SLAM – EX3

Git: https://github.com/Miryam-Schwartz/SLAM/blob/main/VAN_ex/code/ex3.py

Miryam Schwartz, miryam.schwartz@mail.huji.ac.il

Nava Goetschel, nava.goetschel@mail.huji.ac.il

3.3

- נדרשנו לתאר טרנספורציה T שמעבירה מהקורדיאנטות של התמונה left0 לקורדינאטות של התמונה left1. בהינתן $\binom{x_0}{y_0}$, קורדינאטות בתמונה left0, הטרנספורציה היא:

$$T(\binom{x_0}{y_0}) = K(RK^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} + t)$$

כאשר $K[R|t]$ היא מטריצת המצלמה של left1 והווקטור שמתקבל הינו ייצוג הומוגני לפיקסל (כלומר יש לנרמל את ערך הZ ל1 על מנת לקבל פיקסל בתמונה left1).

הסבר: בהינתן $\binom{x_0}{y_0}$, ראשית נוסף 1 לתחתית הוקטור ונכפיל אותו בK^{-1}. מטריצה זו מעבירה אותנו מקורדינאטות תמונה לקורדינאטות מצלמה, כלומר הוקטור שקיבלנו הוא המיקום של האובייקט ביחס למצלמה *left0*.

כעת נרצה לעבור למיקום ביחס למצלמה *left1*, ולכן נכפיל במטריצה *R* ונוסיף *t*. המטריצה $[R|t]$ מעבירה אותנו לקורדינאטות של מצלמה *Left1*.

לבסוף נכפיל שוב במטריצה *K* על מנת לעבור בחזרה לקורדינאטות תמונה, ונקבל את הנדרש.

- נדרשנו לתאר טרנספורמציה בין שלוש מצלמות, נרכיב את הפונקציות אחת על גבי השניה ונקבל:

$$T_{A\to C}(x) = R_2(R_1x + t_1) + t_2 = R_2R_1x + R_2t_1 + t_2$$

כמו כן נקבל שהמטריצה האקסטרינזית של מצלמה *C* היא: $[R_2R_1|R_2t_1 + t_2]$

- המיקום של המצלמה ביחס לקורדינאטות עולם יהיה: $-R^Tt$.

