UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Robert Algervik, André Laestadius

Deltenta 1
Envariabelanalys
2015-03-13

Skrivtid: 14-19. Miniräknare är inte tillåten. På baksidan finns ett formelblad. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng och för godkänd deltenta krävs minst 18 poäng. Skriv dina lösningar så att de blir lätta att följa, och redovisa tydligt hur du har resonerat.

1. Beräkna följande gränsvärden

   (a)
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x\ln x}{\ln(x^3) + \sqrt{x^4 + x}},$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1}.$$

2. Låt
   $$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}.$$
   Bestäm definitionsmängd, asymptoter och lokala max- och minpunkter till f. Undersök var f är växande respektive avtagande och rita funktionens graf.

3. Bestäm ekvationen för tangentlinjen i punkten $(1, 0)$ till kurvan
   $$\arcsin(y) + x^2y + x = 1.$$

4. Låt
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & x > 0 \\ kx + m, & x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Bestäm m så att f blir kontinuerlig vid $x = 0$.

   (b) Låt m ha det värde som bestämdes i (a). Beräkna $f'_-(0)$ och $f'_+(0)$ med hjälp av definitionen av höger- och vänsterderivata. Bestäm k så att f blir deriverbar vid $x = 0$.

5. Låt
   $$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$
   Ange definitionsmängden för f. Bestäm det största intervallet som innehåller $x = 1$ och på vilket f är inverterbar. Beräkna $(f^{-1})'(0)$.

6. (a) Antag att f har derivator av ordning n. Skriv upp uttrycket som definierar Taylorpolynomet av ordning n vid punkten a till f.

   (b) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 2 till $g(x) = \ln(x + e^x)$.

7. Bevisa att $\arctan\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ för alla $x \geq 0$.

8. Vi ska tillverka en låda med kvadratisk botten och rektangulära sidor. Var och en av sidorna har omkrets 20 dm. Beräkna lådans maximala volym. (Rita en figur och redovisa din lösning väl.)

Lycka till!

Trigonometriska formler:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$