



DIE
TI.
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
POLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
E DELLE TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

TESINA DI
DINAMICA E CONTROLLO NON LINEARE

**MODELLO DI RICHARDSON SULLA CORSA
AGLI ARMAMENTI CON VINCOLI DI BUDGET**

Chiar.mo Prof.

Mario Di Bernardo

Michael Mirzaagha

P38000094

Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione e Robotica

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1 Introduzione al modello	6
1.1 Introduzione	6
1.2 Modello matematico	6
2 Analisi del modello	8
2.1 Implementazione in ambiente Matlab-Simulink	8
2.2 Analisi del sistema a ciclo aperto	9
2.3 Analisi di biforcazione	13
3 Sintesi del sistema di controllo a ciclo chiuso	16
3.1 Introduzione al problema di controllo	16
3.2 Linearizzazione	16
3.3 Controllo Lq sul sistema linearizzato	17
3.4 Controllo Lq sul sistema non lineare	25
3.5 I/O Feedback linearization	36
3.6 Model Reference Adaptive Control con controllore PI	46
4 Capitolo 4	54
4.1 Confronto	54
4.2 Conclusioni	58
5 Bibliografia	59

Elenco delle figure

2.1 Inizializzazione dei parametri	8
2.2 Codice per calcolare i punti di equilibrio	8
2.3 Punti di equilibrio	8
2.4 Codice per classificare i punti di equilibrio	9
2.5 Autovettori e autovalori dei punti di equilibrio	9
2.6 Script per calcolare i punti di equilibrio in funzione di b	9
2.7 Punti di equilibrio in funzione di b	10
2.8 Autovalori e autovettori in funzione di b	10
2.9 Ritratto delle fasi per $b=0.05$	11
2.10 Ritratto delle fasi per $b=0.2$	12
2.11 Ritratto delle fasi per $b=2$	12
2.12 Script per calcolare i punti di equilibrio in funzione di a	13
2.13 Valutazione dei punti di equilibrio al variare del parametro a	13
2.14 Valutazione degli autovalori e degli autovettori nei punti di equilibrio al variare del parametro a	14
2.15 Analisi di biforcazione	15
3.1 Codice per inizializzare le matrici e avviare il controllo	17
3.2 Schema LQ sul linearizzato	17
3.3 Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato	18
3.4 Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato	18
3.5 Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato	19
3.6 Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema linearizzato	19
3.7 Schema LQ sul linearizzato con disturbo	20
3.8 Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato soggetto a disturbo	20
3.9 Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo	21
3.10 Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo	21
3.11 Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo	22
3.12 Valutazione performance controllo LQ in presenza di disturbo costante	22
3.13 Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato soggetto a variazione parametrica	23
3.14 Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a variazione parametrica	23
3.15 Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a variazione parametrica	24
3.16 Valutazione performance controllo LQ in presenza di variazione parametrica del 10 %	24
3.17 Schema del controllo LQ sul non lineare	25
3.18 Schema non lineare	25
3.19 Codice Matlab dello schema non lineare	26
3.20 Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare	26
3.21 Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare	27
3.22 Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare	27
3.23 Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema non lineare	28
3.24 sistema non lineare con disturbo	28
3.25 Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare soggetto a disturbo	29
3.26 Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a disturbo	29
3.27 Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a disturbo	30
3.28 Andamento della x_2 del controllo LQ sul non lineare soggetto a disturbo	30
3.29 Valutazione performance controllo LQ applicato sul non lineare in presenza di disturbo	31
3.30 Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare soggetto a variazione parametrica	31
3.31 Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica	32
3.32 Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica	33
3.33 Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica	33
3.34 Valutazione performance controllo LQ applicato sul non lineare in presenza di variazione parametrica	34

3.35	Confronto risposta sul sistema lineare e sul non lineare	34
3.36	Confronto ingresso u sul sistema lineare e sul non lineare	35
3.37	Schema del controllo I/O Feedback Linearization	38
3.38	Implementazione della prima matlab function	38
3.39	Implementazione della seconda matlab function	38
3.40	Risposta del sistema al controllo FBL	39
3.41	Andamento della u del controllo FBL	39
3.42	Andamento della e del controllo FBL	40
3.43	Andamento della x_2 del controllo FBL	40
3.44	Risposta del sistema al controllo FBL con disturbo	41
3.45	Andamento della u del controllo FBL con disturbo	41
3.46	Andamento della e del controllo FBL con disturbo	42
3.47	Andamento della x_2 del controllo FBL con disturbo	42
3.48	Risposta del sistema al controllo FBL con variazione parametrica	43
3.49	Andamento della u del controllo FBL con variazione parametrica	43
3.50	Andamento della e del controllo FBL con variazione parametrica	44
3.51	Andamento della x_2 del controllo FBL con variazione parametrica	44
3.52	Valutazione performance controllo I/O FBL in presenza di disturbo	45
3.53	Valutazione performance controllo I/O FBL in presenza di variazione parametrica	45
3.54	Controllo adattativo con PI	46
3.55	Risposta del sistema al controllo adattativo PI	47
3.56	Andamento della u del controllo adattativo PI	47
3.57	Andamento della e del controllo adattativo PI	48
3.58	Andamento della x_2 del controllo adattativo PI	48
3.59	Risposta del sistema al controllo adattativo PI con disturbo	49
3.60	Andamento della u del controllo adattativo PI con disturbo	49
3.61	Andamento della e del controllo adattativo PI con disturbo	50
3.62	Andamento della x_2 del controllo adattativo PI con disturbo	50
3.63	Risposta del sistema al controllo adattativo PI con variazione parametrica	51
3.64	Andamento della u del controllo adattativo PI con variazione parametrica	51
3.65	Andamento della e del controllo adattativo PI con variazione parametrica	52
3.66	Andamento della x_2 del controllo adattativo PI con variazione parametrica	52
3.67	Confronto delle uscite dei controllori PI adattativi e del modello di riferimento	53
4.1	Confronto fra le uscite negli schemi di controllo proposti	54
4.2	Confronto fra gli errori negli schemi di controllo proposti	54
4.3	Confronto fra gli ingressi negli schemi di controllo proposti	55
4.4	Confronto fra le x_2 negli schemi di controllo proposti	55
4.5	Confronto fra le uscite in presenza di disturbo	56
4.6	Confronto fra gli ingressi in presenza di disturbo	56
4.7	Confronto fra le uscite in presenza di variazione parametrica	57
4.8	Confronto fra gli ingressi in presenza di variazione parametrica	57

Elenco delle tabelle

2.1	Classificazione dei punti di equilibrio al variare del parametro b	11
2.2	Classificazione dei punti di equilibrio al variare del parametro a	15

1 Introduzione al modello

1.1 Introduzione

Lo scopo di questo studio è l'implementazione di uno dei modelli matematici più noti nel settore bellico: "Richardson Arms Race Model".

Richardson è stato un fisico che ha prestato servizio per il corpo medico francese durante la prima guerra mondiale, scioccato dagli eventi della guerra, realizzò un modello che potesse prevedere la corsa agli armamenti tra nazioni prossime al conflitto, analizzando come l'accumulo di armi di un paese influenza l'accumulo di armi dell'altro.

Questo lavoro si concentrerà su una variazione del modello originario di Richardson, infatti terrà in considerazione anche vincoli di budget da dover rispettare.

1.2 Modello matematico

Il modello in esame considera 2 nazioni X_1 e X_2 che decidono di far variare le proprie spese militari (x_1 e x_2) secondo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \frac{x_1}{x_{1max}})(ax_2 - mx_1 + r) \\ \dot{x}_2 = (1 - \frac{x_2}{x_{2max}})(bx_1 - nx_2 + s) \end{cases} \quad (1)$$

Dove:

- Le costanti positive adimensionali **a** e **b** rappresentano la **"paura"** che i paesi X_1 e X_2 provano nei confronti dell'altro paese, maggiore è il loro valore, maggiore sarà l'ammontare di denaro investito.
- Le costanti positive adimensionali **m** e **n** indicano la **"riluttanza"** dei paesi ad investire nel settore militare.
- Il **"risentimento/cordialità"** ovvero le variabili **r** e **s** possono essere positive o negative; riflettono il carattere ostile o pacifico di un paese verso l'altro paese. Minore è il valore di queste variabili, maggiori sono le intenzioni di pace tra i paesi, maggiore il loro valore, più si è propensi ad atteggiamenti ostili.
- x_{1max} e x_{2max} sono costanti che rappresentano **i vincoli di budget** imposti agli armamenti X_1 e X_2 .
- $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rappresentano le spese per le armi all'istante t in miliardi di euro; ovviamente le spese per le armi non possono essere negative, ma al tempo stesso non possono essere neanche maggiori del budget massimo disponibile(x_{1max} e x_{2max}). Quindi risulterà che:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq x_{1max} \\ 0 \leq x_2 \leq x_{2max} \end{cases} \quad (2)$$

Al fine di effettuare l'analisi e il controllo del sistema si considereranno le variabili che rappresentano il **risentimento/cordialità** come ingressi del sistema. Essendo concettualmente queste variabili un comportamento **"reciproco"**, può essere ragionevole supporre che $r = s$ (concettualmente significa che i due paesi provano la stessa stima l'uno per l'altro). Quindi date le assunzioni asserite, il modello diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \frac{x_1}{x_{1max}})(ax_2 - mx_1 + u) \\ \dot{x}_2 = (1 - \frac{x_2}{x_{2max}})(bx_1 - nx_2 + u) \end{cases} \quad (3)$$

I valori dei parametri scelti sono coerenti con quanto presente in letteratura; infatti si assume che:

- $a=1$
- $b=2$
- $m=0.5$
- $n=0.2$
- $x_{1max}=5$
- $x_{2max}=10$

Con tali valori si effettuerà il controllo del sistema mediante l'ingresso u .

2 Analisi del modello

2.1 Implementazione in ambiente Matlab-Simulink

Il primo passo da svolgere per l'analisi del modello è inizializzare i parametri:

```
%inizializzazione  
|close all;  
clear;  
  
a=1  
b=2  
m=0.5  
n=0.2  
x_1_max=5  
x_2_max=10  
u=0
```

Figura 2.1: Inizializzazione dei parametri

Dopo aver fatto le operazioni di inizializzazione del modello, è opportuno trovare gli equilibri del sistema. Per calcolare i punti di equilibrio è stato implementato il seguente codice(figura 2.2):

```
syms x_1 x_2  
[x_1,x_2]=solve([(1-x_1/x_1_max)*(a*x_2-m*x_1)==0,(1-x_2/x_2_max)*(b*x_1-n*x_2)==0,...  
x_1>=0,x_2>=0,x_1<=x_1_max,x_2<=x_2_max],[x_1,x_2])
```

Figura 2.2: Codice per calcolare i punti di equilibrio

Producendo i risultati in figura 2.3

```
x_1 =  
0  
5  
  
x_2 =  
0  
10
```

Figura 2.3: Punti di equilibrio

Quindi i punti di equilibrio sono: (0,0),(5,10).

2.2 Analisi del sistema a ciclo aperto

Una volta calcolati i punti di equilibrio, bisogna procedere alla classificazione dei punti di equilibrio. Per fare ciò è necessario calcolare lo Jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} -m - \frac{a}{x_{1max}}x_2 + \frac{2m}{x_{1max}}x_1 & a - \frac{a}{x_{1max}}x_1 \\ b - \frac{b}{x_{2max}}x_2 & -n - \frac{b}{x_{2max}}x_1 + 2\frac{n}{x_{2max}}x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Il codice Matlab è il seguente(figura 2.2):

```
J1=[-m-a*x_2(1)/x_1_max+2*m*x_1(1)/x_1_max    a-a*x_1(1)/x_1_max;...
      b-b*x_2(1)/x_2_max   -n-b*x_1(1)/x_2_max+2*n*x_2(1)/x_2_max];

J2=[-m-a*x_2(2)/x_1_max+2*m*x_1(2)/x_1_max    a-a*x_1(2)/x_1_max;...
      b-b*x_2(2)/x_2_max   -n-b*x_1(2)/x_2_max+2*n*x_2(2)/x_2_max];

[V1,Lampdal]=eig(J1)
[V2,Lampda2]=eig(J2)
```

Figura 2.4: Codice per classificare i punti di equilibrio

I risultati ottenuti sono:

```
V1 =
[ - 809^(1/2)/40 - 3/40, 809^(1/2)/40 - 3/40]
[ 1, 1]

Lampdal =
[ - 809^(1/2)/20 - 7/20, 0]
[ 0, 809^(1/2)/20 - 7/20]

V2 =
[ 1, 0]
[ 0, 1]

Lampda2 =
[ -3/2, 0]
[ 0, -4/5]
```

Figura 2.5: Autovettori e autovalori dei punti di equilibrio

Di seguito verrà analizzato come cambiano i punti di equilibrio al variare del parametro b (figura2.6):

```
syms x_1 x_2 b
[x_1,x_2]=solve([(1-x_1/x_1_max)*(a*x_2-m*x_1)==0, (1-x_2/x_2_max)*(b*x_1-n*x_2)==0, ...
x_1>=0, x_2>=0, x_1<=x_1_max, x_2<=x_2_max], [x_1,x_2])
```

Figura 2.6: Script per calcolare i punti di equilibrio in funzione di b

```
x_1 =
```

```
0  
5  
5
```

```
x_2 =
```

```
0  
10  
25*b
```

Figura 2.7: Punti di equilibrio in funzione di b

come si può vedere per $b \leq \frac{2}{5}$ il sistema ammette un nuovo punto di equilibrio (per $b > \frac{2}{5}$, viene superato il valore x_{2max}). Gli autovettori e autovalori in funzione di b sono:

```
V1 =  
[ 1/(5*b) - ((400*b + 9)^(1/2)/20 + 7/20)/b, ((400*b + 9)^(1/2)/20 - 7/20)/b + 1/(5*b) ]  
[ 1, 1]  
  
Lampdal =  
[ - (400*b + 9)^(1/2)/20 - 7/20, 0 ]  
[ 0, (400*b + 9)^(1/2)/20 - 7/20 ]  
  
V2 =  
[ 1, 0 ]  
[ 0, 1 ]  
  
Lampda2 =  
[ -3/2, 0 ]  
[ 0, 1/5 - b/2 ]  
  
V3 =  
[ -(55*b - 7)/(5*(-5*b^2 + 2*b)), 0 ]  
[ 1, 1 ]  
  
Lampda3 =  
[ 1/2 - 5*b, 0 ]  
[ 0, b/2 - 1/5 ]
```

Figura 2.8: Autovalori e autovettori in funzione di b

Per classificare opportunamente i punti di equilibrio, è sufficiente verificare per quali valori di b gli autovalori cambiano di segno, nella tabella 2.1 vengono schematizzati i risultati di questa operazione.

pde	$0 < b < \frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} < b < \frac{2}{5}$	$b > \frac{2}{5}$
(0,0)	nodo stabile	sella	sella
(5,10)	sella	sella	nodo stabile
(5,25b)	sella	nodo stabile	⋮

Tabella 2.1: Classificazione dei punti di equilibrio al variare del parametro b

Per verificare la correttezza dei calcoli si è utilizzato il software Pplane, che permette di stampare a video i ritratti delle fasi.

Per $b=0.05$, sono presenti 3 punti di equilibrio: (0,0);(5,10);(5,1.25)