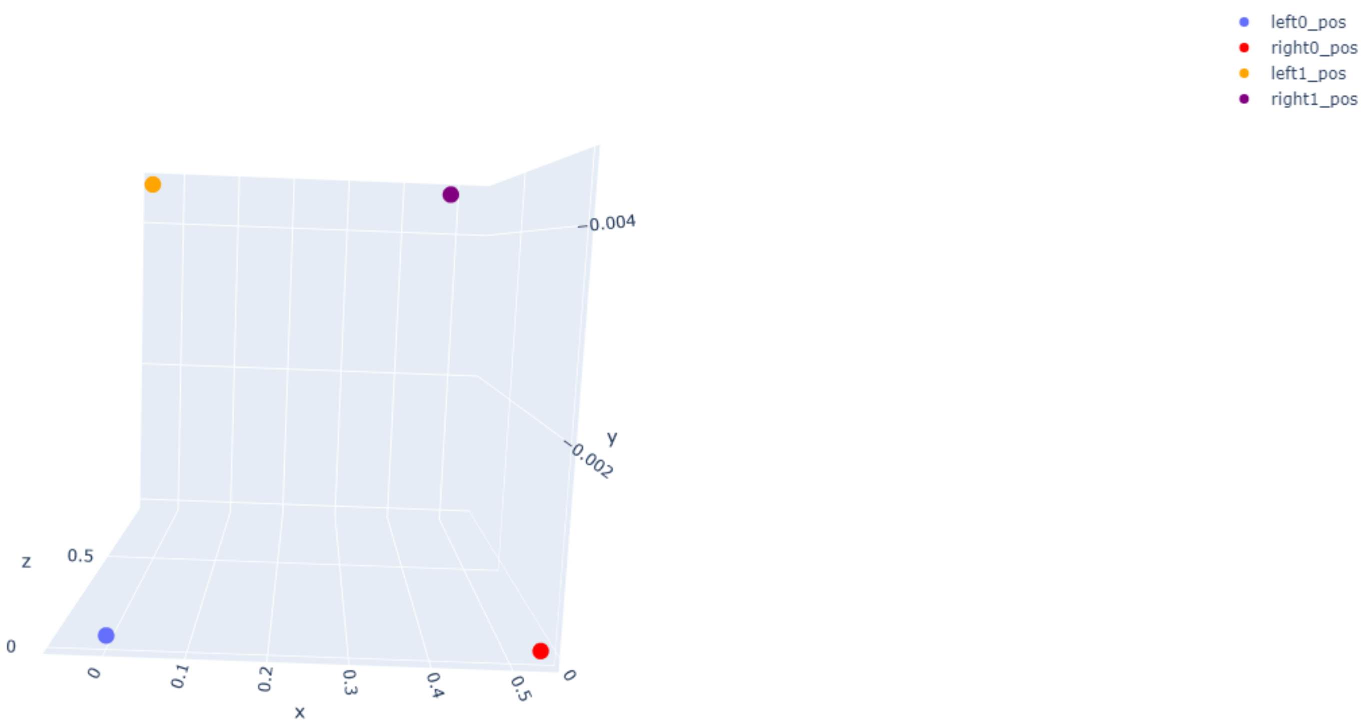
הסבר: עבור כל אובייקט שנמצא במיקום $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ביחס לקורדינאטות עולם, המטריצה $[R|t]$ ממירה אותו למערכת הקורדינאטות של המצלמה, כלומר למערכת קורדינאטות שראשית הצירים שלה היא המצלמה עצמה. ולכן, אם המצלמה נמצאת במיקום $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ביחס לקורדינאטות עולם, נצפה ש$[R|t]$ תעביר אותה לראשית הצירים. כלומר:

$$[R|t]\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+t=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-t\ \Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-R^{-1}t$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-R^{T}t$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהמטריצה R הינה אורתוגונלית.

- נציג את המיקום של 4 המצלמות:



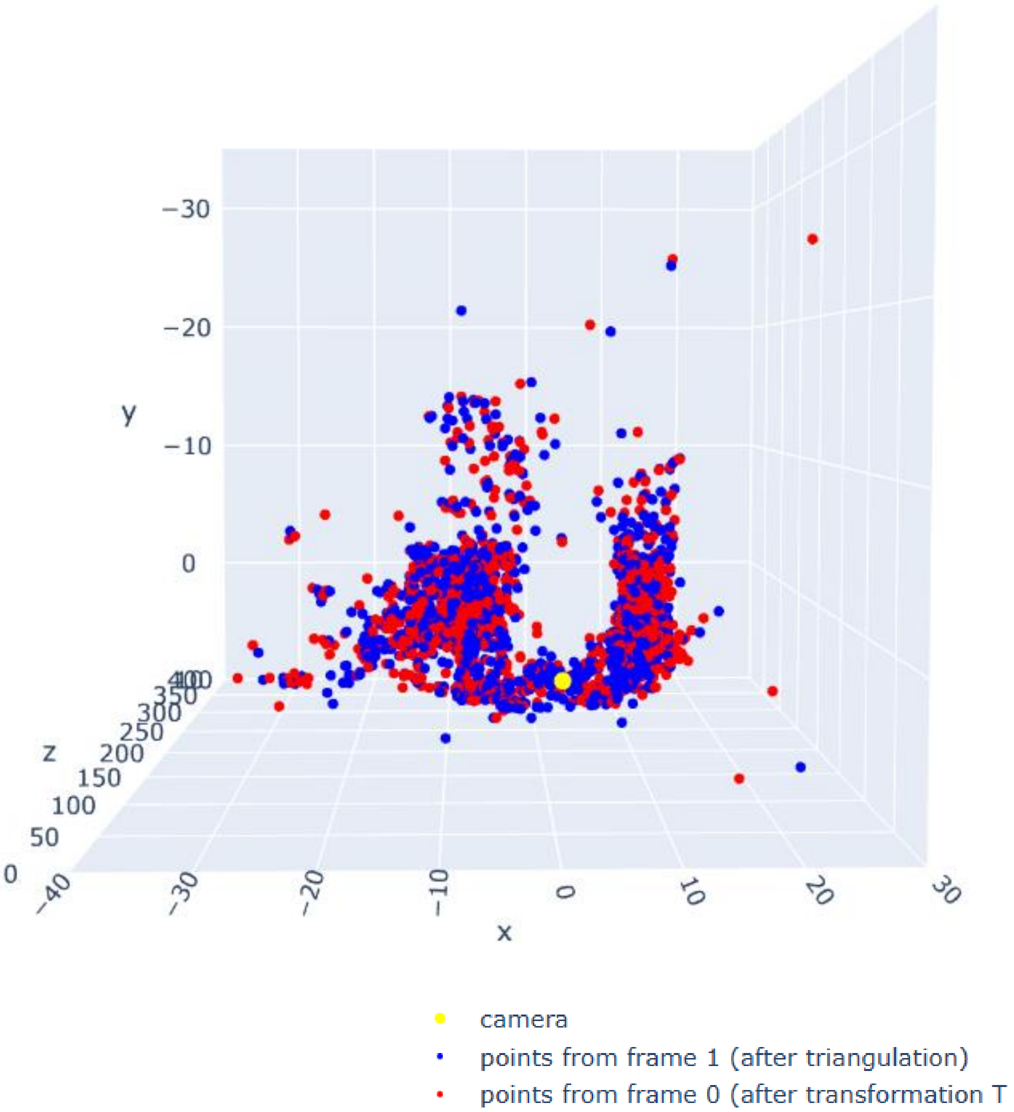
[לחץ כאן על מנת לקבל תרשים אינטראקטיבי.]()

