

## 1. システム概要と特徴

Java の OpenGL ラッパライブラリ lwjgl を用いて，図 1 に示すようなガラス状態の物体の運動をシミュレートするプログラム Alum を制作した．Alum はガラス状態の物体のシミュレートを行う「ガラスモード」と水面のシミュレートを行う「水面モード」がある．

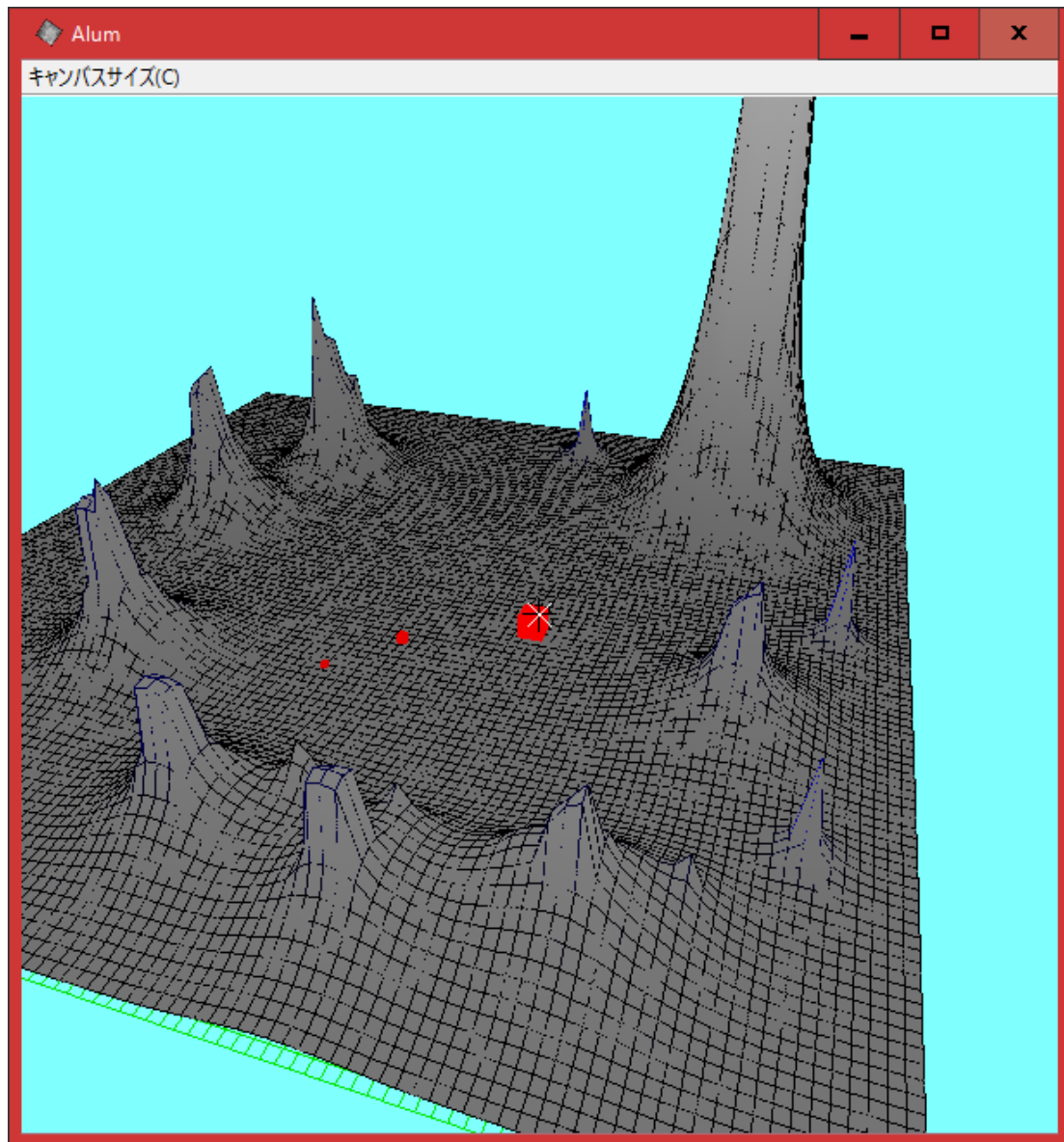


図 1 Alum の起動画面

## 1.1 ガラスモード

ガラスモードは液体の乗った板を「重量」「水位」「(水位の上下方向の) 速度」という三つの変数を持つセルに 2 次元的に分割し、これを有限要素法によってシミュレートするモードである。本来ならば窓ガラスに付着した水滴 (図 2) のシミュレータとして制作される予定であったが、水滴の爽快な運動には各セルが水平方向での速度を保持していなければならず、理論が困難となるためガラスそのもの (図 3) のシミュレータとなった。



