一维非齐次热传导方程的 Crank-Nicolson 格式

作业:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1 \\ u(x,0) = e^x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = e^t, u(1,t) = e^{1+t}, & , \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t) = e^{x+t}$.

定义误差为

$$E_\infty(h,\tau) = \max_{\substack{1 \le i \le m-1 \\ 1 \le k \le n}} |u(x_i, t_k) - u_k^k)|$$

用 Crank-Nicolson 格式求下述问题的数值解并对数值解、精度和误差阶进行相应的数值分析。

解：

将 xm 等分，将 tn 等分, 记 $h = \dfrac{1}{m}, \tau = \dfrac{1}{n}$

$x_i = ih, 0 \le i \le m$

$t_k = k\tau, 0 \le k \le n$

Crank-Nicolson 差分格式为

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \dfrac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}) + f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) \\ u_i^0 = e^{x_i} \\ u_0^k = e^{t_k}, u_m^k = e^{1+t_k} \end{cases}$$

其中，$1 \le i \le m-1, 1 \le k \le n, \gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$

$f(x_i, t_k) = 0$

写成矩阵形式 $A_1 u^{k+1} = A_2 u^k + f$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+\gamma & -\dfrac{\gamma}{2} & & \\ -\dfrac{\gamma}{2} & 1+\gamma & -\dfrac{\gamma}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\dfrac{\gamma}{2} & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

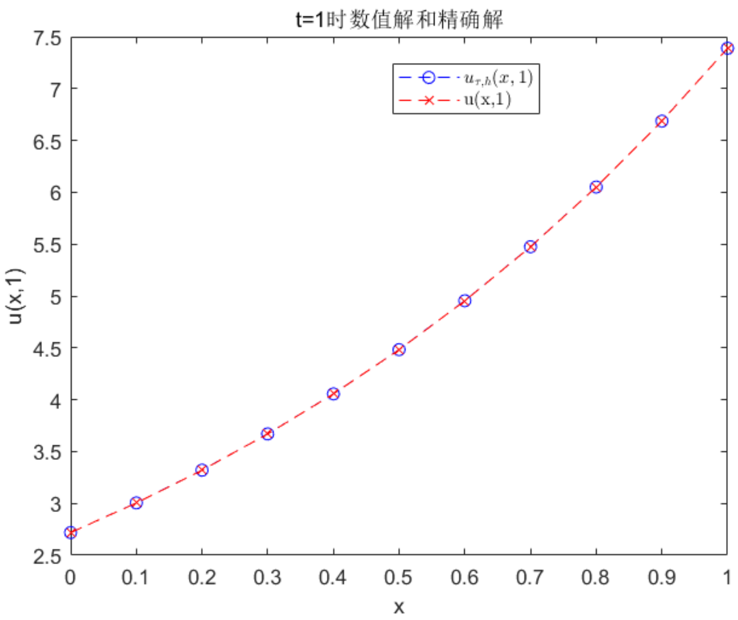

图 **1** **t=1** 处的数值解和精确解

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1-\gamma & \frac{\gamma}{2} & & \\ \frac{\gamma}{2} & 1-\gamma & \frac{\gamma}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{\gamma}{2} & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

$$u^k = [u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{m-1}^k]^T$$

.

$$f = [\frac{\gamma}{2}(u_0^k + u_0^{k+1}), 0, 0 \cdots, 0, \frac{\gamma}{2}(u_m^k + u_m^{k+1})]^T$$

.

解方程，由第 k 层的值，能够求出第 k+1 层的值。

解题程序运行于 Matlab 2018a.

