PROBLEMI DI SCHEDULING RISOLTI CON LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Prof. Davide Giglio

Methods and Tools for Industrial Automation

Indice

1 Risoluzione del problema $\boxed{1 \,||\, \sum_j \frac{T_j}{n}}$ con 4 job

Si risolva, applicando l'algoritmo della programmazione dinamica, il problema di scheduling $1 \,||\, \sum_j \frac{T_j}{n}$ caratterizzato dai seguenti valori:

Job	J_1	J_2	J_3	J_4
p_i	8	6	10	7
d_i	14	9	16	16

Per applicare la programmazione dinamica ad un problema di scheduling è necessario formalizzare il problema di scheduling come problema di controllo ottimo. Per fare ciò è necessario definire lo stato del sistema, il controllo, la dinamica del sistema, il funzionale di costo.

Nel problema considerato, di single machine con minimizzazione della tardiness media, lo stato del sistema, in un generico istante decisionale, è rappresentato dalla lista (non ordinata) di job che sono stati già eseguiti. E' sufficiente questa informazione in quanto, in un problema di single machine con funzionale di costo regolare, la soluzione ottima prevede il funzionamento della macchina senza interruzioni (idle period) dall'istante 0 fino all'istante in cui vengono completati tutti i job; pertanto, non è necessario includere nello stato alcuna informazione relativa agli istanti di tempo in cui vengono eseguiti i job. Il controllo che si attua in corrispondenza di un certo stato è rappresentato dalla scelta del prossimo job da eseguire (ovviamente tra quelli ancora da eseguire). La dinamica del sistema è rappresentata da un grafo di transizione di stato (generalmente utilizzato per rappresentare la dinamica di sistemi deterministici con un numero finito di stati), che può essere suddiviso in "stadi decisionali". Il funzionale di costo è costituito dalla tardiness media che, è banale osservare, può essere espressa in forma additiva rispetto alla suddivisione in stadi della dinamica del sistema.

Più specificatamente, siano:

- STATO DEL SISTEMA al generico stadio decisionale k, in cui sono stati completati k job:

  $$X_k = \{J_{i(1)}, \ldots, J_{i(k)}\} \qquad k = 0, \ldots, n$$

  con $X_0 = \emptyset$

  (elenco non ordinato dei k job che sono stati completati)

- CONTROLLO da determinare in corrispondenza dello stato X_k:

  $$U_k(X_k) = J_{i(k+1)} \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

  (job che viene eseguito per $(k+1)$-esimo)

- SISTEMA DINAMICO suddiviso in stadi decisionali, la cui dinamica al generico stadio decisionale k è:

  $$\boxed{X_k} \xrightarrow{\quad U_k \quad} \boxed{X_{k+1}}$$

  stadio k stadio $k+1$

  (al generico stadio k vi è un numero di stati pari ai possibili $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ insiemi non ordinati di k jobs presi da un totale di n jobs)

- COSTO additivo espresso come somma dei costi che si pagano in ogni stadio decisionale come conseguenza dell'applicazione del controllo $U_k(X_k)$:

  $$\sum_{k=0}^{n-1} H_k(X_k, U_k) \qquad , \quad \text{con } H_k(X_k, U_k) = \frac{T_{i(k+1)}}{n}$$

  (il costo finale, allo stadio n, è nullo)

Il problema considerato può pertanto essere risolto attraverso l'applicazione dell'algoritmo della programmazione dinamica, come riportato nella seguente sezione.

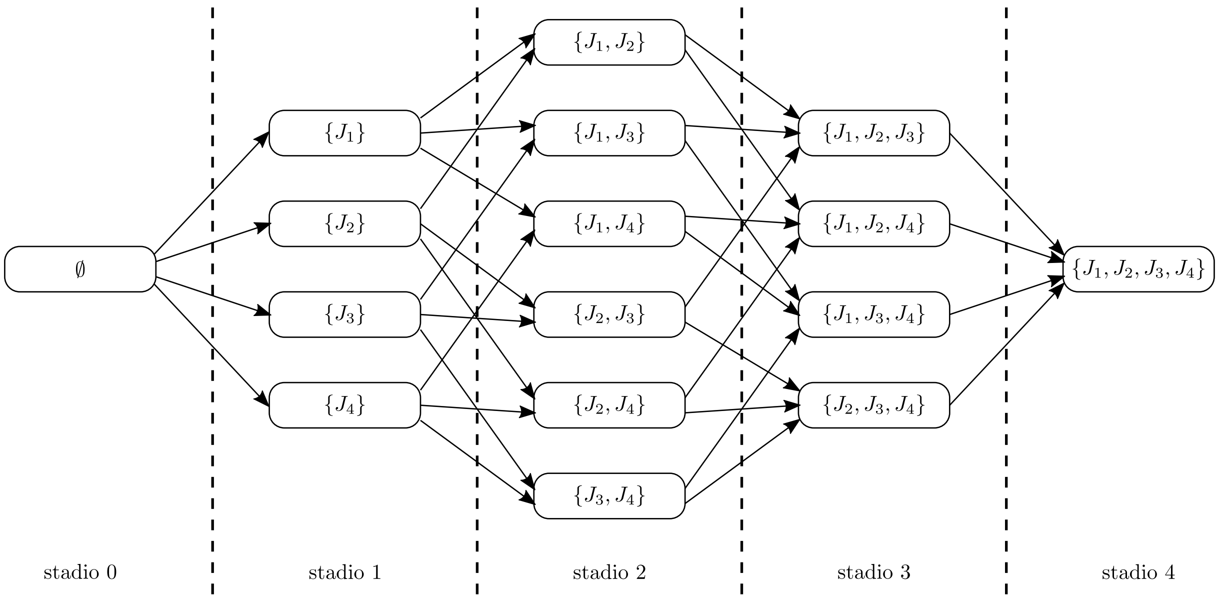
1.1 Applicazione dell'algoritmo della programmazione dinamica (metodo "backward")

L'algoritmo della programmazione dinamica si basa sul principio di ottimalità di Bellman che, applicato allo scheduling, stabilisce che la porzione finale di uno schedule ottimo deve anch'essa essere ottima (per il relativo sottoproblema). Si procede pertanto in maniera "backward" considerando sottoproblemi di dimensione crescente:

- al primo passo della fase backward, corrispondente allo stadio decisionale $k = 4$ in cui non vi sono decisioni da prendere, si inizializza l'algoritmo definendo il cost-to-go finale che coincide con il costo finale (se presente);
- al secondo passo della fase backward, corrispondente allo stadio decisionale $k = 3$, si considera il sottoproblema in cui bisogna decidere qual è l'ultimo job (il quarto) da eseguire; in ciascuno dei $\binom{4}{3} = 4$ stati che compongono questo stadio la decisione è obbligata (dato che rimane un solo job da eseguire) ma in ogni caso è importante processare ogni stato per calcolare il relativo cost-to-go;
- al terzo passo della fase backward, corrispondente allo stadio decisionale $k = 2$, si considera il sottoproblema in cui bisogna decidere qual è il terzo job da eseguire; la decisione viene presa per ciascuno dei $\binom{4}{2} = 6$ stati che compongono tale stadio e la determinazione del controllo ottimo si basa sulla conoscenza dei cost-to-go relativi agli stati appartenenti allo stadio decisionale $k = 3$, calcolati nel passo precedente;
- al quarto passo della fase backward, corrispondente allo stadio decisionale $k = 1$, si considera il sottoproblema in cui bisogna decidere qual è il secondo job da eseguire; la decisione viene presa per ciascuno dei $\binom{4}{1} = 4$ stati che compongono tale stadio e la determinazione del controllo ottimo si basa sulla conoscenza dei cost-to-go relativi agli stati appartenenti allo stadio decisionale $k = 2$, calcolati nel passo precedente;
- al quinto e ultimo passo della fase backward, corrispondente allo stadio decisionale iniziale $k = 0$ che è costituito da un unico stato coincidente con $X_0 = \emptyset$, bisogna decidere qual è il primo job da eseguire e il controllo ottimo viene determinato in base ai cost-to-go relativi agli stati appartenenti allo stadio decisionale $k = 1$, calcolati nel passo precedente; il valore del cost-to-go ottimo determinato per questo stato iniziale corrisponde al valore (ottimo) dell'indicatore di performance ottenuto applicando lo schedule ottimo;

Una volta che si è completata la fase backward, si procede con la fase forward in cui si determina lo schedule ottimo partendo dallo stato iniziale allo stadio $k = 0$ e visitando tutti gli altri stadi attraverso l'applicazione del controllo ottimo negli stati che si visitano di volta in volta.

L'intero grafo di transizione di stato, da considerare nell'applicazione dell'algoritmo della programmazione dinamica è illustrato di seguito.



(i controlli che portano da uno stato al successivo, rappresentati dagli archi del grafo di transizione, non sono indicati per rendere chiara la figura; tali controlli sono comunque facilmente identificabili in quanto corrispondono al job che, rispetto allo stato di arrivo, non è presente nello stato di partenza).

