UPPSALA UNIVERSITET — PROV I MATEMATIK

Matematiska Institutionen — Sannolikhet och statistik, 1MS321

Ingemar Kaj — 2016-06-02

Hjälpmedel: Räknedosa, formelsamling och tabellsamling för kursen 1MS321.
För betygen 3, 4, resp 5 krävs normalt minst 18, 25, resp 32 poäng inkl ev bonuspoäng.

1. Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x) = x/8$ då $0 \leq x \leq 4$ och $f_X(x) = 0$ för övrigt.

   a) Beräkna väntevärdet $E(X)$. (2p)

   b) Beräkna $E(1/X)$, dvs förväntade värdet av $1/X$. (2p)

   c) Beräkna kovariansen $C(X, 1/X)$. (1p)

2. I ett kommunikationssystem överförs binära tecken 0 och 1. Vid mottagningen feltolkas 0:or med sannolikhet 0.1 och 1:or med sannolikhet 0.05. Antag att sekvenserna 000 och 111 sänds med sannolikheterna 0.4 respektive 0.6.

   a) Beräkna sannolikheten att sekvensen 011 tas emot. (2p)

   b) Beräkna sannolikheten att 000 sänts, givet att 011 tas emot. (2p)

   c) Beräkna sannolikheten att 111 sänts, givet att 011 tas emot. (1p)

3. Antag att X och Y är oberoende stokastiska variabler som är normalfördelade enligt

$$X \sim \mathrm{N}(m_1 - m_2, 4), \quad Y \sim \mathrm{N}(m_1 + m_2, 5),$$

   där m_1 och m_2 är okända parametrar.

   a) Visa att $\widehat{m}_1 = (X + Y)/2$ är en väntevärdesriktig skattning av m_1. (2p)

   b) Beräkna standardavvikelsen för $\widehat{m}_1$ (1p)

   c) Ange en väntevärdesriktig skattning av m_2 och beräkna dess standardavvikelse. (2p)

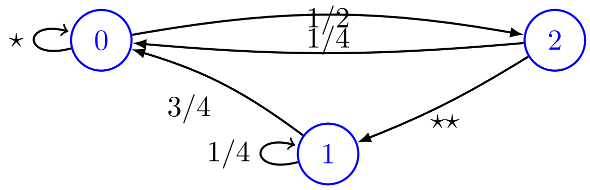
4. En datoradministratör vid en universitetsinstitution bedömer att antalet incidenter utanför ordinarie arbetstid som kräver omedelbara åtgärder inträffar enligt en Poisson-process med intensitet 0.5 tillfällen per vecka. Bestäm sannolikheten att det under en fyraveckorsperiod

   a) inte sker någon sådan incident; (2p)

   b) sker exakt en incident varje vecka; (3p)

5. Spelare av ett online-spel av typen "enarmad bandit" påbörjar en ny spelomgång genom att erlägga en insats på en euro. Spelet är konstruerat så att spelaren efter spelomgångens slut med sannolikhet 0.52 förlorar insatsen och med sannolikhet 0.48 återfår insatsen plus en euro. Total vinst/förlust är följaktligen skillnaden mellan antalen vunna och förlorade omgångar. Vidare kan olika spelomgångar betraktas som helt oberoende av varandra. Beräkna approximativt sannolikheten att en spelare efter 100 sådana spel fortfarande inte förlorat totalt mer än högst fem euro. (5p)

6. För Markovkedjan i diskret tid med tillstånd $\{0, 1, 2\}$ och övergångsdiagram



   a) ange de båda sannolikheter $\star$ och $\star\star$ som saknas i diagrammet; (1p)

   b) ange Markovkedjans övergångsmatris; (1p)

   c) beräkna Markovkedjans stationära fördelning. (3p)

7. För att uppskatta feldetekteringssannolikheten p för ett feltolererande inbyggt system, lade man slumpmässigt in 200 fel. Felsökningsmekanismen lyckades upptäcka och åtgärda 178 av dessa fel. Bestäm ett approximativt 95% konfidensintervall för p.

   (5p)

8. Låt X_1, X_2,... vara oberoende slumpvariabler sådana att X_n är antalet paket som anländer till en överföringslänk under tid-slot n. Länkens kapacitet är ett paket per slot. Paket som inte kan sändas omedelbart väntar i en kö och sänds ett i taget så snart det uppstår en tom slot. Alla X_n har samma fördelning: $P(X = 3) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, där sannolikheten p är en parameter. Följden Q_n = *antal paket i kö vid slutet av slot n* är en Markovkedja (som diskuterats under kursen). I jämvikt gäller relationerna

$$P(Q = 0) = \frac{1 - E(X)}{P(X = 0)}, \quad E(Q) = \frac{E(X^2) - E(X)}{2(1 - E(X))}.$$

   För vilka värden på p bedömer du att en sådan jämvikt, eller "steady-state", för Markovkedjan uppstår? I jämviktsfallet, vad är förväntade antalet paket som levereras per slot, dvs vad är systemets "throughput"? Vad händer om p är alltför stor? Motivera dina svar på frågorna. (5p)