図 2 窓ガラスに付着した水滴の例<sup>[1]</sup>



図 3 ガラス状態のイメージ<sup>[2]</sup>

## 1.2 水面モード

ガラスモードで採用された変数から重量のパラメータを除き、「水位」「速度」としたバージョンも作成した (図 4)。その結果、最終的に普通の波紋シミュレータとなった。

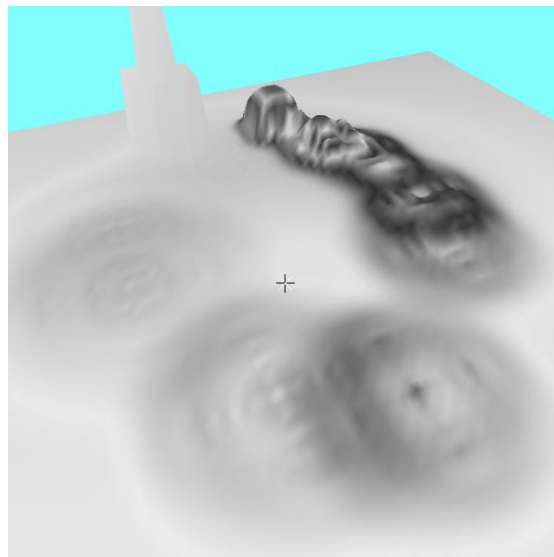


図 4 水面モードの実行画面

## 1.3 操作方法

### 1.3.1 共通

視点移動は Minecraft のクリエイティブモードでの操作方法を参考にし，表 1 のように設定した．実行中マウスは常にプログラムによって捕捉され利用不可となっているが，ポーズ状態にすることでマウスを開放することができる（図 5）．ウィンドウサイズは可変で，サイズを変えるとビューポートも自動的に変更される．

表 1 操作方法

モード	入力	動作
共通	カーソル移動	カメラの向きの移動
共通	W・S・A・D	前後左右への水平移動
共通	Shift・スペース	上下への鉛直移動
共通	ホイール移動	カメラの向きへの前進・後退
共通	F12	視点のリセット
共通	Ctrl	移動操作を 4 倍速化
共通	Escape・E	ポーズ切り替え
共通	F1	曲面下のグリッドの表示／非表示（図 6 緑）
共通	F2	曲面上のグリッドの表示／非表示（図 6 黒）
共通	F3	曲面の表示／非表示（図 6 白）
共通	中央クリック	すべてのセルのリセット
共通	F4	シミュレートの一時的停止／再開
共通	P	スクリーンショットの撮影
共通	+・-	板を傾ける
共通	0	板の角度のリセット
ガラス	左クリック・1・2	重量を増やす隕石の発射
ガラス	右クリック	重量を減らす隕石の発射
水面	左クリック・1～3	変位を増加させる隕石の発射
水面	右クリック・4～6	速度を増加させる隕石の発射
共通	F5	ガラスモードに切り替え
共通	F6	水面モードに切り替え



