

Príhody doktora Vojšiča
Epizóda ôsma: Vojšič Strikes Back

Každý seriál sa, žiaľ, musí raz skončiť a tak je to aj s Príhodami doktora Vojšiča. Aby bolo ukončenie seriálu pre jeho fanúšikov menej bolestivé, tvorcovia sa často rozhodnú ukončiť seriál happyendom. Tak to je aj v našom prípade.

Možno si pamätáte, že v tretej epizóde náš hrdina prezentoval v časopise Journal of Dubious Theorems nasledovné tvrdenie:

Vojšičova veta:

Predpokladajme, že pri vyhľadávaní kľúča k v BST skončíme v liste stromu. Tým nám v BST vznikne cesta so začiatkom v koreni stromu a koncom v spomínanom liste. Táto cesta nám rozdelí množinu kľúčov v BST do troch podmnožín:

podmnožina A obsahuje kľúče naľavo od cesty
podmnožina B obsahuje kľúče, ktoré ležia na ceste
podmnožina C obsahuje kľúče napravo od cesty

Nech a je kľúč z množiny A, b je kľúč z množiny B a c je kľúč z množiny C.

Potom platí:

$$a \leq b \leq c .$$

Vy ste ale poľahky odhalili, že toto tvrdenie nie je pravdivé. Usilovnou prácou v posledných týždňoch si ale doktor Vojšič vycibril svoje matematické myslenie a prichádza s nasledovnou vetou:

Vojšičova veta reloaded:

Predpokladajme, že pri vyhľadávaní kľúča k v BST skončíme v liste stromu. Tým nám v BST vznikne cesta so začiatkom v koreni stromu a koncom v spomínanom liste. Táto cesta nám rozdelí množinu kľúčov v BST do troch podmnožín:

podmnožina A obsahuje kľúče naľavo od cesty
podmnožina B obsahuje kľúče, ktoré ležia na ceste
podmnožina C obsahuje kľúče napravo od cesty

Nech a je kľúč z množiny A a c je kľúč z množiny C.

Potom platí:

$$a < c .$$

Prezradíme vám, že táto veta je konečne pravdivá! Vašou úlohou je ju dokázať. Na cvičení je vás približne 20, cvičenie trvá 100 minút, preto na získanie 3 bodov budete musieť do 5 minút odprezentovať váš dôkaz tak, aby ste cvičiaceho presvedčili, že veta platí. Ak sa vám to do 5 minút nepodarí, body nezískate. Dôkaz môžete mať predpripravený.

Riesenie

Vo Vojsicovej vete reloaded sa spomína cesta, ktorá končí v nejakom liste a rozdeľuje strom na časti A, B, C. Označíme list spomínaný v predchádzajúcej vete ako b . Cestu spomínanú v predchádzajúcej vete budeme označovať ako „cestu do kľuča b “.

Nech a je kľúč z množiny A a c je kľúč z množiny C.

Uvažujme teraz cestu do kľuča a . Nech v_a je kľúč, v ktorom sa cesta do kľuča a oddelí od cesty do kľuča b . Vsimnime si nasledovne:

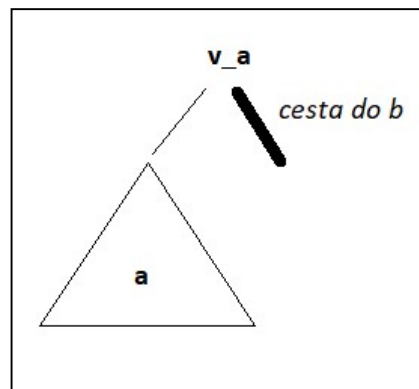
Pozorovanie 1:

Kedže kľúč a sa nachádza naľavo od cesty do kľuča b , určíme, že cesta do kľuča a ide z kľuča v_a doľava.

Preto platí, že **a sa nachádza v ľavom podstrome kľuča v_a .**

Pozorovanie 2:

Cesta do kľuča b pokračuje z v_a doprava.

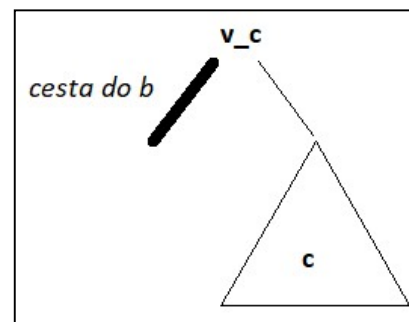


Uvažujme teraz podobne cestu do kľuča c . Nech v_c je kľúč, v ktorom sa cesta do kľuča c oddelí od cesty do kľuča b . Vsimnime si nasledovne:

Pozorovanie 3:

Kedže kľúč c sa nachádza napravo od cesty do kľuča b , určíme, že cesta do kľuča c ide z kľuča v_c doprava.

Preto platí, že **c sa nachádza v pravom podstrome kľuča v_c .**



Pozorovanie 4:

Cesta do kľuča b pokračuje z v_c doľava.

Môžu teraz nastať dve možnosti:

Bud

v_a sa nachádza v strome vyššie ako v_c

alebo

v_c sa nachádza v strome vyššie ako v_a

Predpokladajme najprv, že vrchol v_a sa nachádza v strome vyššie ako vrchol v_c . Z Pozorovania 2 vyplýva, že v_c (a teda aj c) sa nachádzajú v pravom podstrome vrcholu v_a . Z Pozorovania 1 zase vieme, že a sa nachádza v ľavom podstrome kľuča v_a . Dostávame teda, že:

$$a < v_a < c$$

Uvažujme teraz druhú možnosť, že vrchol v_c sa nachádza v strome vyššie ako vrchol v_a . Z

Pozorovania 4 vyplýva, že v_a (a teda aj a) sa nachádzajú v ľavom podstrome vrcholu v_c . Z

Pozorovania 3 zase vieme, že c sa nachádza v pravom podstrome kľuča v_c . Dostávame teda, že:

$$a < v_c < c,$$

a vidíme, že veta platí v oboch prípadoch.