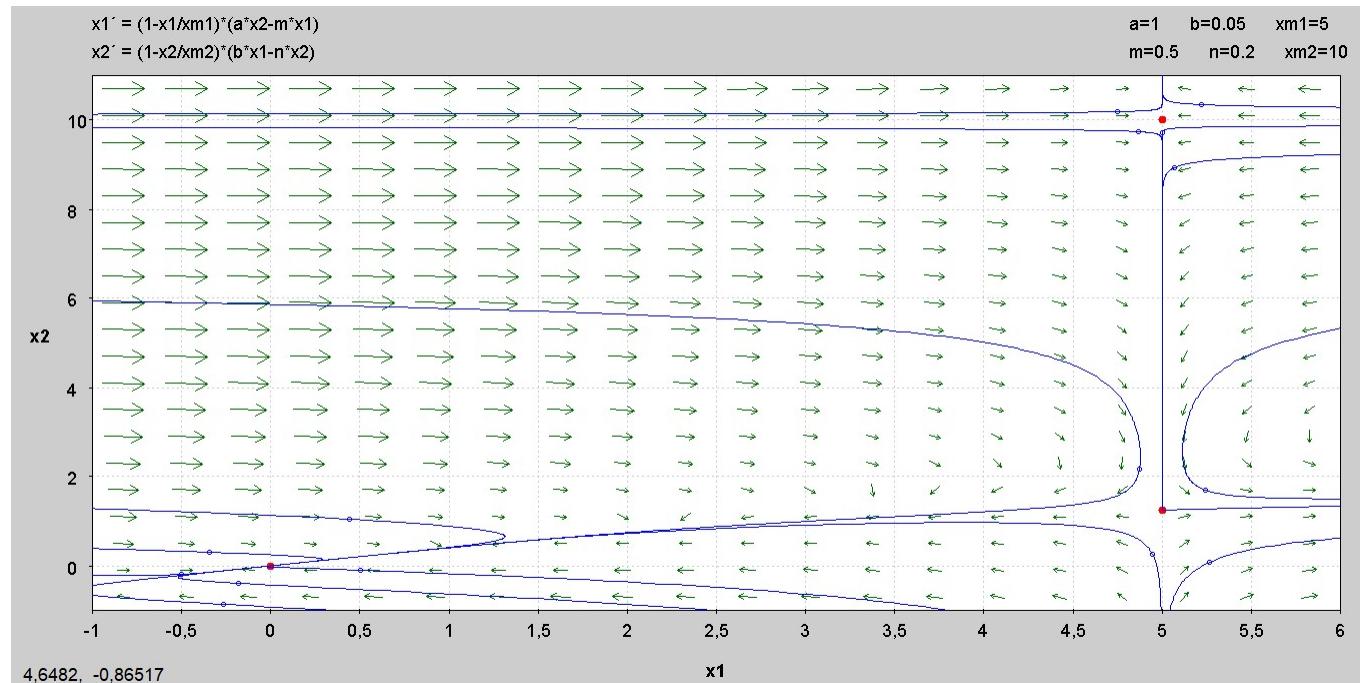


Figura 2.9: Ritratto delle fasi per $b=0.05$

Per $b=0.2$, sono presenti 3 punti di equilibrio: $(0,0);(5,10);(5,5)$

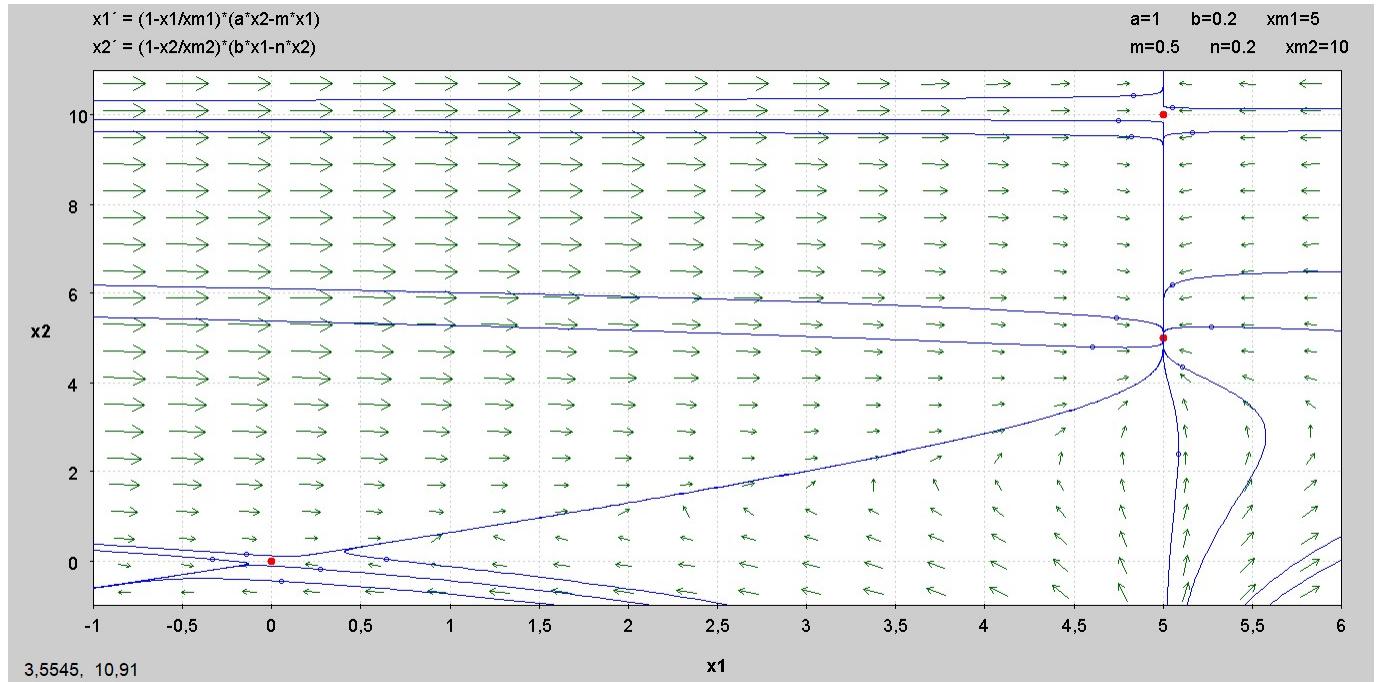


Figura 2.10: Ritratto delle fasi per $b=0.2$

Per $b=2$, sono presenti 2 punti di equilibrio: $(0,0);(5,10)$

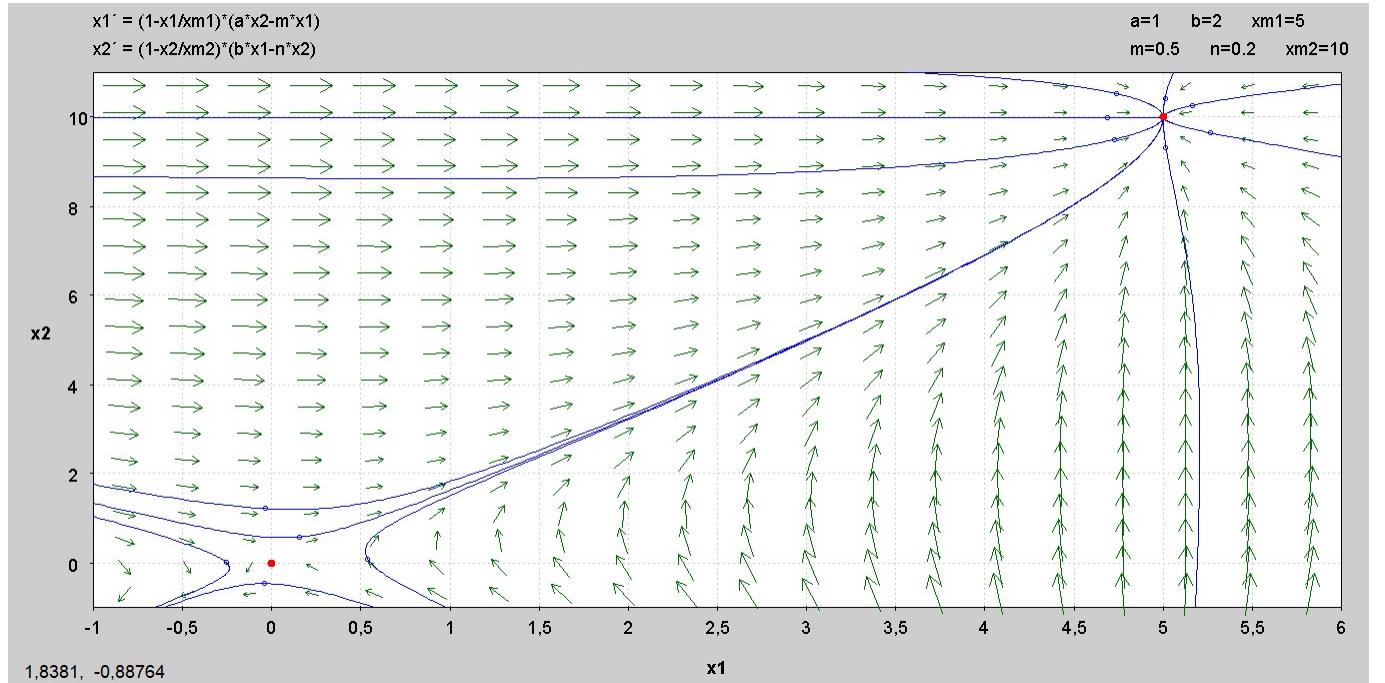


Figura 2.11: Ritratto delle fasi per $b=2$

Come è facile notare dalle immagini 2.9 2.10 2.11, la classificazione degli autovalori è perfettamente coerente con quanto presente nella tabella 2.1

Per tutti i valori di b, è facile dedurre che il sistema non ammette cicli limite, perché non viene rispettato il **teorema di Poincarè**, infatti $N \neq S + 1$ dove N è il numero di fuochi, nodi, repulsori e centri e S il numero di selle.

2.3 Analisi di biforcazione

Per valutare l'analisi di biforcazione si può usare il software "Matcont". Prima di fare ciò è opportuno capire come variano i punti di equilibrio al variare del parametro a, e così come fatto con il parametro b precedentemente, si utilizza il comando solve.

```
syms x_1 x_2 a
[x_1,x_2]=solve([(1-x_1/x_1_max)*(a*x_2-m*x_1)==0, (1-x_2/x_2_max)*(b*x_1-n*x_2)==0, x_1>=0, x_2>=0, x_1<=5, x_2<=10], [x_1,x_2])
```

Figura 2.12: Script per calcolare i punti di equilibrio in funzione di a

I risultati sono (figura 2.13):

```
x_1 =
```

```
0
5
20*a
```

```
x_2 =
```

```
0
10
10
```

Figura 2.13: Valutazione dei punti di equilibrio al variare del parametro a

Si nota che per $a \leq \frac{1}{4}$ il sistema acquista un nuovo punto di equilibrio ammissibile.

Al variare di a gli autovalori e gli autovettori dei punti di equilibrio diventano:

```

V1 =
[ - (800*a + 9)^(1/2)/40 - 3/40, (800*a + 9)^(1/2)/40 - 3/40]
[ 1, 1]

Lampdal =
[ - (800*a + 9)^(1/2)/20 - 7/20, 0]
[ 0, (800*a + 9)^(1/2)/20 - 7/20]

V2 =
[ 0, 1]
[ 1, 0]

Lampda2 =
[ -4/5, 0]
[ 0, 1/2 - 2*a]

V3 =
[ 1, -(10*(- 4*a^2 + a))/(60*a - 7)]
[ 0, 1]

Lampda3 =
[ 2*a - 1/2, 0]
[ 0, 1/5 - 4*a]

```

Figura 2.14: Valutazione degli autovalori e degli autovettori nei punti di equilibrio al variare del parametro a

Quando a assume il valore di $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{20}$ cambia la natura dei punti di equilibrio. Nella tabella 2.2 viene schematizzato ciò

pde	$0 < a < \frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} < a < \frac{1}{4}$	$a > \frac{1}{4}$
(0,0)	nodo stabile	sella	sella
(5,10)	sella	sella	nodo stabile
(20a,10)	sella	nodo stabile	sella

Tabella 2.2: Classificazione dei punti di equilibrio al variare del parametro a

- per $a = \frac{1}{20}$ il primo punto di equilibrio passa da nodo stabile a sella, mentre il terzo punto di equilibrio fa il contrario.
- per $a = \frac{1}{4}$ il secondo punto di equilibrio passa da sella a nodo stabile, mentre il terzo punto di equilibrio fa il contrario.

L'inversione di stabilità di 2 punti di equilibrio in corrispondenza di un dato valore a^* è un comportamento tipico delle biforazioni transcritiche.

Effettuando la simulazione su Matcont (fig 2.15), ci vengono segnalate 2 biforazioni in corrispondenza dei valori di a indicati precedentemente.

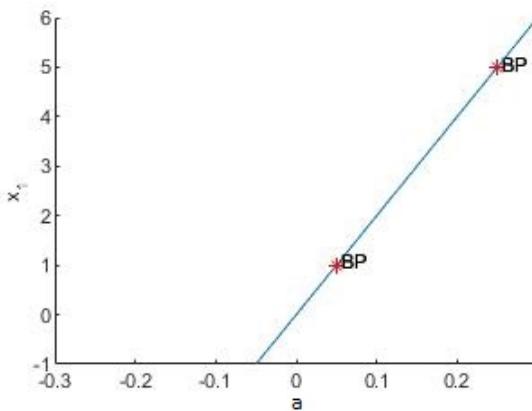


Figura 2.15: Analisi di biforcazione

3 Sintesi del sistema di controllo a ciclo chiuso

3.1 Introduzione al problema di controllo

Prima di effettuare il controllo è opportuno definire un'equazione di uscita e formulare opportunamente il problema di controllo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \frac{x_1}{x_{1max}})(ax_2 - mx_1 + u) \\ \dot{x}_2 = (1 - \frac{x_2}{x_{2max}})(bx_1 - nx_2 + u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5)$$

Lo scopo del design del controllo è quello di portare la spesa militare dello stato X_1 a un valore durato e costante pari a 1 miliardo di euro.

3.2 Linearizzazione

Il sistema a tempo continuo (5) è non lineare. Per ottenere un sistema lineare si deve procedere alla linearizzazione di quest'ultimo attorno ad un punto di equilibrio. I punti di equilibrio sono tutti quelli che soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq m \\ u = u_{eq} = cost \end{cases} \quad (6)$$

Il punto intorno al quale si procederà con la linearizzazione è il punto $x_{eq} = [0 \ 0]^T$. Il motivo principale per il quale si è scelto questo punto di equilibrio è che il modello di Richardson è nato per analizzare la spesa militare durante un periodo di guerra, per tale motivo sarebbe scorretto partire dal punto di equilibrio $[5 \ 10]^T$ (si ricorda che le coordinate di questo punto di equilibrio corrispondono ai valori x_{1max} e x_{2max}), perchè non avrebbe senso durante un conflitto diminuire la spesa militare. Inoltre questo modello è soggetto ad alcuni limiti, dovuti al livello di astrazione con il quale si sta effettuando l'analisi, infatti non si tengono in considerazione né alcuni aspetti militari, come la possibilità che altri stati possano intervenire durante il conflitto, né altri aspetti economici come: l'inflazione, sanzioni economiche inflitte da altri stati o sospensioni di accordi commerciali. Per tale motivo il modello diventa maggiormente realistico, laddove si suppone che le forze in gioco siano di lieve entità, così da scaturire meno fervore da parte di altri stati, quindi risulta ragionevole che il capitale militare iniziale di questi stati sia prossimo allo 0. L'obiettivo di controllo è di ottenere errore a regime nullo della risposta y in presenza di riferimento unitario, partendo da condizioni iniziali $[0.1 \ 0.1]^T$

Il sistema linearizzato diventa:

$$\begin{cases} \dot{\delta}(x) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) \end{cases} \quad (7)$$

dove

$$\delta x(t) \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1eq} \\ x_2(t) - x_{2eq} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\delta u(t) = u(t) - u_{eq} \quad (9)$$

$$\delta y(t) = y(t) - y_{eq} \quad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 2 & -0.2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad (11)$$

3.3 Controllo Lq sul sistema linearizzato

Sullo schema linearizzato verrà effettuato un controllo LQ. Per avere errore a regime nullo, verrà applicato un integratore. Il primo passaggio è inizializzare le matrici del sistema e sfruttare il comando LQI.

```

A=[-0.5 1; 2 -0.2];
B=[1;1];
C=[1 0];
D=0;
rank(ctrb(A,B))%è completamente controllabile
rank(obsv(A,C))%è completamente osservabile
Q=diag([10000,1,10000]);
R=1;
sys=ss(A,B,C,D);
KK=lqi(sys,Q,R);
Kf=KK(:,1:2);
Ki=KK(:,end);
rif = 1;
dis = -0.3;
td=10;% il disturbo parte dall'istante 10

```

Figura 3.1: Codice per inizializzare le matrici e avviare il controllo

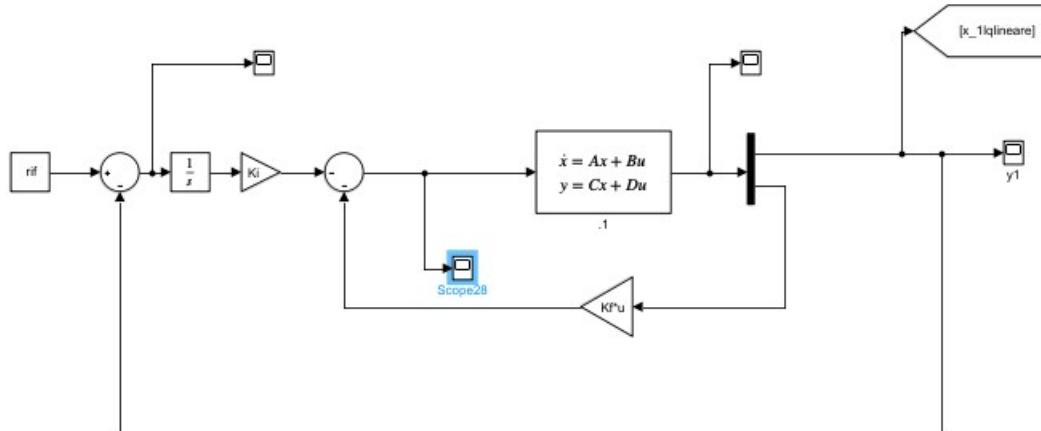


Figura 3.2: Schema LQ sul linearizzato

L'uscita del sistema è:

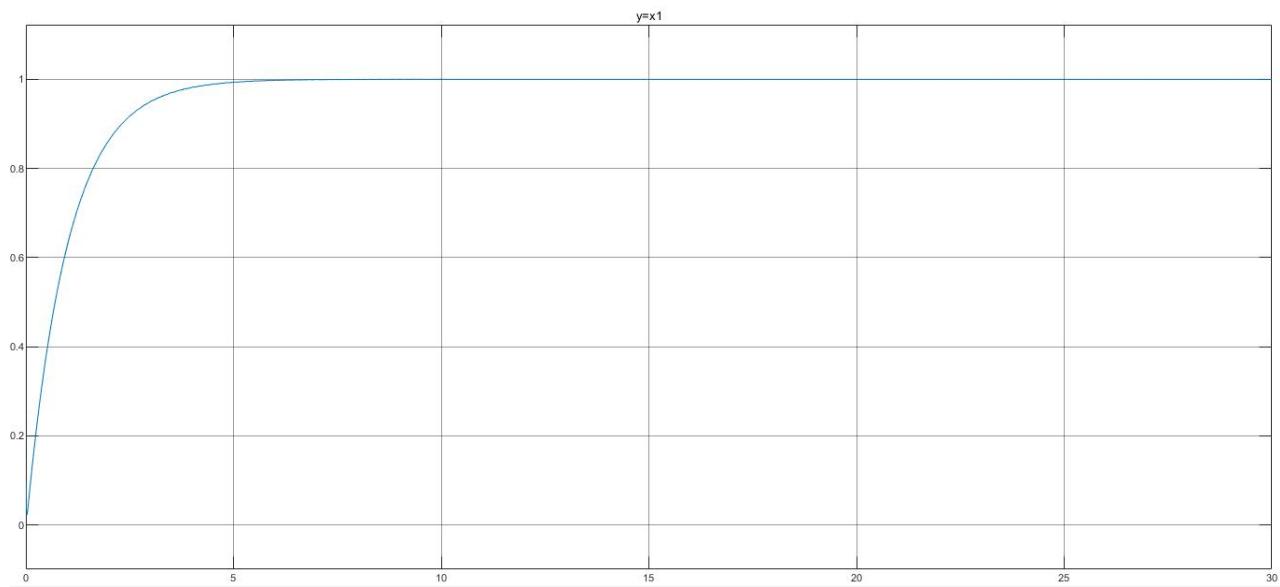


Figura 3.3: Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo u , dell'errore, e di x_2