図5 ポーズ画面

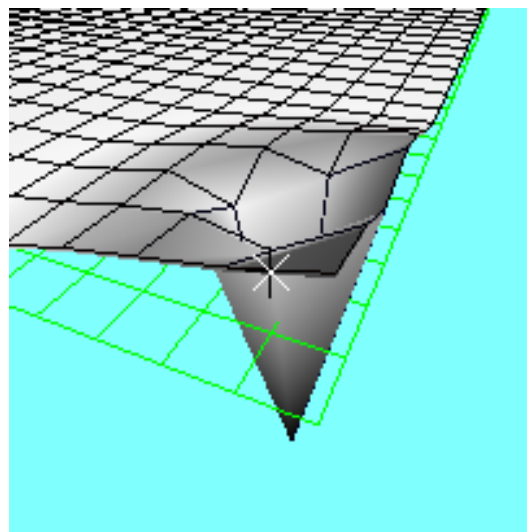


図6 グリッドと曲面

## 1.4 入手

プログラムは <https://github.com/MirrgieRiana/mirrg.application.waterdrop.alum/releases> からダウンロードできる。プログラム本体となる実行可能 JAR「mirrg.application.waterdrop.alum- (最新のバージョン番号) .jar」のほかに、実行環境に合わせて OpenGL のネイティブライブラリである liblwjgl.so ・ liblwjgl64.so ・ libopenal.so ・ libopenal64.so ・ lwjgl.dll ・ lwjgl64.dll ・ liblwjgl.dylib ・ openal.dylib が必要である。

## 2. システム動作説明

### 2.1 共通

板全体は  $100 \times 100 = 10000$  個のセルに分かれており、セルはいくつかの変数を持つ。セルの更新処理は「順次処理」と「ランダム処理」に分かれており、順次処理では隣接するセルを参照しない処理をすべてのセルに対して、ランダム処理では隣接するセルを参照する処理を 10000 回ランダムな座標に対して行う。

## 2.2 ガラスモード

三つのセルの変数「重量」「水位」「(水位の上下方向の) 速度」があり、板全体での重量の合計はシミュレート中常に一定で各セルの状態は重量を常に意識しながら更新される。順次処理は「密度によって速度が更新される処理」「収縮処理」「速度によって水位が更新される処理」「面積を最小にする方向に加速する処理」「抵抗によって速度が遅くなる処理」「乾燥・湿潤処理」にわかれており、ランダム処理では「水位が低いほうへ流れる処理」「密度の低いほうに重量が移動する処理」に分かれている。

## 2.3 水面モード

二つのセルの変数「水位」「(水位の上下方向の) 速度」がある。順次処理は「速度によって水位が更新される処理」「抵抗によって速度が遅くなる処理」「水位が自然に標準に近づく処理」「面積を最小にする方向に加速する処理」に分かれており、ランダム処理は行わない。このモードでは都合上隣接するセルを参照する処理も順次処理で処理する。

## 3. 数理モデルの詳細

各処理は代入によって各変数を更新する。以下では代入を「 $\leftarrow$ 」で表す。

### 3.1 ガラスモード

変数は $w$  (重量 : weight)  $\cdot l$  (水位 : level)  $\cdot v$  (速度 : velocity) に分かれている。  $w \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $w = 0 \Leftrightarrow l = 0$  である。  $w \neq 0$  のとき、そのセルは濡れていると呼び、そうでない場合は乾いていると呼ぶ。

#### 3.1.1 密度によって速度が更新される処理

この処理は濡れている場合にのみ行う。水面を風船の膜とみなし、水と空気の圧力の差によって膜が動かされることを表現することを狙う。膜に加速度を与えるのは両側の分子の衝突 ( $f_w$ ,  $f_a$ ) であり、その回数は水側は密度に比例し、空気側は常に一定である。

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{w}{l} \\ f_a &= 1 \\ f &= f_w - f_a \\ v &\leftarrow v + f \end{aligned}$$

### 3.1.2 収縮処理

この処理は濡れている場合にのみ行う。水分子が水素結合などの働きによって圧力を加えずとも一定の密度になるようにまとまろうとする性質を表現することを狙う。この処理は密度が 1 未満 ( $\frac{w}{l} < 1$ ) の場合にのみ行われる。

$$A = -0.5 \\ v \leftarrow v + \left(l - \frac{w}{l}\right) * A$$

### 3.1.3 速度によって水位が更新される処理

この処理は濡れている場合にのみ行う。この処理では水位に速度を加算することで更新を行うが、このシミュレータでは時間での分解能が小さくそれによる計算誤差が激しいため、エネルギーの概念を取り入れて処理の前後でエネルギーが変わらないように更新を行う。ここで一定にしなければならないエネルギーは速度による運動エネルギー ( $K$ ) と水位による圧縮エネルギー ( $U$ ) の和である。

