UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Abrahamsson, 4713205, 0702-353722
(Styf, 4713192, 0707-253107)

Prov i matematik
IT, K, X, W, EI, MI, NVP samt fristående kurs.
Flerdimensionell analys
och Analys MN2
2005-12-09

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon. Varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

Följande två problem löses om motsvarande duggor ej är godkända.

1. Bestäm alla punkter (a, b, c) på ytan $F(x, y, z) = x^2+2y^2-3z^2 = 7$ sådana att tangentplanet till ytan i punkten (a, b, c) är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

2. Låt $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$ och beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^3 + y)dxdy.$$

Följande sex problem löses av alla och envar.

3. Undersök om ekvationen $f(x, y) = y^5x + y^3x^2 - 2 = 0$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$. Om så är fallet, beräkna också $y'(1)$.

4. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + 2x, x^2y + 2y)$ och låt γ vara kvartsellipsen $x^2 + 9y^2 = 9$ i första kvadranten, genomlöpt från punkten $(x, y) = (3, 0)$ till punkten $(x, y) = (0, 1)$. Beräkna integralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

5. Transformera differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

genom att införa nya variabler $u = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $v = xy$. Lös därefter ekvationen.

6. Låt C vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och planet $x + y + z = 0$, orienterad medurs sett från punkten $(0, 0, 10)$. Låt vidare $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

VAR GOD VÄND!

7. Låt S vara den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger mellan planen $z = 1$ och $z = 4$, med normalriktning i negativ z–led. Låt vidare $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz + x, yz + y, -z^2)$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

8. Låt V vara den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ som ligger mellan planen $z = -1/2$ och $z = 1/2$. Bestäm volymen av V.

GOD JUL OCH GOTT NYTT ÅR!

Svar till tentamen i Flerdimensionell analys och Analys MN2 2005-12-09

1. Vi måste ha att $\nabla F(a,b,c)$ är parallell med normalen till planet, det vill säga med vektorn $(1,1,1)$. Alltså skall, för något $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\nabla F(a,b,c) = (2a, 4b, -6c) = \lambda(1,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{\lambda}{2} \\ b &= \dfrac{\lambda}{4} \\ c &= -\dfrac{\lambda}{6} \end{cases}$$

Insatt i $F(a,b,c) = 7$ ger detta $\lambda^2 = 24 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{6}$. Punkterna där tangentplanet är parallellt med $x+y+z=0$ är alltså $(x,y,z) = \pm(\sqrt{6}, \sqrt{6}/2, \sqrt{6}/3)$.

2. Av symmetriskäl (x^3 är udda och området D är symmetriskt med avseende på y–axeln) är

$$I = \iint_D (x^3 + y)dxdy = \iint_D ydxdy.$$

Byt till polära koordinater: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$, $dxdy = rdrd\theta$. Vi får

$$I = \int_0^2 \int_0^\pi r^2 \sin\theta d\theta dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 [-\cos\theta]_0^\pi = \frac{16}{3}.$$

3. Vi har att

$$\nabla f(x,y) = (y^5 + 2xy^3, 5y^4x + 3y^2x^2) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (3,8)$$

som ej är parallell med x–axeln. Implicita funktionsatsen ger därför att sambandet $f(x,y) = 0$ definierar y som funktion av x i en omgivning av $(1,1)$. Implicit derivering med avseende på x ger:

$$y(x)^5 + 5y(x)^4xy'(x) + 2xy(x)^3 + 3y(x)^2x^2y'(x) = 0.$$

Insättning av $x = 1$, $y(1) = 1$ ger

$$3 + 8y'(1) = 0 \Leftrightarrow y'(1) = -\frac{3}{8}.$$

4. Låt $P(x,y) = xy^2 + 2x$ och $Q(x,y) = x^2y + 2y$. Vi får att

$$Q'_x - P'_y = 2xy - 2xy = 0.$$

Vidare är $\mathbf{F}(x,y)$ av klass C^1 på hela $\mathbf{R}^2$, som är enkelt sammanhängande, så $\mathbf{F}(x,y)$ är därmed konservativt (enligt sats). Vi bestämmer en potential:

$$\nabla\phi = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi'_x &= xy^2 + 2x \\ \phi'_y &= x^2y + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi &= \dfrac{x^2y^2}{2} + x^2 + h(y) \\ \phi'_y &= x^2y + 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi &= \dfrac{x^2y^2}{2} + x^2 + h(y) \\ x^2y + h'(y) &= x^2y + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi &= \dfrac{x^2y^2}{2} + x^2 + h(y) \\ h(y) &= y^2 + A,\ A \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En potential till $\mathbf{F}$ är alltså $\phi(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + x^2 + y^2$. Vi får

