ENVARIABELANALYS
DEL 2
2015-12-22

Lösningar

① a) Partialbråksuppdela:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{\boxed{(A+B)x + (2A+B)}}{(x+1)(x+2)}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{cases}$ $\quad A=-1,\ B=2$

Integralen blir:

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \Big[2\ln(x+2) - \ln(x+1) \Big]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= (2\ln 3 - \ln 2) - (2\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 =$$

$$= \ln 3^2 - \ln 2^3 = \boxed{\ln \tfrac{9}{8}}$$

---

b) $$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \quad \boxed{dt = \frac{dx}{x}} \right\} =$$

$$= \int \sin t \, dt = -\cos t + C = \boxed{-\cos(\ln x) + C}$$

(2) a) $y'' + 2y' + y = 1.$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-1} \Rightarrow \underline{-1 \text{ dubbelrot}}$

Så $\boxed{y_H = e^{-x}(Ax+B)}$

<u>Partikulärlösning</u>: Ansätt $y_p = A$. $y_p' = y_p'' = 0$ så $A = 1$

och $y_p = 1$ duger.

<u>Svar</u>: $\boxed{y = e^{-x}(Ax+B) + 1}$

b) $y' + \frac{1}{x} y = e^{-x}.$ <u>Linjär</u> av ordning 1.

<u>Integrerande faktor</u>: $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x \, (+c)} = e^{\ln x} = \underline{\underline{x}}.$

Multiplicera in denna:

$$xy' + y = xe^{-x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy) = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$x \cdot y = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\boxed{y = \frac{C}{x} - e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x}}$$

③ Vi vet att: $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 1/3$.

$f(x) = \sin(x) \cdot F(x)^2$ (1)

Sätt (av "psykologiska skäl") $y = F(x)$ så $y' = f(x)$ och (1) ger:

$$y' = \sin(x) \cdot y^2, \quad \underline{\text{separabel}} !$$

$$\frac{y'}{y^2} = \sin(x) \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin x \, dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + A, \quad \frac{1}{y} = \cos x + B \quad (B = (-A))$$

$$\underline{y = \frac{1}{B + \cos x}}. \quad y(0) = F(0) = 1/3 \text{ ger}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{B + \cos 0} = \frac{1}{B+1} \Rightarrow B = 2$$

<u>Svar:</u> $\left(F(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x} \text{ så:} \right)$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^2}}$$

4) a) Termerna $\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ är alla större än 1. De går inte mot 0 och serien är därför $\boxed{\text{DIVERGENT}}$ (Summan skall gå från $n=2$!)

b) Med $a_n = \dfrac{3^n}{5^n+n}$ blir:

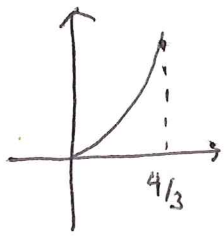
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+1}+(n+1)}}{\dfrac{3^n}{5^n+n}} = \frac{3^{n+1}(5^n+n)}{3^n(5^{n+1}+(n+1))} =$$

$$= \frac{3\cdot 5^n\left(1+\frac{n}{5^n}\right)}{5^{n+1}\left(1+\frac{n+1}{5^{n+1}}\right)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\left(1+\overbrace{\frac{n}{5^n}}^{\to 0,\, n\to\infty}\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{n+1}{5^{n+1}}}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\frac{3}{5}}$$

och eftersom kvoten $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ går mot ett tal som är mindre än 1 är serien $\boxed{\text{Konvergent}}$

6. $f(x) = \sqrt{x^3}$

a) Formeln för <u>båglängd</u> :



$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \text{ ger}$$

med $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ och $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ att

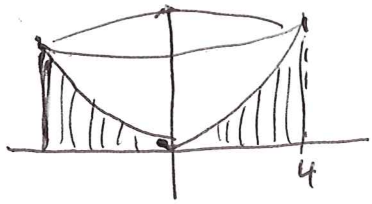
$$s(4/3) = \int_0^{4/3} \sqrt{1+\left(\tfrac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 1+\frac{9x}{4} = t & x=0 \Rightarrow t=1 \\ & x=\frac{4}{3} \Rightarrow t=4 \\ \frac{dt}{dx} = \frac{9}{4} & dx = \frac{4}{9}dt \end{array} \right\} = \frac{4}{9}\int_1^4 \sqrt{t}\,dx = \frac{4}{9}\left[\frac{x^{3/2}}{2/3}\right]_1^4 =$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}4^{3/2} - \frac{3}{2}1^{3/2}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{3\cdot 8}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7 = 14/3$$

---

b) <u>Rörformeln</u> ger



$$V = 2 \int_0^4 x^{3/2}\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{5/2}\,dx =$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^4 = \frac{4\pi}{7}\cdot 4^{7/2} = \frac{4\pi}{7}\cdot 2^7 = \boxed{\frac{\pi\cdot 2^9}{7}}$$

(<u>Rimligt</u>? Kolla <u>hela</u> cylinderns volym och jämför !)

7.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

a) $$\int_0^1 f(x^2)\cdot x\,dx = \left\{ \begin{matrix} x^2 = t & x=0 \Rightarrow t=0 \\ 2x\,dx = dt & x=1 \Rightarrow t=1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 1 = 1/2$$

b) $$\int_{-1}^1 f(|x|)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(-x)\,dx = 1 + \int_{-1}^0 f(-x)\,dx \quad (*)$$

Men $$\int_{-1}^0 f(-x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} -x = t & x=0 \Rightarrow t=0 \\ dx = -dt & x=-1 \Rightarrow t=1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_1^0 f(t)(-dt) = -\int_1^0 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 1$$

så svaret ur (*) blir 2

8.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

a) Vi undersöker $s(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (= a_n)$$

Bildа kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1} \cdot n} =$

$$= \frac{n+1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\substack{\to 1 \\ n \to \infty}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$ och eftersom

gränsvärdet är < 1 är serien $\boxed{\text{konvergent}}$

b) Vi bildar motsvarande kvot för $S(x) = \sum_{1} \underbrace{n x^n}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) x^{n+1}}{n\, x^n} = x \cdot \frac{n+1}{n} \to x \text{ då } n \to \infty$$

Kvottestet ger då att serien är:

Konvergent om $|x| < 1$

Divergent om $|x| > 1$

Det betyder att $\boxed{\text{konvergensradien är } 1}$