Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

IT, STS, W
MaKand
Lärare

**Prov i matematik**
**Linjär algebra II, 5hp**
**2016–03–14**

*Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan 2016-02-12 får hoppa över den första uppgiften.*

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Finn en bas i kolonnrummet $K(A)$.

(b) Finn en bas i nollrummet $N(A)$.

(c) Bestäm dimensionerna av $K(A)$ och av $N(A)$.

2. Den linjära operatorn $f$ på $\mathbb{E}^3$ ges geometriskt som speglingen i planet $P : x + y + 2z = 0$.

(a) Finn en on-bas $(b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{E}^3$ som består av idel egenvektorer till $f$:s matris $A$.

(b) Bestäm $f$:s matris $A$.

3. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Speciellt är polynomen $p(x) = x$, $q(x) = 1 - 3x^2$ och $w(x) = 1 + x$ vektorer i $\mathcal{P}$, och $U = \operatorname{span}(p, q)$ är ett delrum i $\mathcal{P}$. Beräkna det minsta avståndet $d(w, U)$ mellan $w$ och $U$.

4. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Polynomföljden $q_1, q_2, q_3$, given genom

$$q_1(x) = 1,\ q_2(x) = \sqrt{3}(2x - 1),\ q_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

är ortonormal. Beräkna vinkeln $\alpha$ mellan polynomen $v$ och $w$, givna genom

$$v(x) = (1 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3}x, \quad w(x) = (-\sqrt{3} + \sqrt{5}) + (2\sqrt{3} - 6\sqrt{5})x + 6\sqrt{5}x^2.$$

5. Vektorrummet $\mathcal{P}_2$ består av alla polynom av grad högst 2. Avgör om den linjära avbildningen $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p(1), p(2))$ är inverterbar. Om så är fallet, finn $f^{-1}(3, 1, 9)$.

Var god vänd!

6. (a) För vilka värden på konstanterna $a$ och $b$ är

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + ax_1y_2 + bx_2y_1$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$?

(b) Är det sant att olikheten

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \;\leq\; \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)(y_1^2 + y_2^2 + y_1y_2)}$$

gäller för alla reella tal $x_1, x_2, y_1, y_2$? (Svaret på (b) ska motiveras på grundval av (a).)

7. Ytan $Y$ består av alla punkter $(x, y, z)$ i $\mathbb{E}^3$ som uppfyller

$$3x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 8yz = 1.$$

Bestäm ytans typ, ytans kortaste avstånd till origo, och de punkter på ytan där det kortaste avståndet antas. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = -y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

*Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.*

8'. Finn en $3 \times 3$-matris $X$ så att $X^7 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Lycka till!

# Lösningar 2016-03-14

1. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & & \end{pmatrix} = T.$

(a) Då $T_{\bullet 1}, T_{\bullet 2}$ är $T$:s pivotkolonner, är $(A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ en bas i $K(A)$, exempelvis.

(b) $\begin{cases} x_1 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases}$. Genom att sätta $(x_3, x_4) = (1,0)$ respektive $(0,1)$ fås basen

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ i $N(A)$.

(c) $\dim K(A) = 2 = \dim N(A)$.

2. (a) $(a_1, a_2) = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ är en bas i $P$, och $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot $P$.

Alltså är $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egenbas till $A$ i $E^3$, med $Aa_1 = a_1$, $Aa_2 = a_2$, $Aa_3 = -a_3$.

Vidare blir $\underline{b} = GS(\underline{a})$ en on-egenbas till $A$ i $E^3$, där

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Med $S = \left( b_1 \,\middle|\, b_2 \,\middle|\, b_3 \right)$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ gäller $S^T A S = D$, alltså

$$A = SDS^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Om $u = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(w)$, då är $d = d(w, \mathcal{U}) = \| w - u \|$. För att beräkna $u$ behövs en on-bas i $\mathcal{U}$. Denna fås som $(u_1, u_2) = GS(p, q)$.

$$u_1 = \frac{p}{\|p\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, p$$

$$u_2 = \frac{q - \langle q, u_1 \rangle u_1}{\| \quad \text{dito} \quad \|} = \frac{q}{\|q\|} = \sqrt{\frac{5}{8}}\, q$$

Därmed blir $u = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \langle w, u_2 \rangle u_2 = \frac{3}{2} \langle w, p \rangle p + \frac{5}{8} \langle w, q \rangle q$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot p + \frac{5}{8} \cdot 0 \cdot q = p$$

$$\Rightarrow \quad w - u = w - p = 1 + X - X = 1$$

$$\Rightarrow \quad d = \| 1 \| = \sqrt{2}.$$

Svar. $d(w, \mathcal{U}) = \sqrt{2}$.

4. $v = q_1 + q_2$ och $w = q_2 + q_3$ innebär att $x = [v]_{\underline{q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $y = [w]_{\underline{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Därmed är

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{x \bullet y}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Svar. $\alpha = 60^\circ$.

