$\boxed{2015-10-19}$

(1) a) Ett exempel är $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

b) Exempelvis

$f(x) = |x|$

c) Exemplet i a) duger här också.

(2) a)

$$\frac{\sin x + xe^x + 2x}{e^{2x}} = \frac{xe^x\left(\frac{\sin x}{xe^x} + 1 + \frac{2}{e^x}\right)}{e^{2x}} =$$

$$= \overset{\to 0}{\frac{x}{e^x}}\left(\overset{\to 0}{\frac{\sin x}{xe^x}} + 1 + \overset{\to 0}{\frac{2}{e^x}}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \boxed{0}$$

b)

$$\frac{\arctan x - x}{\sin x - x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + x^5 H_1(x)\right) - x}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 H_2(x)\right) - x} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3} + x^5 H_1(x)}{-\frac{x^3}{3!} + x^5 H_2(x)} = \frac{-x^3\left(\frac{1}{3} - x^2 H_1(x)\right)}{-x^3\left(\frac{1}{6} - x^2 H_2(x)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - x^2 H_1(x)}{\frac{1}{6} - x^2 H_2(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$$

iii) $$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

Konjugat!

$$= \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

Alt. Använd Maclaurin.

$$\sqrt{1+t} = 1+\tfrac{1}{2}t + t^2H(t) \quad \text{som ger}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2 + x^4H(x) \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+(-x^2)} = 1+\frac{1}{2}(-x^2)+x^4H(x) \end{cases}$$

och alltså $$\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2+x^4H(x)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+x^4H(x)\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2+x^4H_2(x)}{x^2} = 1+x^2H(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

---

(3) a) Eftersom $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ så har vi

$$-x^2 \le f(x) \le x^2$$

så $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{0}$ (instängning) och om vi väljer

$a=0$ blir f kontinuerlig i $x=0$.

(Den är ju kontinuerlig om $x \neq 0$, elementär!)

b) <u>Utanför origo är den deriverbar.</u>

Undersök deriverbarhet i $x=0$ med <u>differenskvoten</u>

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = x\cdot\sin\frac{1}{x} \text{ och}$$

som ovan fås att $x\cdot\sin\frac{1}{x}\to 0$ då $x\to 0$

<u>SVAR:</u> funktionen är deriverbar i $x=0$ med derivata 0.

c) Derivatan blir: $f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} =$

$$= \boxed{2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}} \quad x\neq 0$$

så den är kontinuerlig för $x\neq 0$.

Vidare är $f'(0)=0$ enl. b) och frågan är om

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{\to} f'(0) = 0 \quad ?}$$

saknar gränsvärde då $x\to 0$

$$\text{Men } f'(x) = \underbrace{2x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}} - \cos\frac{1}{x}$$

<u>SLUTSATS:</u> Derivatan är <u>inte</u> kontinuerlig i $x=0$.

(4) $f(x) = x^x$

a) Funktionen blir hur stor som helst och antar inget största värde.

b) $f(x) = x^x = \boxed{e^{x \cdot \ln x}}$

så $f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underline{e^{x \cdot \ln x}(\ln x + 1)}$

Derivatan är 0 om $\ln x = -1$

dvs. $x = e^{-1} = 1/e$

x		$\frac{1}{e}$	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	globalt minimum	$\nearrow$

f:s minsta värde är

$$e^{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{-1/e} = \boxed{\frac{1}{e^{1/e}}}$$

---

(5) a) Tja, kanske.

b) Medeltemperaturen växer.

c) $T''(t) < 0$

---

⑥

$$f(a) + \frac{f'(a)}{}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)^4.$$

a) $f(0)=0$

$f'(x) = \cos x + 1 \qquad f'(0) = 2$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(\;) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$

Svar: $\boxed{2x - \frac{1}{6}x^3}$

b) $f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

$f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{IV}(1) = -6$

Svar! $\boxed{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4}$

c) Usch!!

(7) $$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$ (jämn funktion!)

Definitionsområde: $x \neq \pm 1$.

$\boxed{\text{Lodräta asymptoter}}$

$x \to 1^+ \Rightarrow \dfrac{\overset{\sim 2}{x^2+1}}{\underbrace{(x-1)}_{\text{Litet positivt}}\underset{\sim 2}{(x+1)}} \to +\infty$

$x \to 1^- \Rightarrow y \to -\infty$

$x \to -1^+ \Rightarrow \dfrac{\overset{\sim 2}{x^2+1}}{\underset{\sim -2}{(x-1)}\underset{\text{litet pos.}}{(x+1)}} \to -\infty$

$x \to -1^- \Rightarrow y \to +\infty$

SLUTSATS: $x=1$ och $x=-1$ är lodräta asymptoter.