運動エネルギーは次の式で表す。

$$K = wv^2$$

圧縮エネルギーは、3.1.1 項での力  $f$  を水位で積分することで求める。

$$U = \int f dl = \int \left(\frac{w}{l} - 1\right) dl = w \log l - l + C_0$$

これらの和が一定であるので、更新前後での  $l \cdot v$  をそれぞれ  $l_1 \cdot v_1$ ,  $l_2 \cdot v_2$  としたとき、

$$wv_1^2 + w \log l_1 - l_1 + C_0 = wv_2^2 + w \log l_2 - l_2 + C_0 \\ v_2 = \pm \sqrt{v_1^2 + \log l_1 - \log l_2 + \frac{l_2 - l_1}{w}}$$

が成り立つ。

水位の更新自体は速度に定数をかけて加算すればよいので、この処理での更新は次のようになる。この更新式は  $v_1 \ni 0$  において  $v_2$  に符号の誤りを生じさせると考えられるが、 $v_2 - (-v_2) \ni 0$  でもあるため無視する。

$$B = 0.01 \\ l_2 = l + Bv \\ l \leftarrow l_2 \\ v \leftarrow v_2 \frac{v_1}{|v_1|}$$

### 3.1.4 面積を最小にする方向に加速する処理

この処理は滞っている場合にのみ行う。この処理はあるセルとその4隣接のセルの水位 $l_n$ において、面積を小さくする方向に速度を更新するものである。ここで、面積は簡略化して図7のように二つのセルの水位の差と水平距離によって定まる線分の長さを表すものとする。すなわち、

$$f(l) = \sum_{n=1}^4 \sqrt{1 + (l_n - l)^2}$$

が小さくなるように $v$ を更新すればよい。この処理での更新は次のようになる。

$$C = -1$$
$$v \leftarrow v + C \frac{df(l)}{dl}$$

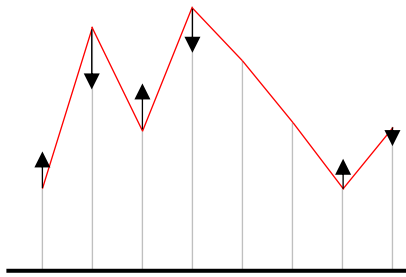


図7 面積のイメージ

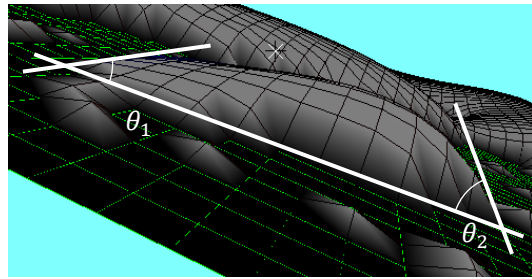


図8 水滴の進行と後退の境界

### 3.1.5 抵抗によって速度が遅くなる処理

この処理は滞っている場合にのみ行う。この処理によって、板全体のエネルギーは徐々に減少し、水面の揺れは次第に収まっていく。

$$D = 0.95$$
$$v \leftarrow Dv$$

### 3.1.6 乾燥・湿潤処理

乾燥処理は濡れている場合にのみ、湿潤処理は乾いている場合にのみ行う。水滴の境界の移動は、図 8 における $\theta_1$ と $\theta_2$ が一定の値を外れた場合に発生するが、ここでは前進は隣接マスの水位を閾値と比較することによって、後退は水位が 0 になる寸前であることを判定することによって行う。乾燥処理はセルが $w < 0.00001$ であった場合にセルを乾かす処理であり、湿潤処理は隣接するいずれかのセルが $w > 2$ であった場合にその隣接するセルの重量と水位の半分を貰う処理である。

### 3.1.7 水位が低いほうへ流れる処理

この処理はランダムなセル ( $w_1 \cdot l_1 \cdot v_1$ ) とその隣のいずれかランダムなセル ( $w_2 \cdot l_2 \cdot v_2$ ) をとり、両方のセルが濡れている場合にのみ行う。この処理では板の傾き $\theta$ を考慮したうえで二つのセルの水位差に比例して、質量が下流に移動する。

