UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Strängberg

Tentamen i matematik
Algebra 1
2016-03-22

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrannt motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt P, Q, R vara utsagor. Konstruera sanningsvärdestabellen för utsagan (3 poäng)

   $$P \Rightarrow (Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg R))$$

   (b) Låt A, B vara delmängder av ett universum X. Rita Venndiagram för mängderna $(A \cap B)^c$ och $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (2 poäng)

2. Visa att den Diofantiska ekvationen $420x - 441y = 63$ har lösningar. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)

3. (a) Låt a vara ett heltal sådant att $5 \mid (a+2)$. Visa att $5 \mid (a^2+1)$. (2 poäng)

   (b) Beräkna $(22101)_3 + (1221)_3$ och ge svaret i bas 3. (3 poäng)

4. Låt relationen R vara definierad på heltalen genom $xRy \Leftrightarrow 4 \mid (2x - 2y)$.

   (a) Visa att R är en ekvivalensrelation. (3 poäng)

   (b) Bestäm dess ekvivalensklasser. (1 poäng)

   (c) Relationen R är ekvivalent med en välkänd ekvivalensrelation som har förekommit i kursen. Vilken? (1 poäng)

5. Låt r vara ett reellt tal som uppfyller $r \neq 1$. Visa med induktion att

   $$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

   för alla naturliga tal n. (5 poäng)

6. Visa att funktionen $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ som ges av

   $$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{om } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{om } n < 0. \end{cases}$$

Var god vänd!

är en bijektion. (5 poäng)

7. Polynomet $3x^4 - x^3 + 3x^2 + 29x - 10$ har minst ett rationellt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

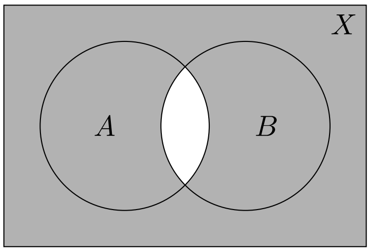
8. Bestäm ett reellt tal a så att ekvationen $x^3 + ax - 6 = 0$ har en ickereell rot med realdel -1. Lös sedan ekvationen fullständigt. (5 poäng)

Lösningar

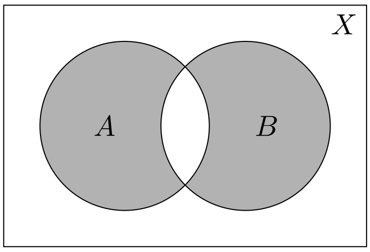
1. (a)

P	Q	R	$P \wedge \neg R$	$Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg R)$	$P \Rightarrow (Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg R))$
S	S	S	F	F	F
S	S	F	S	S	S
S	F	S	F	S	S
S	F	F	S	F	F
F	S	S	F	F	S
F	S	F	F	F	S
F	F	S	F	F	S
F	F	F	F	S	S

(b)



$(A \cap B)^c$



$(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$

2. Den Diofantiska ekvationen har lösningar om och endast om $\mathrm{SGD}(420, 441) \,|\, 63$. Vi använder därför Euklides algoritm för att finna $\mathrm{SGD}(420, 441)$:

$$441 = 1 \cdot 420 + 21$$
$$420 = 20 \cdot 21\,.$$

Den sista nollskilda resten är 21 så $\mathrm{SGD}(420, 441) = 21$. Eftersom $21 \,|\, 63$ har ekvationen lösningar. Vi förkortar båda leden av den Diofantiska ekvationen med 21 och får då den ekvivalenta ekvationen

$$20x - 21y = 3$$

där $\mathrm{SGD}(20, 21) = 1$. För att lösa den ställer vi upp hjälpekvationen

$$20x - 21y = 1\,.$$

Genom att använda Euklides algoritm ser vi att

$$21 = 20 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 21 - 20 = 20 \cdot (-1) - 21 \cdot (-1)$$

så en lösning till hjälpekvationen är $x = -1, y = -1$. Därför är $x = -3, y = -3$ en lösning till $20x - 21y = 3$. Samtliga lösningar till ekvationen beskrivs då av $x = -3 + 21n$, $y = -3 + 20n$.

3. (a) Vi kan använda oss av kongruensräkning modulo 5:

$$5 \mid (a+2) \iff a+2 \equiv 0 \mod 5 \iff a \equiv -2 \mod 5\,.$$

Om $a \equiv -2 \mod 5$ har vi $a^2 \equiv (-2)^2 = 4 \mod 5$ och därför

$$a^2+1 \equiv 4+1 \equiv 0 \mod 5 \iff 5 \,\big|\, (a^2+1)\ .$$

(b) Om vi skriver om alla tal till bas 10 kan vi beräkna additionen som vanligt och sedan skriva om summan till bas 3.

$$\begin{aligned}
(22101)_3 &= 1\cdot 3^0 + 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4\\
&= 1+9+54+162\\
&= 226\\
(1221)_3 &= 1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3^3\\
&= 1+6+18+27\\
&= 52\\
226+52 &= 278\,.
\end{aligned}$$

Vi har att $3^5 = 243$ så vi skriver

$$\begin{aligned}
278 &= 1\cdot 3^5 + 35\\
&= 1\cdot 3^5 + 1\cdot 3^3 + 8\\
&= 1\cdot 3^5 + 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0\\
&= (101022)_3\,.
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $(22101)_3 + (1221)_3 = (101022)_3$.

