**《優化方法基礎》课程总结**

1. **线性规划**

生产、经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是所谓规划问题。线性规划是一种数学优化技术，用于最大化或最小化线性目标函数的方法，同时满足一系列线性约束条件。其在车间调度、资源分配、物流管理、金融规划等领域有着广泛的应用。

一般线性规划问题的数学模型可表示为以下形式：

得到简写形式如下：

其中，为模型的参数；为目标函数系数，为约束条件右端项，为不等式约束系数。为决策变量，为目标值。

* 1. **图形解法**

线性规划图形解法最初由美国数学家George Dantzig于1947年提出。图形解法通常用于二维情况，即决策变量数量为2。在二维情况下可以轻松地将问题可视化，以下是图形解法的基本步骤：

（1）**绘制约束条件的图形：**对每个约束条件进行单独绘制，并标记可行域，即所有约束条件共同满足的区域。在二维情况下，可行域是一个多边形。

（2）**确定目标函数的等高线：**目标函数通常是一个关于决策变量的线性函数。根据目标函数系数，绘制出与目标函数等高线平行的直线。

（3）**确定最优解：**在可行域内移动等高线，找到能使目标函数最大（或最小）值的交点，这个交点即为最优解。

（4）**验证最优解：**验证最优解是否满足所有约束条件，如果满足那么该最优解就是线性规划问题的解，否则需要重新考虑问题。

图形解法的优点是易于理解和实现，特别适用于二维问题。然而对于更高维度的问题，图形解法可能变得不太实用，因此难以将可行域可视化。

**例1.1** 现有一个线性规划问题如下：

**解：**

1. 绘制约束条件的图形：

首先，在约束条件中第一条式子是不等式，先取这条直线，在二维坐标系上（为横坐标，为纵坐标）绘制后，其将第一象限分为两部分，落在这条直线右边部分的点均有，相反落在左边区域的点均有，因此原式表示的是平面上落在这条线上和左边区域的点。