板の傾きを考慮した水位差は図 9 の $\Delta l$ に相当し、それは次のようにして求めることができる。

$$\Delta l = |l_1 - l_2| + \tan \theta$$

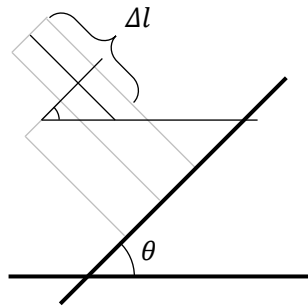


図 9 板の傾きを考慮した水位差

この処理での更新は次のようになる。ここで、 $\Delta x$ は隣接セルが下流であった場合に 1、上流であった場合に-1、そうでない場合に 0 となる。

$$\begin{aligned} E &= -0.1 \\ \Delta w &= \max(\min(E(w_2 - w_1 + \Delta x \tan \theta), w_1), -w_2) \\ w_1 &\leftarrow w_1 + \Delta w \\ w_2 &\leftarrow w_2 - \Delta w \end{aligned}$$

この処理によって、図 10～図 13 のように水滴のような運動がみられる。



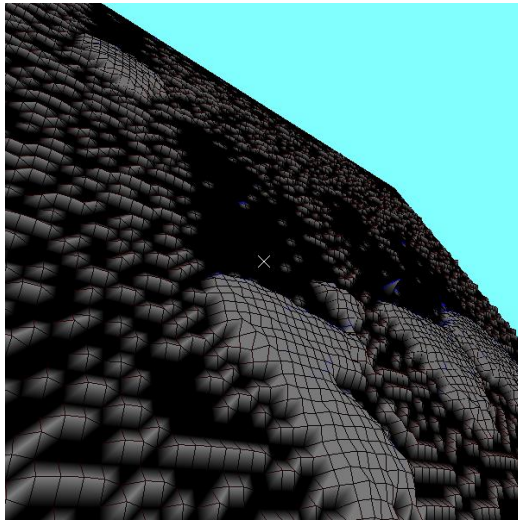


図 1 0 壁を垂れる巨大な水滴

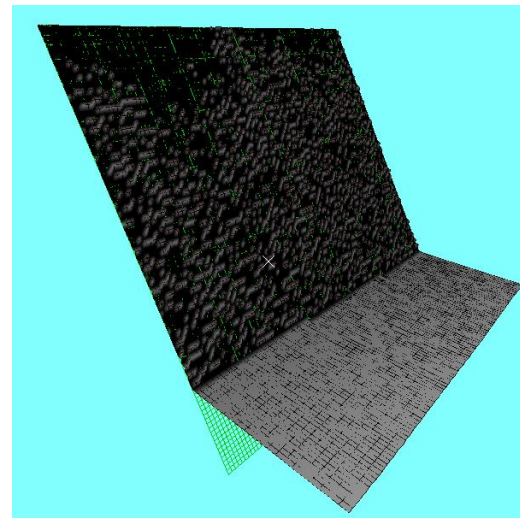


図 1 1 傾けた板の角に溜まる液体

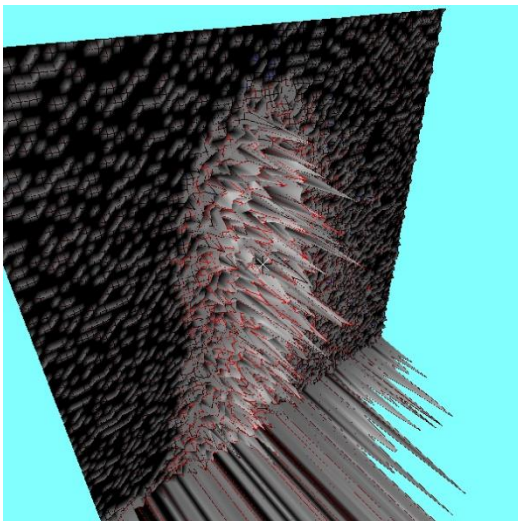


図 1 2 垂直な壁を下る濁流

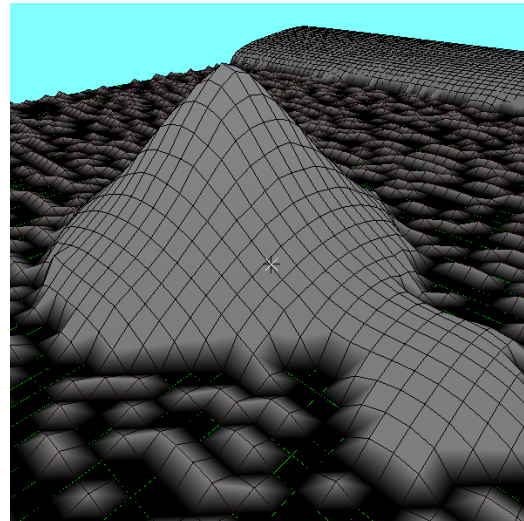


図 1 3 平坦な板の上で広がっていく山

### 3.1.8 密度の低いほうに重量が移動する処理

この処理はランダムなセル ( $w_1 \cdot l_1 \cdot v_1$ ) とその隣のいずれかランダムなセル ( $w_2 \cdot l_2 \cdot v_2$ ) をとり、両方のセルが濡れている場合にのみ行う。この処理では、二つのセルの間で密度が等しくなるように重量を移動させることを目標として重量の微小な移動を行う (図 1 4)。ここで、目指すべき密度  $d$  は

