UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Robert Algervik

Prov i matematik
F2, GyLärMa1 m.fl.
Linjär algebra II
2015-12-18

Skrivtid: 08.00–13.00. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.

1. (a) Definiera kolonnrum, radrum och nollrum för en matris $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

   (b) Finn en bas i nollrummet och en bas i kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Verifiera dimensionssatsen för A.

2. (a) Formulera de fyra axiomen i definitionen av en inre produkt $< \cdot, \cdot >$ på ett reellt vektorrum V.

   (b) För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ utgör

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + ax_3y_1 + bx_1y_3$$

   en inre produkt på $\mathbb{R}^3$? Motivera svaret väl!

3. Låt

$$b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   och låt f vara en linjär operator på $\mathbb{E}^3$ sådan att

$$f(b_1) = b_1, \quad f(b_2) = b_3, \quad f(b_3) = -b_2.$$

   (a) Kontrollera att b_1, b_2, b_3 utgör en on-bas i $\mathbb{E}^3$.

   (b) Bestäm matrisen till f i basen b_1, b_2, b_3.

   (c) Bestäm matrisen till f i standardbasen.

Var god vänd!

4. (a) Vad betyder det att en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar? Återge definitionen.

   (b) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   diagonaliserbar? Motivera svaret väl!

5. $W = \{a + bx^2 | a, b \in \mathbb{R}\}$ är ett delrum i $\mathcal{P}_3$, med inre produkten

$$< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   (a) Bestäm en *on*-bas i W.

   (b) Bestäm det polynom i W som är på kortast avstånd till polynomet f som ges av $f(x) = x$.

6. Låt $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definieras av $(F(p))(x) = 2p(x) - (x+1)p'(x)$.

   (a) Bestäm matrisen till F i standardbasen på $\mathcal{P}_2$.

   (b) Bestäm en bas i $\ker(F)$.

   (c) Avgör om F är injektiv, surjektiv eller bijektiv.

7. Ytan Y i $\mathbb{E}^3$ består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller

$$x^2 + y^2 - 2xz + 2yz = 5.$$

   Avgör ytans typ samt bestäm dess kortaste avstånd till origo. Finn de punkter på ytan där det kortaste avståndet antas och ange dessa punkters koordinater i standardbasen.

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

   med begynnelsevilkoren $y_1(0) = 3$ och $y_2(0) = 5$.

Den som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 9 nedan.

9. Bestäm A^n för alla naturliga tal n, där $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!

Lösningar till tenta i Linjär alg. II 2015-12-18

1 a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$K(A) = \operatorname{span}(A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot n})$$

$$R(A) = \operatorname{span}(A_{1\cdot}, \ldots, A_{m\cdot})$$

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad -2 \quad -1 \quad -3 \quad \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \quad -5 \quad 2 \quad -1 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\uparrow \quad \uparrow \qquad\quad \uparrow$$

$$x \in N(A) \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $(A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 4})$ bas i $K(A)$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bas i $N(A)$

1c) Enl. dimensionssatsen är

$$\dim(N(A)) + \text{rang}(A) = n \quad \text{om } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Vi har $n = 4$, $\dim(N(A)) = 1$

och $\text{rang}(A) = \dim(K(A)) = 3$.

2 a) (IP1) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(IP2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(IP3) $\langle cx, y \rangle = c \cdot \langle x, y \rangle$

(IP4) $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

b) $\langle x,y \rangle = x^T A y, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(IP2) & (IP3) $\forall a, b$

(IP1) $\Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow a = b$

(IP3) $\Leftrightarrow$ alla huvudminorer positiva.

$M_1 = |1| = 1 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$

$M_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix} = \{a = b\} =$

$= 2 + a \cdot (-2a) = 2(1 - a^2).$

$M_3 > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1.$

Svar $a = b$ och $-1 < a < 1.$

3 a) $b_k \cdot b_\ell = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad k = \ell \\ 0 & \text{om} \quad k \neq \ell \end{cases}$

b) $[f]_{\underline{b}} = \left[[f(b_1)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [f(b_2)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [f(b_3)]_{\underline{b}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

c) $[f]_{\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}} \cdot [f]_{\underline{b}} \cdot T_{\underline{b}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}} [f]_{\underline{b}} T_{\underline{e}\underline{b}}^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} T_{\underline{e}\underline{b}} \\ \text{orto-} \\ \text{gonal} \end{array} \right\} =$

