UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Richard Miles

Prov i matematik
Baskurs i matematik 5hp
2015-01-17

Skrivtid: 14-19. Miniräknare är inte tillåten. På del A krävs endast svar, men på del B och del C krävs fullständiga lösningar. Som mest kan tentan ge 40 poäng. Betygsgränserna för betygen 3, 4 och 5 är 18, 25 respektive 32 poäng.

Del A, 1 poäng per uppgift (endast svar krävs)

1. Lös olikheten $|x-5| > 2$.
2. Beräkna
$$\frac{-4+7i}{3-2i}$$
3. Förenkla
$$\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}$$
4. Förenkla
$$\ln 18x^3 - 2\ln 3x$$
5. Beräkna
$$\sum_{k=1}^{5}(2^k-3)$$
6. Lös ekvationen
$$4^x \cdot 2^x = 64$$
7. Beräkna $\sin\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)$
8. Låt $z = 4+3i$ och $w = -2+7i$. Beräkna $\operatorname{Im}(z \cdot w)$.

Del B, 2 poäng per uppgift (fullständiga lösningar krävs)

9. Skissa följande ellips och ange dess mittpunkt samt axlarnas längder.
$$8x^2 - 4x + y^2 = \frac{3}{2}$$
10. Låt A vara en mängd som har 21 delmängder med 5 element. Hur många element har mängden A?

[Fler uppgifter på nästa sida...]

11. Lös följande ekvationen

$$\sin(2x - \pi) = \frac{1}{2}$$

12. Visa mängden av alla komplexa tal z som uppfyller

$$|z - i| \leqslant 2 \text{ och } \mathrm{Re}(z) \geqslant -1$$

i komplexa talplanet.

13. Finn det minsta positiva heltalet n så att $(5 - 5i)^n$ är ett reellt tal.

14. Bestäm konstant termen i utvecklingen av

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$$

Del C, 5 poäng per uppgift (fullständiga lösningar krävs)

15. Lös ekvationen

$$z^4 = 81i$$

fullständigt och illustrera rötternas läge i komplexa planet.

16. Ekvationen $z^4 + 3z^3 - 6z^2 + 12z - 40 = 0$ har en lösning $z = 2i$. Bestäm de övriga lösningarna.

17. Visa med induktion att för all naturliga tal n gäller

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

18. Lös ekvationen

$$\log_3(x - 3) + \log_9(x + 5)^2 = 2$$