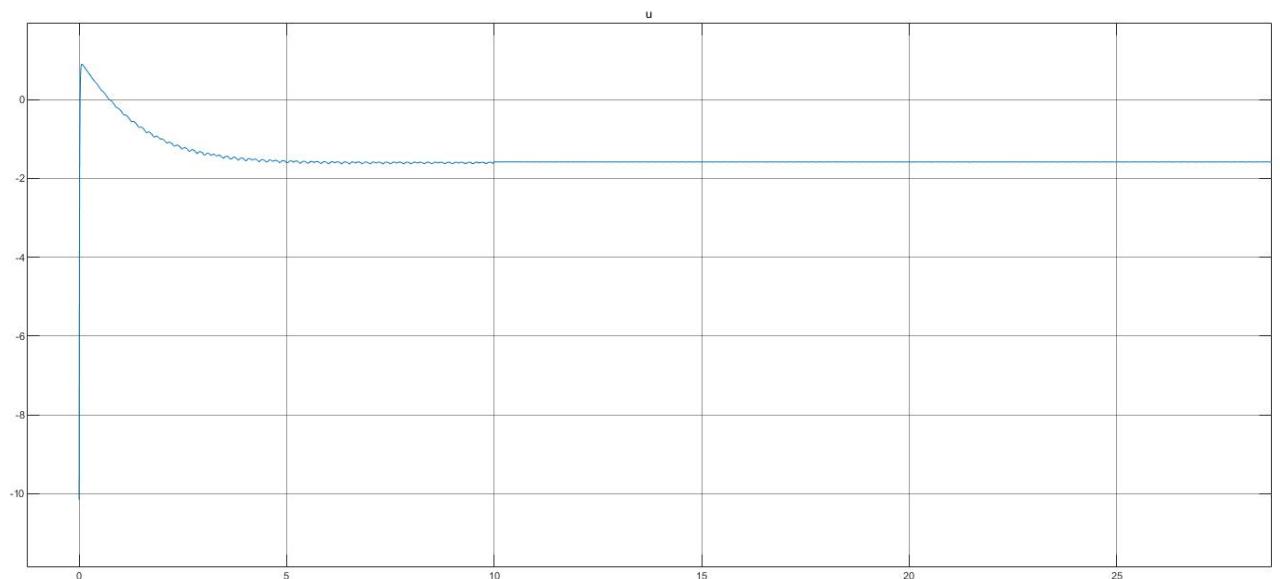


Figura 3.4: Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato

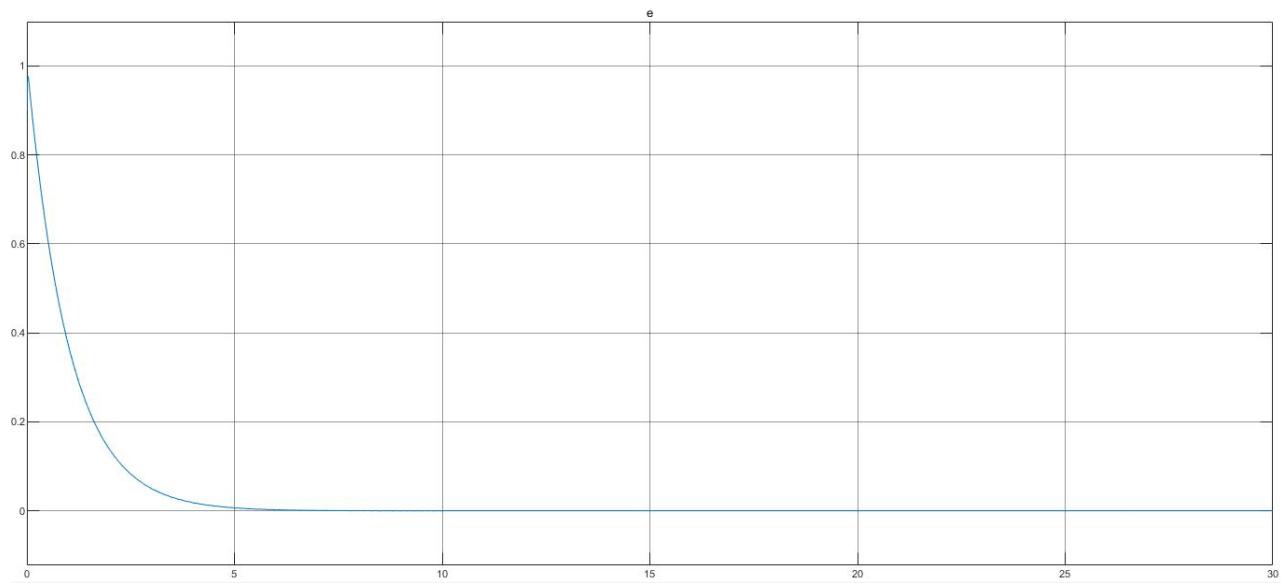


Figura 3.5: Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato

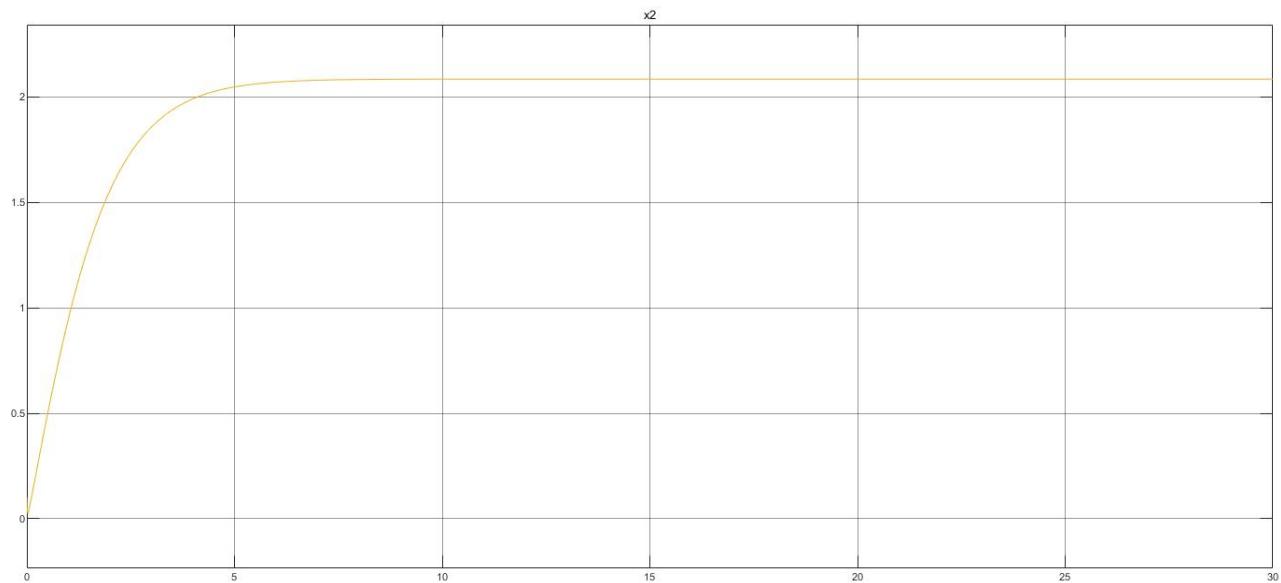


Figura 3.6: Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema linearizzato

La risposta del sistema ha una sovraelongazione nulla e tempo di assestamento inferiore ai 4 s. È possibile effettuare un'analisi di robustezza del sistema, aggiungendo un disturbo a gradino pari a -0.3 che inizia all'istante 10. Esso rappresenta concettualmente un miglioramento delle relazioni tra i 2 stati.

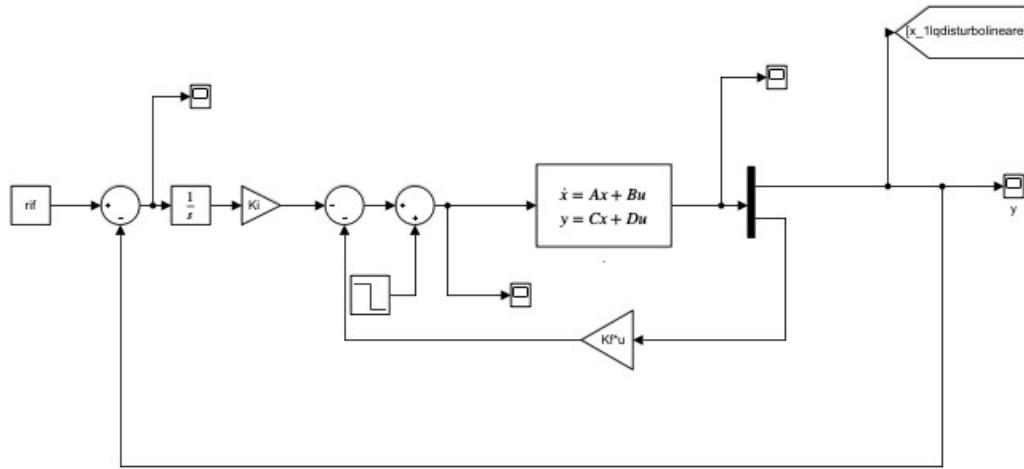


Figura 3.7: Schema LQ sul linearizzato con disturbo

L'uscita del sistema è:

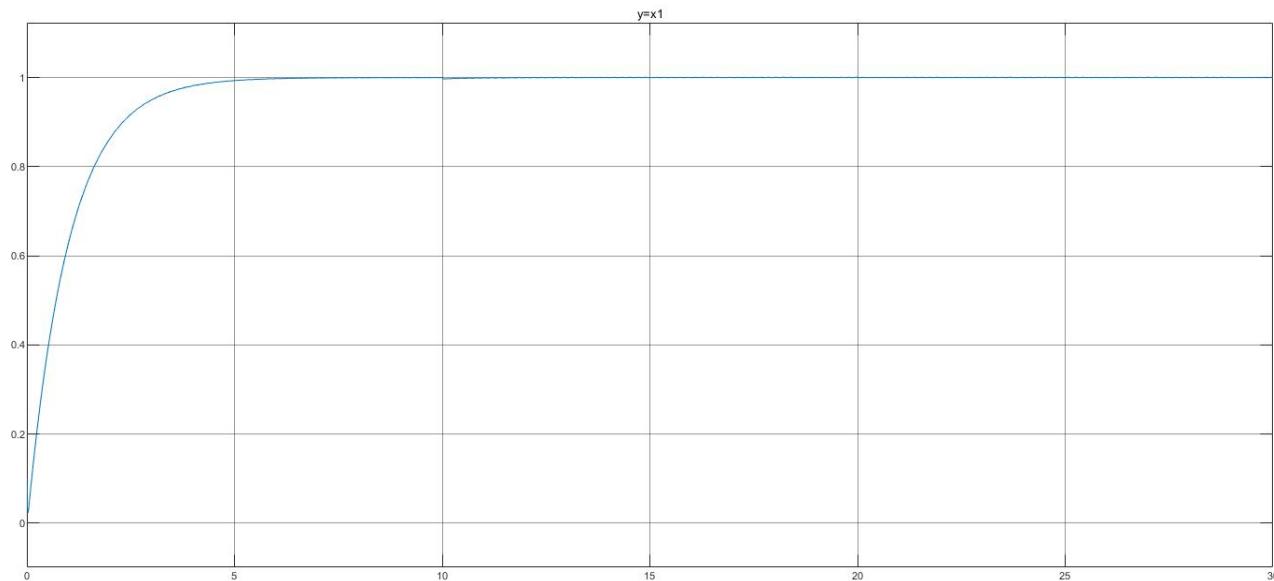


Figura 3.8: Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato soggetto a disturbo

Come si nota il sistema risulta robusto ai disturbi in ingresso. Questo è un risultato aspettato a causa della presenza dell'integratore nello schema.

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

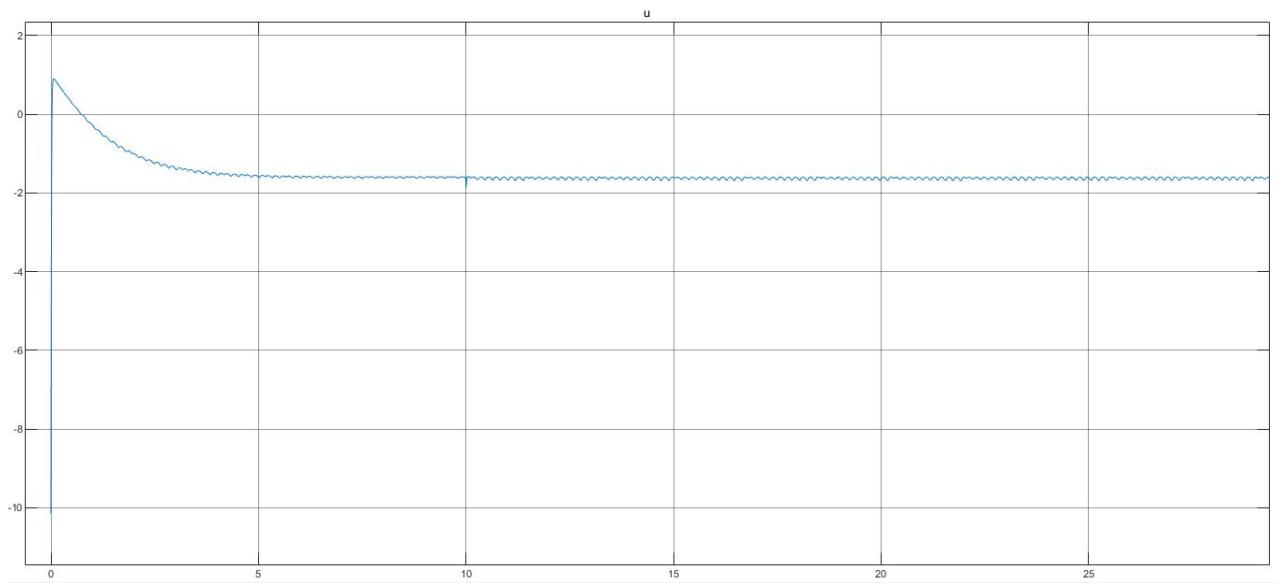


Figura 3.9: Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo

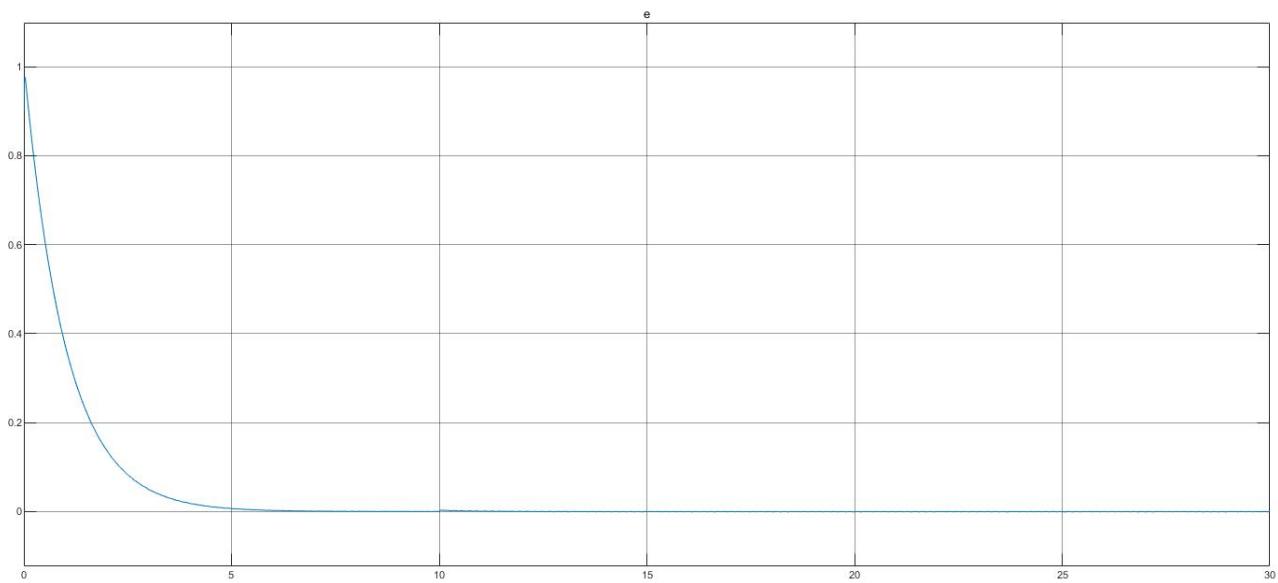


Figura 3.10: Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo

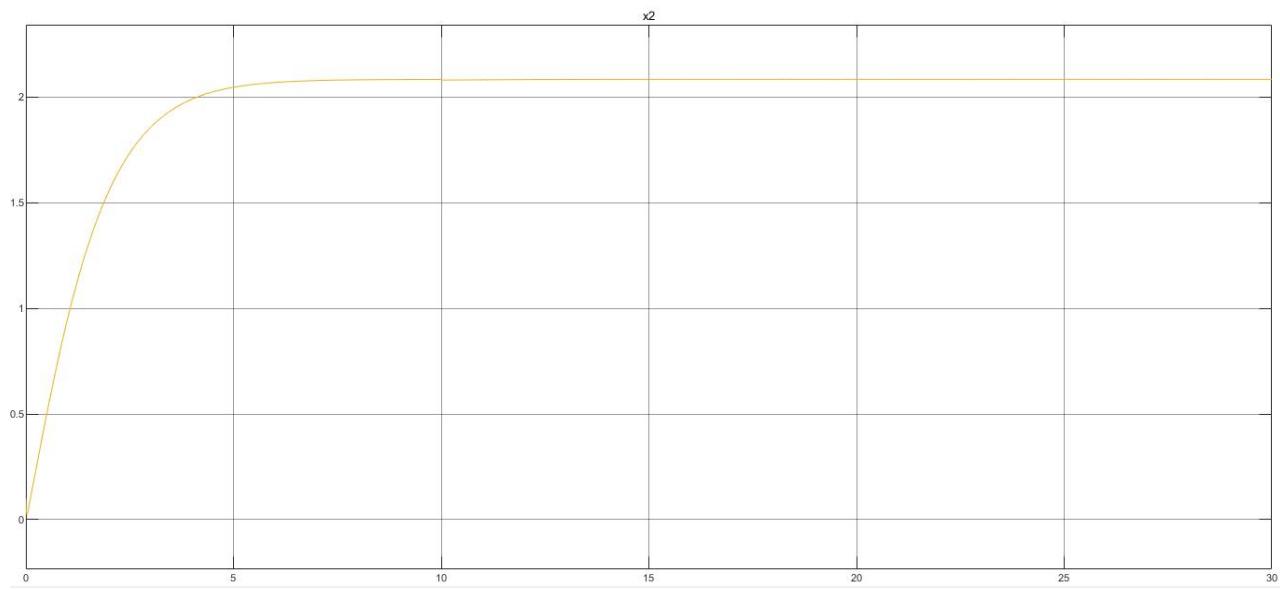


Figura 3.11: Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a disturbo

Nell’immagine 3.12 vengono confrontate l’uscita del sistema di partenza, con l’uscita del sistema soggetto a disturbo, come si può vedere i 2 segnali sono molto simili.

