UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Robert Algervik, André Laestadius

Prov 2
Envariabelanalys
2015-05-28

Skrivtid: 08.00-13.00. Miniräknare är inte tillåten. På baksidan finns ett formelblad. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng och för godkänt prov krävs minst 18 poäng. Skriv dina lösningar så att de blir lätta att följa, och redovisa tydligt hur du har resonerat.

1. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$

2. Betrakta området som ligger mellan x-axeln och kurvan $y = \sqrt{4-x^2}$ och dessutom till höger om linjen $x = 1$. Skissa området och beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när området roteras kring y-axeln.

3. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}\,.$$

4. Beräkna de generaliserade integralerna

   (a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx.$

5. Finn den lösning till differentialekvationen

$$(x^2 + 2x + 5)y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

   som uppfyller $y(-1) = 1$.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-2x},$$

   som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

7. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2\sqrt{n} - n},$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}\,.$

8. En kopp kaffe har glömts kvar i fikarummet. Från början har kaffet temperaturen 90°C. Låt $T(t)$ vara kaffets temperatur efter t minuter. Kaffet svalnar med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan kaffets temperatur och temperaturen i fikarummet. Antag att rummets temperatur är konstant 20°C och att kaffet efter 10 minuter har svalnat till 55°C. Vid vilken tidpunkt är kaffet 30°C varmt? (Du behöver inte beräkna ett närmevärde till ditt svar.) För denna modell, när antar kaffet fikarummets temperatur?

Lycka till!

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + O(x^{n+1})$$