$= T_{\underline{e}\underline{b}} \cdot [f]_{\underline{b}} \cdot T_{\underline{e}\underline{b}}^{T} = \left\{ \begin{array}{l} T_{\underline{e}\underline{b}} \\ \text{symmetrisk} \end{array} \right\} =$

$= T_{\underline{e}\underline{b}} \cdot [f]_{\underline{b}} \cdot T_{\underline{e}\underline{b}} =$

$= T_{\underline{e}\underline{b}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \\ -8 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{svar.}$

4a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är diagonaliserbar omm det finns en bas $b_1, \dots, b_n$ i $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A

Ekvivalent är A diagonaliserbar omm det finns en diagonalmatris D och en inverterbar matris T så att $T^{-1} A T = D$.

b)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - a & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \lambda - a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda - 2).$$

A har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$ och $\lambda_3 = 2$.

$$E(a) = E(aI - A) = \operatorname{span}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{ty}$$

$$aI - A = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix} \; a-1 \; \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$E(2) = N(2I - A).$$

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2-a & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; 1 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2-a & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Så} \quad E(2) = \begin{cases} \operatorname{span}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, & \text{om } a = 2 \\[2ex] \operatorname{span}\begin{bmatrix}2\\4/(2-a)\\1\end{bmatrix}, & \text{om } a \neq 2. \end{cases}$$

$$E(1) = N(I-A) = \text{span}\begin{bmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Om $a=1$ eller $a=2$ finns ingen egenbas i $\mathbb{R}^3$ till A.

Om $a \neq 1$ och $a \neq 2$ utgör vektorerna

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4/(2-a) \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenbas i $\mathbb{R}^3$ till A.

Svar A diagonaliserbar omm $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

5 a) $(1, \mathbb{X}_2)$ är en bas i W.

$$b_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 \quad \text{ty}$$

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1.$$

$$b_2 = \frac{\mathbb{X}_2 - \langle \mathbb{X}_2, b_1 \rangle b_1}{\| \text{— '' —} \|} = \frac{\mathbb{X}_2 - \frac{1}{3} b_1}{\| \text{— '' —} \|} = \frac{3\mathbb{X}_2 - 1}{\| \text{— '' —} \|} =$$

$$= \frac{3\mathbb{X}_2 - 1}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (3\mathbb{X}_2 - 1).$$

$$\langle \mathbb{X}_2, b_1 \rangle = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$\|3\mathbb{X}_2 - 1\|^2 = \langle 3\mathbb{X}_2 - 1, 3\mathbb{X}_2 - 1 \rangle = \int_0^1 (3x^2 - 1)^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 (9x^4 - 6x^2 + 1) \, dx = \frac{9}{5} - \frac{6}{3} + 1 = \frac{4}{5}$$

$\underline{b} = (b_1, b_2)$ är en on-bas i W.

5 b) Sökt polynom är projektionen av f på W:

$$p = \mathrm{Proj}_W(f) = \langle f, b_1 \rangle b_1 + \langle f, b_2 \rangle b_2 .$$

$$\langle f, b_1 \rangle = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle f, b_2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^1 x \cdot (3x^2 - 1) \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

<u>Svar</u> Sökt polynom:

$$\frac{1}{2} b_1 + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (3 X_2 - 1) =$$

$$= \frac{15}{16} \cdot X_2 + \frac{3}{16} \cdot 1 .$$

6 a) Standardbas på $\mathcal{P}_2$ är $\underline{\mathbb{X}} = (1, \mathbb{X}, \mathbb{X}_2)$.

$$(F(1))(x) = 2$$

$$\Rightarrow \left[F(1)\right]_{\underline{\mathbb{X}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(F(\mathbb{X}))(x) = 2x - (x+1) = x - 1$$

$$\Rightarrow \left[F(\mathbb{X})\right]_{\underline{\mathbb{X}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(F(\mathbb{X}_2))(x) = 2x^2 - (x+1)\cdot 2x = -2x$$

$$\Rightarrow \left[F(\mathbb{X}_2)\right]_{\underline{\mathbb{X}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Svar</u> F:s matris i basen $\underline{\mathbb{X}}$ ges av

$$[F]_{\underline{\mathbb{X}}} = \left[\left[F(1)\right]_{\underline{\mathbb{X}}} \middle| \left[F(\mathbb{X})\right]_{\underline{\mathbb{X}}} \middle| \left[F(\mathbb{X}_2)\right]_{\underline{\mathbb{X}}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

b) <u>Kom ihåg</u>

$p_1, \dots, p_\ell$ bas i $\ker(F)$ $\iff$ $[p_1]_{\underline{X}}, \dots, [p_\ell]_{\underline{X}}$ bas i $N(A)$

$(A = [F]_{\underline{X}})$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så $x \in N(A) \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ Alltså är $N(A) = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Svar</u>: $p(x) = 1 + 2x + x^2$ är en bas i $\ker(F)$.

c) $\ker(F) \neq \{0\} \Rightarrow F$ ej injektiv.