3.4

התאמות על תמונה *leff0* (למעלה) ו-*left1* (למטה), כאשר ה*supportres* בירוק, וכל שאר ההתאמות באדום.

3.5

- ענני הנקודות התלת ממדיות:

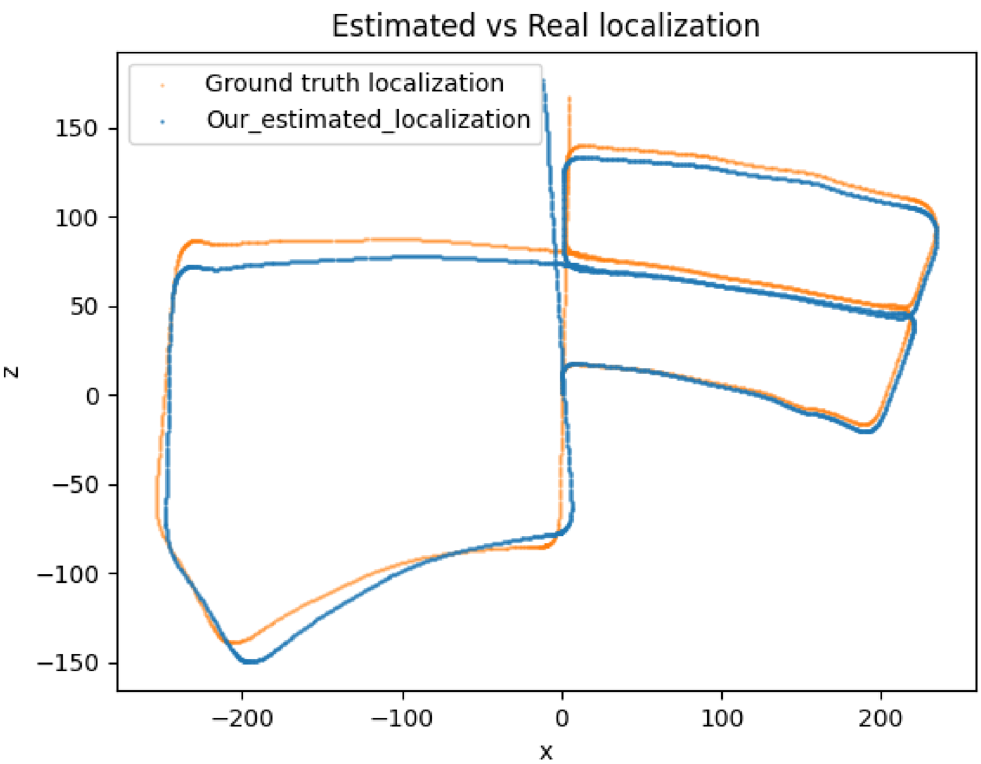


[לחצו כאן כדי לראות את הגרף בצורה אינטראקטיבית]

- התאמות על תמונה *leff0* (למעלה) ו-*left1* (למטה), כאשר ה*supportres* בירוק, וכל שאר ההתאמות באדום. אחרי מציאת טרנספורציה *T* אופטימלית באמצעות אלגוריתם *RANSAC*

3.6

- העקיבה לקחה כ20 דקות.
- מיקומי כל המצלמות *left0* בכל ה*frames* ביחס ל*frame0*, וכן, המיקומים האמיתיים לפי המטריצות שקראנו מהקובץ:



3.7

- יהי $x \sim N(\mu_x, \Sigma_x)$ ו- $y=Ax+b$ עבור מטריצה הפיכה A. נוכיח שהתוחלת של y היא $\mu_y = A\mu_x + b$:

$$\mu_y = \mathbb{E}[y] = \mathbb{E}[Ax+b] = A\mathbb{E}[x] + b = A\mu_x + b$$

נוכיח שמטריצת השונות של y היא: $\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$

$$\Sigma_y = [y-\bar{y}][y-\bar{y}]^T = [Ax+b-(A\mu_x+b)][Ax+b-(A\mu_x+b)]^T =$$

$$[A(x-\mu_x)][A(x-\mu_x)]^T = A(x-\mu_x)(x-\mu_x)^T A^T = A\Sigma_x A^T$$

- **טענה:** עבור $y = Ax+b$, $x \sim M(\mu_x, \Sigma_x)$ נרצה להראות ש: $y \sim M(A\mu_x + b, A\Sigma_x A^T)$

טענת עזר: $\|Mu\|_\Sigma^2 = \|u\|_{M^{-1}\Sigma M^{-T}}^2$

הוכחת טענת העזר:

$$\|Mu\|_\Sigma^2 = (Mu)^T\Sigma^{-1}(Mu) = u^T M^T \Sigma^{-1} M u = \|u\|_{M^{-1}\Sigma M^{-T}}^2$$

הוכחה:

מספיק להראות שפונקציית הצפיפות של המ"מ y היא מהצורה:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_y|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y-\mu_y\|_{\Sigma_y}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y-(A\mu_x+b)\|_{A\Sigma_x A^T}^2\right)$$

נשתמש בכך ש:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y))|J_{g^{-1}}|$$

ראשית נבחין כי:

$$g^{-1}(y) = A^{-1}(y-b)$$

ולכן

$$|J_{g^{-1}}| = |J_{A^{-1}(y-b)}| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

נציב ונקבל:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y))|J_{g^{-1}}| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma_x|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|g^{-1}(y)-\mu_x\|_{\Sigma_x}^2\right)\frac{1}{|A|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A||\Sigma_x||A|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|g^{-1}(y)-\mu_x\|_{\Sigma_x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|g^{-1}(y)-\mu_x\|_{\Sigma_x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|g^{-1}(y)-\mu_x\|_{A^{-1}(A\Sigma_x A^T)A^{-T}}^2\right)$$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|A(g^{-1}(y)-\mu_x)\|_{A\Sigma_x A^T}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|A(A^{-1}(y-b)-\mu_x)\|_{A\Sigma_x A^T}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|(y-b)-A\mu_x)\|_{A\Sigma_x A^T}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|A\Sigma_x A^T|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y-(A\mu_x+b))\|_{A\Sigma_x A^T}^2\right)$$

כשבמעבר המסומן בכוכבית השתמשנו בטענת העזר.