UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Veronica Crispin Quiñonez

Dugga
Linjär algebra II 5 p 1MA024
2019-02-18 kl 14-16

- *Tillåtna medel: sedvanliga skrivdon.*
- *8p, 12p, 16p och 20p ger 1, 2, 3 respektive 4 bonuspoäng vid tentamen 2019-03-18, om man uppnår minst 16p på tentamen.*
- **Varje svar ska motiveras noga! Enbart svar utan motivering ger 0p.** *Skriv tydligt och hoppa inte över nödvändiga steg.*

---

(1) Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla matriser av storlek 2×2 och betrakta delmängden som består av följande matriser:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ange $\dim(\mathcal{M}_{2\times 2})$.
Svar. 4, basen består av 4 matriser med 1 på en plats och 0 på de övriga.

(b) Avgör om delmängden $\{M_1, \ldots, M_5\}$ är linjärt oberoende eller ej, utan att utföra några beräkningar.
Svar. Ekvationen $k_1M_1 + \cdots + k_4M_4 = 0_{2\times 2}$ ger ett linjärt homogent ekvationssystem med de 4 obekanta k_i och 5 ekvationer, en för varje plats i matrisen (t.ex. plats 21 ger $k_1 + k_3 + 2k_4 + 3k_5 = 0$). Det är överbestämt och har icke-triviala lösningar $\Rightarrow$ linjärt beroende.

(c) Ange en bas för det linjära höljet av $\{M_1, \ldots, M_5\}$.
Svar. Gausseliminering av systemet i (b) ger ledande 1:or på plats 1, 2, 3 så att M_1, M_2, M_3 utgör en bas. Alternativt: Gausseliminering ger värden på k_i som löser systemet, t.ex. $-2M_1 + M_2 + M_4 = 0_{2\times 2}$ och $-3M_1 + 2M_2 + M_5 = 0_{2\times 2}$, vilket ger att M_4, M_5 beror av M_1, M_2 och kan strykas för att en bas. Den uppmärksamme ser att $M_4 = 2M_1 - M_2$ och $M_5 = 3M_1 - M_2$.

(d) Ange dimensionen av $\mathrm{span}(\{M_1, \ldots, M_5\})$.
Svar. 3 baselement $\Rightarrow$ 3.

(2) Låt $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2.

(a) Finn alla $c \in \mathbb{R}$ sådana att delmängden $\{p(0) = c \mid p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\}$ blir ett delvektorrum till $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
Svar. Låt $p = a_0 + a_1x + a_2x^2, q = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Att båda är i samma delmängd ger $a_0 = c = b_0$; att $p + q$ är det ger $2c = c \Rightarrow c = 0$. Polynom $\{p(x) = a_1x + a_2x^2\}$ uppfyller de 4 axiomen för delvektorrum.

(b) Ange en bas $\mathcal{E}$ för delvektorrummet i (a), bestående av standardvektorer (standardpolynom).
Svar. $a_1 \cdot \mathbf{x} + a_2 \cdot \mathbf{x^2} \Rightarrow$ basen består av x, x^2.

(c) Låt $\mathcal{U} = \{x - x^2, 2x - x^2\}$ vara en annan bas för delvektorrummet i (a). Ange basbytesmatriserna för basbyte från $\mathcal{U}$ till $\mathcal{E}$ respektive från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{U}$.
Svar. Basbyte från $\mathcal{U} \to \mathcal{E}$ ges av kolonnvektorer i$\mathcal{U}$ uttryckta i $\mathcal{E}$ och det motsatta basbytet är inversen, alltså

$$M_{\mathcal{U}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } M_{\mathcal{E}\to\mathcal{U}} = M_{\mathcal{U}\to\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Formulera dimensionssatsen för matriser.
Svar. Se boken.

(b) Låt $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning, som ges av matrisen A.

(i) Ange storleken på A.
Svar. För att multiplikationen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

ska gå ihop måste A ha storlek 4×5.

(ii) Vad är det minsta värde som $\text{null}(A)$ kan anta? Vad är det största värde som $\text{rang}(A)$ kan anta?
Svar. $Ax = 0_4$ ger ett linjärt homogent system med 5 obekanta och 4 ekvationer (samma som i 1b ovan) och det finns en icke-trivial lösning med minst 1 parameter $\Rightarrow \text{null}(A) \geq 1$. Alternativt: en avbildning från $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{R}^4$ förlorar minst en dimension.
Dimensionssatsen ger $\text{rang}(A_{m\times n}) = n - \text{null}(A) \leq 5 - 1 = 4$. Alternativt: dimensionen av vektorrummet som A avbildar på är 4.

(c) Låt $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ vara en linjär avbildning definierad via $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_4)$. Ange matrisen $[S]$ som motsvarar avbildningen med avseende på standardbasen.
Svar. För att multiplikationen ska gå ihop, måste

$$[S]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Alternativt: kolonnerna är vad standardbasvektorerna avbildas på, t.ex. är tredje kolonnen i $[S]$ $(S(0,0,1,0))^T = (0,1,0,-1,0,1)^T$.

(4) (a) Definiera begreppet *egenvärdet* av en matris.
Svar. Se i boken; viktigt att $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, annars har varje matris ett godtyckligt egenvärde.

(b) Hitta alla egenvärden till matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svar. Karakteristiska ekvationen är $\det(\lambda I_3 - M) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, där faktoriseringen ges av rotgissning eller av att man räknar ut determinanten på lämpligt sätt. Egenvärdet 1 har dubbel algebraisk multiplicitet och -1 enkel.

(c) Vad kan du säga om egenvärdena till M^3 med hjälp av svaret på (b)?
Svar. $M^3\mathbf{x} = M^2(M\mathbf{x}) = M^2(\lambda\mathbf{x}) = \lambda M^2\mathbf{x} = \lambda M(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 M\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$, så att egenvärdena till M är samma som till M med samma multiplicitet.

(d) Bekräfta ditt svar genom att räkna ut egenvärdena till M^3.
Svar. $M^2 = I_3$ så att $M^3 = M$.

LYCKA TILL!