当 $\tau = \frac{1}{10}, h = \frac{1}{10}$ 时,t=1 处的数值解和精确解见图1, 从图像上看很接近。

当 $\tau = \frac{1}{10}, h = \frac{1}{10}$ 时, 取 x=0.5, 不同 t 处的值见表1, 当层数越深时，误差越大，这是因为, 每一次由 k 层求解 k+1 层时都有误差，随着 t 的增大，误差不断累积，越来越大, 到 t=1 处误差变得最大。

表 **1** **x=0.5** 时，不同 **t** 处的数值解、精确解和误差

k	t	数值解	精确解	误差
1	0.1	1.822349	1.822119	2.3053E-04
2	0.2	2.014105	2.013753	3.5224E-04
3	0.3	2.225953	2.225541	4.1241E-04
4	0.4	2.460072	2.459603	4.6922E-04
5	0.5	2.718802	2.718282	5.2042E-04
6	0.6	3.004743	3.004166	5.7700E-04
7	0.7	3.320755	3.320117	6.3794E-04
8	0.8	3.670002	3.669297	7.0507E-04
9	0.9	4.055979	4.055200	7.7949E-04
10	1	4.482550	4.481689	8.6123E-04

取不同 τ 和 h 时，t=1 处的误差见图2, 步长越小，误差也越小。

分别用向后 Euler 格式和 Crank-Nicolson 格式，取不同步长时最大误差和最大误差

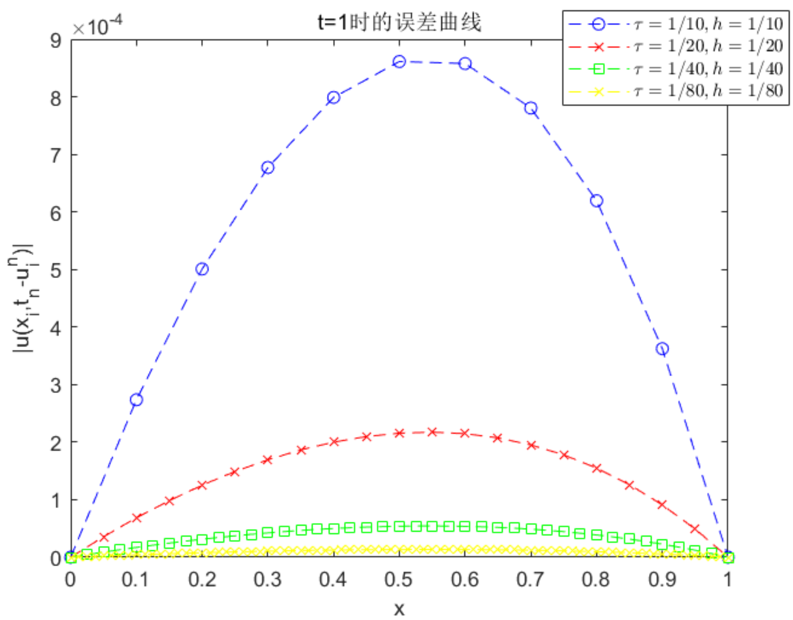

图 **2** 不同步长下的误差

的比值见表2, 可知，用向后 Euler 格式，τ 变为原来的 4 倍，h 变为原来的 2 倍，误差会变为原来的 4 倍，符合 $O(\tau+h^2)$ 的截断误差; 而 Crank-Nicolson 格式，τ 变为原来的 2 倍，h 变为原来的 2 倍，误差会变为原来的 4 倍，符合 $O(\tau^2+h^2)$ 的截断误差, 精度高于向后 Euler 格式。

表 **2**　不同步长的最大误差和最大误差的比

Crank-Nicolson 格式			向后 Euler 格式		
h, τ	$E_\infty(h,\tau)$	$E_\infty(2h,2\tau)/E_\infty(h,\tau)$	h, τ	$E_\infty(h,\tau)$	$E_\infty(2h,4\tau)/E_\infty(h,\tau)$
1/10,1/10	8.61E-04	*	1/100,1/10	3.01E-03	*
1/20,1/20	2.17E-04	3.962274	1/400,1/20	7.60E-04	3.956615
1/40,1/40	5.44E-05	3.998647	1/1600,1/40	1.90E-04	3.997046
1/80,1/80	1.36E-05	3.999657	1/6400,1/80	4.76E-05	3.999261