Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

IT, STS, W
MaKand
Lärare

Prov i matematik
Linjär algebra II, 5hp
2016–08–20

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Delrummet $U \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ består av alla matriser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ så att $a + d = 0$. Ange U:s dimension, finn en bas i U, och utvidga den till en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges geometriskt som projektion, parallellt med vektorn $\ell = (1, 1, 1)$, på planet $P : x + 2y + 3z = 0$.

(a) Finn en bas (b_1, b_2, b_3) i $\mathbb{R}^3$ som består av idel egenvektorer till f:s matris A.

(b) Bestäm f:s matris A.

3. För vilka värden på a är matrisen $A = \begin{pmatrix} -a & a & -a \\ -a & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliserbar? Motivera ditt svar!

4. Vektorrummet $\mathcal{P}_2$ består av alla polynom av grad högst 2, och utrustas med den inre produkten $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$. Beräkna den on-bas (p_0, p_1, p_2) i $\mathcal{P}_2$ som erhålls genom att tillämpa Gram-Schmidt algoritmen på standardbasen $(1, X, X^2)$. Beräkna även det minsta avståndet $d(X^2, \mathcal{P}_1)$ mellan polynomet X^2 och delrummet $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, som består av alla polynom av grad högst 1.

5. Låt v och w vara vektorer i ett inre produktrum, så att $\|v\| = \|w\|$. Finn vinkeln α mellan $v + w$ och $v - w$. Motivera ditt svar!

Var god vänd!

6. Den linjära operatorn $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2,\ p \mapsto F(p)$ ges av

$$(F(p))(x) = p(1+x) + p'(1+x).$$

Avgör om F är bijektiv. Om så är fallet, finn $F^{-1}(q)$ för polynomet $q(x) = 2 + 3x + 5x^2$.

7. Ytan Y består av alla punkter (x, y, z) i $\mathbb{E}^3$ som uppfyller ekvationen

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 0.$$

Bestäm ytans typ, och motivera att den är en rotationsyta. Ange även en riktningsvektor för ytans rotationsaxel. (Med en *rotationsyta* menas en yta som kan skapas genom att snurra en kurva eller linje kring en axel, kallad ytans *rotationsaxel*.)

8. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Finn en lösning $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ till ekvationen $X^n = A$, för alla udda positiva exponenter n.

LYCKA TILL!

Lösningar 2016-08-20

1. Varje matris $A \in \mathcal{U}$ kan skrivas

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$ vilket visar att

$(B_1, B_2, B_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ spänner upp $\mathcal{U}$. Dessutom är (B_1, B_2, B_3) lo, alltså en bas i $\mathcal{U}$. Följaktligen är $\dim(\mathcal{U}) = 3$. Då $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{U}$, är även den utvidgade följden (B_1, B_2, B_3, B_4) lo. Då den har längd 4 och $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, så är den en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. (a) $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$, då

$$\det T_{\underline{e}\underline{b}} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0\,,$$

och den består av idel egenvektorer till f:s matris A, då

$$\begin{aligned} A b_1 &= f(b_1) = f(b) = 0 = 0 \cdot b_1\,, \\ A b_2 &= f(b_2) = b_2 = 1 \cdot b_2\,, \\ A b_3 &= f(b_3) = b_3 = 1 \cdot b_3\,. \end{aligned}$$

(b) $$A = [f]_{\underline{e}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}\,[f]_{\underline{b}\underline{b}}\,T_{\underline{b}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}\,[f]_{\underline{b}\underline{b}}\,T_{\underline{e}\underline{b}}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Oavsett värdet på a gäller

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+a & -a & a \\ a & \lambda-a & a-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+a & -a \\ a & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-a^2+a^2) =$$

$= (\lambda-1)\lambda^2$, vilket visar att $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$ är A:s egenvärden, samt att

$1 \leq \dim E(0) \leq 2$ och $1 \leq \dim E(1) \leq 1$. Av detta sluter vi oss till att

$$\begin{aligned} A \text{ är diagonaliserbar } &\Leftrightarrow \dim E(0) + \dim E(1) = 3 \\ &\Leftrightarrow \dim E(0) = 2 \\ &\Leftrightarrow \dim N(A) = 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = 1 . \end{aligned}$$

Om $a = 0$, då är $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alltså $\operatorname{rang}(A) = 1$.

