微分方程数值解第三周第二次作业

作业:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx})+\frac{du}{dx}+u=e^x(2xsin(x)+cosx). \quad , \quad 0\le x\le 1 \\ u(0)=1,u(1)=ecos(1) \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x)=e^x cosx.$

定义误差为 $E_\infty(N)=\max\limits_{0\le i\le N}|u(x_i-u_i)|$,$N$ 为区间个数。

要求用直接差分法求出上述例子的数值解求出不同步长下误差的变化，通过图形和表格总结在步长变化时有什么规律。

解：本题的差分格式为

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{h_i+h_{i+1}}(\frac{2x_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}+1)u_{i-1}+\\ &\frac{1}{h_i+h_{i+1}}[\frac{2x_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}}+\frac{2x_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}+(h_i+h_{i+1})]u_i+\\ &\frac{-1}{h_i+h_{i+1}}(\frac{2x_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}}-1)u_{i+1}\\ &=e^{x_i}(2x_isin(x_i)cos(x_i))\end{aligned}$$

其中，$1\le i\le N-1$,$u_0=1,u_N=ecos(1).$

系数矩阵为 $Au=f$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1+h_2}(\frac{2x_{1+\frac{1}{2}}}{h_2}+\frac{2x_{1-\frac{1}{2}}}{h_1})+1 & -\frac{1}{h_1+h_2}(\frac{2x_{1+\frac{1}{2}}}{h_2}-1) & \\ -\frac{1}{h_2+h_3}(\frac{2x_{2-\frac{1}{2}}}{h_2}+1) & \frac{1}{h_2+h_3}(\frac{2x_{2+\frac{1}{2}}}{h_3}+\frac{2x_{2-\frac{1}{2}}}{h_2})+1 & -\frac{1}{h_2+h_3}(\frac{2x_{2+\frac{1}{2}}}{h_3}-1) \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

为三对角矩阵。

$$f=[f_1+\frac{1}{h_1+h_2}(\frac{2x_{1-\frac{1}{2}}}{h_1}+1),f2,\cdots,f_{N-1}+\frac{1}{h_{N-1}+h_N}(\frac{2x_{N-\frac{1}{2}}}{h_N}-1)ecos(1)]^T$$

$$f_i=e^{x_i}(2x_isin(x_i)+cos(x_i))$$

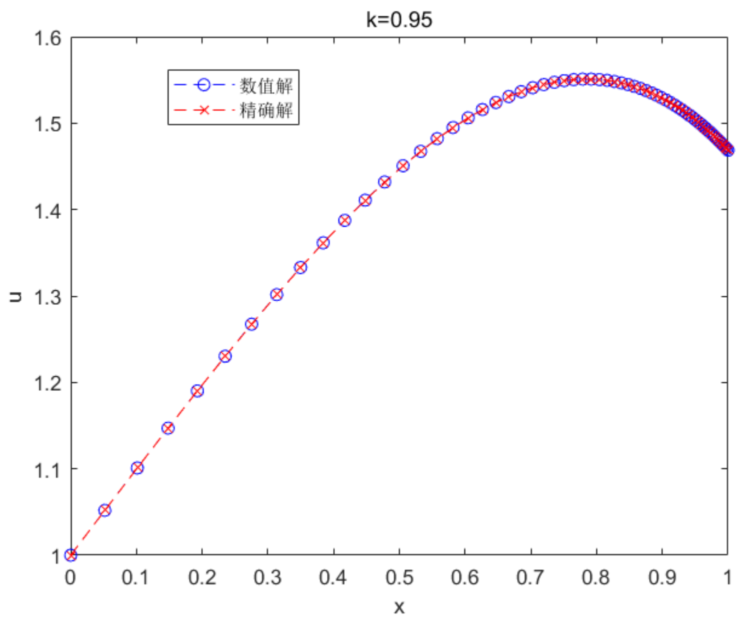

图 **1**　**k=0.95**

.

$$u = [u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}]^T$$

解题程序运行于 Matlab 2018a.

设 k 为步长系数，$h_i = kh_{i-1}$, 如果将区间划分成 N 个小区间，h1 为第一个区间的步长，则有 $h1 + h1k + h1k^2 + h1k^3 + \cdots + h1k^{N-1} == 1$, 可以解出

$$h1 = \frac{1-k}{1-k^N}$$

, 因此取定 N 和 k 时步长可以确定。

当取 N=64,k 分别取 0.95、1 和 1.05 时，直接差分的数值解和精确解对比见图1, 图2和图3，可以发现，数值解都接近于数值解。

此时的误差曲线见图4,k=1 时，即等步长时，数值解的误差最小。

定义误差阶

$$rate = \log 2\frac{E_\infty(N)}{E_\infty(2N)}$$

.

