① Vi visar (a) och (b) mha tabellen nedan

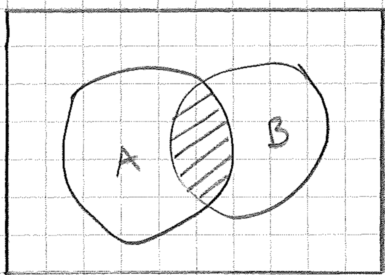
P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P\vee Q)$	$(\neg P)\wedge(\neg Q)$	$(\neg P)\vee(\neg Q)$
S	S	F	F	S	S	F	F	F	F
S	F	F	S	F	S	S	F	F	S
F	S	S	F	F	S	S	F	F	S
F	F	S	S	F	F	S	S	S	S
						①	②	③	④

(a) $\neg(P\wedge Q) \not\Longleftrightarrow (\neg P)\wedge(\neg Q)$ ty kolumnerna ① och ③ är olika.

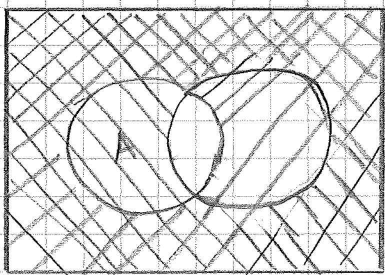
(b) $\neg(P\wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P)\vee(\neg Q)$ 〃 〃 ① 〃 ④ 〃 lika.

$\neg(P\vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P)\wedge(\neg Q)$ 〃 〃 ② 〃 ③ 〃 lika.

(c)

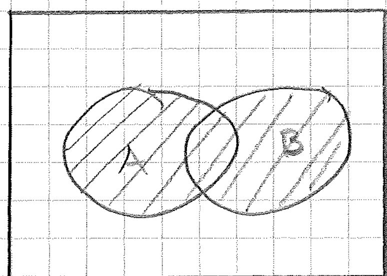


$/// = A\cap B$
vitt $= (A\cap B)^*$

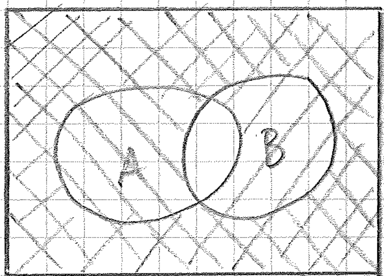


$/// = A^*$ $\backslash\backslash\backslash = B^*$
ifyllt $= A^*\cup B^*$

$(A\cap B)^* = A^*\cup B^*$



$/// = A\cup B$
vitt $= (A\cup B)^*$



$/// = A^*$ $\backslash\backslash\backslash = B^*$
$\# = A^*\cap B^*$

$(A\cup B)^* = A^*\cap B^*$

---

2 (a) Reflexivitet:

$x-x=0\in\mathbb{Z}$ för alla $x\in\mathbb{R}$, så $x\cong x$ för alla $x\in\mathbb{R}$.

Symmetri:

Om $x-y\in\mathbb{Z}$, gäller $y-x=-\underbrace{(x-y)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}$, så $x\cong y \Rightarrow y\cong x$.

Transitivitet:

Om $x-y\in\mathbb{Z}$ och $y-z\in\mathbb{Z}$, gäller $x-z=\overbrace{x-y}^{\in\mathbb{Z}}+\overbrace{y-z}^{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}$, så

$(x \cong y \wedge y \cong z) \Rightarrow x \cong z$. Därmed är $\cong$ en ekvivalensrelation.

(b) T ex 1 och 1/2.

(c) Vi söker alla tal $x \in \mathbb{R}$ så att $x \cong 3$, dvs $x - 3 \in \mathbb{Z}$. Men $x - 3 \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$, så den klass som innehåller 3 är $\mathbb{Z}$.

---

3. Kalla antalet kulor för K.

Uppdelning i 8 högar ger 7 kulor över: $K = 8x + 7$, $x \in \mathbb{N}$.

" " 15 " " 6 " " : $K = 15y + 6$, $y \in \mathbb{N}$.

Dvs $8x + 7 = 15y + 6 \iff -8x + 15y = 1$

Lös diofantisk ekvation:

$SGD(8, 15) = 1 \Rightarrow$ lösning finns.