F ej injektiv $\Rightarrow F$ ej bijektiv

Enl. dimensionssatsen är

$\dim(\operatorname{im}(F)) = \dim(\mathcal{P}_2) - \dim(\ker(F)) = 3$

Därmed är $\operatorname{im}(F) \neq \mathcal{P}_2$, så F är

ej surjektiv.

7) Vi använder $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ som beteckning för

en punkt i $\mathbb{R}^3$ istället för (x, y, z).

$x \in Y \iff q(x) = 5$,

där $q(x) = x^T A x$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda(\lambda-1)-1) - (\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

A har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

7) Låt b_1, b_2, b_3 vara on-bas av egenvektorer,

med $Ab_k = \lambda_k b_k$, $k=1,2,3$.

Låt $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$, $T = \left[b_1 \middle| b_2 \middle| b_3 \right]$.

Vi har $x \in Y \iff q(x) = 5$

$$\iff y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 = 5 \quad \text{för alla}$$
$$x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3.$$

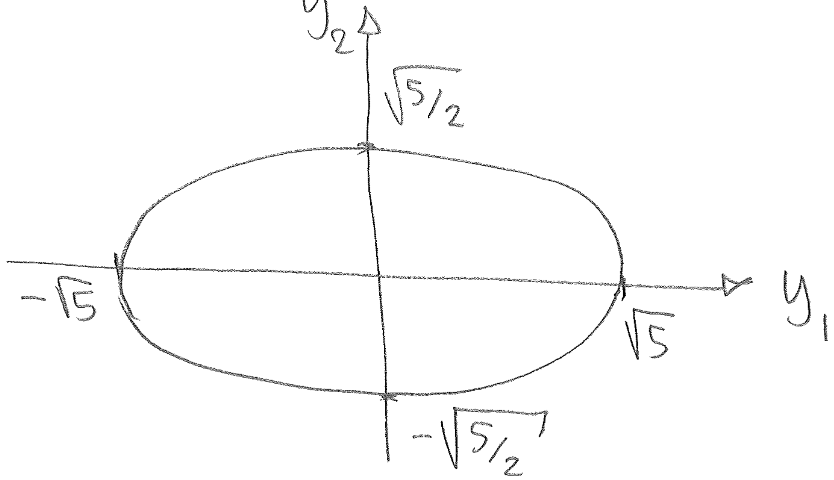
Y är en enmantlad hyperboloid. Varje snitt med ett plan $y_3 = c$ är en ellips:

$$y_1^2 + 2y_2^2 = 5 + c^2.$$

Snittet med $y_1 y_2$-planet är ellipsen

$$y_1^2 + 2y_2^2 = 5 \iff \frac{y_1^2}{5} + \frac{y_2^2}{5/2} = 1.$$

7)



Kortast avstånd till origo är $\sqrt{5/2}$ som

antas i $x = \pm\sqrt{5/2} \cdot b_2$.

<u>Bestäm b_2</u>

$E(2) = N(2I - A) = \text{span}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ty.

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Så } x \in E(2) \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Vi får $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kortast avst. till origo $\sqrt{5/2}$ antas

alltså i $x = \pm\sqrt{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \pm\sqrt{5/6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8) Låt $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Givna systemet kan skrivas

$$y' = Ay, \quad \text{med} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 3) + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

$$E(1) = N(I - A) = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ty}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$E(-1) = N(-I - A) = \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ty}$$

$$-I - A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Låt $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Låt $z = Ty$. Systemet $y' = Ay$ är ekvivalent med $z' = Dz$ som har allmän lösning
$$\begin{cases} z_1(x) = c_1 e^{x} \\ z_2(x) = c_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Givna systemet har allmän lösning

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Tz = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Vi ska ha $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svar
$$\begin{cases} y_1(x) = e^{x} + 2e^{-x} \\ y_2(x) = e^{x} + 4e^{-x} \end{cases}$$

9) Med T och D som i lösningen av uppgift 8 har vi

$$A^n = (TDT^{-1})^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} =$$

$$= T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -(-1)^n & (-1)^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & -1+2(-1)^n \end{bmatrix}.$$