2$. R

Vi multiplicerar sedan H med 15 och får:

$$15 \cdot (-3) \cdot 15 + 24 \cdot 2 \cdot 15 = 45 \iff 15 \cdot (-45) + 24 \cdot 30 = 45$$

Nu kan vi se att $x = (-45)$ och $y = 30$ löser vår ekvation, vilket betyder att samtliga lösningar fås av:

Svar: $x = -45 - \frac{24}{3}n$

$y = 30 + \frac{15}{3}n$, $n \in \mathbb{Z}$

4p

UU 2018

3 a) Vi börjar med att skriva om $(1011101)_2$ till bas 10:

$$(1011101)_2 = 1\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1\cdot 8 + 1\cdot 16 + 1\cdot 64 = (93)_{10}$$

Vi använder nu divisions algoritmen för att skriva om $(93)_{10}$ till bas 8.

$$93 = 11\cdot 8 + 5$$
$$11 = 1\cdot 8 + 3$$
$$1 = 0\cdot 8 + 1$$

Resterna som blir kvar ger oss vad $(93)_{10}$ blir i bas 8, dvs $(93)_{10} = (135)_8$

Svar: $(1011101)_2 = (135)_8$

R

b) För att beräkna detta använder vi kongurensräkning:

$$2^{1345} = (2^6)^{224}\cdot 2 = (64)^{224}\cdot 2 \equiv 1^{224}\cdot 2 \pmod 7 = 2$$

Svar: Resten blir 2.

R

c)

Vi skaper en tabell för att undersöka villa ental $3x^2+2$ och y^2 kan sluta på.

VL:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$3x^2+2$	5	4	9	0	7	0	9	4	5

Vi ser att 2, 3, 5, 7, 8 är möjliga.

HL:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1

4

?

AH-0053-RTH

4 $P_{n+1}: \underbrace{a_{n+1} = \frac{7a_n}{7-a_n}}_{VL_{n+1}} = \underbrace{\frac{14}{7-2n}}_{HL_{n+1}}$, $a_1 = 2$ $n = 1,2,3\ldots$

Basfall: $n=1$ $VL_{1+1} = VL_2 = \frac{7\cdot 2}{7-2} = \frac{14}{5}$, $HL_{1+1} = HL_2 = \frac{14}{7-2\cdot 1} = \frac{14}{5}$ } $VL_{1+1} = HL_{1+1}$, Basfall OK! Ok

I.A: Vi antar att P_{n+1} är sant för ett visst heltal $n \geq 1$. Ok

Ind.steg: Vi vill nu visa att $P_{n+1+1}: \underbrace{\frac{7a_{n+1}}{7-a_{n+1}}}_{VL_{n+1+1}} = \frac{14}{7-2(n+1)} = \underbrace{\frac{14}{5-2n}}_{HL_{n+1+1}}$

$$VL_{n+1+1} = \frac{7a_{n+1}}{7-a_{n+1}} \overset{\boxed{I.A}}{=} \frac{7\cdot\frac{14}{7-2n}}{7-\frac{14}{7-2n}} = \frac{\left(\frac{7\cdot 14}{7-2n}\right)}{\left(\frac{7(7-2n)-14}{7-2n}\right)} = \frac{7\cdot 14}{7-2n}\cdot\frac{7-2n}{7\cdot 7-7\cdot 2n-2\cdot 7} =$$

$$= \frac{7\cdot 14}{7(7-2n-2)} = \frac{14}{5-2n} = HL_{n+1+1}$$

Ok

Slutsats: Enligt induktionsaxiomet flöljer det att P_{n+1} är sant för alla godtyckliga heltal $n \geq 1$.

5

AH-0053-RTH

.5 a) Vi kontrollerar att relationen är:

Reflexiv: $zRz \Leftrightarrow z-z=0$, $0 \in \mathbb{R}$ R

Relationen är reflexiv!

Symetrisk: $zRw \Leftrightarrow z-w=a, a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(z-w)=-a \Leftrightarrow w-z=-a \Leftrightarrow wRz$ R

Relationen är symetrisk!

Transitiv: $zRw \wedge wRx \Leftrightarrow z-w=a \wedge w-x=b$, $a\,b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-a)-x=b \Leftrightarrow z-x=a+b$, $(a+b)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow zRx$ R

Relationen är transitiv!

Därmed är relationen en ekvivalensrelation

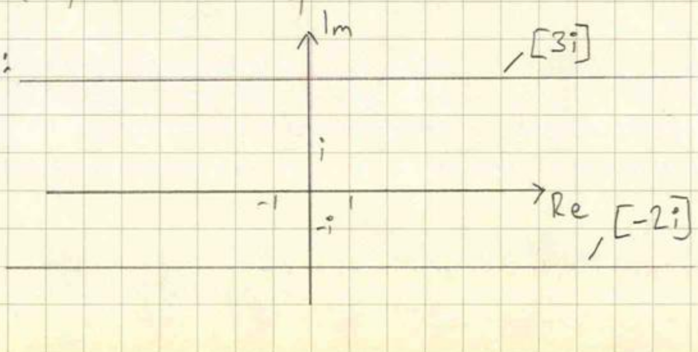
b) De tal som ingår i ekvivalensklassen är de tal med imaginär del $5i$.

Vi säger att $z=-1+5i$. För att ett tal $w=a_1+b_1 i$ ska stå i relation till z måste $z-w=a$ gälla $a_1, b_1, a \in \mathbb{R}$, alltså måste $b_1=5i$.