5. $f$ är inverterbar omm $A = [f]_{\underline{e}\underline{X}}$ är inverterbar.

$$A = \left( [f(1)]_{\underline{e}} \,\middle|\, [f(X)]_{\underline{e}} \,\middle|\, [f(X^2)]_{\underline{e}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{har } \det(A) = 2.$$

Alltså är $A$ inverterbar, och därmed är även $f$ inverterbar.

Det sökta polynomet $q = f^{-1}(3,1,9)$ uppfyller $f(q) = (3,1,9)$, alltså

$$A[q]_{\underline{X}} = [f]_{\underline{e}\underline{X}}[q]_{\underline{X}} = [f(q)]_{\underline{e}} = [(3,1,9)]_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2}\cdot \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

visar att $[q]_{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, varav $q = 3\cdot 1 - 7X + 5X^2$.

Svar. $f^{-1}(3,1,9) = 3\cdot 1 - 7X + 5X^2$.

6. (a) $\langle x,y\rangle = x^T A y$ för $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ är en inre produkt på $\mathbb{R}^2$ omm

$a = b$ och $2 > 0$ och $4 - a^2 > 0$.

Svar (a). $a = b$ och $-2 < a < 2$.

(b) $a = b = 1$ ger $x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) = \frac{1}{2}\langle x,y\rangle \underset{CS}{\leq} \frac{1}{2}\|x\|\|y\| =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} = \frac{1}{2}\sqrt{2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2}\sqrt{2y_1^2+2y_2^2+2y_1y_2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)},$$

där CS gäller på grund av (a).

Svar (b). Ja.

7. $Y: \; x^T A x = 1$ för $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6 \\ -1 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda^2+2\lambda-6) \quad \text{löses av } \lambda_1 = 6,\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{7}-1.$$

Om $b_1, b_2, b_3$ är normerade basvektorer i $E(\lambda_1), E(\lambda_2), E(\lambda_3)$, då gäller för alla $x = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 \in E^3$ att $x^TAx = 6y_1^2 + (\sqrt{7}-1)y_2^2 - (\sqrt{7}+1)y_3^2 = 1$.
Därmed är

$$x \in Y \iff 6y_1^2 + (\sqrt{7}-1)y_2^2 = 1 + (\sqrt{7}+1)y_3^2$$

$$\iff \frac{y_1^2}{\frac{1}{6}} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{\sqrt{7}-1}} = 1 + (\sqrt{7}+1)y_3^2$$

Härav ser vi att $Y$ är en enmantlad hyperboloid, vars kortaste avstånd till origo $d(Y,O)=\frac{1}{\sqrt{6}}$ antas i punkterna

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}b_1=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \text{då}$$

$$E(6)=N(6I-A)=\text{span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ har normerad basvektor } b_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$6I-A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-1&5&-4\\-2&-4&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \cdot\frac{-1}{2}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-5&4\\1&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&-5&4\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}\\ \frac{-1}{7}\\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-7&7\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\&1&-1\\&&\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

8. $y'=Ay$ för $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\ y'=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&2&0\\0&-1&3\end{pmatrix}.$

Ekvationen $T^{-1}AT=D$ löses av $T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$, exempelvis.

Med substitutionen $y=Tz$ och $y'=Tz'$ gäller $y'=Ay$ omm $z'=Dz$, vars allmänna lösning är

$$\begin{cases}z_1=c_1e^{2x}\\z_2=c_2e^{3x}\\z_3=c_3e^{4x}\end{cases},\quad(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3.$$

Alltså har $y'=Ay$ den allmänna lösningen

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1+z_2+z_3\\z_1\\z_1+z_2\end{pmatrix}.$$

Svar.
$$\begin{cases}y_1=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+c_3e^{4x}\\y_2=c_1e^{2x}\\y_3=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}\end{cases},\quad \text{där } (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3.$$

8! Med $A, T, D$ som i lösningen till uppgift 8 gäller $T^{-1}AT = D$, medan en lösning $X$ till ekvationen $X^7 = A$ sökes. Med $(\alpha, \beta, \gamma) = (\sqrt[7]{2}, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{4})$ gäller att

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{löser} \quad Y^7 = \begin{pmatrix} \alpha^7 & & \\ & \beta^7 & \\ & & \gamma^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Detta medför att

$$A = TDT^{-1} = TY^7T^{-1} = (TYT^{-1})^7.$$

Alltså duger

$$X = TYT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha-\beta & \beta-\gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

<u>Svar.</u> $$X = \begin{pmatrix} \sqrt[7]{4} & \sqrt[7]{2}-\sqrt[7]{3} & \sqrt[7]{3}-\sqrt[7]{4} \\ 0 & \sqrt[7]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[7]{2}-\sqrt[7]{3} & \sqrt[7]{3} \end{pmatrix}.$$