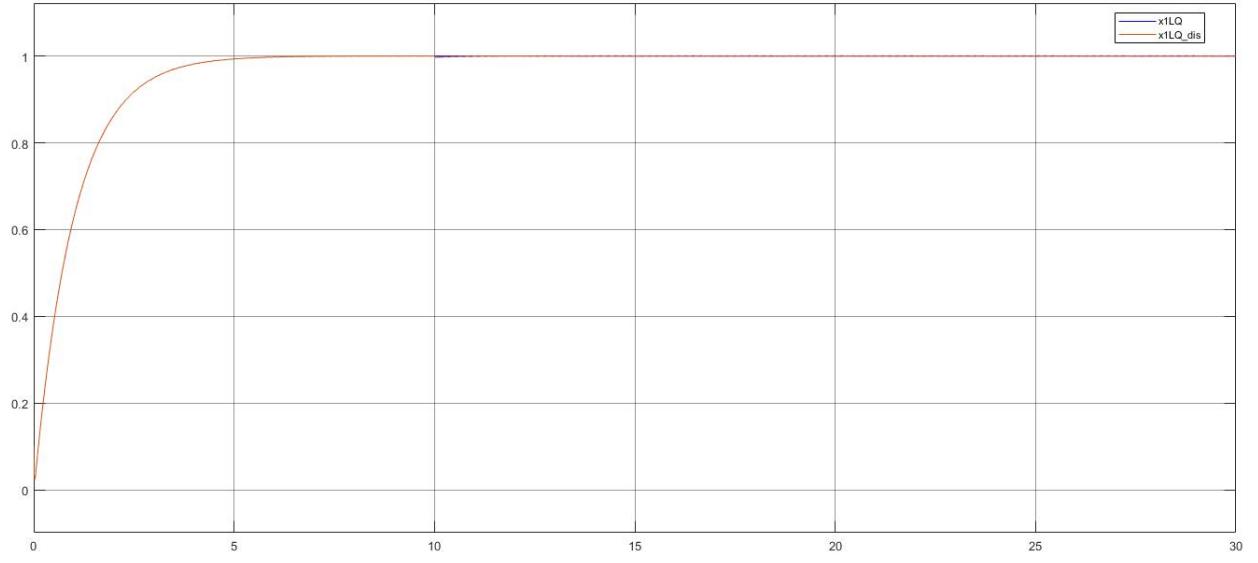


Figura 3.12: Valutazione performance controllo LQ in presenza di disturbo costante

Si può inoltre, andare a studiare il caso di incertezze parametriche. Supponendo una variazione del 10 % dei parametri. L’andamento dell’uscita è riportato nell’immagine che segue:

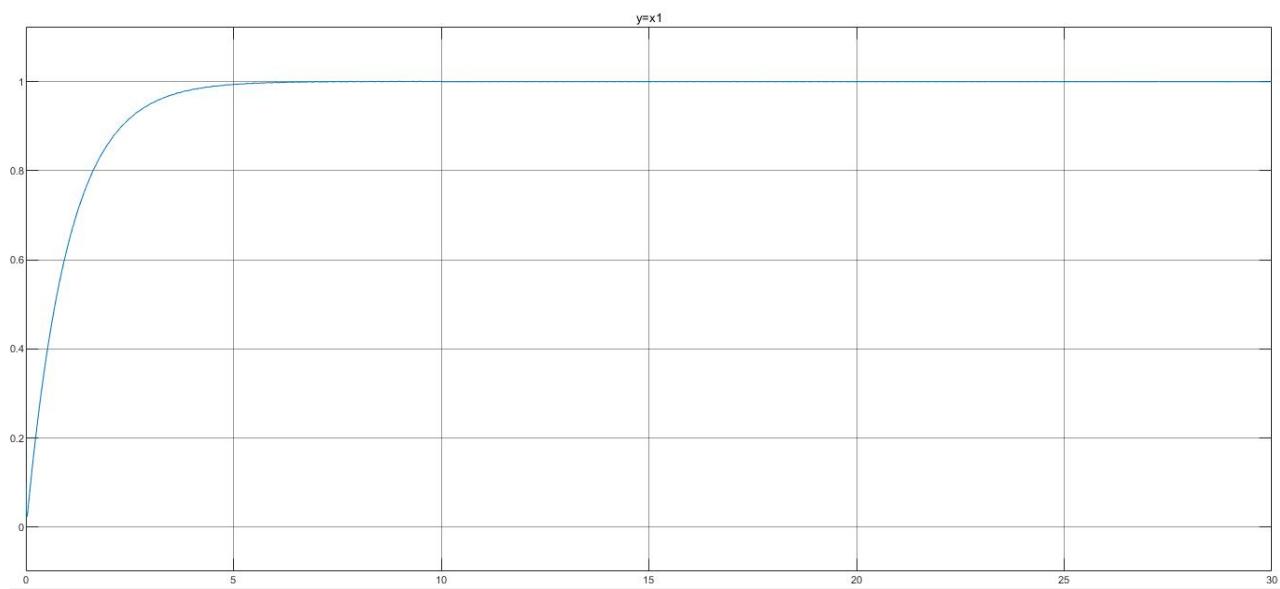


Figura 3.13: Risposta del sistema al controllo LQ sul linearizzato soggetto a variazione parametrica

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

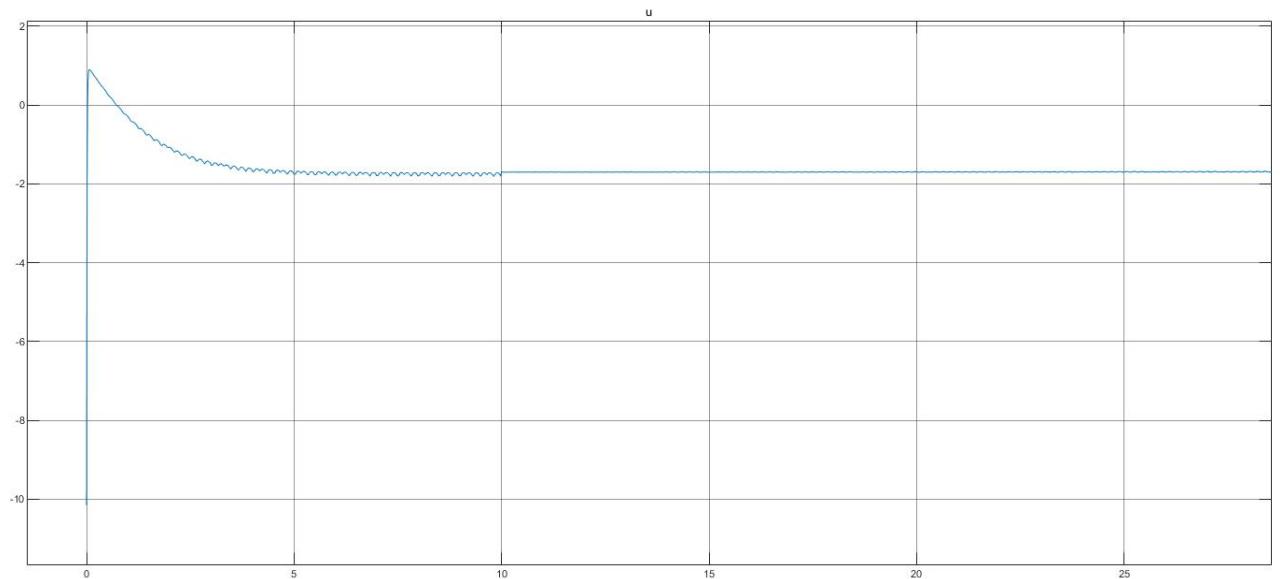


Figura 3.14: Andamento della u del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a variazione parametrica

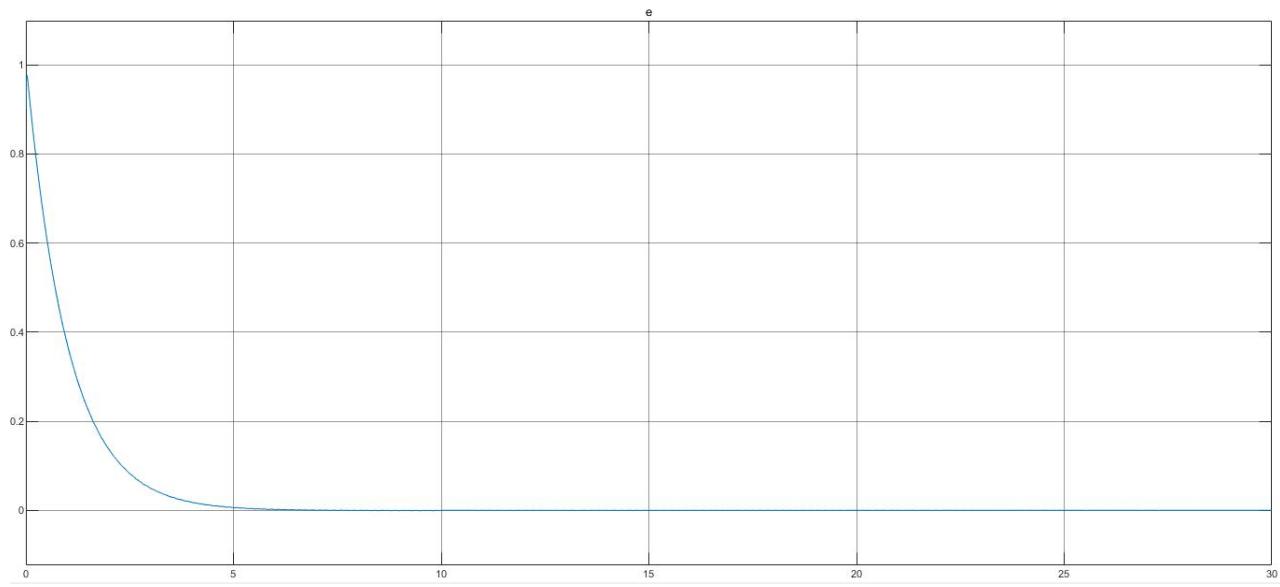


Figura 3.15: Andamento della e del controllo LQ sul sistema linearizzato soggetto a variazione parametrica

Nell'immagine che segue, viene fatto un confronto tra l'uscita del modello in assenza di variazione parametrica e l'uscita del modello in presenza di variazione parametrica, anche in questo caso i risultati sono molto simili.

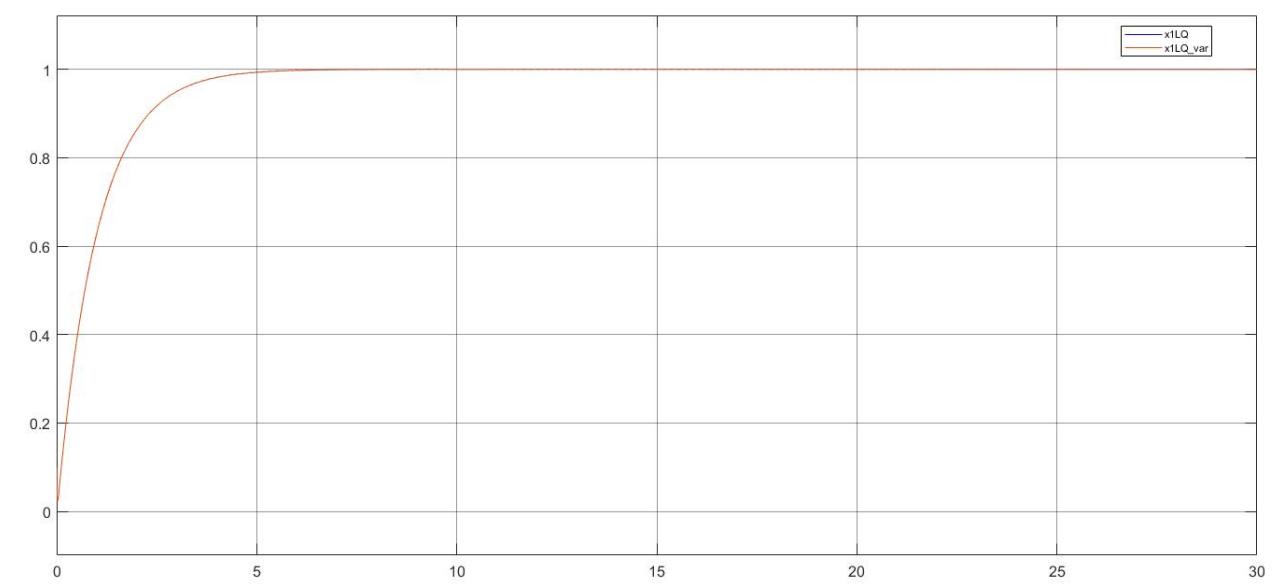


Figura 3.16: Valutazione performance controllo LQ in presenza di variazione parametrica del 10 %

3.4 Controllo LQ sul sistema non lineare

Si procede ora alla verifica del controllo LQ progettato sul lineare andandolo ad applicare al sistema non lineare. Lo schema a blocchi è il seguente:

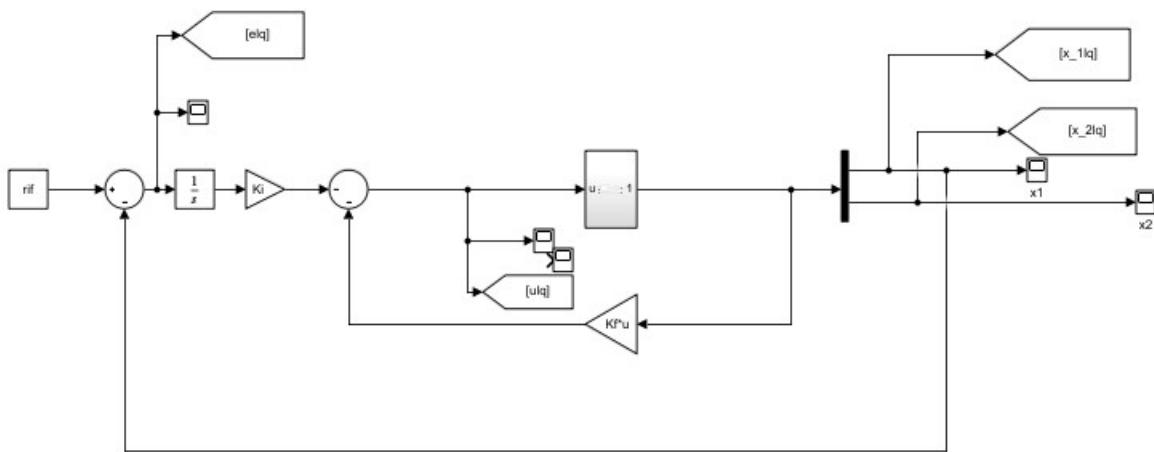


Figura 3.17: Schema del controllo LQ sul non lineare

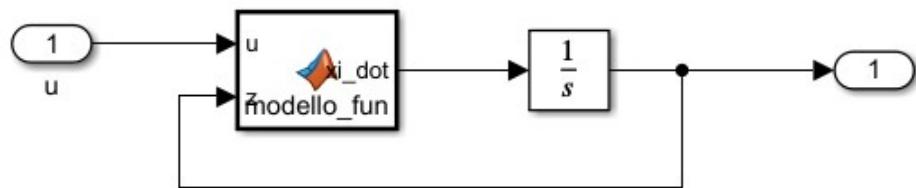


Figura 3.18: Schema non lineare

```

function xi_dot = modello_fun(u,z)

a=1
b=2%
m=0.5
n=0.2
x_1_max=5
x_2_max=10

xi_dot = [(1-z(1)/x_1_max)*(a*z(2)-m*z(1)+u);...
           (1-z(2)/x_2_max)*(b*z(1)-n*z(2)+u)];

```

end

Figura 3.19: Codice Matlab dello schema non lineare

L'uscita del sistema è:

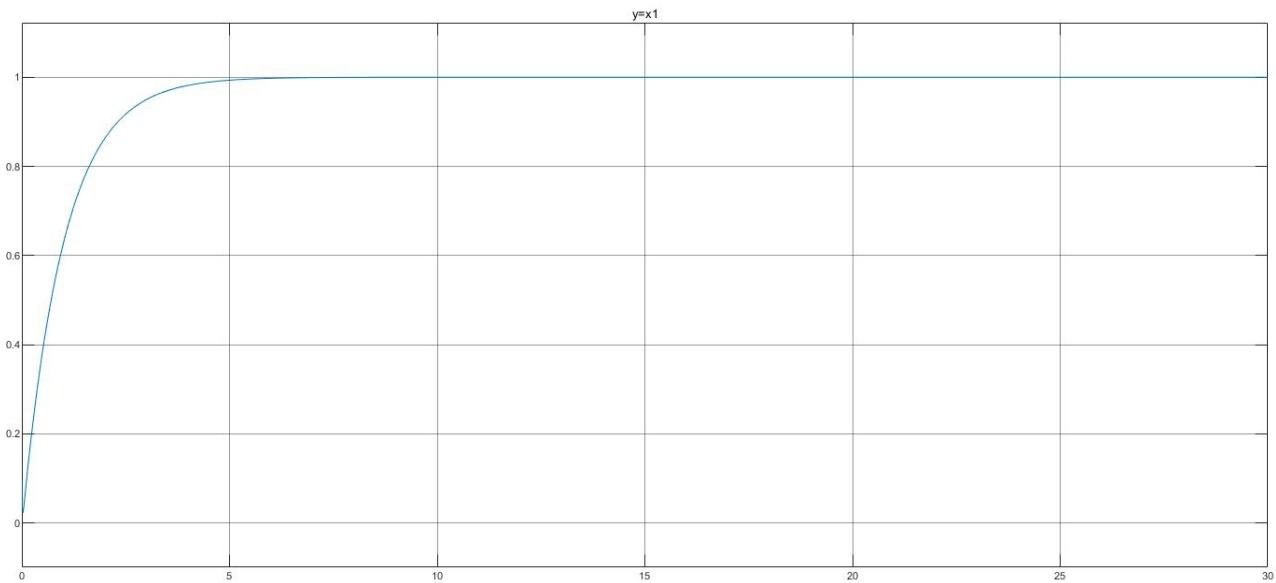


Figura 3.20: Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

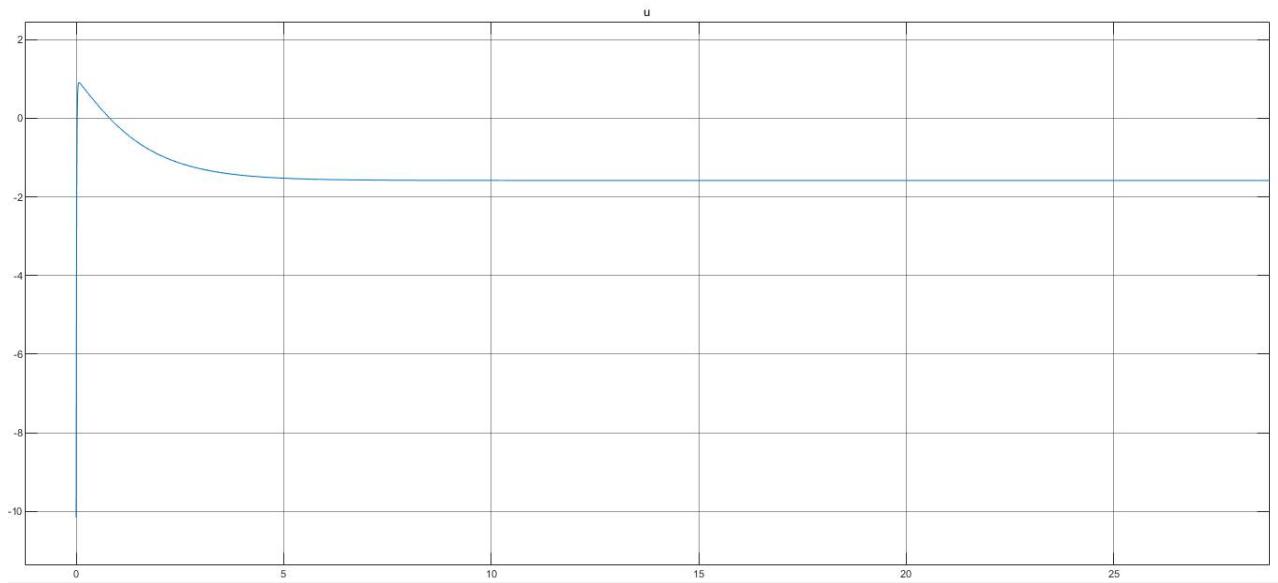


Figura 3.21: Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare

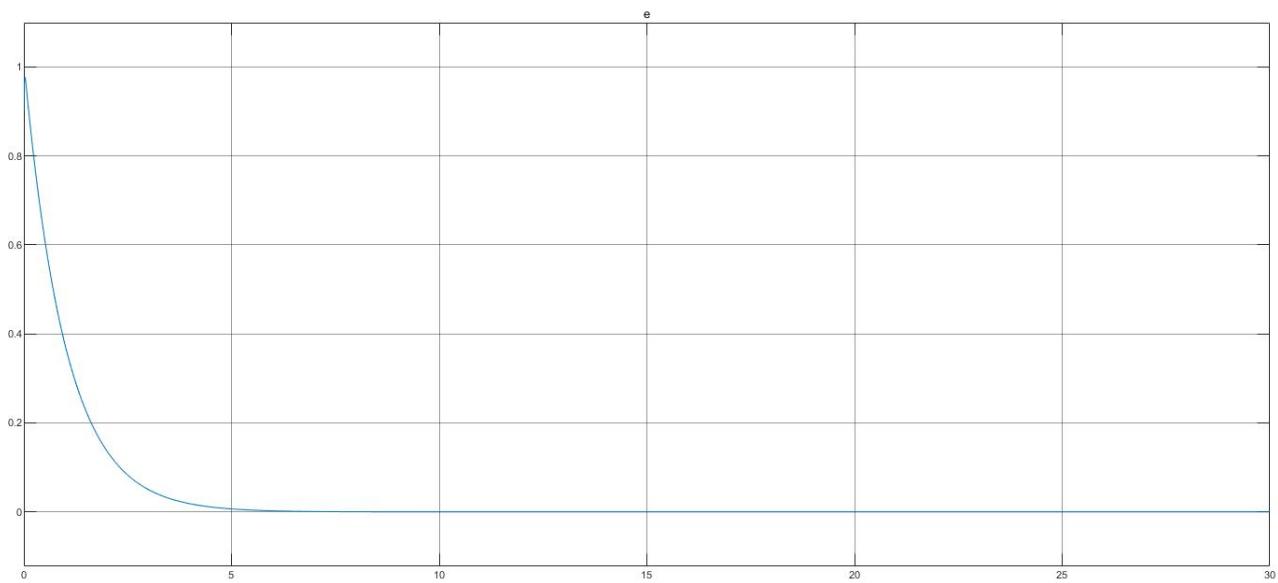


Figura 3.22: Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare

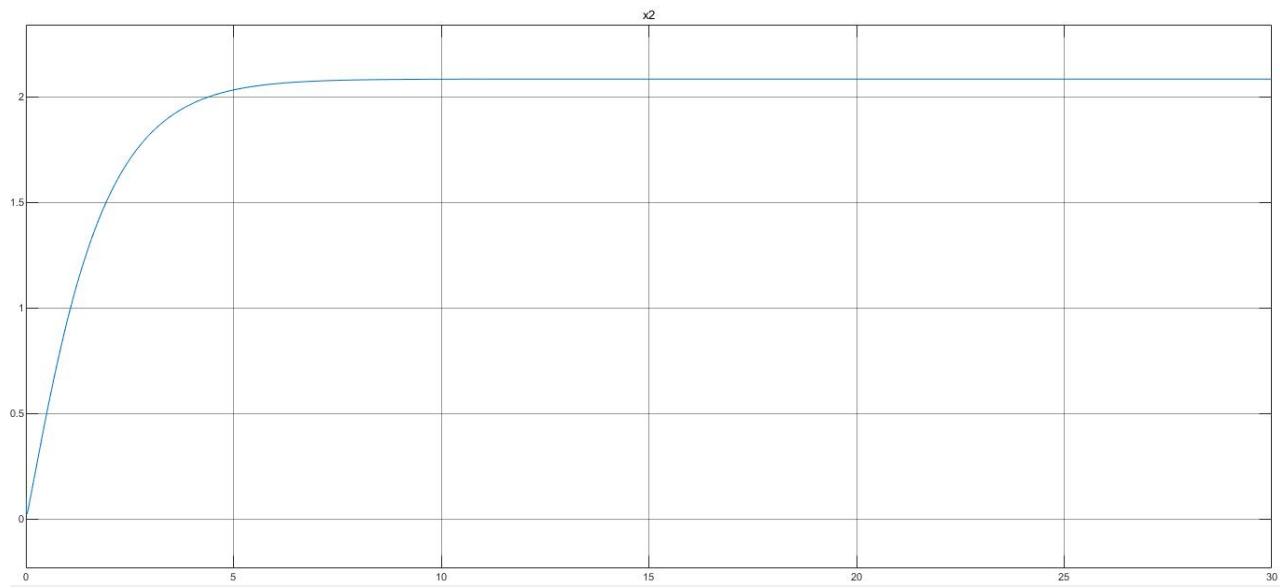


Figura 3.23: Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema non lineare

Anche qui è possibile fare un'analisi di robustezza. Inserendo un disturbo a gradino pari a -0.3 all'istante 10

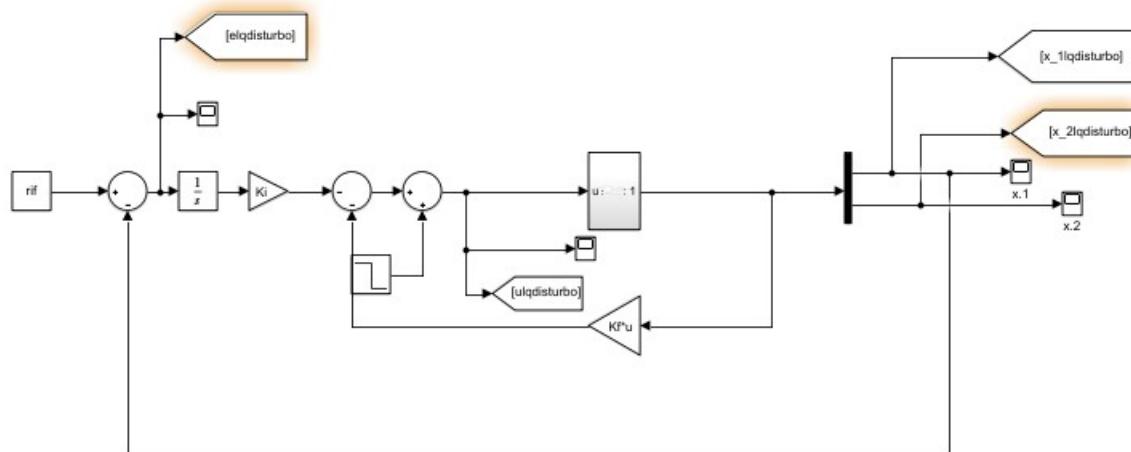


Figura 3.24: sistema non lineare con disturbo

L'uscita del sistema è:

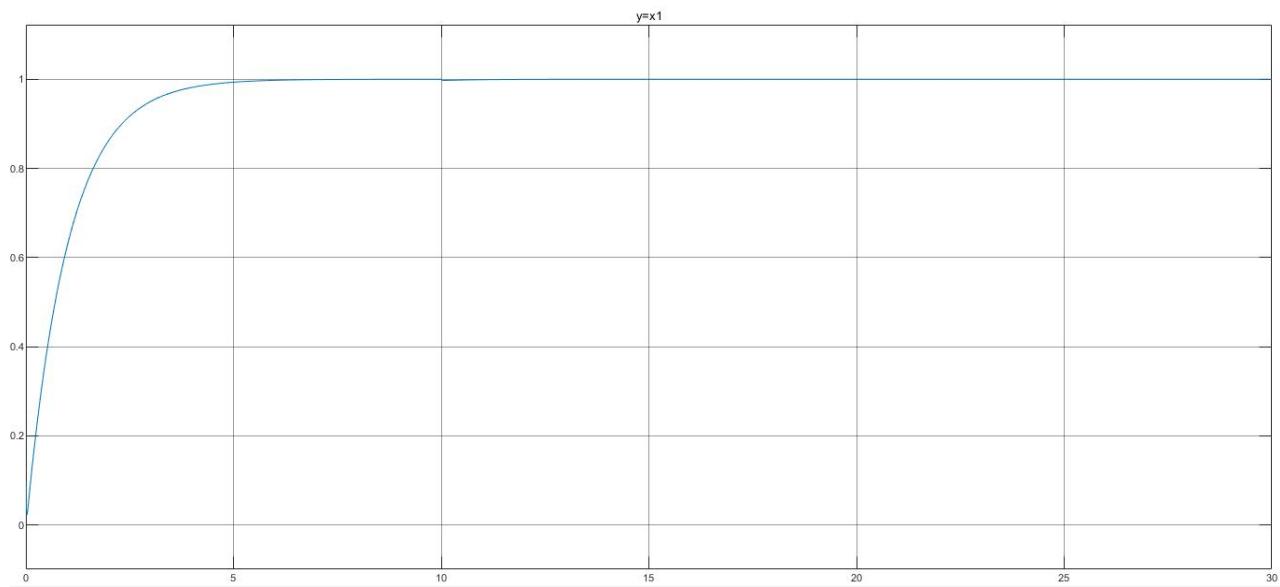


Figura 3.25: Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare soggetto a disturbo

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

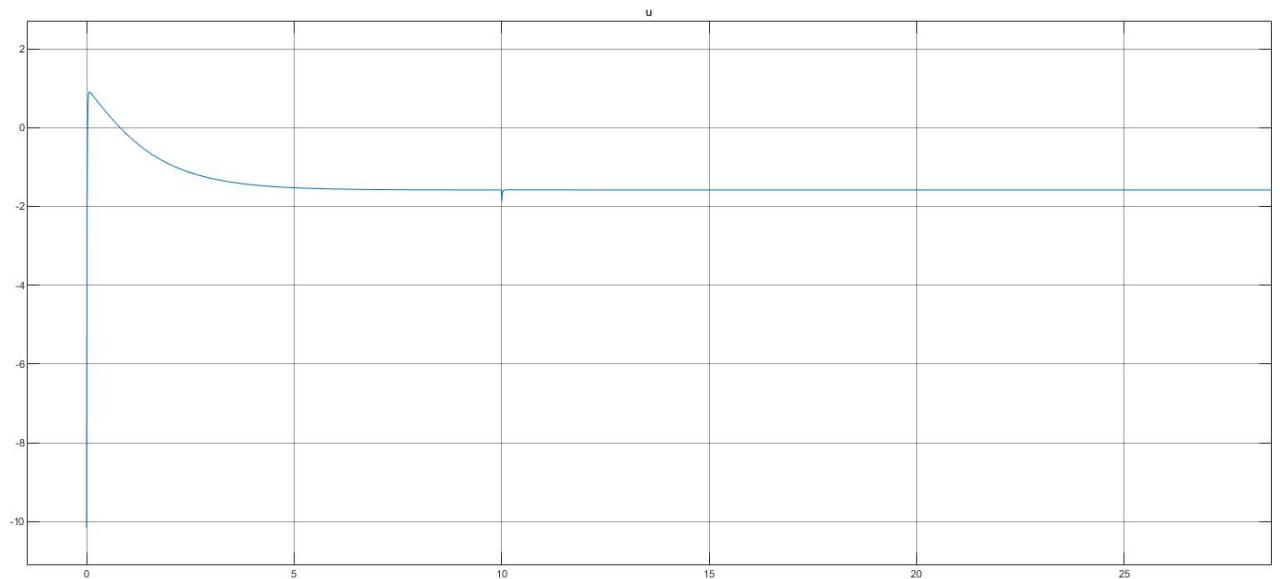


Figura 3.26: Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a disturbo

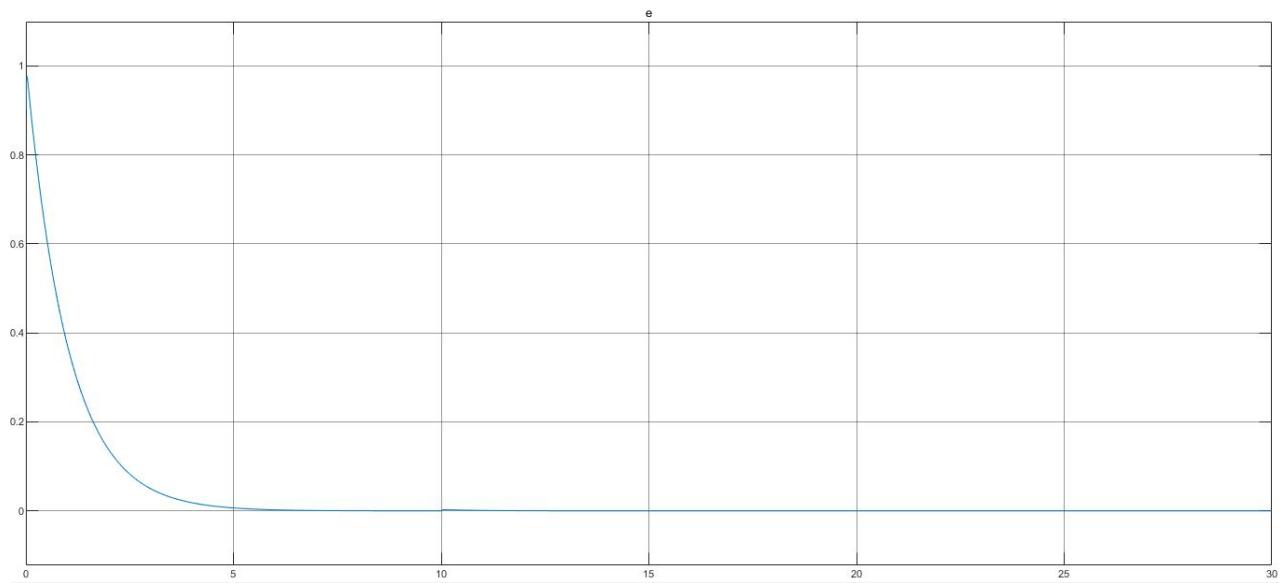


Figura 3.27: Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a disturbo

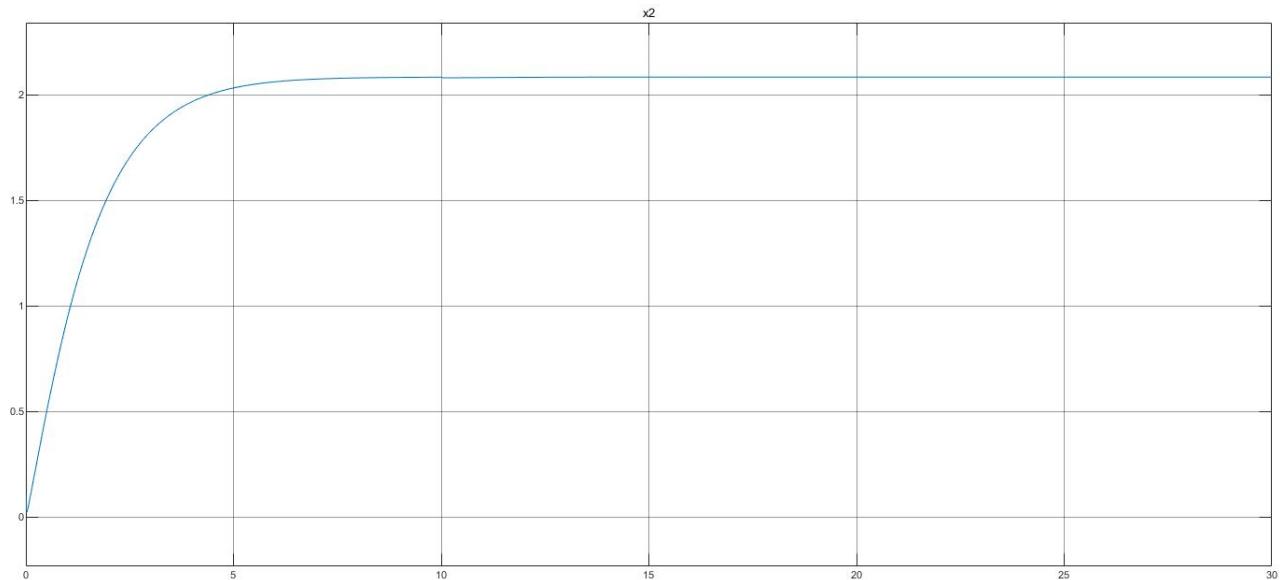


Figura 3.28: Andamento della x_2 del controllo LQ sul non lineare soggetto a disturbo