Om $a \neq 0$, då är $A = \begin{pmatrix} -a & a & -a \\ -a & a & -a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} -a & a & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

alltså $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Svar. A är diagonaliserbar omm $a = 0$.

4. $p_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}1$, då $\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = 3 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{3}$.

$$p_1 = \frac{X - \langle X, p_0\rangle p_0}{\|\text{ dito }\|} = \frac{X - \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}1}{\|\text{ dito }\|} = \frac{X-1}{\|\text{dito}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \text{ då}$$

$\langle X, p_0\rangle = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, och

$\|X-1\|^2 = \langle X-1, X-1\rangle = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \|X-1\| = \sqrt{2}$.

$$p_2 = \frac{X^2 - \langle X^2, p_0\rangle p_0 - \langle X^2, p_1\rangle p_1}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{X^2 - \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}1 - 2\cancel{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(X-1)}{\|\quad \text{dito} \quad\|} =$$

$$= \frac{X^2 - \frac{5}{3}1 - 2X + 2\cdot 1}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{X^2 - 2X + \frac{1}{3}1}{\|\quad \text{dito} \quad\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 6X + 1\right) \quad , \quad \text{då}$$

$$\langle X^2, p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle X^2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(0^2 + 1^2 + 2^2\right) = \frac{5}{\sqrt{3}} \quad ,$$

$$\langle X^2, p_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle X^2, X-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 + 0 + 4\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \text{och}$$

$$\left\| X^2 - 2X + \tfrac{1}{3}1 \right\|^2 = \left\langle X^2 - 2X + \tfrac{1}{3}1, X^2 - 2X + \tfrac{1}{3}1 \right\rangle = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\left\| X^2 - 2X + \tfrac{1}{3}1 \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \; .$$

Observera att (p_0, p_1) är en on-bas i $\mathcal{P}_1$. Alltså är

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1}(X^2) = \langle X^2, p_0\rangle p_0 + \langle X^2, p_1\rangle p_1 \quad , \quad \text{samt}$$

$$d(X^2, \mathcal{P}_1) = d\left(X^2, \operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1}(X^2)\right) = \left\| X^2 - \langle X^2, p_0\rangle p_0 - \langle X^2, p_1\rangle p_1 \right\| \underset{\text{se ovan}}{=}$$

$$= \left\| X^2 - 2X + \tfrac{1}{3}1 \right\| \underset{\text{se ovan}}{=} \frac{\sqrt{6}}{3} \; .$$

5. $\langle v+w, v-w\rangle = \langle v, v\rangle - \cancel{\langle v, w\rangle} + \cancel{\langle w, v\rangle} - \langle w, w\rangle$

$$= \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$$

medför att $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

6. $A = [F] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, då

$$(F(1))(x) = 1(1+x) + 1'(1+x) = 1 = 1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(1) = 1,$$

$$(F(X))(x) = X(1+x) + X'(1+x) = 1+x+1 = (2\cdot 1 + X)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(X) = 2\cdot 1 + X,$$

$$(F(X^2))(x) = X^2(1+x) + (X^2)'(1+x) = (1+x)^2 + 2(1+x) = 1+2x+x^2+2+2x =$$
$$= 3+4x+x^2 = (3\cdot 1 + 4X + X^2)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(X^2) = 3\cdot 1 + 4X + X^2.$$

Nu ser vi att $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ är inverterbar $\Rightarrow F$ är inverterbar
$\Rightarrow F$ är bijektiv.

Vidare är

$$[F^{-1}(q)] = [F^{-1}][q] = [F]^{-1}[q] = A^{-1}[q] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ & 1 & -4 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix},$$

vilket innebär att $F^{-1}(q) = 21\cdot 1 - 17X + 5X^2$.