FASE BACKWARD

Stadio $k = 4$

All'ultimo stadio non vi sono decisioni da prendere in quanto i quattro job sono stati tutti completati. In pratica, l'unico stato presente in tale stadio rappresenta lo stato di fine attività. Tale stato è comunque considerato nel seguito per l'inizializzazione del cost-to-go ottimo.

$\boxed{\text{Stato } X_4 = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}}$

E' necessario inizializzare il cost-to-go ottimo in quanto esso verrà poi usato nello stadio $k = 3$. Non essendoci, nel problema considerato, un costo finale si ha semplicemente:

$$G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 0$$

Stadio $k = 3$

Allo stadio $k = 3$ la decisione da prendere è obbligata: essendo ogni stato presente in tale stadio costituito da 3 job (che sono già stati eseguiti), il prossimo job da eseguire è sicuramente l'unico job non compreso nell'insieme dei 3 che costituiscono lo stato. Il numero di stati presenti in tale stadio è 4. Ognuno di essi viene nel seguito considerato e per ciascuno di essi viene calcolato il cost-to-go ottimo.

$\boxed{\text{Stato } X_3 = \{J_1, J_2, J_3\}}$

L'istante di inizio del prossimo e ultimo job (il quarto) è

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = p_1 + p_2 + p_3 = 8 + 6 + 10 = 24$$

La scelta è obbligata, dato che l'ultimo job da eseguire sarà sicuramente J_4 (l'unico ancora da eseguire), ossia $J_{i(4)} \equiv J_4$. La tardiness di tale job è

$$T_4 = \max\{st_{i(4)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{24 + 7 - 16, 0\} = 15$$

Il cost-to-go ottimo è pertanto

$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \frac{T_4}{4} + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{15}{4} + 0 = \frac{15}{4}$$

e la decisione ottima è, come già detto

$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = J_4$$

$\boxed{\text{Stato } X_3 = \{J_1, J_2, J_4\}}$

L'istante di inizio del prossimo e ultimo job (il quarto) è

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = p_1 + p_2 + p_4 = 8 + 6 + 7 = 21$$

La scelta è obbligata, dato che l'ultimo job da eseguire sarà sicuramente J_3 (l'unico ancora da eseguire), ossia $J_{i(4)} \equiv J_3$. La tardiness di tale job è

$$T_3 = \max\{st_{i(4)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{21 + 10 - 16, 0\} = 15$$

Il cost-to-go ottimo è pertanto

$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \frac{T_3}{4} + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{15}{4} + 0 = \frac{15}{4}$$

e la decisione ottima è, come già detto

$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = J_3$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_3, J_4\}$

L'istante di inizio del prossimo e ultimo job (il quarto) è

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = p_1 + p_3 + p_4 = 8 + 10 + 7 = 25$$

La scelta è obbligata, dato che l'ultimo job da eseguire sarà sicuramente J_2 (l'unico ancora da eseguire), ossia $J_{i(4)} \equiv J_2$. La tardiness di tale job è

$$T_2 = \max\{st_{i(4)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{25 + 6 - 9, 0\} = 22$$

Il cost-to-go ottimo è pertanto

$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \frac{T_2}{4} + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{22}{4} + 0 = \frac{11}{2}$$

e la decisione ottima è, come già detto

$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = J_2$$

Stato $X_3 = \{J_2, J_3, J_4\}$

L'istante di inizio del prossimo e ultimo job (il quarto) è

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = p_2 + p_3 + p_4 = 6 + 10 + 7 = 23$$

La scelta è obbligata, dato che l'ultimo job da eseguire sarà sicuramente J_1 (l'unico ancora da eseguire), ossia $J_{i(4)} \equiv J_1$. La tardiness di tale job è

$$T_1 = \max\{st_{i(4)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{23 + 8 - 14, 0\} = 17$$

Il cost-to-go ottimo è pertanto

$$G_3^\circ\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{T_1}{4} + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{17}{4} + 0 = \frac{17}{4}$$

e la decisione ottima è, come già detto

$$U_3^\circ\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = J_1$$

Riassumendo, i cost-to-go e le decisioni ottime determinati allo stadio $k = 3$ sono:

stato	cost-to-go	next job
$\{J_1, J_2, J_3\}$	$\frac{15}{4}$	J_4
$\{J_1, J_2, J_4\}$	$\frac{15}{4}$	J_3
$\{J_1, J_3, J_4\}$	$\frac{11}{2}$	J_2
$\{J_2, J_3, J_4\}$	$\frac{17}{4}$	J_1

Stadio $k = 2$

Allo stadio $k = 2$ sono stati completati 2 job e bisogna determinare qual è il terzo job da eseguire. Il numero di stati presenti in questo stadio decisionale è 6. Ognuno di essi viene nel seguito considerato e per ciascuno di essi viene determinata la soluzione ottima e calcolato il cost-to-go ottimo.

Stato $X_2 = \{J_1, J_2\}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_2\}\big) = p_1 + p_2 = 8 + 6 = 14$$

Se come prossimo job viene scelto J_3 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_3$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_3 = \max\{st_{i(3)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{14 + 10 - 16, 0\} = 8$$

$$G_2\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_3^{\circ}\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \frac{8}{4} + \frac{15}{4} = \frac{23}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_3) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_2\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_3\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_4 (ossia se $i(3) \equiv 4$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_4 = \max\{st_{i(3)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{14 + 7 - 16, 0\} = 5$$

$$G_2\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_3^{\circ}\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \frac{5}{4} + \frac{15}{4} = 5$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_4) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_2\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^{\circ}\big(\{J_1, J_2\}\big) = \min\Big\{ G_2\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big), G_2\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big)\Big\} = \min\left\{\frac{23}{4}, 5\right\} = 5$$

e la decisione ottima è

$$U_2^{\circ}\big(\{J_1, J_2\}\big) = J_4$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_1, J_3\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_3\}\big) = p_1 + p_3 = 8 + 10 = 18$$

Se come prossimo job viene scelto J_2 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_2$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_2 = \max\{st_{i(3)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{18 + 6 - 9, 0\} = 15$$

$$G_2\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_3^{\circ}\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \frac{15}{4} + \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_2) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_3\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_3\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_4 (ossia se $i(3) \equiv 4$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_4 = \max\{st_{i(3)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{18 + 7 - 16, 0\} = 9$$

$$G_2\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_3^{\circ}\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \frac{9}{4} + \frac{11}{2} = \frac{31}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_4) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_3\}$ allo stato $\{J_1, J_3, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^{\circ}\big(\{J_1, J_3\}\big) = \min\Big\{ G_2\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big), G_2\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big)\Big\} = \min\left\{\frac{15}{2}, \frac{31}{4}\right\} = \frac{15}{2}$$

e la decisione ottima è

$$U_2^{\circ}\big(\{J_1, J_3\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_1, J_4\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_4\}\big) = p_1 + p_4 = 8 + 7 = 15$$

Se come prossimo job viene scelto J_2 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_2$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_2 = \max\{st_{i(3)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{15 + 6 - 9, 0\} = 12$$

$$G_2\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \frac{12}{4} + \frac{15}{4} = \frac{27}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_2) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_4\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_4\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_3 (ossia se $i(3) \equiv 3$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_3 = \max\{st_{i(3)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{15 + 10 - 16, 0\} = 9$$

$$G_2\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \frac{9}{4} + \frac{11}{2} = \frac{31}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_3) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_1, J_4\}$ allo stato $\{J_1, J_3, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = \min\Big\{ G_2\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big), G_2\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big)\Big\} = \min\left\{\frac{27}{4}, \frac{31}{4}\right\} = \frac{27}{4}$$

e la decisione ottima è

$$U_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_2, J_3\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_2, J_3\}\big) = p_2 + p_3 = 6 + 10 = 16$$

Se come prossimo job viene scelto J_1 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_1$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_1 = \max\{st_{i(3)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{16 + 8 - 14, 0\} = 10$$

$$G_2\big(\{J_2, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \frac{10}{4} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_1) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_2, J_3\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_3\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_4 (ossia se $i(3) \equiv 4$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_4 = \max\{st_{i(3)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{16 + 7 - 16, 0\} = 7$$

$$G_2\big(\{J_2, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_3^\circ\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{7}{4} + \frac{17}{4} = 6$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_4) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_2, J_3\}$ allo stato $\{J_2, J_3, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^\circ\big(\{J_2, J_3\}\big) = \min\Big\{ G_2\big(\{J_2, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big), G_2\big(\{J_2, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big)\Big\} = \min\left\{\frac{25}{4}, 6\right\} = 6$$

e la decisione ottima è

$$U_2^\circ\big(\{J_2, J_3\}\big) = J_4$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_2, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_2, J_4\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_2, J_4\}\big) = p_2 + p_4 = 6 + 7 = 13$$

Se come prossimo job viene scelto J_1 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_1$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_1 = \max\{st_{i(3)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{13 + 8 - 14, 0\} = 7$$

$$G_2\big(\{J_2, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \frac{7}{4} + \frac{15}{4} = \frac{11}{2}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_1) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_2, J_4\}$ allo stato $\{J_1, J_2, J_4\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_3 (ossia se $i(3) \equiv 3$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_3 = \max\{st_{i(3)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{13 + 10 - 16, 0\} = 7$$

$$G_2\big(\{J_2, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_3^\circ\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{7}{4} + \frac{17}{4} = 6$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_3) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_2, J_4\}$ allo stato $\{J_2, J_3, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^\circ\big(\{J_2, J_4\}\big) = \min\Big\{ G_2\big(\{J_2, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big), G_2\big(\{J_2, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big)\Big\} = \min\left\{\frac{11}{2}, 6\right\} = \frac{11}{2}$$

e la decisione ottima è

$$U_2^\circ\big(\{J_2, J_4\}\big) = J_1$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_2, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_3, J_4\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il terzo) è

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_3, J_4\}\big) = p_3 + p_4 = 10 + 7 = 17$$

Se come prossimo job viene scelto J_1 (ossia se $J_{i(3)} \equiv J_1$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_1 = \max\{st_{i(3)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{17 + 8 - 14, 0\} = 11$$

$$G_2\big(\{J_3, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \frac{11}{4} + \frac{11}{2} = \frac{33}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_1) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_3, J_4\}$ allo stato $\{J_1, J_3, J_4\}$.

