

Lösningarna skall åtföljas av förklarande text.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon

Tentan består av 8 frågor värda 5p vardera; totalt 40 poäng.

Gränserna för betyg 3, 4, 5 är 18p, 25p respektive 32p.

På den här tentamen tillgodoräknas eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgiften.

Skrivtid: 08.00–13.00.

1. I denna uppgift ska du ange några definitioner av viktiga begrepp som gicks igenom under kursens gång. Du behöver inte använda exakt de ord som vi använde på föreläsningen, men din definition måste vara matematiskt entydig och korrekt.
 - a) Låt $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vara en talföljd och $a \in \mathbb{R}$. Ange definitionen av $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dvs $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerar mot a när n går mot oändligheten.
 - b) Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad på ett öppet intervall I med $a \in I$. Definiera vad som menas med att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = a$.
 - c) Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ som är definierad på \mathbb{R} med en hävbar diskontinuitet i $x = 1$. (OBS: I denna uppgift ingår att du visar att ditt exempel uppfyller alla krav som uppgiften ställer.)
2.
 - a) Ange Taylorserien av $\ln(1+x)$ kring $x = 0$. (Du får använda ordo eller ... så länge det framgår tydligt vad de resterande termerna är.)
 - b) Ange Taylorserien av $\ln(1+x^2)$ kring $x = 0$. (Se ovan)
 - c) Beräkna följaden gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) + 2\cos(x) - 2}{x^4}$$

3. Låt $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
 - a) Skissa grafen för $y = f(x)$ och bestäm alla eventuella lokala och globala extrempunkter, ekvationer för alla grafens asymptoter samt ange på vilka intervall $f(x)$ är växande resp. avtagande.
 - b) Har $f(x)$ något globalt minimum eller maximum på $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$? Bestäm denna/dessa eller förklara varför de inte finns.

4. Bestäm konvergensradie och konvergensintervall för följande potensserier

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n^2 \cdot 4^n}$$

Var god vänd

5. Betrakta området som ligger mellan x -axeln och kurvan $y = \sqrt{5 - x^2}$ och dessutom höger om linjen $x = 2$. Skissa området och beräkna volymen av den kropp som fås när området roteras kring y -axeln.

6. Beräkna följande generaliserade integral

$$\int_0^\infty \frac{7x + 1}{(x^2 + 1)(2x + 1)} dx$$

7. a) Hitta den allmänna lösningen $y = y(x)$ till ekvationen

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 2e^{2x}, \quad x > 0.$$

- b) Lös följande begynnelsevärdesproblem

$$y(x) = \int_0^x 1 + y(t) dt.$$

8. Bestäm den lösning $y = y(x)$ som uppfyller ekvationen

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2e^{-3x}$$

samt att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$.

9. (Hjälpuppgift) Gå igenom alla dina svar och kolla att motivering finns med där relevant. Denna uppgift ger inga poäng i sig självt men kan spara dig poängavdrag i andra uppgifter.