7. $Y: x^T A x = 0$ för $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & -3 \\ -2 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

löses av $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -4$. Dessa är A:s egenvärden. Dessutom är $\dim E(2) = 2$ och $\dim E(-4) = 1$, då A är diagonaliserbar, enligt Spektralsatsen. Om (b_1, b_2) är en on-bas i $E(2)$ och b_3 en normerad basvektor i $E(-4)$, då är (b_1, b_2, b_3) en on-egenbas till A i $\mathbb{E}^3$, och för alla $x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 \in \mathbb{E}^3$ gäller $x^T A x = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

Därmed är $x \in Y \Leftrightarrow x^T A x = 0$

$$\Leftrightarrow 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = 2y_3^2$$

Snittet av Y med planet $y_3 = c$, där c är en konstant, har ekvationen $y_1^2 + y_2^2 = 2c^2$, vilken beskriver cirkeln i planet $y_3 = c$ med radie $\sqrt{2}|c|$.

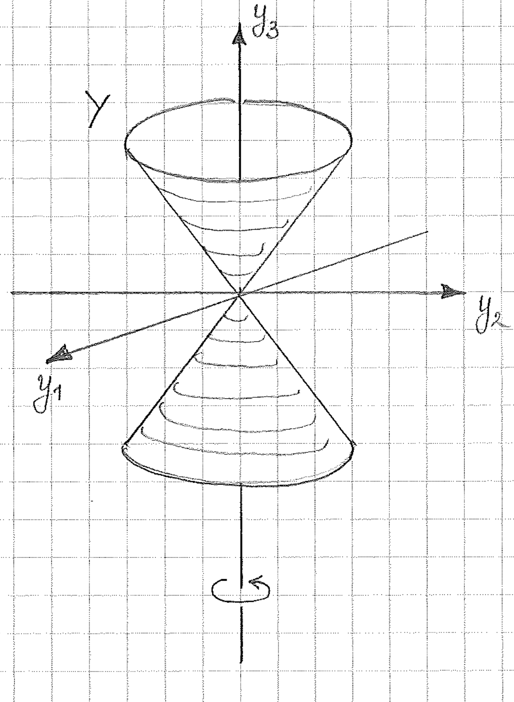
Snittet av Y med planet $y_1 = 0$ har ekvationen $(y_2 + \sqrt{2}y_3)(y_2 - \sqrt{2}y_3) = 0$, vilken beskriver linjerna $y_2 + \sqrt{2}y_3 = 0$ och $y_2 - \sqrt{2}y_3 = 0$ i (y_2, y_3)-planet.

Av detta ser vi att Y skapas genom at snurra linjen $y_2 = \sqrt{2}y_3$ (eller $y_2 = -\sqrt{2}y_3$) kring y_3-axeln $\mathrm{span}(b_3)$. Följaktligen är Y en rotationsyta, närmare bestämt en kon, och som riktningsvektor för rotationsaxeln $\mathrm{span}(b_3) = E(-4)$ duger varje egenvektor $v \in E(-4) \setminus \{0\}$, exempelvis $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$E(-4) = N(-4I - A) = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ då}$$

$$-4I - A \underset{\text{se ovan}}{\sim} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

Sätt $x_3 = -2$.



8. $$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-4)$$ löses av $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$.

Då $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ alltså har 3 olika egenvärden, så är A diagonaliserbar. Enligt standard-metoden finner man att matrisekvationen $S^{-1}AS = D$ löses av

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix},$$ exempelvis.

För alla udda $n \geq 1$ löses $Y^n = D$ av $Y = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$, där $\alpha = \sqrt[n]{4}$.

För alla udda $n \geq 1$ gäller därmed även

$$A = SDS^{-1} = SY^nS^{-1} = (SYS^{-1})^n = X^n,$$ för

$$X = SYS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 4+2\alpha & 4-4\alpha \\ 0 & 2-2\alpha & 2+4\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2+\alpha & 2-2\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}.$$

<u>Svar.</u> $$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2+\sqrt[n]{4} & 2-2\sqrt[n]{4} \\ 0 & 1-\sqrt[n]{4} & 1+2\sqrt[n]{4} \end{pmatrix},$$ <u>exempelvis</u>.