Se invece come prossimo job viene scelto J_2 (ossia se $i(3) \equiv 2$) si ha il seguente contributo al costo complessivo:

$$T_{i(3)} = T_2 = \max\{st_{i(3)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{17 + 6 - 9, 0\} = 14$$

$$G_2\big(\{J_3, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_3^\circ\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = \frac{14}{4} + \frac{17}{4} = \frac{31}{4}$$

calcolato in base alla tardiness del job scelto (J_2) e in base al fatto che, con tale scelta, il sistema evolverà dallo stato attuale $\{J_3, J_4\}$ allo stato $\{J_2, J_3, J_4\}$.

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_2^\circ\big(\{J_3, J_4\}\big) = \min\Big\{\, G_2\big(\{J_3, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_1\big), G_2\big(\{J_3, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big)\Big\} = \min\left\{\frac{33}{4}, \frac{31}{4}\right\} = \frac{31}{4}$$

e la decisione ottima è

$$U_2^\circ\big(\{J_3, J_4\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_2\big(\{J_3, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big)$.

Riassumendo, i cost-to-go e le decisioni ottime determinati allo stadio $k = 2$ sono:

stato	cost-to-go	next job
$\{J_1, J_2\}$	5	J_4
$\{J_1, J_3\}$	$\frac{15}{2}$	J_2
$\{J_1, J_4\}$	$\frac{27}{4}$	J_2
$\{J_2, J_3\}$	6	J_4
$\{J_2, J_4\}$	$\frac{11}{2}$	J_1
$\{J_3, J_4\}$	$\frac{31}{4}$	J_2

Stadio $k = 1$

Allo stadio $k = 1$ è stato completato 1 solo job e bisogna determinare qual è il successivo (secondo) job da eseguire. Il numero di stati presenti in questo stadio decisionale è 4, ciascuno di essi corrispondente ad uno specifico job (quello appunto eseguito). Ognuno di questi stadi viene nel seguito considerato e per ciascuno di essi viene determinata la soluzione ottima e calcolato il cost-to-go ottimo. Si noti che, in questo stadio, le possibili decisioni da prendere in ogni stadio sono 3.

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_1\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il secondo) è pari al processing time del job eseguito, ossia

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_1\}\big) = p_1 = 8$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il precedente stadio decisionale, si hanno, al variare della scelta del prossimo job, i seguenti contributi al costo complessivo:

$$G_1\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = \frac{\max\{8+6-9, 0\}}{4} + 5 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$$

$$G_1\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\}\big) = \frac{\max\{8+10-16, 0\}}{4} + \frac{15}{2} = \frac{2}{4} + \frac{15}{2} = 8$$

$$G_1\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = \frac{\max\{8+7-16, 0\}}{4} + \frac{27}{4} = 0 + \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$$

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = \min\left\{\frac{25}{4}, 8, \frac{27}{4}\right\} = \frac{25}{4}$$

e la decisione ottima è

$$U_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_1\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_2\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il secondo) è pari al processing time del job eseguito, ossia

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_2\}\big) = p_2 = 6$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il precedente stadio decisionale, si hanno, al variare della scelta del prossimo job, i seguenti contributi al costo complessivo:

$$G_1\big(\{J_2\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = \frac{\max\{6+8-14, 0\}}{4} + 5 = 0 + 5 = 5$$
$$G_1\big(\{J_2\} \mid J_{i(2)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_2^\circ\big(\{J_2, J_3\}\big) = \frac{\max\{6+10-16, 0\}}{4} + 6 = 0 + 6 = 6$$
$$G_1\big(\{J_2\} \mid J_{i(2)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_2^\circ\big(\{J_2, J_4\}\big) = \frac{\max\{6+7-16, 0\}}{4} + \frac{11}{2} = 0 + \frac{11}{2} = \frac{11}{2}$$

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_1^\circ\big(\{J_2\}\big) = \min\left\{5, 6, \frac{11}{2}\right\} = 5$$

e la decisione ottima è

$$U_1^\circ\big(\{J_2\}\big) = J_1$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_1\big(\{J_2\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_3\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il secondo) è pari al processing time del job eseguito, ossia

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_3\}\big) = p_3 = 10$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il precedente stadio decisionale, si hanno, al variare della scelta del prossimo job, i seguenti contributi al costo complessivo:

$$G_1\big(\{J_3\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\}\big) = \frac{\max\{10+8-14, 0\}}{4} + \frac{15}{2} = \frac{4}{4} + \frac{15}{2} = \frac{17}{2}$$
$$G_1\big(\{J_3\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_2^\circ\big(\{J_2, J_3\}\big) = \frac{\max\{10+6-9, 0\}}{4} + 6 = \frac{7}{4} + 6 = \frac{31}{4}$$
$$G_1\big(\{J_3\} \mid J_{i(2)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_2^\circ\big(\{J_3, J_4\}\big) = \frac{\max\{10+7-16, 0\}}{4} + \frac{31}{4} = \frac{1}{4} + \frac{31}{4} = 8$$

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_1^\circ\big(\{J_3\}\big) = \min\left\{\frac{17}{2}, \frac{31}{4}, 8\right\} = \frac{31}{4}$$

e la decisione ottima è

$$U_1^\circ\big(\{J_3\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_1\big(\{J_3\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big)$.

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_4\}}$

L'istante di inizio del prossimo job (il secondo) è pari al processing time del job eseguito, ossia

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_4\}\big) = p_4 = 7$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il precedente stadio decisionale, si hanno, al variare della scelta del prossimo job, i seguenti contributi al costo complessivo:

$$G_1\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = \frac{\max\{7+8-14, 0\}}{4} + \frac{27}{4} = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = 7$$

$$G_1\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_2^\circ\big(\{J_2, J_4\}\big) = \frac{\max\{7+6-9, 0\}}{4} + \frac{11}{2} = \frac{4}{4} + \frac{11}{2} = \frac{13}{2}$$

$$G_1\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_2^\circ\big(\{J_3, J_4\}\big) = \frac{\max\{7+10-16, 0\}}{4} + \frac{31}{4} = \frac{1}{4} + \frac{31}{4} = 8$$

Il cost-to-go ottimo è dato da

$$G_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = \min\left\{7, \frac{13}{2}, 8\right\} = \frac{13}{2}$$

e la decisione ottima è

$$U_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_1\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_2\big)$.

Riassumendo, i cost-to-go e le decisioni ottime determinati allo stadio $k = 1$ sono:

stato	cost-to-go	next job
$\{J_1\}$	$\frac{25}{4}$	J_2
$\{J_2\}$	5	J_1
$\{J_3\}$	$\frac{31}{4}$	J_2
$\{J_4\}$	$\frac{13}{2}$	J_2

Stadio $k = 0$

Lo stadio iniziale $k = 0$ rappresenta la condizione di "inizio scheduling" in cui nessun job è stato ancora eseguito. Bisogna pertanto determinare quale dei 4 job è il primo ad essere eseguito dalla single machine.