其次，约束中第二条式子化简后为，第三条式子化简后为，同理绘制出其不等式约束的落点多边形区域，如图1蓝色区域：

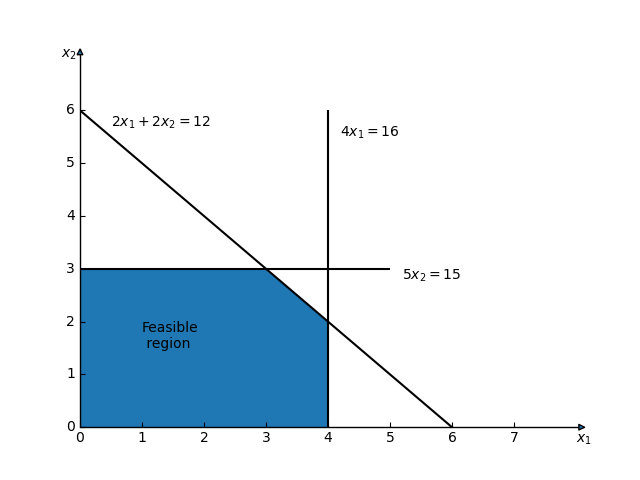


图1：二维平面上的约束条件区域

1. 确定目标函数的等高线：

根据目标函数，在二维平面上绘制出其等高线，如图2：

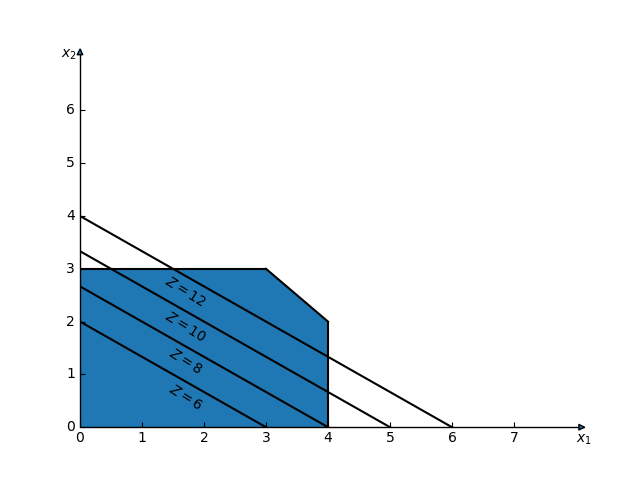


图2：二维平面上的目标函数等高线

1. 确定最优解：

最优解必须满足所有约束条件的要求，并使目标函数达到最优值。根据约束条件图形区域和目标函数等高线，可以确定目标函数那条线向右上方移动时，的值逐渐增大，一直移动到目标函数的直线与约束条件包围成的凸多边形相切位置，切点就是代表最优解的点。

1. 验证最优解：

由上可得当目标函数那条线在点处能够满足所有约束条件的同时得到它的最大值，即得到。

* 1. **单纯形法**

单纯形法是求解一般线性规划问题的基本方法，最早由美国数学家George Dantzig于20世纪中期提出，该方法是线性规划领域里的重要突破之一。

单纯性法的基本思想是通过在可行解空间内移动，逐步改进目标函数的值，直到找到最优解为止。该算法的核心是从一个可行解出发，通过一系列迭代步骤逐渐移向更优的解。其具体步骤如下：

（1）**初始化：**将线性规划问题转化为标准形式，并找到一个可行解。这个可行解可以是通过人工构造的，也可以是通过某种启发式方法获得的。

（2）**选择进入变量：**选择一个非基本变量作为进入变量，该变量能够使目标函数增加最快。

（3）**选择离开变量：**根据进入变量，选择一个基本变量作为离开变量，使得进入变量进入到可行解空间中，同时保持其他约束条件不变。

（4）**计算新的基本解：**通过改变基本变量和非基本变量的取值，计算新的可行解。

（5）**检查终止条件：**如果新的解满足最优性条件，则算法终止；否则，返回步骤2继续迭代。

单纯形法是解决线性规划问题的一种有效方法，尤其适用于中等规模的问题。然而，对于大规模问题或者特殊情况下，它的效率可能会受到限制。

**例1.2** 现有线性规划问题如下：

**解：**首先将问题的线性规划模型进行标准化处理，转换为标准形式如下：

约束组成一个基，令非基变量，即得到一个基可行解为，据此列出初始单纯性表，如表1：

表1 初始单纯形表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Iteration | Basic Variable | Eq. | Coefficient of: | | | | | | Right Side |
|  |  |  |  |  |  |
| 0 |  | (0) | 1 | 4 | 3 | 6 | 0 | 0 | 0 |
|  | (1) | 0 | 3 | 1 | [3] | 1 | 0 | 30 |
|  | (2) | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 40 |

表中有大于零的检验数，故表中的基可行解不是最优解。因为，故确定为换入基的变量。为了确定换出基的变量，将不等式约束的右侧数字除以列同行系数得：

因此为换出基的变量，3为主元素，在表中加上“[ ]”号标记。将换入变量替换基变量中的画出新的单纯形表，如表2：

表2 第一次迭代单纯形表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Iteration | Basic Variable | Eq. | Coefficient of: | | | | | | Right Side |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | (0) | 1 | -2 | 1 | 0 | -2 | 0 | 60 |
|  | (1) | 0 | 1 | 1/3 | 1 | 1/3 | 0 | 10 |
|  | (2) | 0 | -1 | [1] | 0 | -1 | 1 | 10 |

表2中任然有大于零的检验数，故确定为换入基的变量。根据：

故1为主元素，为换出基的变量，用代替，得到新的单纯形表，如表3：

表3 第二次迭代单纯形表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Iteration | Basic Variable | Eq. | Coefficient of: | | | | | | Right Side |
|  |  |  |  |  |  |
| 2 |  | (0) | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 70 |
|  | (1) | 0 | 4/3 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 20/3 |
|  | (2) | 0 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 10 |

表3中所有检验数，表明已经找到问题最优解，即，求得目标函数最大值。