Alternativt kan vi räkna direkt i bas 3:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
 & & 2 & 2 & 1 & 0 & 1\\
+ & & & 1 & 2 & 2 & 1\\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2
\end{array}$$

4. (a) **Reflexiv**: Låt x vara ett heltal. Vi har då $2x-2x=0$, så $4 \mid (2x-2x)$ eftersom $0 = 0\cdot 4$ och därmed xRx. Eftersom x är ett godtyckligt heltal måste xRx gälla för alla heltal x och R är då reflexiv.

Symmetrisk: Om x, y är heltal sådana att xRy har vi $2x-2y=4k$ för något heltal k. Då har vi också $2y-2x = -(2x-2y) = -4k = 4(-k)$ så $4 \mid (2y-2x)$ och yRx. Alltså är R symmetrisk.

Transitiv: Låt x, y, z vara heltal sådana att xRy och yRz. Vi har då att $2x - 2y = 4k_1$ och $2y - 2z = 4k_2$ för några heltal k_1, k_2. Genom att addera 0 kan vi då skriva

$$2x - 2z = 2x + 0 - 2z = 2x - 2y + 2y - 2z = 4k_1 + 4k_2 = 4(k_1 + k_2)$$

så vi ser att $4 \mid (2x - 2z)$ och därmed xRz. Relationen R är därför transitiv.

Eftersom R är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är det en ekvivalensrelation.

(b) Eftersom $2x - 2y = 2(x - y)$ kan vi skriva $2x - 2y = 2(x - y) = 4k \Leftrightarrow x - y = 2k$, så xRy är ekvivalent med att $2 \mid (x - y)$, d.v.s. $x - y$ är jämnt. Vi kan därför dela upp problemet i två fall: då x är jämnt samt då x är udda.

Låt först x vara jämnt. Om y är jämnt så är även $x - y$ jämnt så då gäller xRy. Om y är udda är $x - y$ udda så xRy gäller inte. Därför utgör de jämna talen en ekvivalensklass.

Låt nu x vara udda. Om y är udda så är $x - y$ jämnt så xRy. Om y är jämnt är $x - y$ udda så xRy gäller inte. Däröfr utgör även de udda talen en ekvivalensklass.

Relationen R har alltså två ekvivalensklasser, de jämna heltalen samt de udda heltalen.

(c) Eftersom $xRy \Leftrightarrow 4 \mid 2x - 2y \Leftrightarrow 2 \mid x - y \Leftrightarrow x \equiv y \mod 2$ är relationen R ekvivalent med relationen kongruens modulo 2.

5. Låt $VL_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ och $HL_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Basfall: För $n = 0$ har vi $VL_0 = \sum_{k=0}^{0} r^k = r^0 = 1$ och $VL_0 = \frac{1-r}{1-r} = 1$ eftersom $r \neq 1$, så vi har $VL_0 = HL_0$.

Induktionsantagande: Antag att $VL_p = HL_p$ för något nbaturligt tal p.

Induktionssteg: För $n = p + 1$ har vi

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=0}^{p+1} r^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} r^k + r^{p+1} \\ &= \frac{1 - r^{p+1}}{1 - r} + r^{p+1} && \text{(enl. induktionsantagande)} \\ &= \frac{1 - r^{p+1} + (1 - r)r^{p+1}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{p+1} + r^{p+1} - r^{p+2}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{p+2}}{1 - r} \\ &= HL_{p+1}\,. \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ för alla naturliga tal n.

6. Vi vill visa att f är både injektiv och surjektiv.

   Injektiv: Antag att k_1, k_2 vara heltal sådana att $f(k_1) = f(k_2) = y$. Vi vill alltså visa att $k_1 = k_2$. Om y är jämnt måste $k_1 \geq 0$ och $k_2 \geq 0$ och vi får då

   $$f(k_1) = f(k_2) \iff 2k_1 = 2k_2 \iff k_1 = k_2\,.$$

   Om y är udda måste $k_1 < 0$ och $k_2 < 0$ och vi får då

   $$f(k_1) = f(k_2) \iff -2k_1 - 1 = -2k_2 - 1 \iff k_1 = k_2\,.$$

   Oavsett y måste vi alltså ha $k_1 = k_2$ så f är injektiv.