Stato $X_0 = \emptyset$

Il primo job inizia la propria esecuzione al tempo 0; pertanto

$$st_{i(1)} = 0$$

Procedendo sempre allo stesso modo, si hanno, al variare di tutti i job (tutti i job possono essere i primi ad essere eseguiti), i seguenti contributi al costo complessivo:

$$G_0\big(\emptyset \mid J_{i(1)} \equiv J_1\big) = \frac{T_1}{4} + G_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = \frac{\max\{0+8-14, 0\}}{4} + \frac{25}{4} = 0 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$G_0\big(\emptyset \mid J_{i(1)} \equiv J_2\big) = \frac{T_2}{4} + G_1^\circ\big(\{J_2\}\big) = \frac{\max\{0+6-9, 0\}}{4} + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$G_0\big(\emptyset \mid J_{i(1)} \equiv J_3\big) = \frac{T_3}{4} + G_1^\circ\big(\{J_3\}\big) = \frac{\max\{0+10-16, 0\}}{4} + \frac{17}{4} = 0 + \frac{31}{4} = \frac{31}{4}$$

$$G_0\big(\emptyset \mid J_{i(1)} \equiv J_4\big) = \frac{T_4}{4} + G_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = \frac{\max\{0+7-16, 0\}}{4} + \frac{13}{2} = 0 + \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

Il cost-to-go ottimo (che, si ricorda, corrisponde al costo complessivo dello schedule ottimo) è dato da

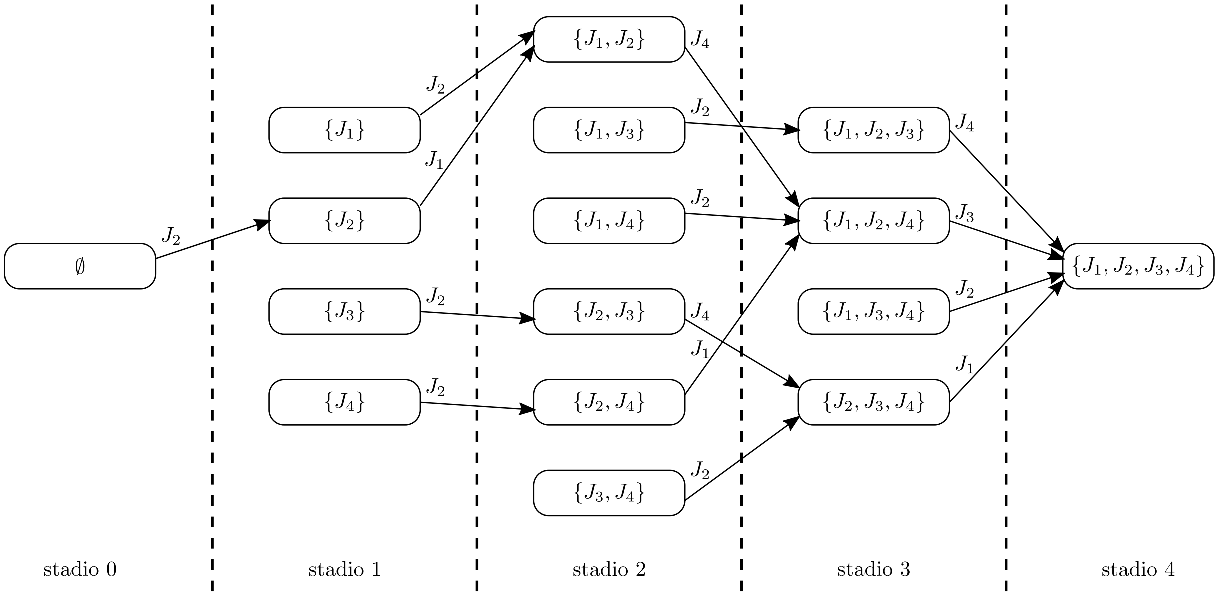
$$G_0^\circ(\emptyset) = \min\left\{\frac{25}{4}, 5, \frac{31}{4}, \frac{13}{2}\right\} = 5$$

e la decisione ottima (primo job da eseguire) è

$$U_0^\circ(\emptyset) = J_2$$

essendo il precedente minimo ottenuto con $G_1(\emptyset \mid J_{i(2)} \equiv J_2)$.

Avendo trovato la decisione ottima per tutti i nodi del grafo di transizione di stato, è possibile ridisegnare tale grafo includendo esclusivamente gli archi che rappresentano una decisione ottima. Il nuovo grafo è il seguente.



Analizzando tale grafo risulta evidente qual è lo schedule ottimo: è la sequenza delle decisioni ottime sull'unico percorso che porta dal nodo iniziale ($X_0 = \emptyset$) al nodo finale ($X_4 = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$). Questo fatto è formalizzato nella fase forward dell'algoritmo della programmazione dinamica.

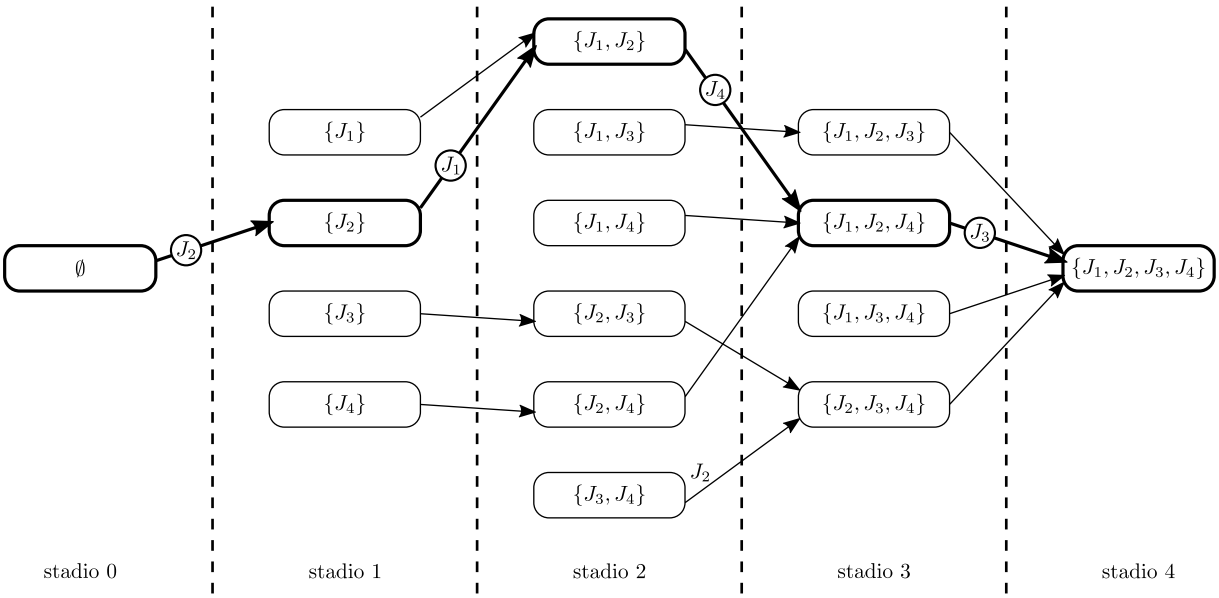
FASE FORWARD

La fase forward determina la sequenza ottima di esecuzione dei job sulla base di quanto determinato nella fase backward. Più specificatamente si determina il movimento ottimo dello stato ovvero l'evoluzione dello stato quando, ad ogni stadio, viene applicato il controllo ottimo. La sequenza dei controlli ottimi applicati definisce lo schedule ottimo. Tale procedura è descritta, per il problema considerato, nel seguito.

- Allo stadio iniziale $k = 0$ si ci trova nello stato iniziale $X_0 = \emptyset$. La decisione ottima (primo job da eseguire) in tal stato è J_2.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 0$ si raggiunge lo stato $X_1 = \{J_2\}$. La decisione ottima (secondo job da eseguire) in tal stato è J_1.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 1$ si raggiunge lo stato $X_2 = \{J_1, J_2\}$. La decisione ottima (terzo job da eseguire) in tal stato è J_4.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 2$ si raggiunge lo stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_4\}$. La decisione ottima (quarto e ultimo job da eseguire) in tal stato è J_3.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 3$ si raggiunge lo stato finale $X_4 = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$. Non vi sono ulteriori decisioni da prendere.

L'algoritmo della programmazione dinamica termina con la conclusione della fase forward.

Graficamente, la fase forward può essere illustrata mettendo in evidenza il percorso che porta dallo stato iniziale allo stato finale nel grafo di transizione, insieme alle decisioni ottime che vengono prese in ogni stadio. Il risultato è il grafo seguente.



In conclusione, lo schedule ottimo per il problema considerato è

$$J_2 \rightarrow J_1 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3$$

e tale schedule fornisce un tardiness media pari a 5.

2 Risoluzione del problema $\boxed{1 \mid \textbf{prec} \mid \sum_j w_j\, T_j}$ con 5 job

Si risolva, applicando l'algoritmo della programmazione dinamica, il problema di scheduling $1 \mid\mid \sum_j w_j\, T_j$ caratterizzato dai seguenti valori:

Job	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
p_i	4	2	6	3	5
d_i	7	9	9	6	12
w_i	1.5	1.5	1.5	1	1

e dai seguenti vincoli di precedenza:

ossia:

- il job J_2 deve essere eseguito successivamente al job J_1;
- il job J_3 deve essere eseguito successivamente al job J_1;
- il job J_5 deve essere eseguito successivamente al job J_4.

La presenza dei pesi w_j, $j = 1, \ldots, 5$, non crea alcun problema: basta considerare tali pesi quando si calcolano, stato per stato, i contributi al costo complessivo e quindi il cost-to-go.