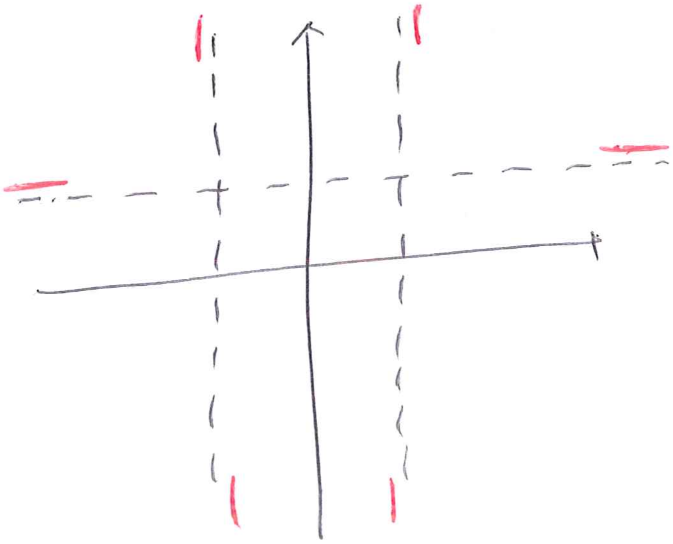
$\boxed{\text{VÅGRÄTA asymptoter}}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

så $y=1$ är vågrät asymptot.

$$y=1+\frac{2}{\underbrace{x^2-1}_{\text{positiv så}}}$$

kurvan ligger över asymptoten!



Extrempunkter

$$f = \frac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow f' = \frac{(x^2-1)\cdot 2x - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \boxed{\frac{-4x}{(x^2-1)^2}}$$

x		-1		0		1	
f'	$+$	$*$	$+$	0	$-$	$*$	$-$
f	↗		↗		↘		↘

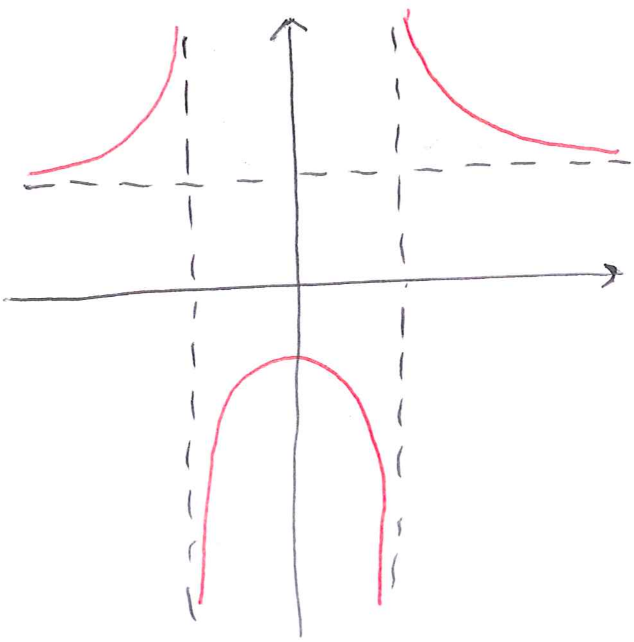
lokalt maximum

$y(0) = 1$

$$f'' = \frac{(x^2-1)^2(-4) - (-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{4(x^2-1)\left[4x^2 - (x^2-1)\right]}{(x^2-1)^4} =$$

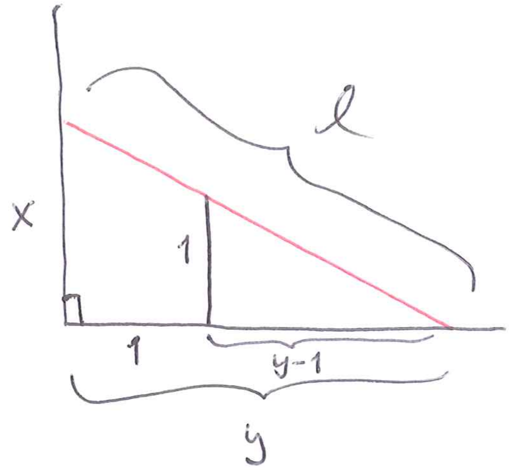
$$= \frac{4(x-1)(x+1)(3x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$

x		-1		1	
f''	$+$	$*$	$-$	$*$	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$
	KONVEX		KONKAV		KONVEX



⑧

Likformighet ger



$$\frac{y}{x} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow y = xy - x$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$$

Pythagoras Sats ger $l = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2}$ som skall minimeras

men denna har minsta värde för samma x som ger

minsta värde till $\boxed{f(x) = x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \quad , \quad 1 < x < \infty}$

och vi får

$$f'(x) = 2x + \frac{(x-1)^2 \cdot 2x - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 2x + \frac{2x(x-1)(x-1-x)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x-1)^4 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1)\left[(x-1)^3 - 1\right]}{(x-1)^4}$$

Eftersom $+1 < x < \infty$ ges nollställena av $(x-1)^3 - 1 = 0$

$(x-1)^3 = 1$ som har enda reella nollställe i $\boxed{x = 2}$

(minimum - globalt eftersom $f(1) = f(\infty) = \infty$).

Minimal längd

$$l = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{1}\right)^2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$