Nell'immagine che segue vengono confrontate l'uscita del sistema di partenza, con l'uscita del sistema soggetto a disturbo, come si può vedere i 2 segnali sono molto simili

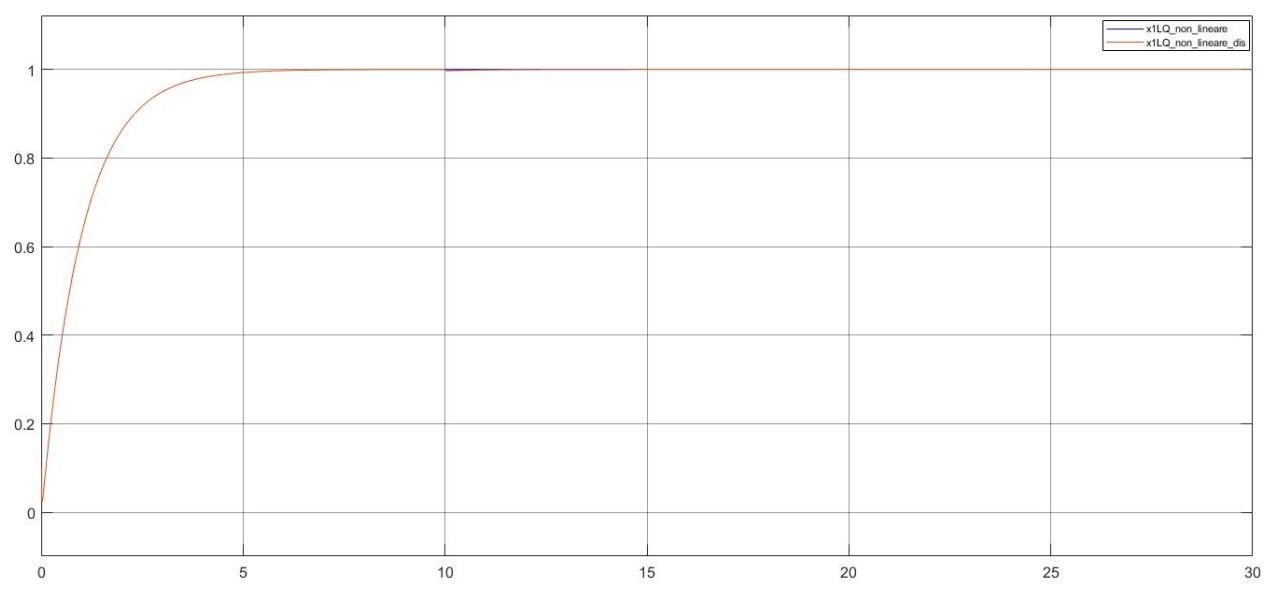


Figura 3.29: Valutazione performance controllo LQ applicato sul non lineare in presenza di disturbo

Si considera inoltre una variazione parametrica del 10% causata da incertezze parametriche. La y avrà il seguente andamento:

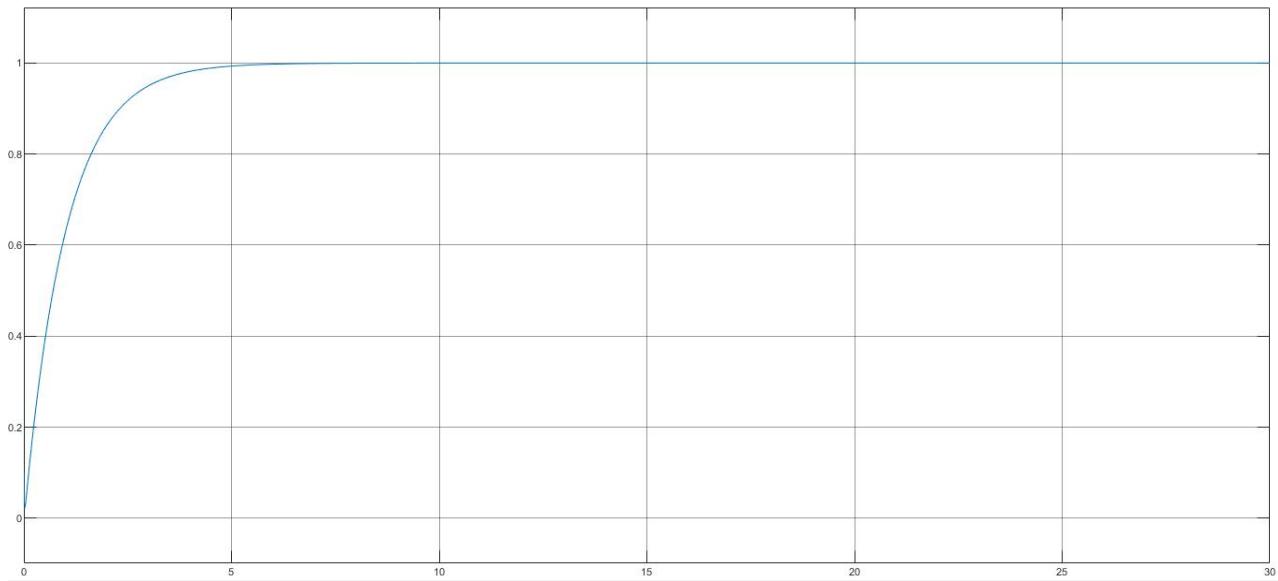


Figura 3.30: Risposta del sistema al controllo LQ sul non lineare soggetto a variazione parametrica

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

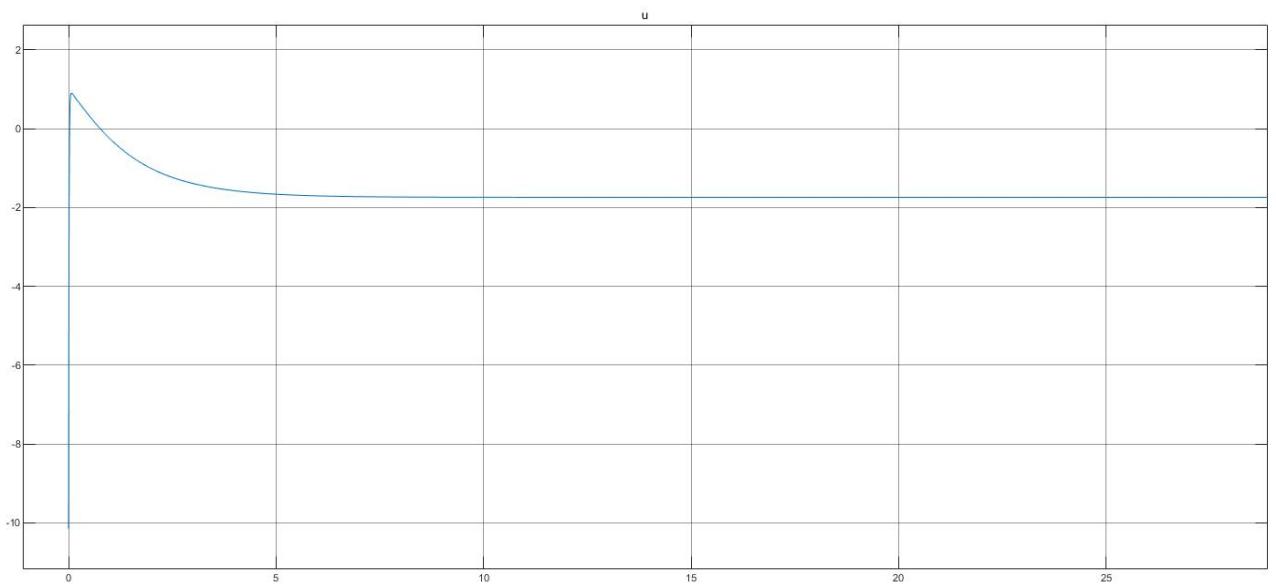


Figura 3.31: Andamento della u del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica

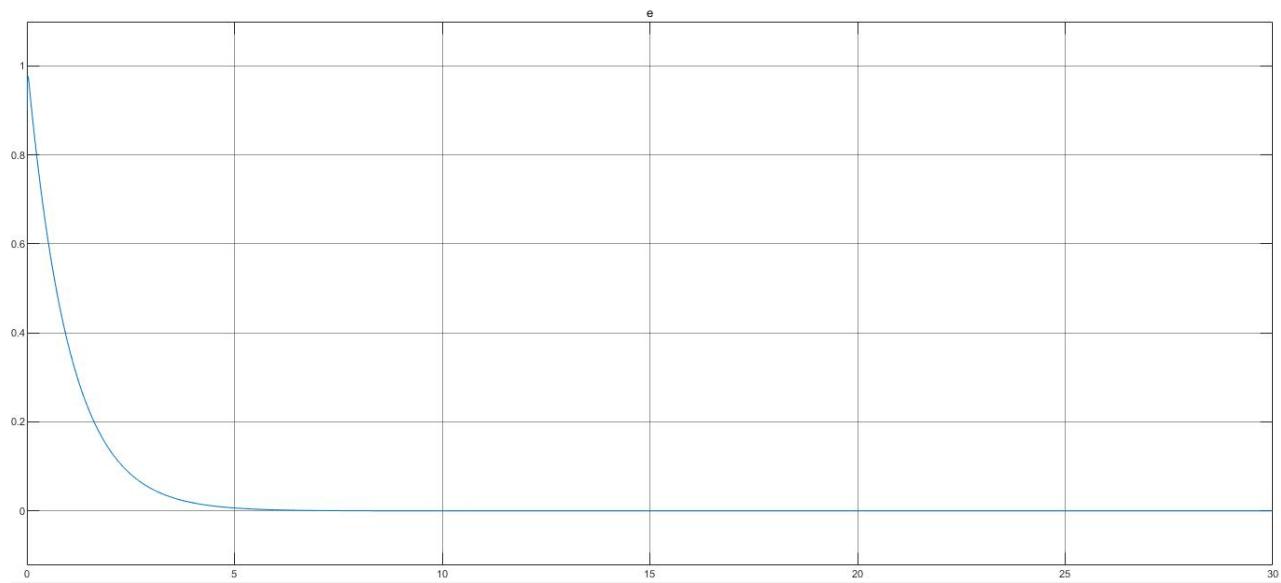


Figura 3.32: Andamento della e del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica

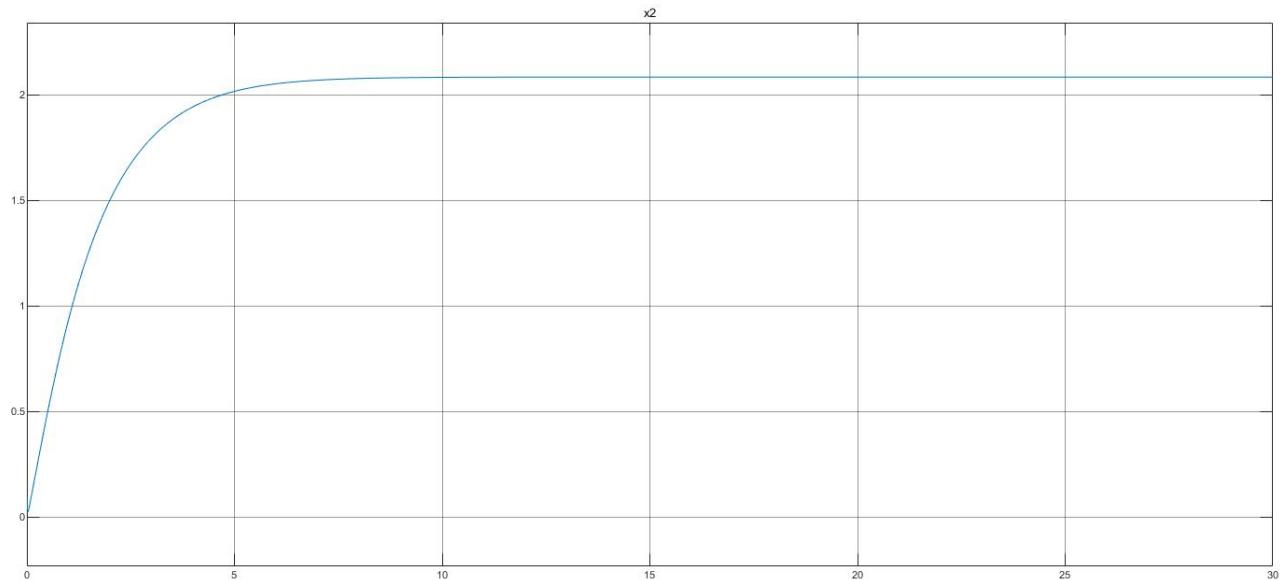


Figura 3.33: Andamento della x_2 del controllo LQ sul sistema non lineare soggetto a variazione parametrica

Come si riporta di seguito, anche in questo caso confrontando l'uscita del sistema non lineare, con quella del sistema soggetto a variazione parametrica, i risultati sono tendenzialmente identici.

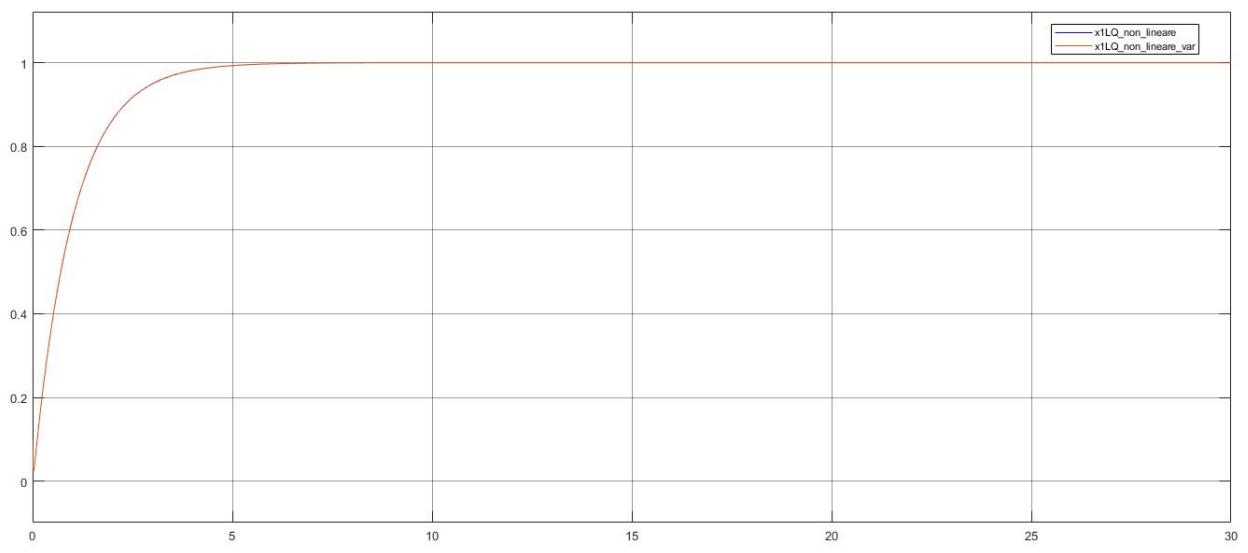


Figura 3.34: Valutazione performance controllo LQ applicato sul non lineare in presenza di variazione parametrica

Di seguito vengono confrontati le uscite e gli ingressi degli LQ lineare e non lineare.

