

Системы счисления.

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков (цифр) и правила действий над числами (сложение, вычитание итд) в

Алфавит системы счисления - знаки, используемые в записи числа в определенной системе счисления.

Основание системы счисления – количество знаков, используемых в записи числа в определенной системе счисления.

В десятичной системе счисления используется 10 знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

В восьмеричной системе счисления используется 8 знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

В двоичной системе счисления используется 2 знака: 0, 1

В шестнадцатеричной системе счисления используется 16 знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Рассмотрим алгоритмы перевода из одной системы счисления в другую.

1. Перевод из двоичной системы счисления в десятичную.

Для того, чтобы перевести число из двоичной системы в десятичную нужно сначала подписать разряды цифр числа справа на лево начиная с нуля. Рассмотрим алгоритм на примере перевода числа 1010111011_2 :


$$\begin{array}{cccccccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}_2 =$$

Для удобства всегда советую вторым шагом вычеркнуть нули, это позволит сократить время решения, а так же позволит избежать глупых математических ошибок, когда ,умножая ноль на один, ученики получают один:


$$\begin{array}{cccccccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}_2 =$$

Следующим шагом нужно записать сумму чисел, полученную в результате умножения каждой цифры числа на 2 в степени подписанного разряда над этой цифрой:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

$$1010111011_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^9 =$$

Последним шагом осталось посчитать сумму:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

$$1010111011_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^9 = 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 128 + 512 = 699_{10}$$

2. Перевод из любой другой системы счисления в десятичную.

Для того, чтобы перевести число из любой другой системы счисления в десятичную, нужно воспользоваться таким же алгоритмом как и при переводе из двоичной, но теперь мы будем умножать не на два в степени разряда, а на основание системы счисления из которой переводим.

Пример 1:

Переведем число 76_8 из восьмиричной системы счисления в десятичную.

Подпишем разряды чисел:

$$\begin{array}{cc}
 1 & 0 \\
 7 & 6
 \end{array}$$

$$76_8 =$$

Запишем сумму чисел, полученную в результате умножения каждой цифры числа на 8 в степени подписанного разряда над этой цифрой:

$$\overset{10}{76}_8 = 6 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 = 6 + 56 =$$

Посчитаем сумму:

$$\overset{10}{76}_8 = 6 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 = 6 + 56 = 62_{10}$$

Ответ: 62_{10}

Пример 2:

Переведем число $1A_{16}$ из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную.

Подпишем разряды чисел:

$$\overset{10}{1A}_{16} =$$

Запишем сумму чисел, полученную в результате умножения каждой цифры числа на 16 в степени подписанного разряда над этой цифрой, :

$$\overset{10}{1A}_{16} = 10 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^1 =$$

Обратите внимание!!!

В шестнадцатеричной системе счисления 16 разных цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F), а в десятичной всего 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Поэтому когда мы записываем сумму чисел цифры A, B, C, D, E, F мы должны заменить на аналогичные цифры в десятичной системе счисления: A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15 (в примере мы заменили цифру A на 10)

Посчитаем сумму:

$$1A_{16} = 10 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^1 = 10 + 16 = 26_{10}$$

Ответ: 26_{10}

3. Перевод из десятичной системы счисления в двоичную.

Перед тем, как приступить к разбору алгоритма перевода из десятичной системы счисления в двоичную, нужно вспомнить тему по математике, которую все ученики проходят в начальной школе «Деление с остатком».

Разделим число 232 на 4:

The image shows a handwritten long division of 232 by 4. The divisor 4 is written to the left of the dividend 232. The quotient 77 is written above the dividend, and the remainder 1 is written below the dividend. The division is performed in two steps: first, 4 goes into 23 seven times (28), and then 4 goes into 12 three times (12). The final remainder is 1. The quotient 77 is circled in red, and the remainder 1 is also circled in red. An arrow points from the text 'Целая часть' (Integer part) to the circled 77, and another arrow points from the text 'Остаток' (Remainder) to the circled 1.

При делении 232 на 4 мы получаем 77 и 1 в остатке (мы не продолжаем делить, в ответе должно быть целое число, а не дробное)

Для того, чтобы перевести число из десятичной системы счисления в двоичную, сначала нужно число разделить на два и обвести остаток (ноль - это тоже остаток).

Рассмотрим на примере перевода числа 28_{10} :

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ -2 & 14 \\ \hline 8 & \\ -8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Целая часть от деления равна 14, теперь мы должны 14 снова делить на 2:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ -2 & 14 & 2 \\ \hline 8 & -14 & 7 \\ -8 & & \\ \hline 0 & 0 & \end{array}$$

Деление продолжается до тех пор, пока целая часть не станет равна нулю:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ -2 & 14 & 2 \\ \hline 8 & -14 & 7 & 2 \\ -8 & & 6 & 3 & 2 \\ & & -6 & & \\ & & 0 & & \\ & & 1 & & 2 \\ & & -2 & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & -0 & & \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

закончили

Последним шагом записываем ответ. Ответом являются остатки, записанный в обратном порядке:

Handwritten work on grid paper showing the conversion of the decimal number 28 to binary using the division-by-2 method. The divisions are written in a staircase pattern, with the remainders circled in red. A green arrow points from the remainders to the final binary result, 11100_2 .

28	2
-2	14
-8	14
-8	0
0	

2	7	2
-14	7	2
-8	6	3
0	1	2

2	3	2
-6	3	2
-4	2	1
0	1	0

2	1	0	2
-2	1	0	0
0	1	0	0

11100_2

Получается ответ 11100_2

Не всем ученикам удобно записывать решения в один большой столбик, поэтому предлагаю еще один вариант записи, в котором каждый столбик расписан отдельно:

4. Перевод из десятичной системы счисления в любую другую систему счисления.

Алгоритм перевода из десятичной системы счисления в любую другую аналогичен переводу в двоичную систему счисления, отличается он тем, что мы делим теперь не на 2, а на основание системы счисления в которую переводим.

Рассмотрим на примере перевода десятичного числа 26_{10} в троичную систему счисления:

26	3
24	8
2	

8	3
6	2
2	

2	3
0	0
2	

2 2 2₃

Ответ: 222_3

Соответственно, если мы переводим в пятеричную систему счисления, то делим на 5 и записываем остатки, в восьмеричную – на 8 итд.