UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh
Ryszard Rubinsztein

Prov i matematik

Civilingenjörsprogrammen
K1, STS1, W1, X1, Frist,
KemiKand1, Lärarma1

LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2013–04–02

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = c+2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6-c. \end{cases}$$

(a) Bestäm för vilka värden på den reella konstanten c som ekvationssystemet har någon lösning.

(b) Lös ekvationssystemet för dessa värden på c.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(A + XB)^{-1} = C.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 2 \\ 1 & 2x & 2 & x \\ 2x & 2 & x & -1 \\ 2 & 4x & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Bestäm avståndet från punkten $P = (-2, 4, 3)$ till linjen

$$l: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Finn även den punkt på linjen l som ligger närmast punkten P.

Var god vänd!

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & (a+1)y & + & 2z & = & a+1 \\ ax & + & (2a+1)y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

6. Avgör för vilka värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ de fyra punkterna $A = (-3,\, 2,\, -2)$, $B = (a-2,\, 3,\, -1)$, $C = (-1,\, 3,\, a-2)$ och $D = (a+1,\, 5,\, a+3)$ ligger i samma plan.

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $\pi :\ x - y - z = 0$.

(a) Finn T:s standardmatris $[T]$.

(b) Finn även standardmatrisen för den sammansatta avbildningen $T \circ T$.

8. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har standardmatrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen T.

(b) Visa att T är en spegling i en linje genom origo i $\mathbb{R}^2$. Ange ekvationen för denna linje.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I 2013–04–02

1. (a) $c = -3$.
(b) Om $c = -3:$ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5 - t,\ 1 + t,\ t,\ 2),\ t \in \mathbb{R}$.

2.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{15}$.

4. Avståndet är $\sqrt{3}$. $Q = (-3, 3, 2)$.

5. $a \neq 1, 3:$ $(x, y, z) = \left(\frac{-2a}{a-1},\ 1,\ \frac{2a}{a-1}\right)$,
$a = 3:$ $(x, y, z) = (12 - 5t,\ -5 + 2t,\ t),\ t \in \mathbb{R}$,
$a = 1:$ inga lösningar.

6. $a = 1$ och $a = 3$.

7.

$$(a) \quad [T] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad [T \circ T] = [T] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (a) Egenvektorer $\vec{u} = t(3, 1),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,$ med egenvärdet $\lambda = 1$ och egenvektorer $\vec{v} = s(1, -3),\ s \in \mathbb{R},\ s \neq 0,$ med egenvärdet $\lambda = -1$.
(b) Spegling i linjen $l:$ $(x, y) = t(3, 1),\ t \in \mathbb{R}$.