微分方程数值解第四周第二次作业

作业:

$$\begin{cases} -(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})=(\pi^2-1)e^x sin(\pi y) & , \quad 0\le x\le 2, 0\le y\le 1 \\ u(0,y)=sin(\pi y), u(2,y)=e^2 sin(\pi y) & , \quad 0\le y\le 1 \\ u(x,0)=0, u(x,1)=0, & , \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,y)=e^x sin(\pi y)$.

定义误差为

$$E(h_1,h_2)=\max_{\substack{1\le i\le M-1\\ 1\le j\le N-1}} |u(x_i,y_j)-u_{ij})|$$

请分析误差在不同步长下的变化情况，验证误差阶，并画出误差图。

解：将 xM 等分，将 yN 等分。

差分格式为

$$-\frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1}-\frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j}+2(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2})u_{i,j}-\frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j}-\frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1}=f_{i,j}$$

其中，$1\le i\le N-1, 1\le j\le N-1$. $f_{i,j}=(\pi^2-1)e^{x_i}sin(\pi y_j)$.

可用高斯-塞德尔迭代解方程组，迭代式写为

$$u_{i,j}^{k+1}=[f(x_i,y_j)+\frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1}^{k+1}+\frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j}^{k+1}+\frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j}^{k}+\frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1}^{k}]/[2(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2})]$$

k 表示第 k 次迭代

解题程序运行于 Matlab 2018a.

当 M=40,N=10 时的数值解和精确解对比见图1, 从图像上看很接近。

当取不同的 M 和 N 时，数值解在一些点上的取值和精确解见表1, 可知，当区间数越大，即步长越小，数值解越接近与精确解。

取不同 M 和 N 时，误差见图2,M 和 N 越大，误差越小。

定义误差阶为

$$rate=log2(E(2h_1,2h_2)/E(h_1,h_2))$$

求出上述不同 M，N 对应的步长误差阶，见表2, 误差达到了 2 阶，为五点差分格式截断误差的阶数。

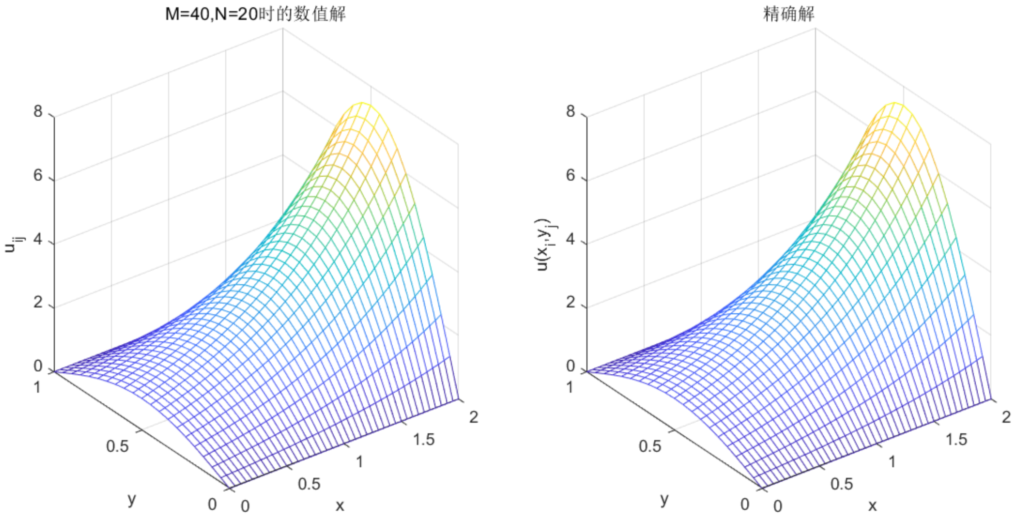
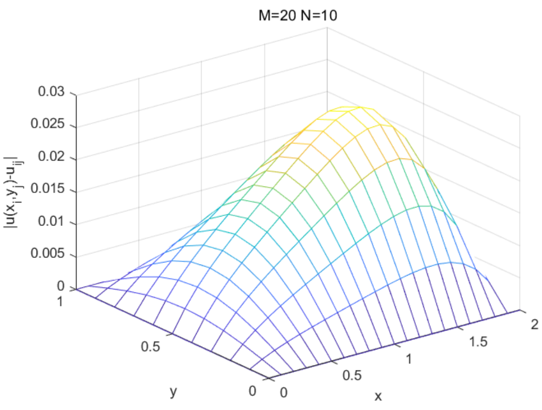


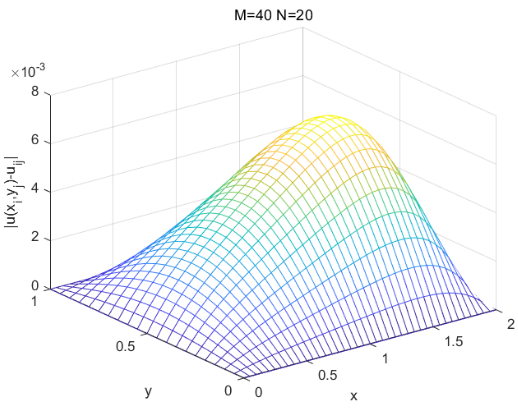
图 **1**

表 **1**　不同 **M，N** 下一些点的数值解和精确解

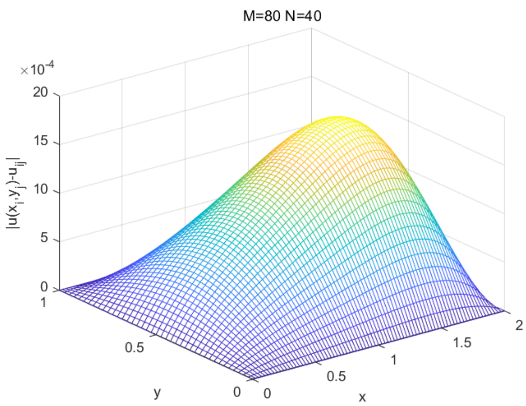
M,N	x(y=0.5)			
	0.4	0.8	1.2	1.6
20,10	1.502594	2.243849	3.345099	4.979283
40,20	1.494511	2.230105	3.326353	4.959601
80,40	1.492491	2.226674	3.321668	4.954671
160,80	1.491982	2.225809	3.320490	4.953433
精确解	1.491825	2.225541	3.320117	4.953032



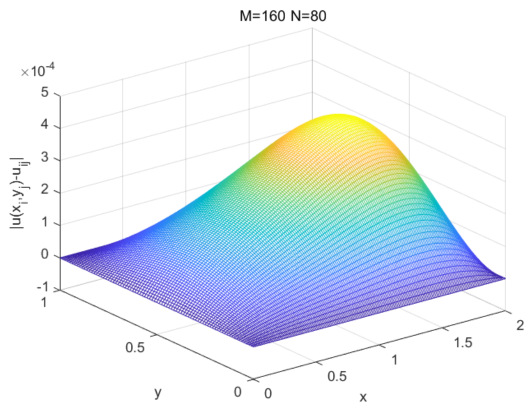
(a) M=20,N=10 时的误差



(b) M=40,N=20 时的误差



(c) M=80,N=40 时的误差



(d) M=160,N=80 时的误差

图 **2**　取不同 **M,N** 的误差

表 **2**　不同步长的误差和误差阶

h_1, h_2	$E(h_1, h_2)$	rate
1/10,1/10	2.7133E-02	*
1/20,1/20	6.7925E-03	1.998021
1/40,1/40	1.6934E-03	2.003985
1/80,1/80	4.1181E-04	2.039917