   Surjektiv: Låt y vara ett naturligt tal. För att visa att f är surjektiv vill vi alltså visa att det finns ett heltal x sådant att $f(x) = y$. Om y är jämnt finns det ett heltal $k_1 \geq 0$ sådant att $y = 2k_1$. För $x = k_1$ har vi därför $f(x) = f(k_1) = 2k_1 = y$ så vi har hittat ett sådant x. Om y är udda finns ett heltal $k_2 \geq 0$ sådant att $y = 2k_2 + 1 = 2(k_2 + 1) - 1 = -2(-k_2 - 1) - 1$ så om vi väljer $x = -k_2 - 1$ har vi $x < 0$ och därför $f(x) = f(-k_2 - 1) = -2(-k_2 - 1) - 1 = y$ så vi har hittat ett x som uppfyller $f(x) = y$. Detta täcker alla möjliga fall så f är surjektiv.

   Eftersom f är både injektiv och surjektiv så är den bijektiv.

7. Låt $f(x) = 3x - x^3 + 3x^2 + 29x - 10$. Eftersom polynomet f enbart har heltalskoefficienter måste alla rationella nollställen $\frac{p}{q}$ uppfylla $p \mid -10$ och $q \mid 3$. Möjliga

rationella nollställen är därför $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}$. Genom insättning finner vi:

$$\begin{aligned}
f(-2) &= 3(-2)^4 - (-2)^3 + 3(-2)^2 + 29(-2) - 10 \\
&= 48 + 8 + 12 - 58 - 10 \\
&= 0, \\
f\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 29\left(\frac{1}{3}\right) - 10 \\
&= \frac{1}{27} - \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + \frac{29}{3} - 10 \\
&= \frac{30}{3} - 10 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $x = -2$ och $x = \frac{1}{3}$ är nollställen. Enligt faktorsatsen är därför både $x + 2$ och $x - \frac{1}{3}$ delare till f. För att förenkla beräkningarna kan vi istället använda de associerade polynomen $x+2$ och $3x-1$. Vi multiplicerar faktorerna med varandra för att kunna förkorta med båda samtidigt:

$$(x+2)(3x-1) = 3x^2 + 5x - 2\,.$$

Vi utför nu polynomdivisionen:

$$\begin{array}{rl}
x^2 - 2x + 5 & \\
\hline
3x^4 - x^3 + 3x^2 + 29x - 10 & \multicolumn{1}{|l}{3x^2 + 5x - 2} \\
\cline{2-2}
-(3x^4 + 5x^3 - 2x^2) & \\
\hline
-6x^3 + 5x^2 + 29x - 10 & \\
-(-6x^3 - 10x^2 + 4x) & \\
\hline
15x^2 + 25x - 10 & \\
-(15x^2 + 25x - 10) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Divisionen har gått jämnt ut med kvoten $x^2 - 2x + 5$. Vi ser alltså att $f(x) = (x+2)(3x-1)(x^2 - 2x + 5)$. Enligt $p-q$-formeln har ekvationen $x^2 - 2x + 5$ har lösningarna $x = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$. Samtliga nollställen är alltså $x = -2, \frac{1}{3}, 1 \pm 2i$.

8. Ett allmänt komplext tal med realdel -1 har formen $x = -1 + bi$ där b är något reellt tal. Eftersom polynomet $x^3 + ax - 6$ är ett reellt polynom så måste även $x = -1 - bi$ vara ett nollställe om $x = -1 + bi$ är ett nollställe. Enligt faktorsatsen

måste därför polynomet vara delbart med $(x+1-bi)(x+1+bi) = x^2+2x+1+b^2$. Vi utför divisionen:

$$
\begin{array}{rl}
x-2 & \\
\hline
x^3+ax-6 & \big|\ x^2+2x+1+b^2 \\
-(x^3+2x^2+(1+b^2)x) & \\
\hline
-2x^2+(a-1-b^2)x-6 & \\
-(-2x^2-4x-2-2b^2) & \\
\hline
(a+3-b^2)x+2b^2-4 &
\end{array}
$$

Eftersom divisionen ska gå jämnt ut måste resten $(a+3-b^2)x+2b^2-4$ vara nollpolynomet så koefficienterna måste vara lika med 0. Detta ger oss ekvationerna $a+3-b^2=0$ och $2b^2-4=0$. Från den andra ekvationen får vi

$$2b^2-4=0 \iff b=\pm\sqrt{2}$$

vilket genom insättning i den första ekvationen ger

$$a+3-b^2 = a+1 = 0 \iff a=-1\,.$$

Divisionen gav oss även kvoten $x-2$ så vi vet också att $x=2$ är ett nollställe. Sammanfattningsvis får vi alltså $a=-1$ med nollställen $x=2,-1\pm\sqrt{2}i$.