Baskurs dugga 2015-09-23

1) $\sqrt{7} < \sqrt{9} < \sqrt{10}$ Svar: (tex.) $3/2$

$\Rightarrow \sqrt{7} < 3 < \sqrt{10}$

$\Rightarrow \sqrt{7}/2 < 3/2 < \sqrt{10}/2$

2) $i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = (i^4)^{11} i^3 = 1^{11} i^3$

$= -i$

Svar: $-i$ //

3) $|2-x| \leq 11 \iff -11 \leq 2-x \leq 11$

$\iff -13 \leq -x \leq 9$

$\iff 13 \geq x \geq -9$

Svar: $-9 \leq x \leq 13$ //

4) $\dfrac{x^2+11x+30}{2x+12} = \dfrac{(x+5)(x+6)}{2(x+6)}$

$= \dfrac{x+5}{2}$ Svar: $\dfrac{x+5}{2}$ //

5) $\dfrac{17-6i}{2-3i} = \dfrac{17-6i}{2-3i} \cdot \dfrac{2+3i}{2+3i}$

$= \dfrac{34+51i-12i+18}{4+9}$

$= \dfrac{52}{13} + \dfrac{39}{13} i$

Svar: $4+3i$ //

6) (kombinationer)

$\binom{n}{2} = 36$

```
      1 1
     1 2 1
    1 3 3 1
   1 4 6
  1 5 10
  1 6 15
 1 7 21
 1 8 28
1 9 36
```

$\binom{n}{2}$

$\binom{9}{2} = 36$

Svar: $n = 9$ //

7) $\dfrac{10}{2} + \dfrac{13}{2} + \dfrac{16}{2} + \dots + \dfrac{37}{2}$

$+3/2 \quad +3/2$

gemensam differens

$\Rightarrow$ aritmetisk talföljd

$a_k = 3/2\, k + c$ (linjär)

$a_1 = 10/2 = \frac{3}{2}(1) + c \Rightarrow c = 7/2$

Sista term: $37/2 = 3/2\, k + 7/2$

$\Rightarrow 3/2\, k = 30/2$

$\Rightarrow k = 10$

Serien kan skrivas: $\sum_{k=1}^{10} 3/2\, k + 7/2$ //

Summan $= \dfrac{10 \cdot (10/2 + 37/2)}{2} = \dfrac{47 \cdot 10}{4}$

$= 470/4$ //

$(= 235/2)$

8) $P(n): \sum_{k=1}^{n} 7^k = \dfrac{7(7^n - 1)}{6}$ $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$

Basfall VL av $P(1) = 7$

HL av $P(1) = 7 \cdot 6/6 = 7$ $\Big\}$? VL = HL så basfallet $n=1$ är sant

Induktionssteg

Antag $P(m)$ är sant.

Mål $P(m+1)$

$\sum_{k=1}^{m+1} 7^k = \dfrac{7(7^{m+1}-1)}{6}$

Betrakta

$\sum_{k=1}^{m+1} 7^k = \left(\sum_{k=1}^{m} 7^k\right) + 7^{m+1}$

$= \dfrac{7(7^m - 1)}{6} + 7^{m+1}$ (av induktions-antagandet)

$= \dfrac{7^{m+1} - 7}{6} + \dfrac{6 \cdot 7^{m+1}}{6}$

$= \dfrac{7 \cdot 7^{m+1} - 7}{6}$

$= \dfrac{7(7^{m+1} - 1)}{6}$

Så $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ och $P(1)$ är sant, så av induktionsprincipen, så gäller $P(n)$ för alla $n \geq 1$.

9) $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k (2x)^{9-k}$

av binomialsatsen

Vi söker k så att $x^{-k} x^{9-k} = x^1$

$\Rightarrow 9 - 2k = 1$

$k = 8/2$

$= 4$

Motsvarande koeff.

$\binom{9}{4} \cdot 2^{9-4} = \binom{9}{4} \cdot 2^5 = \dfrac{9!}{5!4!} \cdot 32 = 4032$ //

10) $|5-x| \geq |4-2x|$

Viktiga värden: $x = 5$, $x = 2$

Fall	$\|5-x\|$	$\|4-2x\|$	Lös	
$x < 2$	$5-x$	$4-2x$	$5-x \geq 4-2x$	(1)
$2 \leq x < 5$	$5-x$	$-(4-2x)$	$5-x \geq 2x-4$	(2)
$x > 5$	$-(5-x)$	$-(4-2x)$	$x-5 \geq 2x-4$	(3)

(1) ger $x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, 2)$

(2) ger $3x \leq 9 \Rightarrow x \in [2, 3]$ $\Big\}$ (4)

(3) ger $x \leq -1$ som motsäger $x > 5$

(4) $\Rightarrow x \in [-1, 3]$

(eller $-1 \leq x \leq 3$) //