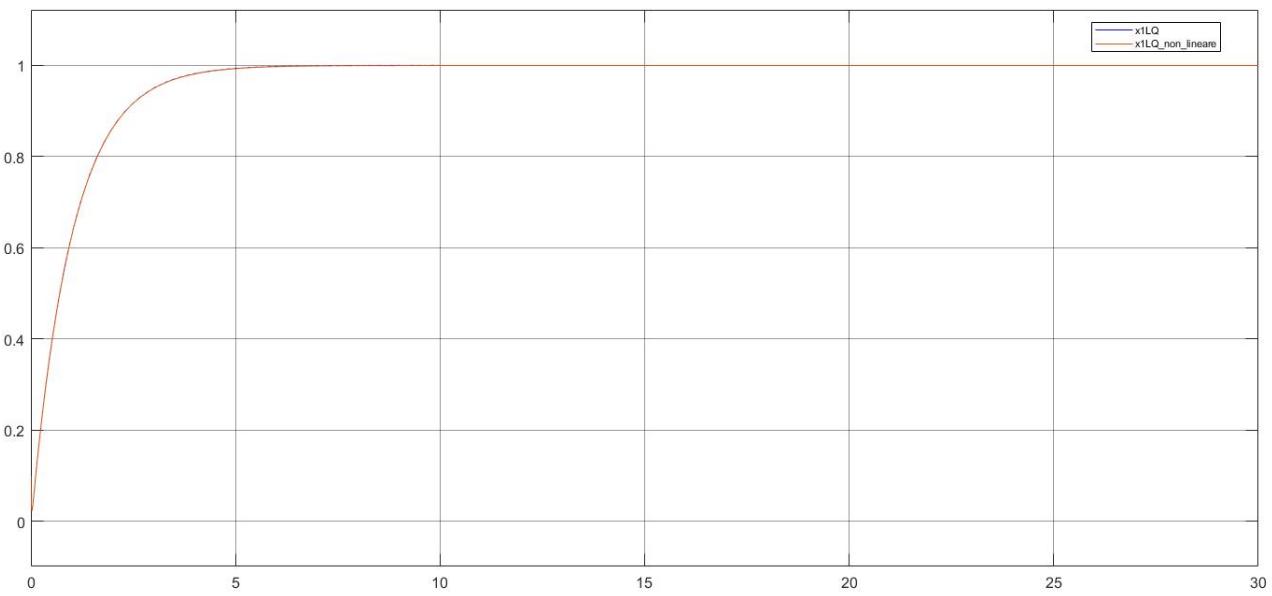


Figura 3.35: Confronto risposta sul sistema lineare e sul non lineare

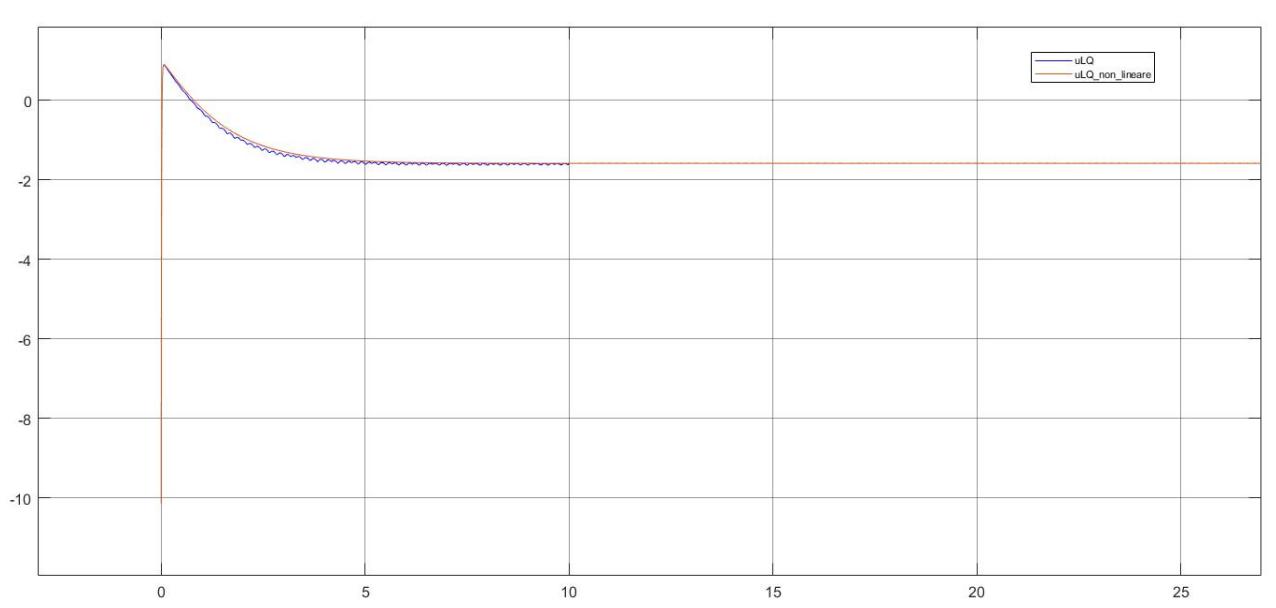


Figura 3.36: Confronto ingresso u sul sistema lineare e sul non lineare

Si può riassumere che tutti i risultati del LQ sia nel caso lineare, che non lineare, in presenza di disturbo o di variazione parametriche, sono molto simili tra di loro. I tempi di assestamento delle risposte y sono sempre inferiori ai 4s, e si riesce sempre a raggiungere errore a regime nullo e sovraelongazione percentuale nulla.

3.5 I/O Feedback linearization

Di seguito verranno illustrati i risultati relativi all'applicazione dell'I/O feedback linearization al sistema in esame. Partendo dalla forma affine:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (12)$$

dove:

$$\begin{cases} f(x) = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x_1}{x_{1max}})(ax_2 - mx_1) \\ (1 - \frac{x_2}{x_{2max}})(bx_1 - nx_2) \end{bmatrix} \\ g(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1}{x_{1max}} \\ 1 - \frac{x_2}{x_{2max}} \end{bmatrix} \\ h(x) = x_1 \end{cases} \quad (13)$$

L'obiettivo è quello di trovare un ingresso di controllo u in grado di trasformare il sistema non lineare in un sistema lineare I/O della forma:

$$y^r = v \quad (14)$$

dove v è l'ingresso di controllo ausiliario, e r è il grado relativo, ovvero il più piccolo intero r tale che le derivate di Lie miste:

$$\begin{cases} L_g(L_f^i(h)) = 0 \text{ i=0,1,2...r-2} \\ L_g(L_f^{r-1}(h)) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Se $r < n$ il sistema è soggetto a $n-r$ dinamiche interne non controllabili dall'uscita. Dunque il controllo che verrà progettare sarà valido solo se ci si assicura della stabilità BIBO del moto interno. In questo caso:

$$L_g(h) = 1 - \frac{x_1}{x_{1max}} \quad (16)$$

Quindi per $x_1 \neq x_{max}$, si ha $r=1$. Inoltre:

$$L_f(h) = ax_2 - mx_1 - \frac{a}{x_{1max}}x_1x_2 + \frac{m}{x_{1max}}x_1^2 \quad (17)$$

Si sceglie u :

$$u = \frac{1}{L_g(h)}[v - L_f(h)] = \left(\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1}\right)(v - ax_2 + mx_1 + \frac{a}{x_{1max}}x_1x_2 - \frac{m}{x_{1max}}x_1^2) \quad (18)$$

il sistema a ciclo chiuso sarà:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \left(\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1}\right)v \quad (19)$$

quindi $r = 1 < n = 2$, ciò indica che è presente un moto interno. A questo punto conviene scegliere v per soddisfare la specifica $y \rightarrow y_d$. L'obiettivo è scrivere la dinamica dell'errore in modo tale che $\dot{e} = 0$.

Scegliendo $v = (k(y_d - y) + \dot{y}_d)$, si ha: $\dot{y} = (\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1})(k(y_d - y) + \dot{y}_d)$, posto $e = y_d - y$, e ricordando che $\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1}$ è una quantità sempre limitata (poiché x_1 nel caso studio in esame assume sempre un valore minore di x_{1max}), si ha che $\dot{e} + ke = 0$. Quindi se $k > 0$ viene garantito che l'errore converge a zero. In definitiva con tale scelta di v :

$$u = \left(\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1}\right)(k(y_d - y) + \dot{y}_d - ax_2 + mx_1 + \frac{a}{x_{1max}}x_1x_2 - \frac{m}{x_{1max}}x_1^2) \quad (20)$$

A ciclo chiuso si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\frac{x_{1max}}{x_{1max} - x_1})(k(y_d - x) + \dot{y}_d) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (21)$$

Tale sistema garantisce che x_1 vada a finire su y_d , mentre la dinamica su x_2 è nascosta. Bisogna verificare che tale dinamica sia stabile. Sapendo che x_1 , l'uscita, y_d e \dot{y}_d sono segnali limitati e che quindi $\dot{x}_1 = \varphi$, dove φ gioca il ruolo di ingresso limitato. Si può concludere che x_1 sarà limitato in quanto è l'integrale di un segnale limitato. Quindi tale sistema è stabile in senso BIBO in quanto ad ingresso limitato corrisponde un' uscita limitata e di conseguenza non si ha un problema sulla dinamica interna.

Lo schema che segue rappresenta l'implementazione del sistema

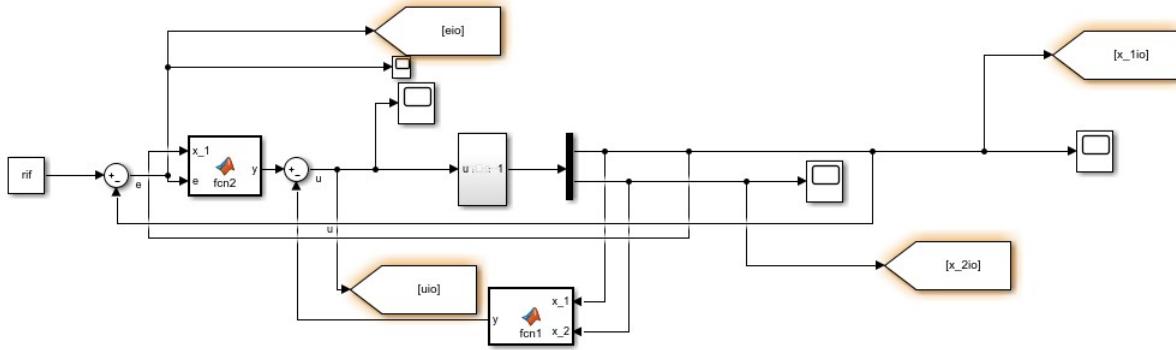


Figura 3.37: Schema del controllo I/O Feedback Linearization

```

function y = fcn1(x_1,x_2)
a=1
b=2
m=0.5
n=0.2
x_1max=5
x_2max=10
y=-x_1max/(x_1max-x_1)*(-a*x_2+m*x_1+a/x_1max*x_1*x_2-m*x_1^2/x_1max);

```

Figura 3.38: Implementazione della prima matlab function

```

function y = fcn2(x_1,e)
x1_max=5
y=x1_max/(x1_max-x_1)*e;

```

Figura 3.39: Implementazione della seconda matlab function

L'uscita del sistema è:

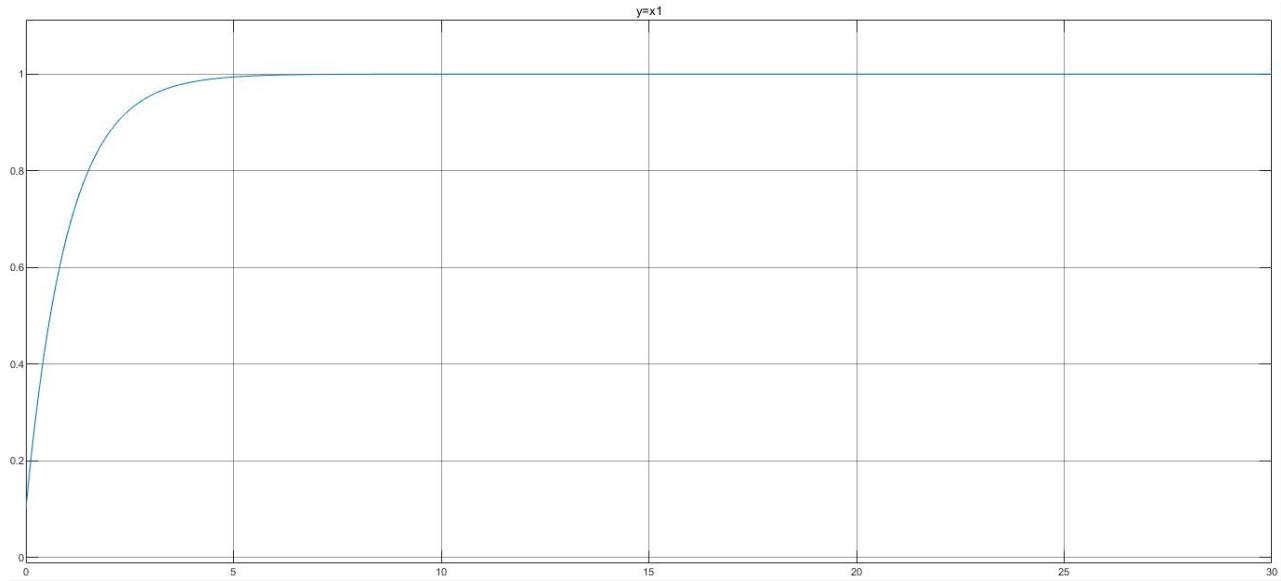


Figura 3.40: Risposta del sistema al controllo FBL

La risposta del sistema va a regime in meno di 4 s, riuscendo a mantenere l'errore a regime nullo.

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'ingresso di controllo, dell'errore, e di x_2

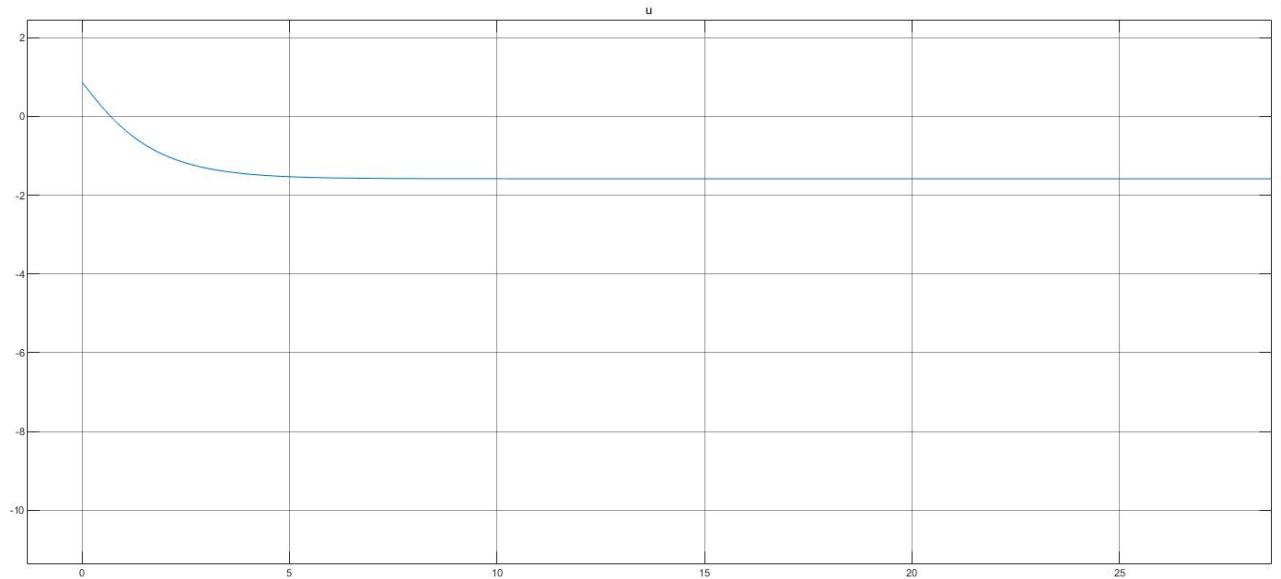


Figura 3.41: Andamento della u del controllo FBL

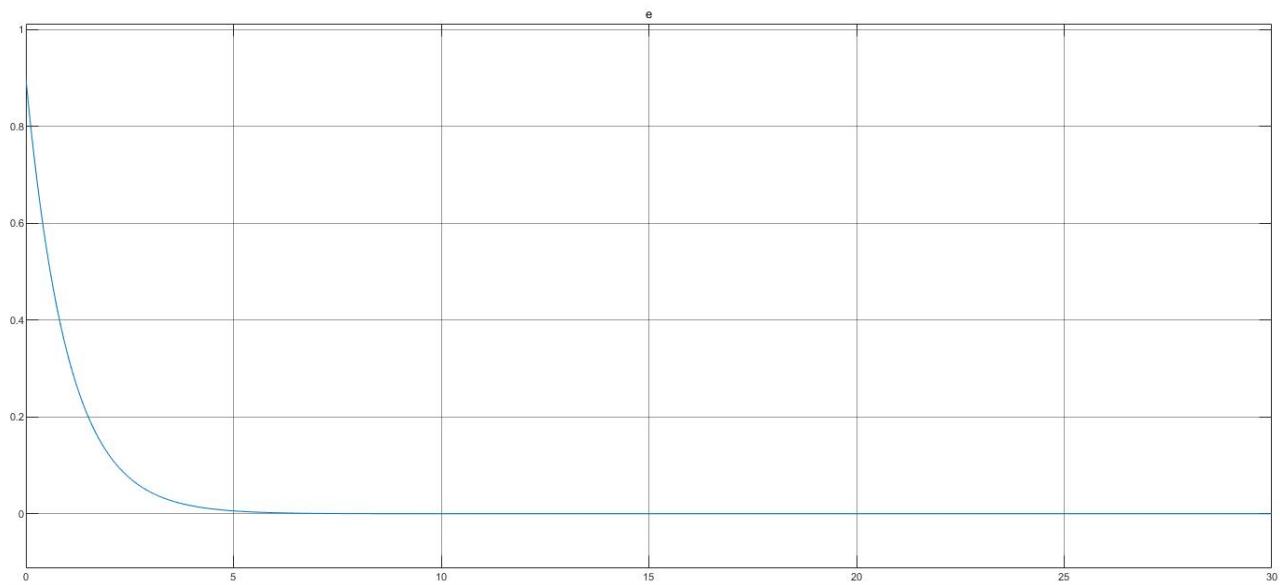


Figura 3.42: Andamento della e e del controllo FBL

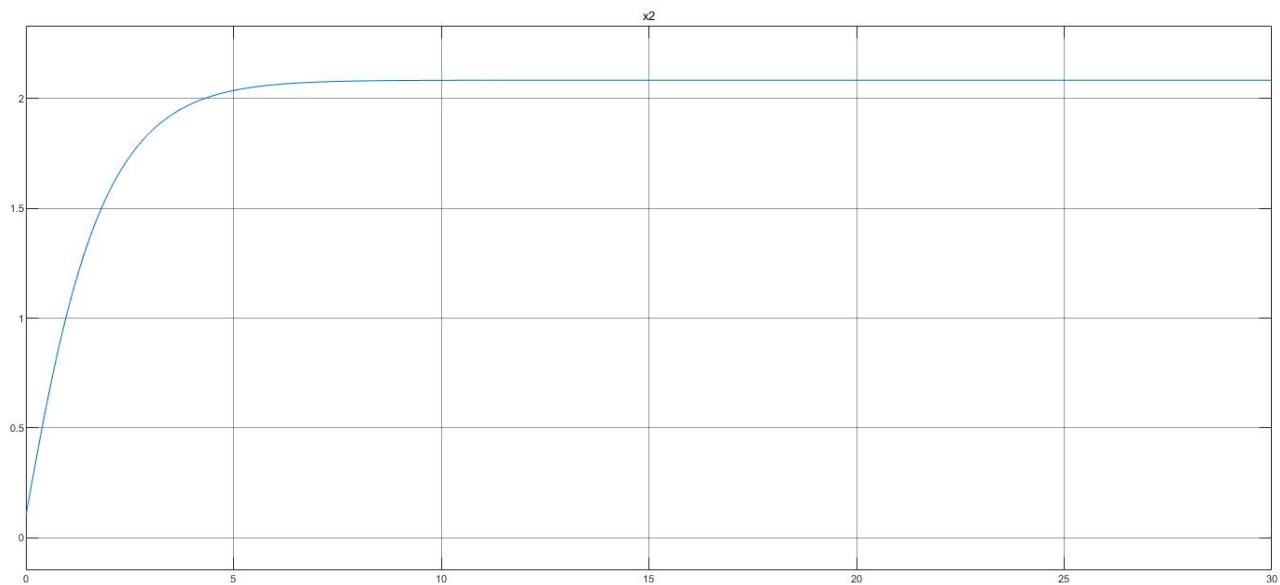


Figura 3.43: Andamento della x_2 del controllo FBL

Come nel caso LQ, di seguito verranno analizzati i vari segnali prodotti dal sistema FBL, in presenza prima di disturbo (pari a -0.3 dall'istante 10s) poi di variazione parametrica del 10 %.