$$d = \frac{w_1 + w_2}{l_1 + l_2}$$

であり，これに $l_1 \cdot l_2$ をかけたものが各セルが目指すべき重量 $w_1 \cdot w_2$ である．そして，各セルの目標までの重量 $\Delta w_1 \cdot \Delta w_2$ は

$$\begin{aligned}\Delta w_1 &= l_1 d - w_1 \\ \Delta w_2 &= l_2 d - w_2\end{aligned}$$

であるが，

$$\begin{aligned}\Delta w_1 &= l_1 \frac{w_1 + w_2}{l_1 + l_2} - w_1 \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2} \\ &= \frac{w_1 l_1 + w_2 l_1}{l_1 + l_2} - \frac{w_1 l_1 + w_1 l_2}{l_1 + l_2} \\ &= \frac{w_2 l_1 - w_1 l_2}{l_1 + l_2} \\ \Delta w_2 &= l_2 \frac{w_1 + w_2}{l_1 + l_2} - w_2 \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2} \\ &= \frac{w_1 l_2 + w_2 l_2}{l_1 + l_2} - \frac{w_2 l_1 + w_2 l_2}{l_1 + l_2} \\ &= \frac{w_1 l_2 - w_2 l_1}{l_1 + l_2} \\ &= -\Delta w_1\end{aligned}$$

となるため，双方のセルは同じだけ重量が変移することになる．よって，この処理における更新は次のようになる．

$$\begin{aligned}F &= -0.5 \\ w_1 &= w_1 - F \Delta w_1 \\ w_2 &= w_2 + F \Delta w_1\end{aligned}$$

