Uppsala universitet — Diverse program
Matematiska institutionen
Gunnar Berg, Ernst Dieterich, Martin Herschend

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2014–08–23

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta en bas i kolonnrummet $K(A)$.

(b) Hitta en bas i nollrummet $N(A)$.

(c) Ange dimensionen av $K(A)$ och dimensionen av $N(A)$.

2. Låt $v_1 = (0, 1, -2)$, $v_2 = (1, 0, 3)$, $v_3 = (1, 1, 2)$ och $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som uppfyller

$$f(v_1) = v_1 + v_3, \quad f(v_2) = -2v_3, \quad f(v_3) = v_1 - v_2.$$

(a) Visa att $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) Hitta f:s matris i basen $\underline{v}$.

(c) Hitta f:s matris i standardbasen.

3. Vektorrummet $\mathcal{P}$ består av alla polynom i en variabel, och utrustas med den inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Speciellt är polynomen $p(x) = x$ och $q(x) = 3x^2 - 1$ vektorer i $\mathcal{P}$.

(a) Beräkna längderna $\|p\|$ och $\|q\|$.

(b) Visa att p och q är ortogonala.

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $f(x) = x + 1$ på delrummet av $\mathcal{P}$ som spänns upp av p och q.

4. Vektorerna $(1, -1, -1, 1)$ och $(-1, 3, 2, -2)$ spänner upp ett delrum U i $\mathbb{E}^4$. Finn det kortaste avståndet från vektorn $w = (4, -2, -1, 1)$ till U, samt den vektor u i U som ligger närmast w.

Var god vänd!

5. (a) För vilka värden på konstanterna a och b är

$$\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + ax_1y_2 + bx_2y_1$$

en inre produkt på $\mathbb{R}^2$?

(b) Är det sant att olikheten

$$(3x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1)^2 \leq (3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2)(3y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_1y_2)$$

gäller för alla reella tal x_1, x_2, y_1, y_2? Motivera ditt svar!

6. Vektorrummet $\mathcal{P}_2$ består av alla polynom av grad högst 2. Avgör om den linjära operatorn $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2,\ f(p) = p + 2p' + 3p''$ är inverterbar. Om så är fallet, finn $f^{-1}(q)$ för polynomet $q(x) = 1 + x + x^2$.

7. Ytan Y består av alla punkter (x, y, z) i $\mathbb{E}^3$ som uppfyller

$$11x^2 + 11y^2 + 8z^2 + 2xy + 8xz + 8yz = 4.$$

Bestäm ytans typ, ytans kortaste avstånd till origo, och de punkter på ytan där det kortaste avståndet antas. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen.)

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = 3y_3 \end{cases}$$

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Finn en 3×3-matris X så att $X^5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Lycka till!

Lösningar 2014 - 08 - 23

1. $$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{matrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är en bas i $K(A)$, exempelvis.

(b) $$N(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \underset{x_3 = t}{=} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$ har basen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, exempelvis.

(c) $\dim K(A) = 3$, $\dim N(A) = 1$.

2. (a) $T_{\underline{e}\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ har $\det\left(T_{\underline{e}\underline{v}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

Alltså är $T_{\underline{e}\underline{v}}$ inverterbar, och därmed är $\underline{v}$ en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) $$[f]_{\underline{v}} = \left([f(v_1)]_{\underline{v}} \;\middle|\; [f(v_2)]_{\underline{v}} \;\middle|\; [f(v_3)]_{\underline{v}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $$[f] = T_{\underline{e}\underline{v}} [f]_{\underline{v}} T_{\underline{v}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{v}} [f]_{\underline{v}} T_{\underline{e}\underline{v}}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3\. (a) $\|p\|^2 = \langle p,p\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \|p\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\|q\|^2 = \langle q,q\rangle = \int_{-1}^{1}(3x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)\,dx = \frac{9}{5}x^5-2x^3+x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{9}{5}-2+1\right) = \frac{8}{5} \Rightarrow \|q\| = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

(b) $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} x(3x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(3x^3-x)\,dx = \frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$

(c) Då p och q är ortogonala och nollskilda, är (p,q) en ortogonal bas i $U = \text{span}\{p,q\}$, och $\left(\frac{p}{\|p\|}, \frac{q}{\|q\|}\right)$ är en on-bas i U. Därmed blir

$$\text{proj}_U(f) = \left\langle f,\frac{p}{\|p\|}\right\rangle\frac{p}{\|p\|} + \left\langle f,\frac{q}{\|q\|}\right\rangle\frac{q}{\|q\|} = \frac{1}{\|p\|^2}\langle f,p\rangle p + \frac{1}{\|q\|^2}\langle f,q\rangle q$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}X + \frac{5}{8}\cdot 0\cdot(3X^2-1) = X$$

Vi använde att

$$\langle f,p\rangle = \int_{-1}^{1}(x+1)x\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2+x)\,dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

och

$$\langle f,q\rangle = \int_{-1}^{1}(x+1)(3x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(3x^3+3x^2-x-1)\,dx = \frac{3}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-x\Big|_{-1}^{1} = 0$$

4. $(a_1, a_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ är en bas i $\mathcal{U}$. Alltså är $(b_1, b_2) = GS(a_1, a_2)$ en on-bas i $\mathcal{U}$.