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \phi(0,1) - \phi(3,0) = -8.$$

5. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$$

0ch

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Alltså blir den transformerade ekvationen

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y\frac{\partial z}{\partial v} + xy^2\frac{\partial z}{\partial v} = x + y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)\frac{\partial z}{\partial v} = x + y \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{v}.$$

Integrera med avseende på v:

$$z(u,v) = \int \frac{1}{v}dv = \ln|v| + h(u),$$

där h är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Lösningen uttryckt i (x,y) blir

$$z(x,y) = \ln|xy| + h\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right).$$

6. Vi använder Stokes' sats. Först beräknas $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1).$$

Låt S beteckna den del av planet $x+y+z=0$ som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=1$, med nedåtriktad normal, det vill säga normalriktningen $\mathbf{n} = (-1,-1,-1)/\sqrt{3}$. Stokes' sats ger

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = .$$

$$= \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \frac{3}{\sqrt{3}}dS = \sqrt{3}\text{area}(S) = \sqrt{3}\pi,$$

där den sista likheten följer av att S är en cirkelskiva med radie 1.

7. Låt L beteckna ytan $z=4$, $x^2+y^2 \le 4$ med uppåtriktad normal, det vill säga normalen $\mathbf{n}_L = (0,0,1)$. Låt vidare B beteckna ytan $z=1$, $x^2+y^2\le 1$ med nedåtriktad normal, det vill säga normalen $\mathbf{n}_B = (0,0,-1)$. Ytan $S' = S\cup L\cup B$ är sluten och har utåtriktad normal. Vi kan använda Gauss' sats (Ω betecknar området innanför S'):

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz =$$

$$= \int\int\int_\Omega 2dxdydz = 2\int_1^4 \left(\iint_{D_z} dxdy\right)dz = 2\int_1^4 \text{area}(D_z)dz,$$

där D_z är cirkelskivan $x^2+y^2\le z$, som ju har area πz. Vi får alltså

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\int_1^4 \left(\iint_{D_z} dxdy\right)dz = 2\int_1^4 \pi z dz = 15\pi.$$

Men $S' = S \cup L \cup B$ ger att

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

så vi får att den sökta integralen är

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= \int\int\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dxdydz - \iint_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 15\pi - \iint_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

De två sista integralerna beräknas. På L ($z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 4$) är $z = 4$ och $\mathbf{n}_L = (0, 0, 1)$:

$$\iint_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{L} (5x, 5y, -16) \cdot (0, 0, 1) dS = -16 \iint_{L} dS = -16 \text{area}(L) = -64\pi.$$

På B ($z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$) är $z = 1$ och $\mathbf{n}_B = (0, 0, -1)$:

$$\iint_{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{B} (2x, 2y, -1) \cdot (0, 0, -1) dS = \iint_{B} dS = \text{area}(B) = \pi.$$

Alltså blir

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 15\pi + 64\pi - \pi = 78\pi.$$

8. Av symmetri skäl är volymen av V två gånger så stor som den del av klotet som ligger mellan xy–planet och planet $z = 1/2$. Kalla denna volym för V'. Vi har alltså

$$\int\int\int_{V} dxdydz = 2 \int\int\int_{V'} dxdydz = \int_{0}^{1/2} \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz = \int_{0}^{1/2} \text{area}(D_z) dz,$$

där D_z är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$, som ju har area $\pi(1 - z^2)$. Alltså är

$$\int\int\int_{V} dxdydz = 2 \int_{0}^{1/2} \pi(1 - z^2) dz = 2\pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{0}^{1/2} = \frac{11\pi}{12}.$$