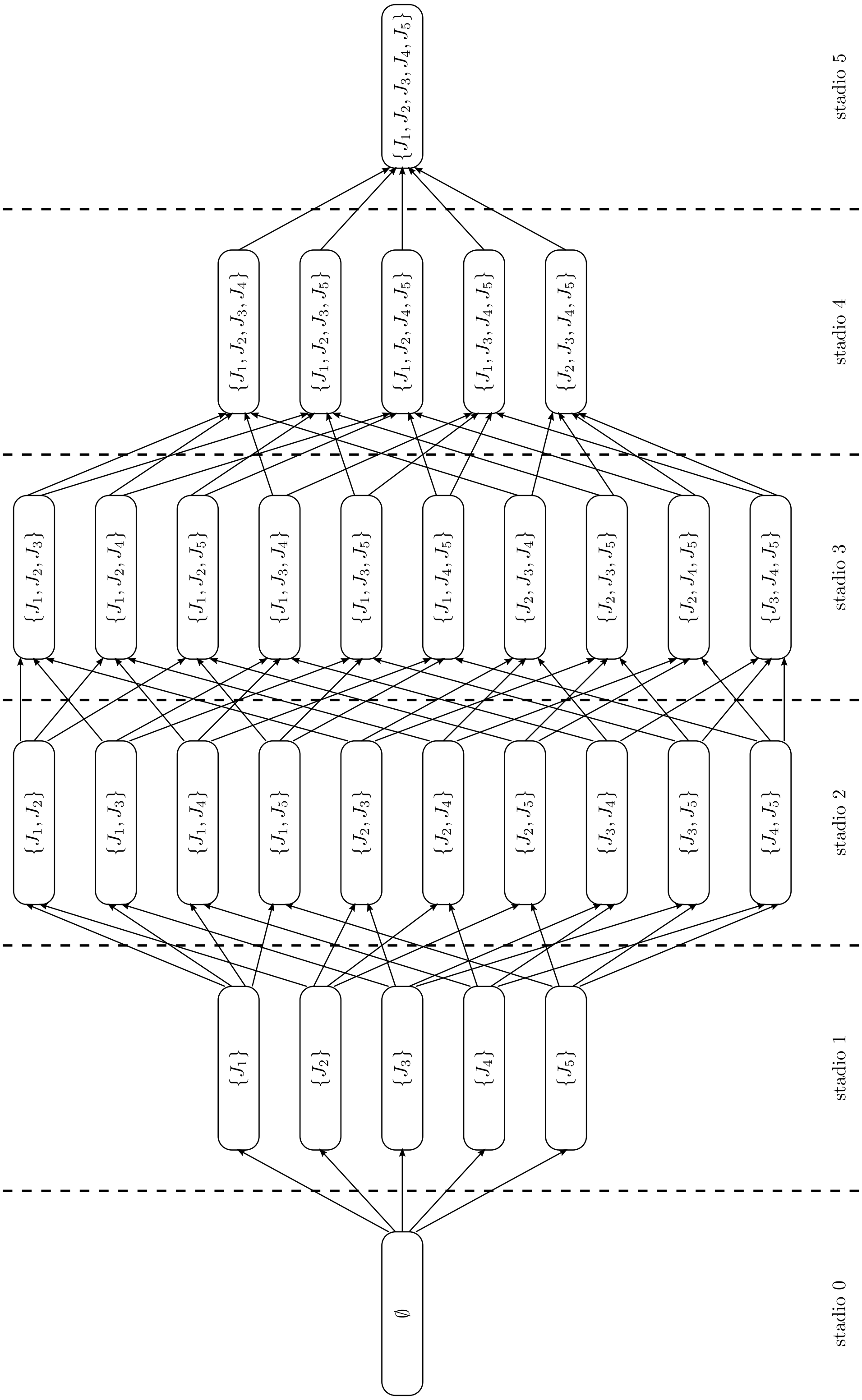
La presenza dei vincoli di precedenza invece semplifica addirittura la risoluzione del problema. Il fatto è che alcuni stati dell'intero grafo di transizione (rappresentato nella figura a pagina 15) non sono compatibili con i vincoli di precedenza e pertanto non devono essere presi in considerazione nello svolgimento della fase backward. In particolare, vanno esclusi:

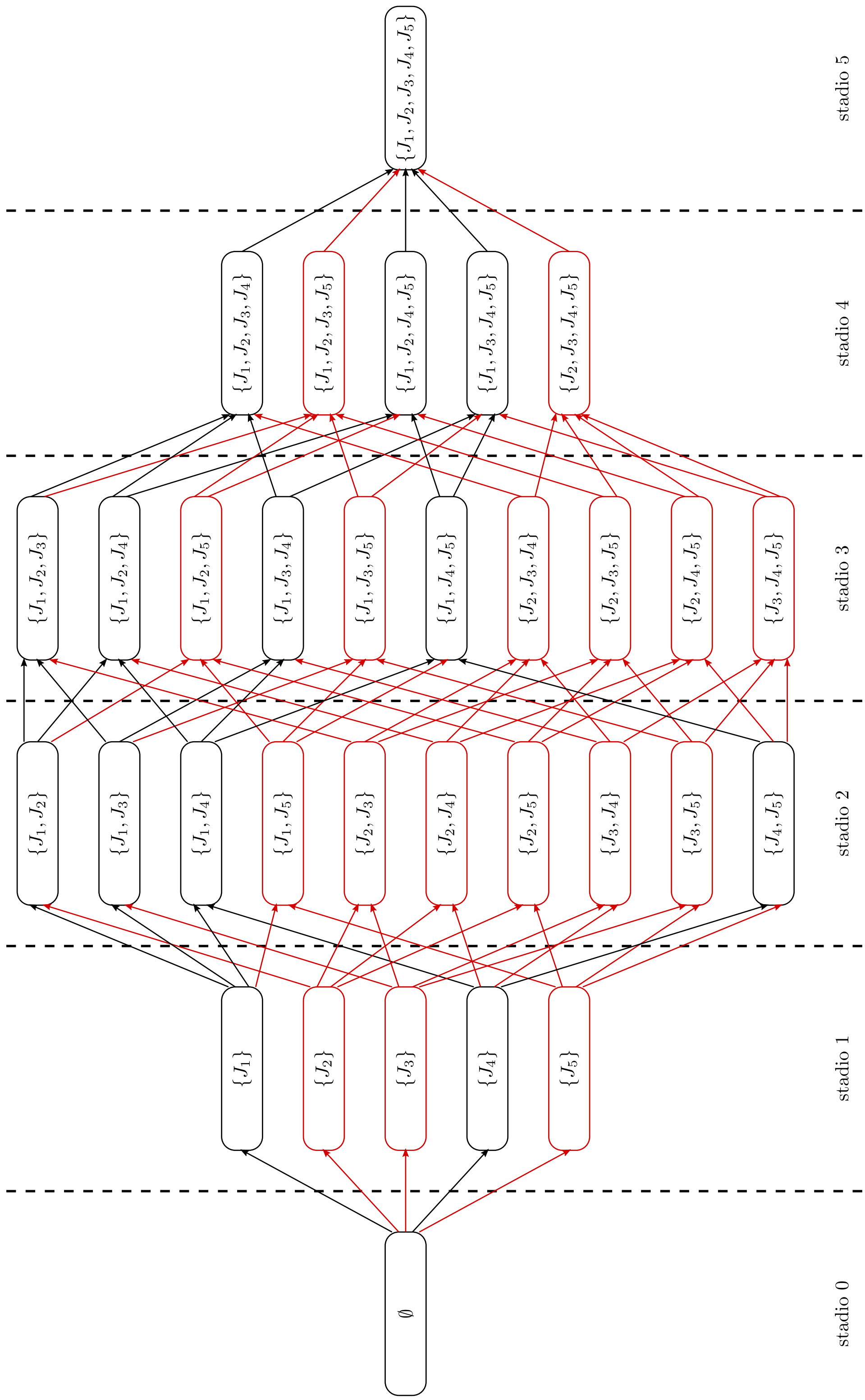
- tutti gli stati in cui è presente il job J_2 ma non è presente il job J_1 (in quanto significherebbe che J_2 è stato eseguito prima di J_1);
- tutti gli stati in cui è presente il job J_3 ma non è presente il job J_1 (in quanto significherebbe che J_3 è stato eseguito prima di J_1);
- tutti gli stati in cui è presente il job J_5 ma non è presente il job J_4 (in quanto significherebbe che J_5 è stato eseguito prima di J_4).