Högerledet är redan 1. Euklides algoritm med 15 och 8 ger:

① $15 = 1 \cdot 8 + 7$

② $8 = 1 \cdot 7 + 1$

③ $7 = 7 \cdot 1 + 0$

Återsubstitution (dvs algoritmen baklänges):

$$1 \overset{②}{=} 8 - 1 \cdot 7 \overset{①}{=} 8 - 1 \cdot (15 - 1 \cdot 8) = 2 \cdot 8 - 15$$

Dvs $2 \cdot 8 - 15 = 1 \iff (-8) \cdot (-2) + 15 \cdot (-1) = 1$, så $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

är en lösning. Allmän lösning ges av $\begin{cases} x = -2 + 15n \\ y = -1 + 8n \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$

Vi ska nu bestämma K; vi använder någon av $K = 8x+7$ och $K = 15y + 6$:

$$K = 8x + 7 \Rightarrow K = 8(-2 + 15n) + 7 = 120n - 16 + 7 = 120n - 9$$

Om $n \geq 2$ är $120n - 9 \geq 240 - 9 > 200$, men $K \leq 200$.

Om $n \leq 0$ är $120n - 9 \leq -9 \leq 0$, men negativt K är ej rimligt.

Därmed är $n = 1$ den enda möjligheten, och $K = 120 - 9 = 111$.

Svar: 111 kulor.

4. Funktionen är ej injektiv, ty

$$g(1) = 1$$

$$g(2) = 2/2 = 1 \quad \text{så} \quad g(1) = g(2) \text{ men } 1 \neq 2.$$

Funktionen är surjektiv, ty för varje $m \in \mathbb{N}$ finns det ett jämnt tal n så att $g(n) = \frac{n}{2} = m$, nämligen $n = 2m$.

Svar: Funktionen är surjektiv men inte injektiv.

---

5. $t = (432)_{sju} = 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 4 \cdot 49 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 196 + 21 + 2 = 219.$

Entalssiffran i bas 11 är den rest 219^9 lämnar vid division med 11, dvs det minsta positiva tal kongruent med $219^9 \pmod{11}$

Vi ser att $219 \equiv -1 \pmod{11}$, ty $219 = 220 - 1 = 11 \cdot 20 - 1$.

Därmed är $219^8 \equiv (-1)^8 = 1 \pmod{11}$.

Svar: $t = \underline{219}$ i bas 10, och t^8 har, i bas 11, entalssiffran $\underline{\underline{1}}$.

---

6. Vi använder Euklides algoritm på $\begin{cases} f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 \\ g(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 5x - 10 \end{cases}$

Dividera $g(x)$ med $f(x)$:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x - 2} & \\ \hline 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 5x - 10 & 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 \\ -(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 15x) & \\ \hline -4x^3 + 2x^2 + 20x - 10 & \\ -(-4x^3 - 6x^2 + 20x + 30) & \\ \hline 8x^2 - 40 & \end{array}$$

Rest: $8x^2 - 40 = 8(x^2 - 5)$ ⇒

Dividera nu f(x) med resten $8x^2-40$, (eller hellre det associerade polynomet x^2-5, för att få enklare räkningar)

$$\begin{array}{l} 2x+3 \\ \hline 2x^3+3x^2-10x-15 \;\big\lfloor\; x^2-5 \\ -(2x^3-10x) \\ \hline 3x^2-15 \\ -(3x^2-15) \\ \hline 0 \end{array}$$

Sista nollskilda rest: x^2-5

Rest: $\underline{\underline{0}}$

Dvs x^2-5 är en SGD till f(x) och g(x).

Från divisionen ovan ser vi direkt att $f(x) = (x^2-5)(2x+3)$, dvs:

$$2x^3+3x^2-10x=15 \iff \overbrace{2x^3+3x^2-10x-15}^{f(x)}=0 \iff (x^2-5)(2x+3)=0$$

$$\iff x=\sqrt{5},\ x=-\sqrt{5} \text{ eller } x=-\frac{3}{2}$$

För att lösa den andra ekvationen måste g(x) faktoriseras. Dividera g(x) med SGD:

$$\begin{array}{l} 2x^2-x+2 \\ \hline 2x^4-x^3-8x^2+5x-10 \;\big\lfloor\; x^2-5 \\ -(2x^4-10x^2) \\ \hline -x^3+2x^2+5x-10 \\ -(-x^3+5x) \\ \hline 2x^2-10 \\ -(2x^2-10) \\ \hline 0 \end{array}$$

