一维非齐次热传导方程的向后 Euler 格式

作业:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1 \\ u(x,0) = e^x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = e^t, u(1,t) = e^{1+t}, & , \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t) = e^{x+t}$.

定义误差为

$$E_\infty(h,\tau) = \max_{\substack{1\le i\le m-1 \\ 1\le k\le n}} |u(x_i,t_k) - u_k^k)|$$

用向后 Euler 格式求下述问题的数值解并对数值解、精度和误差阶进行相应的数值分析。

解：

将 xm 等分，将 tn 等分, 记 $h = \dfrac{1}{m}, \tau = \dfrac{1}{n}$

$x_i = ih, 0 \le i \le m$

$t_k = k\tau, 0 \le k \le n$

向后 Euler 差分格式为

$$\begin{cases} -\gamma u_{i-1}^k + (1+2\gamma)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = u_i^{k-1} + \tau f(x_i,t_k) \\ u_i^0 = e^{x_i} \\ u_0^k = e^{t_k}, u_m^k = e^{1+t_k} \end{cases}$$

其中，$1 \le i \le m-1, 1 \le k \le n, \gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$

$f(x_i,t_k) = 0$

写成矩阵形式 $Au = f$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & & \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\dfrac{\gamma}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\gamma & 1+2\gamma \end{bmatrix}$$

$$u^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{m-1}^k]^T$$

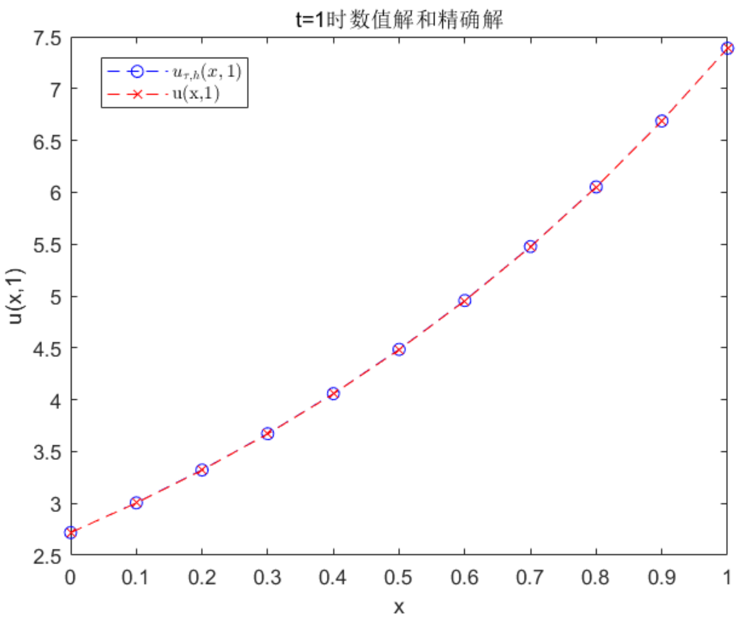

图 1　**t=1** 处的数值解和精确解

.

$$f = [u_1^{k-1} + \gamma u_0^k, u_2^{k-1}, \cdots, u_{m-2}^{k-1}, u_{m-1}^{k-1} + \gamma u_m^k]^T$$

.

解方程，由第 k 层的值，能够求出第 k+1 层的值。

解题程序运行于 Matlab 2018a.

当 $\tau = \dfrac{1}{100}, h = \dfrac{1}{10}$ 时,t=1 处的数值解和精确解见图1, 从图像上看很接近。

当 $\tau = \dfrac{1}{100}, h = \dfrac{1}{10}$ 时, 取 x=0.5, 不同 t 处的值见表1, 当层数越深时，误差越大，这是因为, 每一次由 k 层求解 k+1 层时都有误差，随着 t 的增大，误差不断累积，越来越大, 到 t=1 处误差变得最大。

取不同 τ 和 h 时，t=1 处的误差见图2, 步长越小，误差也越小。

取不同步长时，误差和误差比见图用向后 Euler 格式，τ 变为原来的 4 倍，h 变为原来的 2 倍，误差会变为原来的 4 倍，符合 $O(\tau + h^2)$ 的截断误差

表 **1**　**x=0.5** 时，不同 **t** 处的数值解、精确解和误差

k	t	数值解	精确解	误差
10	0.1	1.822891	1.822119	7.7174E-04
20	0.2	2.014927	2.013753	1.1743E-03
30	0.3	2.226965	2.225541	1.4242E-03
40	0.4	2.461227	2.459603	1.6237E-03
50	0.5	2.720096	2.718282	1.8140E-03
60	0.6	3.006178	3.004166	2.0124E-03
70	0.7	3.322344	3.320117	2.2271E-03
80	0.8	3.671759	3.669297	2.4625E-03
90	0.9	4.057922	4.055200	2.7219E-03
100	1	4.484697	4.481689	3.0084E-03

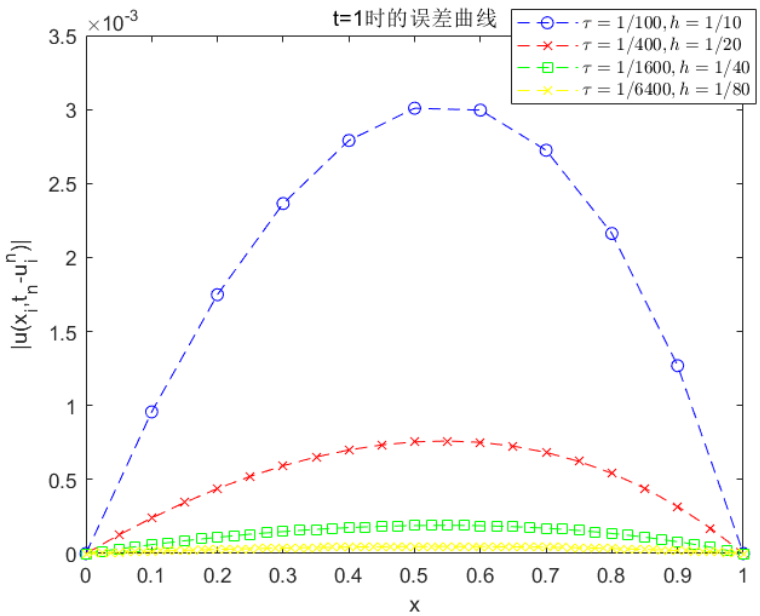

图 **2**　不同步长下的误差

表 **2**　取不同步长时的误差和误差比

h, τ	$E_\infty(h, \tau)$	$E_\infty(2h, 4\tau)/E_\infty(h, \tau)$
1/100,1/10	3.0084E-03	*
1/400,1/20	7.6035E-04	3.956615
1/1600,1/40	1.9023E-04	3.997046
1/6400,1/80	4.7566E-05	3.999261