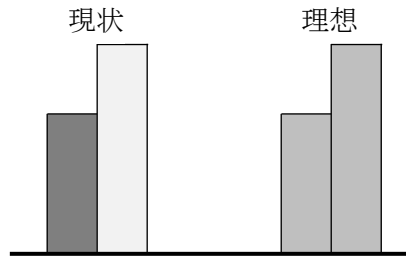


図 1 4 密度の均一化のイメージ

## 3.2 水面モード

変数は $l$ （水位：level）・ $v$ （速度：velocity）に分かれている．こちらには乾燥の概念はなく，水位は負の値をとる可能性もある．

### 3.2.1 速度によって水位が更新される処理

3.1.3 項と同様の目的の処理であるが，こちらは非常に単純である．

$$l \leftarrow l + v$$

### 3.2.2 抵抗によって速度が遅くなる処理

3.1.5 項と同様である．

$$\begin{aligned} D &= 0.98 \\ v &\leftarrow Dv \end{aligned}$$

### 3.2.3 水位が自然に標準に近づく処理

水面モードでは $l = 1$ を基準の高さとして，更新ごとに自然にこの高さに近づくような処理を行っている．

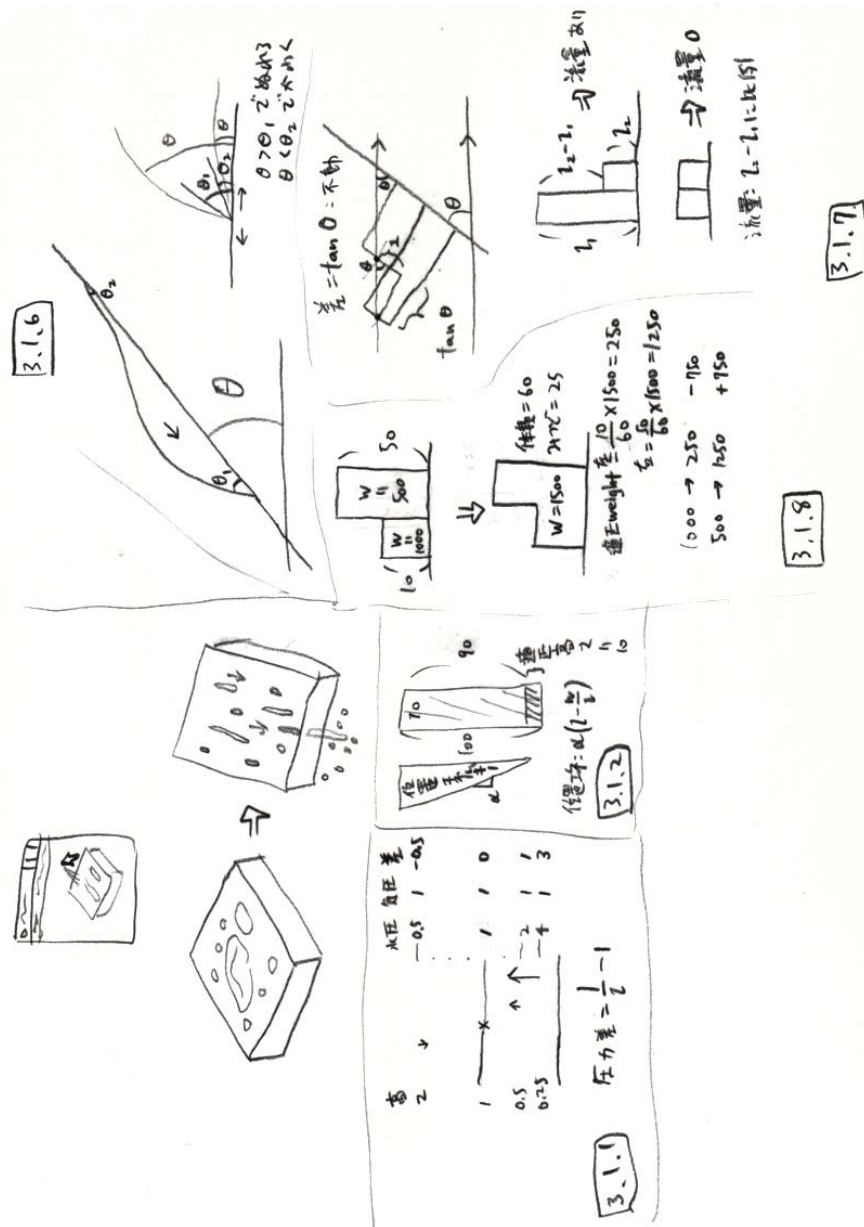
$$\begin{aligned} G &= 0.98 \\ l &\leftarrow G(l - 1) + 1 \end{aligned}$$

### 3.2.4 面積を最小にする方向に加速する処理

3.1.4 項と同様である．

$$\begin{aligned} f(l) &= \sum_{n=1}^4 \sqrt{1 + (l_n - l)^2} \\ C &= -0.01 \\ v &\leftarrow v + C \frac{df(l)}{dl} \end{aligned}$$

## 4. ラフスケッチ



## 参考文献

- [1] DeviantArt, “Water Texture :STOCK:”, アクセス日: 2017 年 1 月 10 日, <http://proseuche.deviantart.com/art/Water-Texture-STOCK-118658442>.
- [2] HOYA, “HOYA 70 周年記念特別サイト”, アクセス日: 2017 年 1 月 10 日, <http://www.hoya.co.jp/70years/japan/history.html>.