Härvid är $b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och $b_2 = \dfrac{a_2 - (a_2 \cdot b_1) b_1}{\| \text{dito} \|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot(-8)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \text{dito} \|} =$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \text{dito} \|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}.$$

Nu är $u = \text{proj}_{\mathcal{U}}(w) = (w \cdot b_1) b_1 + (w \cdot b_2) b_2 = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ och}$$

$$d(w, \mathcal{U}) = d(w, u) = \|w - u\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 2.$$

<u>Svar.</u> $d(w, \mathcal{U}) = 2$, $u = (3, -1, -2, 2)$.

5. (a) $\langle x, y \rangle = x^T A y$ för $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$; $\langle x, y \rangle$ är additiv och homogen;

$\langle x, y \rangle$ är symmetrisk $\Leftrightarrow$ A är symmetrisk $\Leftrightarrow$ $a = b$;

$\langle x, y \rangle$ är positivt definit $\Leftrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ är positivt definit

$$\Leftrightarrow \; 3 > 0 \;\wedge\; 9 - a^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; |a| < 3.$$

<u>Svar</u> (a). $a = b$ <u>och</u> $|a| < 3$.

(b) Med $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ är $\langle x,y \rangle = x^T A y = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ en inre produkt på $\mathbb{R}^2$, enligt (a). Alltså gäller CS-olikheten

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \iff \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle ,$$

vilken just är uppgiftens olikhet, för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$.

6. f:s matris i standardbasen $(1, X, X^2)$ är $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, då

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(X) = X + 2\cdot 1 \\ f(X^2) = X^2 + 2\cdot 2X + 3\cdot 2\cdot 1 \end{cases}$$

$\det[f] = 1 \Rightarrow [f]$ är inverterbar $\Rightarrow f$ är inverterbar.

$f^{-1}(q)$:s koordinatkolonn i standardbasen $(1, X, X^2)$ är

$$[f^{-1}(q)] = [f^{-1}][q] = [f]^{-1}[q] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & 1 & -4 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket innebär att $f^{-1}(q) = 1 - 3X + X^2$.

7. Vi betecknar punkterna i $\mathbb{E}^3$ med $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för (x,y,z). Y:s ekvation kan då skrivas som matrisekvation

$$x^T A x = 4 , \quad \text{för } A = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 4 \\ 1 & 11 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-11 & -1 & -4 \\ -1 & \lambda-11 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda-8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda-16 & \lambda-16 & \lambda-16 \\ -1 & \lambda-11 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-16) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-11 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda-8 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-16) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-10 & -3 \\ -4 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-16)(\lambda-10)(\lambda-4)$$

löses av $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 16$. Alltså finns det en on-egenbas (b_1, b_2, b_3) i $\mathbb{E}^3$ så att för alla $x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3$ i $\mathbb{E}^3$ gäller

$$\begin{aligned} x \in Y &\iff x^T A x = 4 \\ &\iff 4y_1^2 + 10y_2^2 + 16y_3^2 = 4 \\ &\iff \frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{\frac{2}{5}} + \frac{y_3^2}{\frac{1}{4}} = 1 . \end{aligned}$$

Härav framgår att Y <u>är en ellipsoid</u> med radierna $1, \sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{2}$. Y:s <u>kortaste avstånd till origo är</u> $\frac{1}{2}$. <u>Den antas i punkterna</u>

$$\pm \frac{1}{2} b_3 = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

<u>Uträkning.</u> b_3 är normerad basvektor i $E(\lambda_3) = E(16) = N(16I - A)$.

$$16I - A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

visar att $E(\lambda_3) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, och att $b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ duger.

8. Systemet kan skrivas som matrisekvation $y' = Ay$, med $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Standard-diagonaliseringsmetoden visar att

$$S^{-1}AS = D \quad \text{gäller för } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

Systemet $z' = Dz$ löses av $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{x} \\ z_2 = c_2 e^{2x} \\ z_3 = c_3 e^{3x} \end{cases}$. Alltså löses $y' = Ay$ av $y = Sz$, dvs

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 + z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> $\begin{cases} y_1 = c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \\ y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \\ y_3 = c_3 e^{3x} \end{cases}$, <u>där</u> $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

8'. Med A, S, D som i uppgift 8 söker vi en lösning X till matrisekvationen

$$X^5 = A = SDS^{-1}.$$

Med $Y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt[5]{2} & \\ & & \sqrt[5]{3} \end{pmatrix}$ gäller $Y^5 = D$, alltså $A = SY^5S^{-1} = (SYS^{-1})^5$.

<u>Därmed duger</u>

$$X = SYS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha+\beta \\ -1+\alpha & 1 & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ \underline{där} } \alpha = \sqrt[5]{2},\ \beta = \sqrt[5]{3}.$$