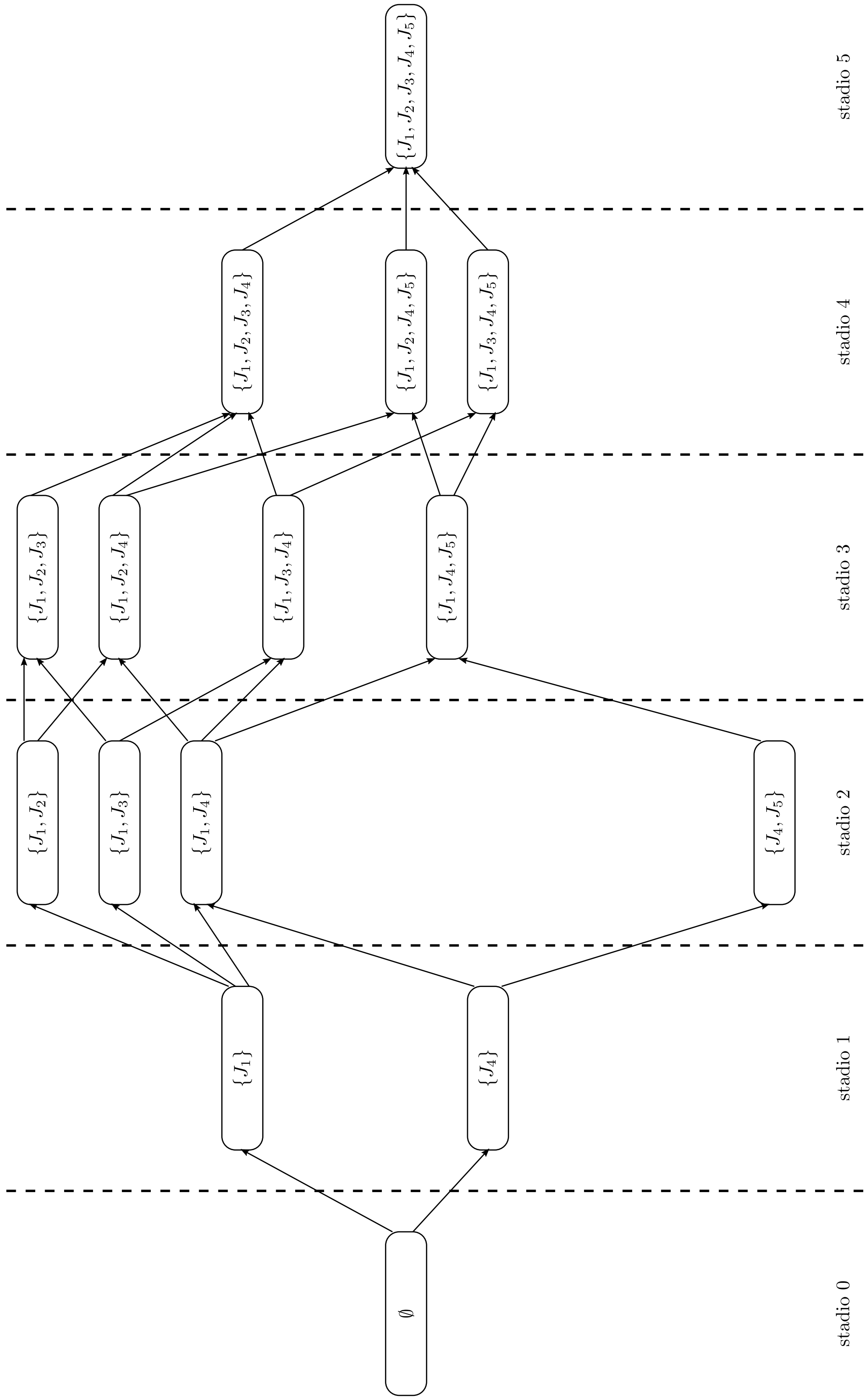
Inoltre, anche in stati che sono effettivamente compatibili con i vincoli di precedenza, alcune decisioni sul prossimo job da eseguire non sono da considerare. In particolare:

- in tutti gli stati in cui non è presente il job J_1 non è possibile ipotizzare che il prossimo job sia J_2;
- in tutti gli stati in cui non è presente il job J_1 non è possibile ipotizzare che il prossimo job sia J_3;
- in tutti gli stati in cui non è presente il job J_4 non è possibile ipotizzare che il prossimo job sia J_5.

Gi stati e le decisioni non consentiti sono raffigurati in rosso nella figura a pagina 16. Il risultato è che il grafo finale da prendere in considerazione nell'applicazione dell'algoritmo della programmazione dinamica è quello riportato a pagina 17. E' evidente come i vincoli abbiano ridotto decisamente il numero di stati da considerare e il numero di decisioni da confrontare.


stadio 0
$\emptyset$
stadio 1
$\{J_1\}$
$\{J_2\}$
$\{J_3\}$
$\{J_4\}$
$\{J_5\}$
stadio 2
$\{J_1, J_2\}$
$\{J_1, J_3\}$
$\{J_1, J_4\}$
$\{J_1, J_5\}$
$\{J_2, J_3\}$
$\{J_2, J_4\}$
$\{J_2, J_5\}$
$\{J_3, J_4\}$
$\{J_3, J_5\}$
$\{J_4, J_5\}$
stadio 3
$\{J_1, J_2, J_3\}$
$\{J_1, J_2, J_4\}$
$\{J_1, J_2, J_5\}$
$\{J_1, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_3, J_5\}$
$\{J_1, J_4, J_5\}$
$\{J_2, J_3, J_4\}$
$\{J_2, J_3, J_5\}$
$\{J_2, J_4, J_5\}$
$\{J_3, J_4, J_5\}$
stadio 4
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_3, J_4, J_5\}$
$\{J_2, J_3, J_4, J_5\}$
stadio 5
$\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$


stadio 0
stadio 1
stadio 2
stadio 3
stadio 4
stadio 5
$\emptyset$
$\{J_1\}$
$\{J_2\}$
$\{J_3\}$
$\{J_4\}$
$\{J_5\}$
$\{J_1, J_2\}$
$\{J_1, J_3\}$
$\{J_1, J_4\}$
$\{J_1, J_5\}$
$\{J_2, J_3\}$
$\{J_2, J_4\}$
$\{J_2, J_5\}$
$\{J_3, J_4\}$
$\{J_3, J_5\}$
$\{J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3\}$
$\{J_1, J_2, J_4\}$
$\{J_1, J_2, J_5\}$
$\{J_1, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_3, J_5\}$
$\{J_1, J_4, J_5\}$
$\{J_2, J_3, J_4\}$
$\{J_2, J_3, J_5\}$
$\{J_2, J_4, J_5\}$
$\{J_3, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_3, J_4, J_5\}$
$\{J_2, J_3, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$


$\emptyset$
$\{J_1\}$
$\{J_4\}$
$\{J_1, J_2\}$
$\{J_1, J_3\}$
$\{J_1, J_4\}$
$\{J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3\}$
$\{J_1, J_2, J_4\}$
$\{J_1, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$
$\{J_1, J_2, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_3, J_4, J_5\}$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$
stadio 0
stadio 1
stadio 2
stadio 3
stadio 4
stadio 5

FASE BACKWARD

Stadio $k = 5$

1 stato da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

Stato $X_4 = \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$ (stato finale)

Nessuna decisione da prendere.

Inizializzazione del cost-to-go ottimo:

$$G_5^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}\big) = 0$$

Stadio $k = 4$

3 stati da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

Stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$

La decisione è obbligata in quanto rimane da eseguire solo J_5.

$$st_{i(5)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 4 + 2 + 6 + 3 = 15$$

$$T_5 = \max\{st_{i(5)} + p_5 - d_5, 0\} = \max\{15 + 5 - 12, 0\} = 8$$

$$G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = w_5 T_5 + G_5^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}\big) = 1 \cdot 8 + 0 = 8$$

$$U_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = J_5 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_4, J_5\}$

La decisione è obbligata in quanto rimane da eseguire solo J_3.

$$st_{i(5)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_4, J_5\}\big) = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 = 4 + 2 + 3 + 5 = 14$$

$$T_3 = \max\{st_{i(5)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{14 + 6 - 9, 0\} = 11$$

$$G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4, J_5\}\big) = w_3 T_3 + G_5^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}\big) = 1.5 \cdot 11 + 0 = 16.5$$

$$U_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4, J_5\}\big) = J_3 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_3, J_4, J_5\}$

La decisione è obbligata in quanto rimane da eseguire solo J_2.

$$st_{i(5)} = ct\big(\{J_1, J_3, J_4, J_5\}\big) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 = 4 + 6 + 3 + 5 = 18$$

$$T_2 = \max\{st_{i(5)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{18 + 2 - 9, 0\} = 11$$

$$G_4^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4, J_5\}\big) = w_2 T_2 + G_5^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}\big) = 1.5 \cdot 11 + 0 = 16.5$$

$$U_4^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4, J_5\}\big) = J_2 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stadio $k = 3$

4 stati da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

Stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_3\}$

La decisione è obbligata in quanto, tra J_4 e J_5 (i due job che devono ancora essere eseguiti), il prossimo job può essere solamente J_4 (in quanto J_5 deve essere eseguito successivamente a J_4).

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = p_1 + p_2 + p_3 = 4 + 2 + 6 = 12$$
$$T_4 = \max\{st_{i(4)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{12 + 3 - 6, 0\} = 9$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = w_4 T_4 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 1 \cdot 9 + 8 = 17$$
$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = J_4 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_4\}$

Il prossimo job è uno tra J_3 e J_5 (i due job che devono ancora essere eseguiti).