Alltså är alla tal i ekvivalensklassen:

$[-1+5i] = \{a_1+5i \, ; \, a_1 \in \mathbb{R}\}$ R

c) Ekvivalensklasserna består alltså av de tal som har lika imaginär del. Om dessa ritas ut i det komplexa talplanet representeras de av lodräta streck:



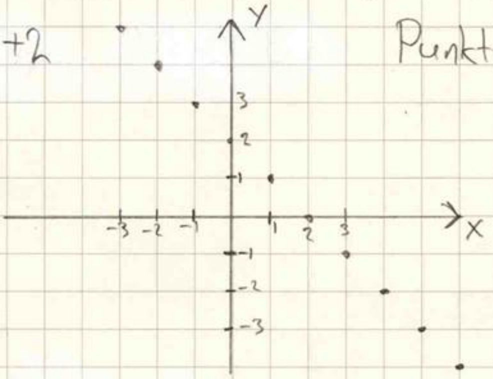
R

5

AH-0053-RTH

6 a) Mängden A kan ritas ut som en linje av punkter där $x+y=2$, linjen är alltså grafen $y=-x+2$

Punkterna = talpar i mängden A.



R

b) Ett exempel på en bijektion skulle kunna vara $f:\mathbb{Z}\Rightarrow A$, $f(x)=(x,2-x)$

R

Funktionen är injektiv eftersom $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ och surjektiv då den uppfyller $\forall y\in A\ \exists x\in\mathbb{Z},\ f(x)=y$.

c) Eftersom det finns en bijektion mellan $\mathbb{Z}$ och A medför det att både att kardinaliteten är densamma, dvs $\mathbb{Z}\sim A$, och att A är uppräknelig.

R

5

UU 2018

7 Om vi ska kunna förkorta bråket betyder det att polynomen delar faktorer. Delar de faktorer delar de även nollställen. Vi börjar därför med att hitta nollställen till täljaren. Vi döper denna till $f(x)$.

$f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$.

Vi kan snabbt se att $f(-2)=0$, vilket betyder att $(x+2)$ är en faktor i $f(x)$. Vi utför division med liggande stolen och får att:

$f(x) = (x+2)(x^3 - x^2 + 2x - 2)$

Vi kan sedan enkelt se att $x=1$ är en lösning till ekvationen $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$, alltså är $(x-1)$ en faktor. Vi använder liggande stolen igen och får

$f(x) = (x+2)(x-1)(x^2+2)$.

Vi tittar nu på nämnaren, vi kallar den $g(x)$.

$g(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$.

Insättning ger att $g(-2) = 16 + 8 + 4 - 4 = 24$ och $g(1) = 1 - 1 - 2 - 4 = -6$.

Om bråket ska gå att förkorta måste alltså (x^2+2) vara en faktor. Vi använder liggande stolen igen:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 - x - 2 \\
\hline
x^4 - x^3 - 2x - 4 \;\big|\; x^2 + 2 \\
-(x^4 + 2x^2) \\
\hline
-x^3 - 2x^2 - 2x - 4 \\
-(-x^3 - 2x) \\
\hline
0 - 2x^2 - 4 \\
-(-2x^2 - 4) \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

Alltså är $g(x) = (x^2+2)(x^2-x-2)$

Forts. nästa blad.

AH -0053- RTH

7

Vi ser nu att varken $(x-1)$ eller $(x+2)$ är en faktor i x^2-x-2 vilket gör att vi kan skriva bråket som:

Svar: $\frac{x^4+x^3+2x-4}{x^4-x^3-2x-4} = \frac{(x+2)(x-1)(x^2+2)}{(x^2-x-2)(x^2+2)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2-x-2} = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

5p

$f(x)=z^4+4z^3+8z^2+12z+15$ AH-0053-RTH

8 Att ekvationen har en rent imaginär rot betyder att $z=bi$ är en lösning till ekvationen.

Det betyder att

$$(bi)^4+4(bi)^3+8(bi)^2+12(bi)+15=0 \iff$$

$$\iff b^4-4b^3i-8b^2+12bi+15=0$$

Eftersom vi vet att både den reella delen och imaginära delen ska bli 0 får vi två ekvationer:

$b^4-8b^2+15=0$ och $12b-4b^3=0$

Vi löser den sista, eftersom $b\neq 0$ kan vi bortse från den lösningen

$$12b-4b^3=0 \iff b(12-4b^2)=0 \iff 12-4b^2=0 \iff 3=b^2 \iff b=\pm\sqrt{3}.$$

Vi vet nu att $z=\pm\sqrt{3}i$ löser ekvationen, och därmed är $(z+\sqrt{3}i)(z-\sqrt{3}i)=(z^2+3)$ en faktor i polynomet.

Vi använder liggande stolen och får:

$$\begin{array}{l|l}
\quad z^2+4z+5 & \\
\hline
z^4+4z^3+8z^2+12z+15 & z^2+3 \\
-(z^4+3z^2) & \\
\hline
0+4z^3+5z^2+12z+15 & \\
-(4z^3+12z) & \\
\hline
0+5z^2+15 & \\
-(5z^2+15) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$f(x)=(z^2+3)(z^2+4z+5)$

För att $f(x)=0$ måste antingen $(z^2+3)=0$ eller $(z^2+4z+5)=0$.

Vi beräknar de värden på z som uppfyller $z^2+4z+5=0$ med PQ-formeln.

$$z=-2\pm\sqrt{2^2-5}$$
$$=-2\pm\sqrt{4-5}$$
$$=-2\pm i$$

Vi vet då att samtliga lösningar till ekvationen är:

Svar: $z_1=-\sqrt{3}i$ $z_2=\sqrt{3}i$ $z_3=-2+i$ $z_4=-2-i$

Bra! 5