UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Andre Laestadius, Gunnar Berg

Prov 2
ENVARIABELANALYS
2015-03-20

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Det maximala poängantalet för varje uppgift är 5 poäng. För godkänd deltentamen krävs minst 18 poäng, inklusive bonuspoäng från redovisningsuppgifterna. LÖSNINGARNA SKALL VARA VÄLSKRIVNA OCH INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Beräkna följande integraler

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\,dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{x+2}{x+1}\,dx.$$

2. Bestäm, för $x > 0$, den lösning till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x}\,y(x) = \frac{1}{x}$$

som uppfyller $y(1) = 1$.

3. (a) Avgör om följande serie är konvergent eller ej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

(b) Beräkna (de generaliserade) summorna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \text{och} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

4. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 2 + 2x - 2x^2.$$

(b) Låt $y(x)$ vara den lösning till differentialekvationen i (a) som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = k$. Bestäm k så att $\lim_{x\to\infty}(y(x) - x^2) = 0$.

Var god vänd!

6. (a) Visa att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ är konvergent.

   (b) Avgör om $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ är konvergent eller divergent.

7. Ett radioaktivt ämne sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot mängden av ämnet vid en viss tidpunkt. Antag att det finns A_0 av ämnet vid tiden $t = 0$. Låt $A(t)$ beteckna mängden av ämnet vid tiden t och ställ upp en differentialekvation som beskriver $A(t)$. Låt $t_{1/2}$ uppfylla $A(t_{1/2}) = A_0/2$. Bestäm $t_{1/2}$ uttryckt i proportionalitetskonstanten. (Tiden $t_{1/2}$ kallas för ämnets halveringstid.)

8. Låt
$$I(a) = \int_0^\pi \left(\sin^2(x) - a\right)^2 \,dx.$$
Visa att
$$\frac{d}{da} I(a) = 0 \quad \text{för } a = \frac{1}{2}.$$

LYCKA TILL!!

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$