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = p_1 + p_2 + p_4 = 4 + 2 + 3 = 9$$
$$T_3 = \max\{st_{i(4)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{9 + 6 - 9, 0\} = 6$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\} \mid J_{i(4)} \equiv J_3\big) = w_3 T_3 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 1.5 \cdot 6 + 8 = 17$$
$$T_5 = \max\{st_{i(4)} + p_5 - d_5, 0\} = \max\{9 + 5 - 12, 0\} = 2$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\} \mid J_{i(4)} \equiv J_5\big) = w_5 T_5 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4, J_5\}\big) = 1 \cdot 2 + 16.5 = 18.5$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \min\{17, 18.5\} = 17$$
$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = J_3 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_3, J_4\}$

Il prossimo job è uno tra J_2 e J_5 (i due job che devono ancora essere eseguiti).

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = p_1 + p_3 + p_4 = 4 + 6 + 3 = 13$$
$$T_3 = \max\{st_{i(4)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{13 + 2 - 9, 0\} = 6$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\} \mid J_{i(4)} \equiv J_2\big) = w_2 T_2 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 1.5 \cdot 6 + 8 = 17$$
$$T_5 = \max\{st_{i(4)} + p_5 - d_5, 0\} = \max\{13 + 5 - 12, 0\} = 6$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\} \mid J_{i(4)} \equiv J_5\big) = w_5 T_5 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4, J_5\}\big) = 1 \cdot 6 + 16.5 = 22.5$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \min\{17, 22.5\} = 17$$
$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = J_2 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stato $X_3 = \{J_1, J_4, J_5\}$

Il prossimo job è uno tra J_2 e J_3 (i due job che devono ancora essere eseguiti).

$$st_{i(4)} = ct\big(\{J_1, J_4, J_5\}\big) = p_1 + p_4 + p_5 = 4 + 3 + 5 = 12$$
$$T_2 = \max\{st_{i(4)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{12 + 2 - 9, 0\} = 5$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\} \mid J_{i(4)} \equiv J_2\big) = w_2 T_2 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4, J_5\}\big) = 1.5 \cdot 5 + 16.5 = 24$$
$$T_3 = \max\{st_{i(4)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{12 + 6 - 9, 0\} = 9$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\} \mid J_{i(4)} \equiv J_3\big) = w_3 T_3 + G_4^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4, J_5\}\big) = 1.5 \cdot 9 + 16.5 = 30$$
$$G_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\}\big) = \min\{24, 30\} = 24$$
$$U_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\}\big) = J_2 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stadio $k = 2$

4 stati da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_1, J_2\}}$

Il prossimo job è uno tra J_3 e J_4 (due dei tre job che devono ancora essere eseguiti); il job J_5 non può essere il prossimo job in quanto deve essere eseguito successivamente a J_4.

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_2\}\big) = p_1 + p_2 = 4 + 2 = 6$$

$$T_3 = \max\{st_{i(3)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{6 + 6 - 9, 0\} = 3$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big) = w_3T_3 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1.5 \cdot 3 + 17 = 21.5$$

$$T_4 = \max\{st_{i(3)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{6 + 3 - 6, 0\} = 3$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big) = w_4T_4 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 1 \cdot 3 + 17 = 20$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = \min\{21.5, 20\} = 20$$

$$U_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = J_4 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_1, J_3\}}$

Il prossimo job è uno tra J_2 e J_4 (due dei tre job che devono ancora essere eseguiti); il job J_5 non può essere il prossimo job in quanto deve essere eseguito successivamente a J_4.

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_3\}\big) = p_1 + p_3 = 4 + 6 = 10$$

$$T_2 = \max\{st_{i(3)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{10 + 2 - 9, 0\} = 3$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big) = w_2T_2 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1.5 \cdot 3 + 17 = 21.5$$

$$T_4 = \max\{st_{i(3)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{10 + 3 - 6, 0\} = 7$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\} \mid J_{i(3)} \equiv J_4\big) = w_4T_4 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 1 \cdot 7 + 17 = 24$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\}\big) = \min\{21.5, 24\} = 21.5$$

$$U_2^\circ\big(\{J_1, J_3\}\big) = J_2 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_1, J_4\}}$

Il prossimo job è uno tra J_2, J_3 e J_5 (i tre job che devono ancora essere eseguiti).

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_1, J_4\}\big) = p_1 + p_4 = 4 + 3 = 7$$

$$T_2 = \max\{st_{i(3)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{7 + 2 - 9, 0\} = 0$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_2\big) = w_2T_2 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 1.5 \cdot 0 + 17 = 17$$

$$T_3 = \max\{st_{i(3)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{7 + 6 - 9, 0\} = 4$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_3\big) = w_3T_3 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 1.5 \cdot 4 + 17 = 23$$

$$T_5 = \max\{st_{i(3)} + p_5 - d_5, 0\} = \max\{7 + 5 - 12, 0\} = 0$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\} \mid J_{i(3)} \equiv J_5\big) = w_5T_5 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\}\big) = 1 \cdot 0 + 24 = 24$$

$$G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = \min\{17, 23, 24\} = 17$$

$$U_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = J_2 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

$\boxed{\text{Stato } X_2 = \{J_4, J_5\}}$

La decisione è obbligata in quanto, tra J_1, J_2 e J_3 (i tre job che devono ancora essere eseguiti), il prossimo job può essere solamente J_1 (in quanto J_2 e J_3 devono essere eseguiti successivamente a J_1).

$$st_{i(3)} = ct\big(\{J_4, J_5\}\big) = p_4 + p_5 = 3 + 5 = 8$$

$$T_1 = \max\{st_{i(3)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{8 + 4 - 7, 0\} = 5$$

$$G_2^\circ\big(\{J_4, J_5\}\big) = w_1 T_1 + G_3^\circ\big(\{J_1, J_4, J_5\}\big) = 1.5 \cdot 5 + 24 = 31.5$$

$$U_2^\circ\big(\{J_4, J_5\}\big) = J_1 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stadio $k = 1$

2 stati da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_1\}}$

Il prossimo job è uno tra J_2, J_3 e J_4 (tre dei quattro job che devono ancora essere eseguiti); il job J_5 non può essere il prossimo job in quanto deve essere eseguito successivamente a J_4.

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_1\}\big) = p_1 = 4$$

$$T_2 = \max\{st_{i(2)} + p_2 - d_2, 0\} = \max\{4 + 2 - 9, 0\} = 0$$

$$G_1^\circ\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = w_2 T_2 + G_2^\circ\big(\{J_1, J_2\}\big) = 1.5 \cdot 0 + 20 = 20$$

$$T_3 = \max\{st_{i(2)} + p_3 - d_3, 0\} = \max\{4 + 6 - 9, 0\} = 1$$

$$G_1^\circ\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = w_3 T_3 + G_2^\circ\big(\{J_1, J_3\}\big) = 1.5 \cdot 1 + 21.5 = 23$$

$$T_4 = \max\{st_{i(2)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{4 + 3 - 6, 0\} = 1$$

$$G_1^\circ\big(\{J_1\} \mid J_{i(2)} \equiv J_5\big) = w_4 T_4 + G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = 1 \cdot 1 + 17 = 18$$

$$G_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = \min\{20, 23, 18\} = 18$$

$$U_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = J_4 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

$\boxed{\text{Stato } X_1 = \{J_4\}}$

Il prossimo job è uno tra J_1 e J_5 (due dei quattro job che devono ancora essere eseguiti); i job J_2 e J_3 non possono essere il prossimo job in quanto devono essere eseguiti successivamente a J_1.

$$st_{i(2)} = ct\big(\{J_4\}\big) = p_4 = 3$$

$$T_1 = \max\{st_{i(2)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{3 + 4 - 7, 0\} = 0$$

$$G_1^\circ\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = w_1 T_1 + G_2^\circ\big(\{J_1, J_4\}\big) = 1.5 \cdot 0 + 17 = 17$$

$$T_5 = \max\{st_{i(2)} + p_5 - d_5, 0\} = \max\{3 + 5 - 12, 0\} = 0$$

$$G_1^\circ\big(\{J_4\} \mid J_{i(2)} \equiv J_5\big) = w_5 T_5 + G_2^\circ\big(\{J_4, J_5\}\big) = 1 \cdot 0 + 17 = 31.5$$

$$G_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = \min\{17, 31.5\} = 17$$

$$U_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = J_1 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

Stadio $k = 0$

1 stato da considerare (si veda il grafo di transizione a pagina 17).

