UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Örjan Stenflo



# Linjär algebra och geometri I, 1MA025

## Tenta 160112 med lösningar

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, resp. 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

**Lösning:** Vi börjar med att förenkla ekvationssystemet genom att Gauss-eliminera ekvationssystemets totalmatris:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) -1\ -1\ -1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) 1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Den sista totalmatrisen motsvarar det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+ x_3} + 2x_4 = 2 \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 +{}} x_4 = 1, \end{cases}$$

som har lösning $x_4 = 1$, $x_2 = 2 - 2x_4 = 0$, $x_1 = 1 - x_4 - x_3 - x_2 = -x_3$, så $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, 0, -t, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

**Kontroll:**

$$\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & t+0-t+1 = 1 \text{ (stämmer)} \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & t+0-t+2 = 2 \text{ (stämmer)} \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & t+0-t+3 = 3 \text{ (stämmer)} \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & t+0-t+4 = 4 \text{ (stämmer)} \end{array}$$

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm inversen till $A$.

(b) Lös matrisekvationen $AXB = C$.

**Lösning:** Då $det(A) = 1$ är

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{det(A)} adj(A) = adj(A) \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Då

$$AXB = C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

och $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ är

$$X = (A^{-1}C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Avgör för vilka reella tal $c$ som planet $x+y+cz=1$ är parallellt med linjen

$$l:\begin{cases}3x+2y-2z=7\\3x+4y+5z=5.\end{cases}$$

**Lösning:** Vi börjar med att förenkla ekvationssystemet som bestämmer linjen $l$ genom att Gauss-eliminera ekvationssystemets totalmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&7\\3&4&5&5\end{array}\right)\begin{array}{c}-1\\ \\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-2&7\\0&2&7&-2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-1\end{array}$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&-9&9\\0&2&7&-2\end{array}\right)\begin{array}{c}1/3\\1/2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&3\\0&1&7/2&-1\end{array}\right).$$

Skärningslinjen ges alltså av lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases}x-3z=3\\y+(7/2)z=-1,\end{cases}$$

som på vektorekvationsform kan skrivas som

$$(x,y,z)=(3+3t,-1-7t/2,t)=(3,-1,0)+t(3,-7/2,1),\ t\in\mathbb{R}.$$

Planet $x+y+cz=1$ är parallellt med linjen $l$ om och endast om planets normalvektor $(1,1,c)$ är ortogonal mot linjens riktningsvektor $(3,-7/2,1)$ alltså omm $(1,1,c)\cdot(3,-7/2,1)=3-7/2+c=c-1/2=0$, d.v.s. omm $c=1/2$.

4. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix}x&0&1&0\\0&1&0&x\\1&0&x&0\\0&x&0&1\end{vmatrix}=0.$$

**Lösning:**

Vi har

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x&0&1&0\\0&1&0&x\\1&0&x&0\\0&x&0&1\end{vmatrix}\begin{array}{c}\\ \\-x\\ \\\end{array}&=\begin{vmatrix}0&0&1-x^2&0\\0&1&0&x\\1&0&x&0\\0&x&0&1\end{vmatrix}\text{ utv. längs 1:a rad.}\\&=(-1)^{1+3}(1-x^2)\begin{vmatrix}0&1&x\\1&0&0\\0&x&1\end{vmatrix}\text{ utv. längs 2:a rad.}\\&=(1-x^2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&x\\x&1\end{vmatrix}=-(1-x^2)^2\\&=0\iff x=\pm1.\end{aligned}$$

5. Låt $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, där $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3,4)$, och $\vec{v}_3 = (4,2,3,4)$. Avgör om $S$ är linjärt oberoende eller linjärt beroende.

   **Lösning:** $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är linjärt oberoende $\iff$ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ endast har lösningen $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$.

   Vi löser ekvationssystemet $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, alltså ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & 4c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & 3c_2 & + & 3c_3 & = & 0 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 4c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   genom att Gauss-eliminera ekvationssystemets totalmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \; -1 \; -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \; -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 1/3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Den sista totalmatrisen motsvarar det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & 4c_3 & = & 0 \\ & & c_2 & - & 2c_3 & = & 0 \\ & & & & c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   som endast har lösningen $(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$, så $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är linjärt oberoende.

6. Bestäm avståndet mellan punkten $P : (4,-5,1)$ och planet som på parameterform ges av $(x,y,z) = (0,-1,-1) + s(1,1,1) + t(0,1,2)$, $s,t \in \mathbb{R}$.

   **Lösning:** En normalvektor för planet ges av

$$\vec{n} = (1,1,1) \times (0,1,2) \quad = \quad \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,-2,1).$$

   Låt $Q : (0,-1,-1)$. Avståndet mellan punkten $P$ och planet ges av

$$\|\mathrm{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{QP})\| = \left\| \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\|$$

$$= \left\| \frac{(4,-4,2) \cdot (1,-2,1)}{(1,-2,1) \cdot (1,-2,1)} (1,-2,1) \right\| = \frac{14}{6} \, \|(1,-2,1)\| = \frac{7\sqrt{6}}{3}.$$

7. Bestäm arean för den triangel som har punkterna $P_1 : (-1,1,1)$, $P_2 : (1,2,3)$, och $P_3 : (1,1,1)$ som hörn i $\mathbb{R}^3$.

   **Lösning:** Bilda vektorerna $\overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,2)$, och $\overrightarrow{P_1P_3} = (2,0,0)$.

   Då arean av den triangel som har punkterna $P_1$,$P_2$,$P_3$ som sina hörn är halva arean av det parallellogram som har dessa punkter som tre av sina hörn ges arean av

$$\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\|/2 = \left\| \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) \right\| /2$$

$$= \|(0,4,-2)\|/2 = \sqrt{4^2 + (-2)^2}/2 = \sqrt{20}/2 = \sqrt{5}.$$

8. Låt $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotation moturs med vinkeln $\pi/2$ och låt $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i $y$-axeln.

   (a) Bestäm standardmatriserna för $R$ och $S$.

   (b) Bestäm standardmatriserna för de sammansatta avbildningarna $R \circ S$ och $S \circ R$.

   **Lösning:** Om $R$ är rotation (moturs) $\pi/2$ radianer (alltså $90°$) i $\mathbb{R}^2$ så är $R((1,0)) = (0,1)$, och $R((0,1)) = (-1,0)$ så standardmatrisen för $R$ ges av

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Om $S$ är spegling i $y$-axeln så är $S((1,0)) = (-1,0)$, och $S((0,1)) = (0,1)$, så standardmatrisen för $S$ ges av

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Standardmatrisen för en spegling i i $y$-axeln följt av en rotation $90°$ i $\mathbb{R}^2$ ges därför av

$$[R \circ S] = [R][S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

   och standardmatrisen för en en rotation $90°$ i $\mathbb{R}^2$ följt av en spegling i $y$-axeln ges av

$$[S \circ R] = [S][R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$