Dvs $g(x) = (x^2-5)(2x^2-x+2)$

Därmed är

$$2x^4-x^3-8x^2+5x=10 \iff \overbrace{2x^4-x^3-8x^2+5x-10}^{g(x)}=0 \iff (x^2-5)(2x^2-x+2)=0$$

$$\iff (x^2-5)=0 \text{ eller } x^2-\frac{x}{2}+1=0$$

$$\iff x=\pm\sqrt{5} \text{ eller } x=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-1}=\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$$

<u>Svar</u>: Den första ekvationen har lösningarna $x=\pm\sqrt{5}$ och $x=-3/2$,

den andra har lösningarna $x=\pm\sqrt{5}$ och $x=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$

7. <u>Basfall</u> $\underline{\underline{n=1}}$: $x_1 = 9,\ y_1 = 4 \Rightarrow x_1^2 - 5y_1^2 = 81 - 5\cdot 20 = 81 - 80 = 1$

Basfallet stämmer.

<u>IA</u>: antag att $x_n^2 - 5y_n^2 = 1$ för något $n \geq 1$.

<u>Induktionssteg</u>: Visa att $x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = 1$.

Vi har $x_{n+1} = x_1 x_n + 5y_1 y_n$ och $y_{n+1} = x_1 y_n + y_1 x_n$, så att

$$\underline{\underline{x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2}} = (x_1 x_n + 5y_1 y_n)^2 - 5(x_1 y_n + y_1 x_n)^2 =$$

$$= x_1^2 x_n^2 + 10x_1 x_n y_1 y_n + 25y_1^2 y_n^2 - 5(x_1^2 y_n^2 + 2x_1 y_n y_1 x_n + y_1^2 x_n^2) =$$

$$= x_1^2 x_n^2 + \cancel{10x_1 x_n y_1 y_n} + 25y_1^2 y_n^2 - 5x_1^2 y_n^2 - \cancel{10x_1 y_n y_1 x_n} - 5y_1^2 x_n^2 =$$

$$= x_1^2 x_n^2 - 5x_1^2 y_n^2 + 25y_1^2 y_n^2 - 5y_1^2 x_n^2 =$$

Bryt ut!

$$= x_1^2(x_n^2 - 5y_n^2) - 5y_1^2(x_n^2 - 5y_n^2)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{=} x_1^2 \cdot 1 - 5y_1^2 \cdot 1 = x_1^2 - 5y_1^2 = 81 - 80 = \underline{\underline{1.}}$$

Ovanstående och induktionsprincipen visar att $x_n^2 - 5y_n^2 = 1$ för alla $n \geq 1$.

---

8. Primtalsfaktoriseringen av $4n+3$ är $4n+3 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ där $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är primtal. Vad är primtalen kongruenta med (mod 4)? Det finns 4 möjligheter för varje p_i:

$p_i \equiv 0 \pmod 4$, dvs $4 \mid p_i$: ej möjligt ty p_i primtal.

$p_i \equiv 1 \pmod 4$, dvs $p_i = 4n_i + 1$ för något $n_i \in \mathbb{Z}$.

$p_i \equiv 2 \pmod 4$, dvs p_i jämnt : ej möjligt ty $4n+3$ är udda, så alla faktorer är udda

$p_i \equiv 3 \pmod 4$, dvs $p_i = 4n_i + 3$ för något $n_i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

Antag att det inte finns något primtal på form $4n_i+3$. Då måste alla p_i vara på form $4n_i+1$, enligt ovan. Men då är

$$4n+3 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = (4n_1+1)(4n_2+1)\cdots(4n_k+1) \equiv 1\cdot 1 \cdots 1 \equiv 1 \pmod 4$$

dvs $4n+3$ är produkten av k primtal, som alla är kongruenta med 1 (mod 4), så $4n+3 \equiv 1 \pmod 4$; men $4n+3 \equiv 3$ mod 4 $\Rightarrow$ ↯ (motsägelse).

Alltså måste minst ett p_i avvika och inte ha formen $4n_i+1$, så det måste vara kongruent med 3 (mod 4). $\square$