UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ingemar Kaj

PROV I MATEMATIK
Sannolikhet och statistik, 1MS321
2016-08-15

Hjälpmedel: Räknedosa, formelsamling och tabellsamling för kursen 1MS321.
För betygen 3, 4, resp 5 krävs normalt minst 18, 25, resp 32 poäng inkl ev bonuspoäng.

1. Betrakta två oberoende normalfördelade stokastiska variabler X och Y. Antag att X har väntevärde -4 och varians 5 medan Y har väntevärde -2 och varians 4. Beräkna sannolikheten att X är större än Y. (5p)

2. Antag att X och Y är oberoende stokastiska variabler som är Poisson-fördelade enligt
$$X \sim \mathrm{Po}(m_1 - m_2), \quad Y \sim \mathrm{Po}(m_1 + m_2),$$
där m_1 och m_2 är okända parametrar sådana att $m_1 > m_2$.
   a) Visa att $\widehat{m}_1 = (X+Y)/2$ är en väntevärdesriktig skattning av m_1. (2p)
   b) Om vi har observationer x av X och y av Y, ange medelfelet för $\widehat{m}_1$ (2p)
   c) Ange en väntevärdesriktig skattning av m_2 och beräkna dess medelfel. (2p)

3. Simulera fem observationer från en slumpvariabel X med täthetsfunktion
$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2,$$
och $f(x) = 0$ för övrigt, genom att utgå från följande fem slumptal från en likformig fördelning på intervallet $[0, 1]$:
$$0.8147, \quad 0.9058, \quad 0.1270, \quad 0.9134, \quad 0.6324.$$
Beräkna också väntevärdet $E(X)$ och jämför med medelvärdet av de simulerade observationerna. (5p)

4. Ett nätverksprotokoll överför paket som vardera består av en 20 bytes kontrolldel (*header*) och en datadel (*payload*) av varierande storlek. Vi antar att mängden data i olika paket kan antas oberoende och av storlek 80 bytes med sannolikhet 0.2, 200 bytes med sannolikhet 0.7 och 1500 bytes med sannolikhet 0.1.
   a) Beräkna väntevärdet av den totala storleken för ett paket. (1p)
   b) Beräkna protokollets *effektivitet*, dvs kvoten mellan förväntad datamängd och förväntad paketstorlek. (1p)
   c) Beräkna standardavvikelsen av den totala storleken för ett paket. (2p)
   d) Beräkna approximativt sannolikheten att totala storleken av 3 000 paket inte överstiger 1 Mbyte. (2p)

5. För Markovkedjan i diskret tid med tillstånd $\{0, 1, 2\}$ och övergångsmatris
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ \star & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & \star\star \end{pmatrix}$$
   a) ange de båda sannolikheter $\star$ och $\star\star$ som saknas i matrisen; (1p)
   b) rita upp Markovkedjans övergångsdiagram; (1p)
   c) beräkna Markovkedjans stationära fördelning. (4p)

6. Vi har mätdata $x_1, \ldots, x_n$ av söktider vid datalagring, där $n = 16$, $\bar{x} = 212.4$, $s = 18.45$ (enhet μs). Antag att värdena kommer från en $N(m, \sigma^2)$ normalfördelning med okänd standardavvikelse. Bilda ett 95% konfidensintervall för väntevärdet m. Jämför intervallet med det motsvarande intervall man får om vi istället antar att variansen är känd, $\sigma^2 = 400$. (6p)

7. Vi antar att olika användare loggar in på ett socialt web-forum vid tidpunkter som beskrivs an en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 1/10$ per minut. Deltagarna antas vara aktiva under oberoende tidsperioder (tid mellan inloggning och utloggning) som är exponentialfördelade med väntevärde 30 minuter. Systemet kan antas vara i jämvikt (dvs vi kan bortse från en viss starttid $t = 0$).

   a) Bestäm sannolikheten att minst en inloggning sker under en period på 15 minuter. (2p)

   b) I den modell som beskrivs, vad är fördelningen av antal aktiva deltagare? (2p)

   c) Om en användare loggar in vid en godtycklig tidpunkt, vad är sannolikheten att ingen annan deltagare är inloggad? (2p)