$\boxed{\text{Stato } X_0 = \emptyset \text{ (stato iniziale)}}$

Il prossimo job è uno tra J_1 e J_4 (tre dei cinque job da eseguire); i job J_2 e J_3 non possono essere il prossimo job in quanto devono essere eseguiti successivamente a J_1 e il job J_5 non può essere il prossimo job in quanto deve essere eseguito successivamente a J_4.

$$st_{i(1)} = 0$$

$$T_1 = \max\{st_{i(1)} + p_1 - d_1, 0\} = \max\{0 + 4 - 7, 0\} = 0$$
$$G_0^\circ\big(\emptyset \mid J_{i(2)} \equiv J_1\big) = w_1 T_1 + G_1^\circ\big(\{J_1\}\big) = 1.5 \cdot 0 + 18 = 18$$
$$T_4 = \max\{st_{i(1)} + p_4 - d_4, 0\} = \max\{0 + 3 - 6, 0\} = 0$$
$$G_0^\circ\big(\emptyset \mid J_{i(2)} \equiv J_5\big) = w_4 T_4 + G_1^\circ\big(\{J_4\}\big) = 1 \cdot 0 + 17 = 17$$
$$G_0^\circ\big(\emptyset\big) = \min\{18, 17\} = 17$$
$$U_0^\circ\big(\emptyset\big) = J_4 \quad \text{(prossimo job da eseguire)}$$

FASE FORWARD

- Allo stadio iniziale $k = 0$ si ci trova nello stato iniziale $X_0 = \emptyset$. La decisione ottima (primo job da eseguire) in tal stato è J_4.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 0$ si raggiunge lo stato $X_1 = \{J_4\}$. La decisione ottima (secondo job da eseguire) in tal stato è J_1.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 1$ si raggiunge lo stato $X_2 = \{J_1, J_4\}$. La decisione ottima (terzo job da eseguire) in tal stato è J_2.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 2$ si raggiunge lo stato $X_3 = \{J_1, J_2, J_4\}$. La decisione ottima (quarto job da eseguire) in tal stato è J_3.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 3$ si raggiunge lo stato $X_4 = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$. La decisione ottima (quinto e ultimo job da eseguire) in tal stato è J_5.
- Applicando la decisione ottima determinata allo stadio $k = 4$ si raggiunge lo stato finale $X_5 = \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$. Non vi sono ulteriori decisioni da prendere.

In conclusione, lo schedule ottimo per il problema considerato è

$$J_4 \to J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_5$$

e tale schedule fornisce una tardiness complessiva pesata pari a 17.

3 Risoluzione del problema $\boxed{1 \mid s_{jk} \mid \text{TSC}}$ con 4 job

Si risolva, applicando l'algoritmo della programmazione dinamica, il problema di scheduling $1 \mid s_{jk} \mid$ TSC caratterizzato dai seguenti valori di startup, setup e cleanup

- costi di startup:

startup (a_j)	J_1	J_2	J_3	J_4
–	2	2	5	6

- costi di setup:

setup (b_{jk})	J_1	J_2	J_3	J_4
J_1	–	4	5	3
J_2	2	–	4	6
J_3	3	5	–	3
J_4	3	2	1	–

- costi di cleanup:

cleanup (c_j)	J_1	J_2	J_3	J_4
–	2	4	3	4

Non essendo influenti al fine della risoluzione del problema di scheduling (che ha come obiettivo la minimizzazione dei soli costi di startup, setup e cleanup senza preoccuparsi di quanto durano le attività), i processing time e le due date non sono riportate. Tali valori devono ovviamente essere presi in considerazione nel caso in cui il funzionale di costo includa anche una componente legata al completion time o alla due date.

Nei problemi in cui bisogna prendere in considerazione il setup sequence-dependent, lo stato non può essere composto semplicemente dall'elenco non ordinato di job già eseguiti perché mancherebbe l'informazione sull'ultimo job eseguito; informazione che è necessaria per il setup sequence-dependent.

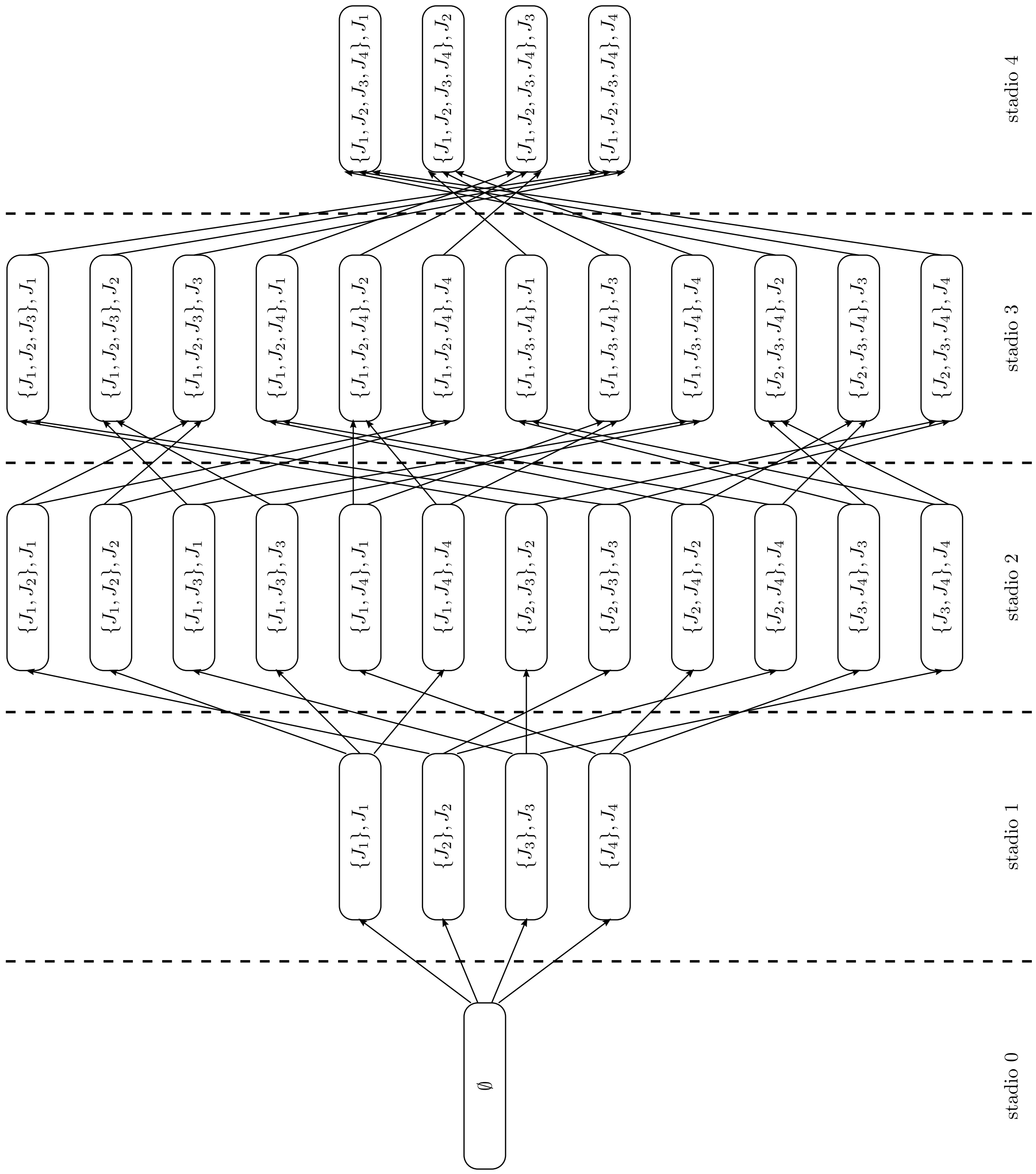
Lo stato, in questo caso è costituito pertanto da:

- elenco non ordinato di job già eseguiti;
- ultimo job eseguito tra quelli già eseguiti.

Il controllo, invece, è sempre relativo al prossimo job da eseguire.

Con uno stato così definito, si ottiene una dinamica dello stato come quella rappresentata dal grafo di transizione illustrato nella figura seguente. Su un tale grafo di transizione è possibile applicare l'algoritmo della programmazione dinamica ottenendo così lo schedule ottimo per il problema considerato.

Si noti che, a differenza dei problemi visti in precedenza, in questo caso vi è un costo finale rappresentato dai costi di cleanup. Tali costi devono essere presi in considerazione al primo passo della fase backward, relativo allo stadio decisionale $k = 4$, in cui viene inizializzato il cost-to-go ottimo per ciascuno dei 4 stati presenti in tale stadio decisionale.


$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J_1$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J_2$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J_3$
$\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, J_4$
stadio 4
$\{J_1, J_2, J_3\}, J_1$
$\{J_1, J_2, J_3\}, J_2$
$\{J_1, J_2, J_3\}, J_3$
$\{J_1, J_2, J_4\}, J_1$
$\{J_1, J_2, J_4\}, J_2$
$\{J_1, J_2, J_4\}, J_4$
$\{J_1, J_3, J_4\}, J_1$
$\{J_1, J_3, J_4\}, J_3$
$\{J_1, J_3, J_4\}, J_4$
$\{J_2, J_3, J_4\}, J_2$
$\{J_2, J_3, J_4\}, J_3$
$\{J_2, J_3, J_4\}, J_4$
stadio 3
$\{J_1, J_2\}, J_1$
$\{J_1, J_2\}, J_2$
$\{J_1, J_3\}, J_1$
$\{J_1, J_3\}, J_3$
$\{J_1, J_4\}, J_1$
$\{J_1, J_4\}, J_4$
$\{J_2, J_3\}, J_2$
$\{J_2, J_3\}, J_3$
$\{J_2, J_4\}, J_2$
$\{J_2, J_4\}, J_4$
$\{J_3, J_4\}, J_3$
$\{J_3, J_4\}, J_4$
stadio 2
$\{J_1\}, J_1$
$\{J_2\}, J_2$
$\{J_3\}, J_3$
$\{J_4\}, J_4$
stadio 1
$\emptyset$
stadio 0