算出不同步长系数对应不同区间数的误差阶，得到表1, 可以发现只有当等步长时，才能达到二阶精度。

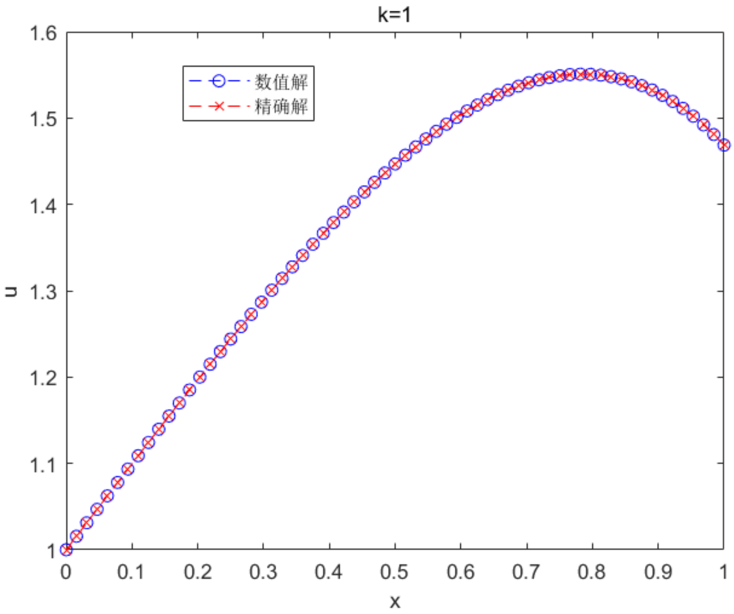
k=1
数值解
精确解
u
x
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

图 **2　k=1**

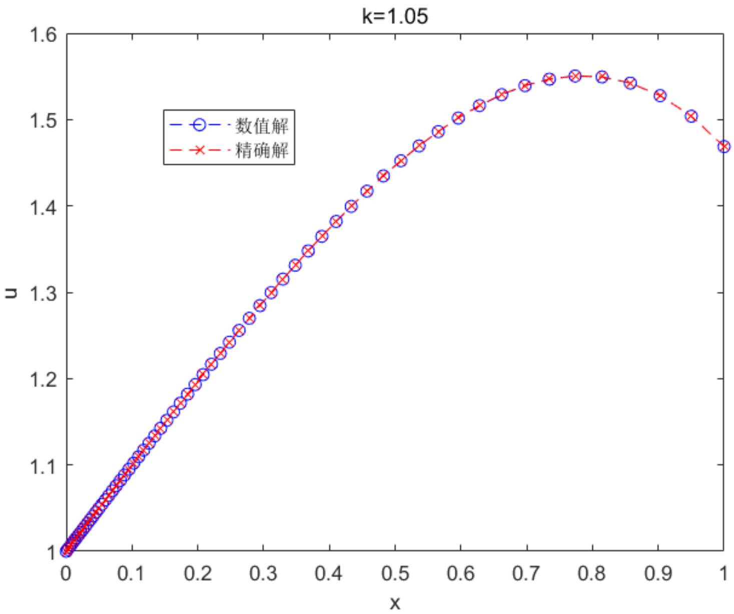
k=1.05
数值解
精确解
u
x
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

图 **3　k=1.05**

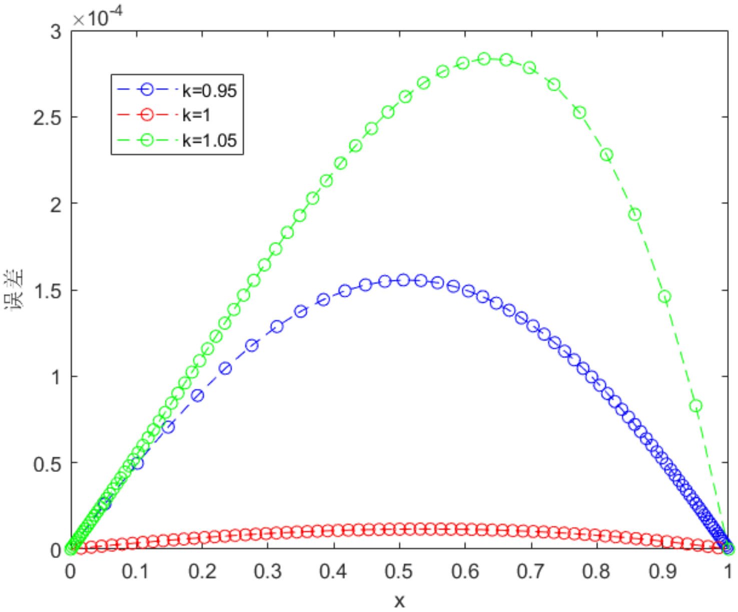

图 **4**　不同步长系数下数值解的误差

表 **1**　误差和误差阶

k	N	$E_\infty(N)$	$E_\infty(N)/E_\infty(2N)$
0.95	8	2.63E-04	*
	16	2.99E-04	-0.18289
	32	2.07E-04	0.531652
	64	1.56E-04	0.410649
	128	1.45E-04	0.10114
1	8	7.41E-04	*
	16	1.86E-04	1.995669
	32	4.65E-05	1.996735
	64	1.16E-05	2.000042
	128	2.91E-06	1.999751
1.05	8	1.78E-03	*
	16	7.56E-04	1.23785
	32	3.99E-04	0.923133
	64	2.84E-04	0.491326
	128	2.62E-04	0.114149