L'uscita del sistema è:

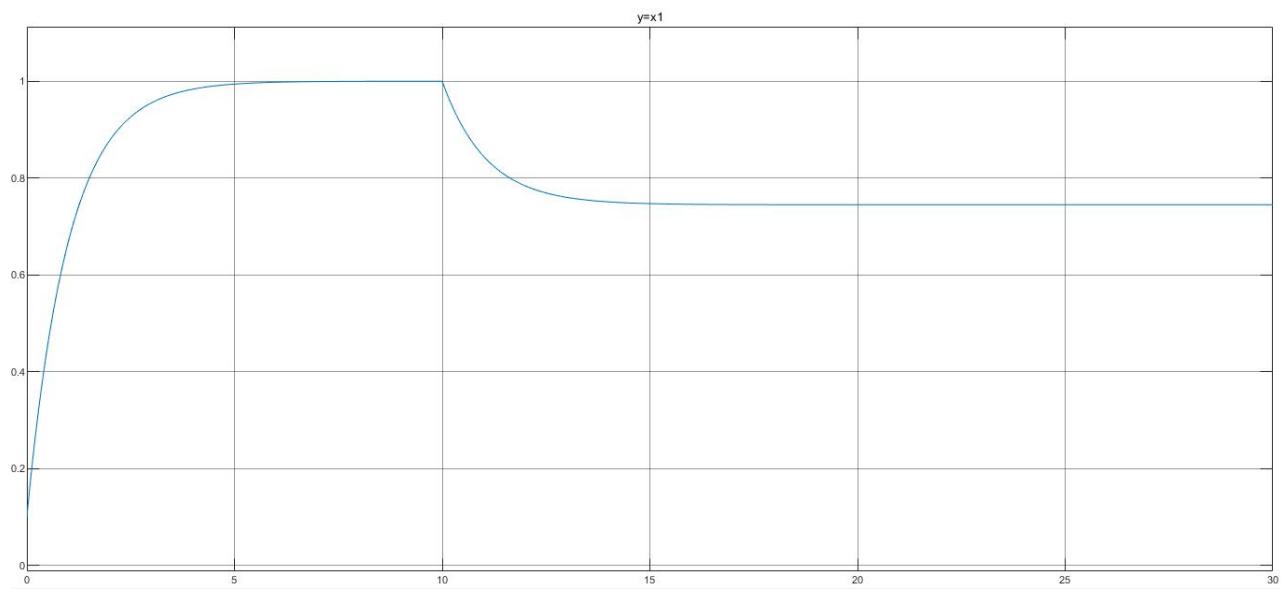


Figura 3.44: Risposta del sistema al controllo FBL con disturbo

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'errore, dell'ingresso di controllo e di x_2

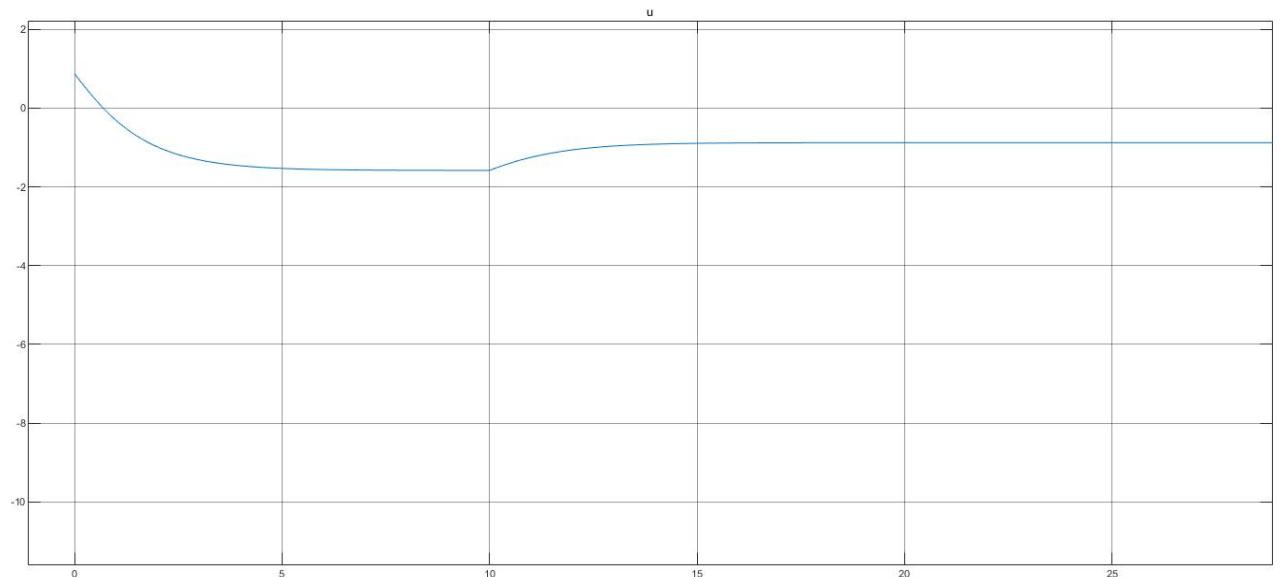


Figura 3.45: Andamento della u del controllo FBL con disturbo

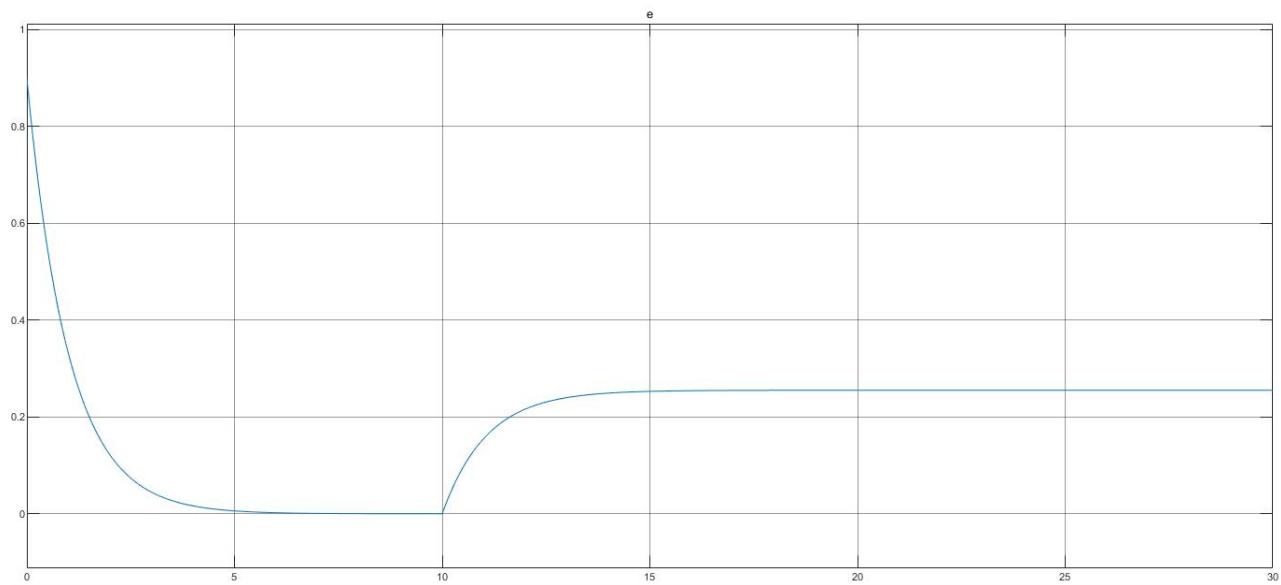


Figura 3.46: Andamento della e e del controllo FBL con disturbo

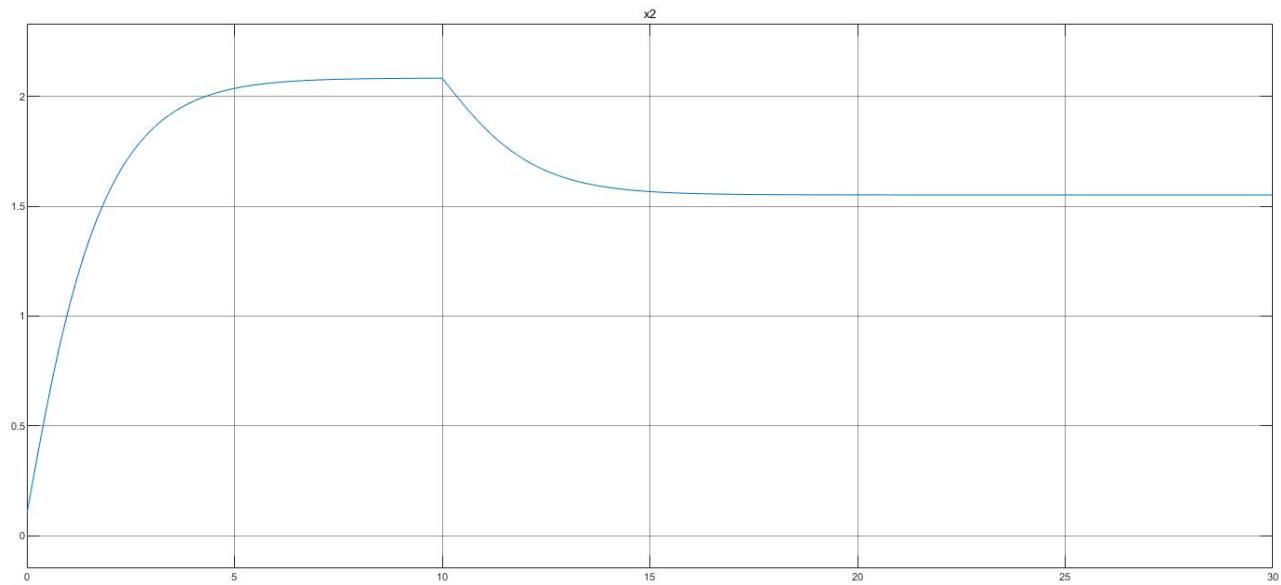


Figura 3.47: Andamento della x_2 del controllo FBL con disturbo

L'uscita del sistema è:

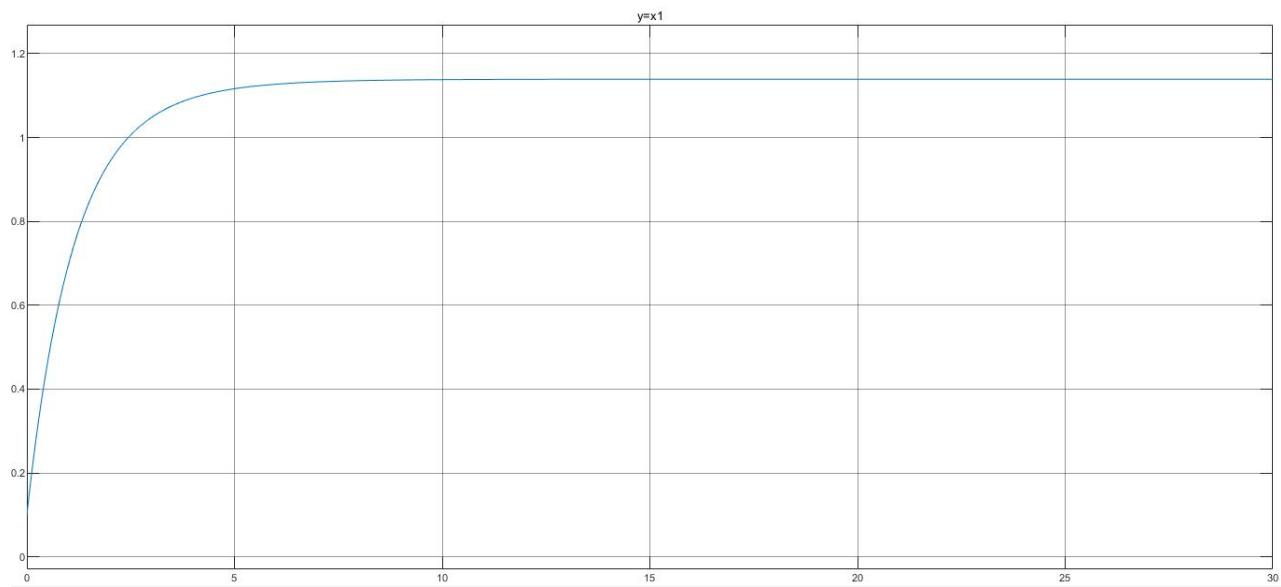


Figura 3.48: Risposta del sistema al controllo FBL con variazione parametrica

Di seguito sono riportati anche gli andamenti dell'errore, dell'ingresso di controllo e di x_2

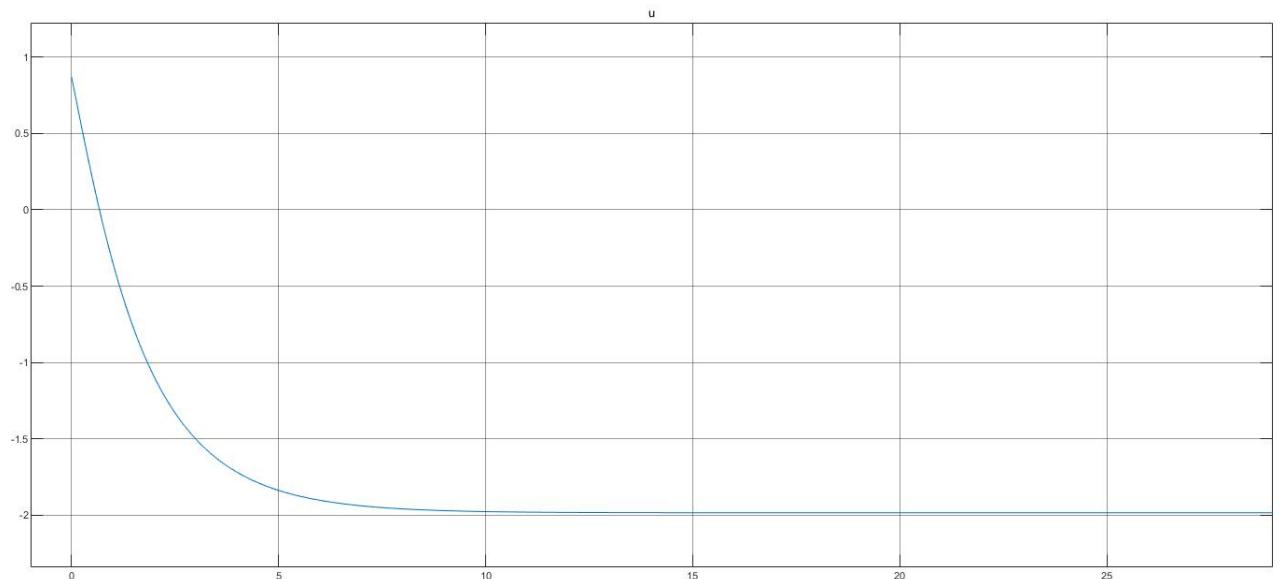


Figura 3.49: Andamento della u del controllo FBL con variazione parametrica

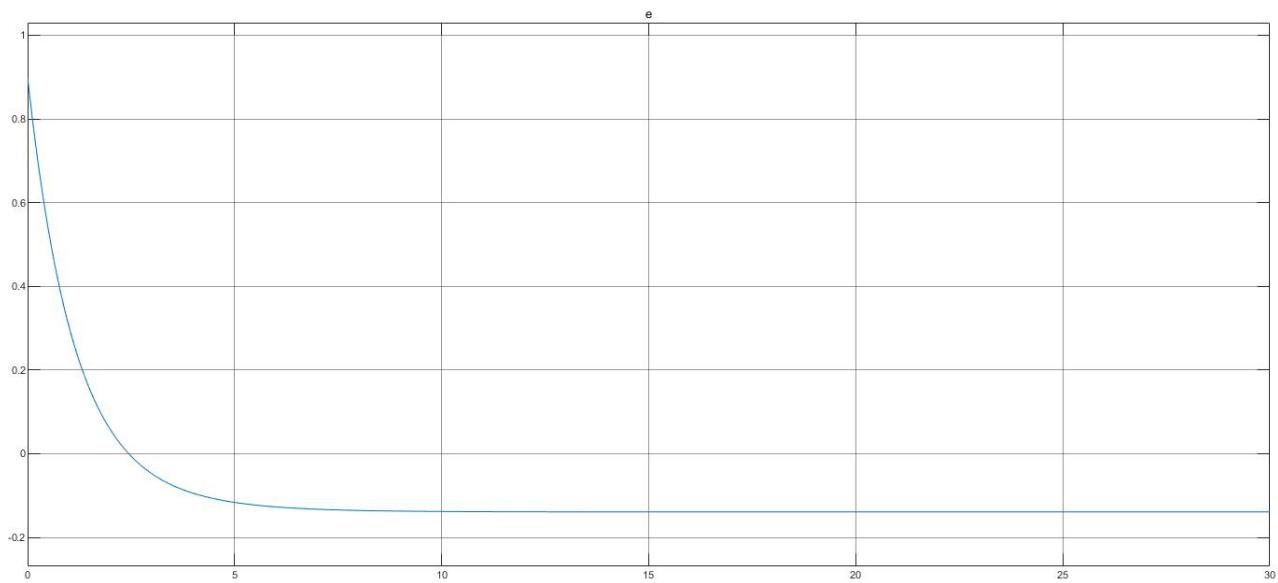


Figura 3.50: Andamento della e e del controllo FBL con variazione parametrica

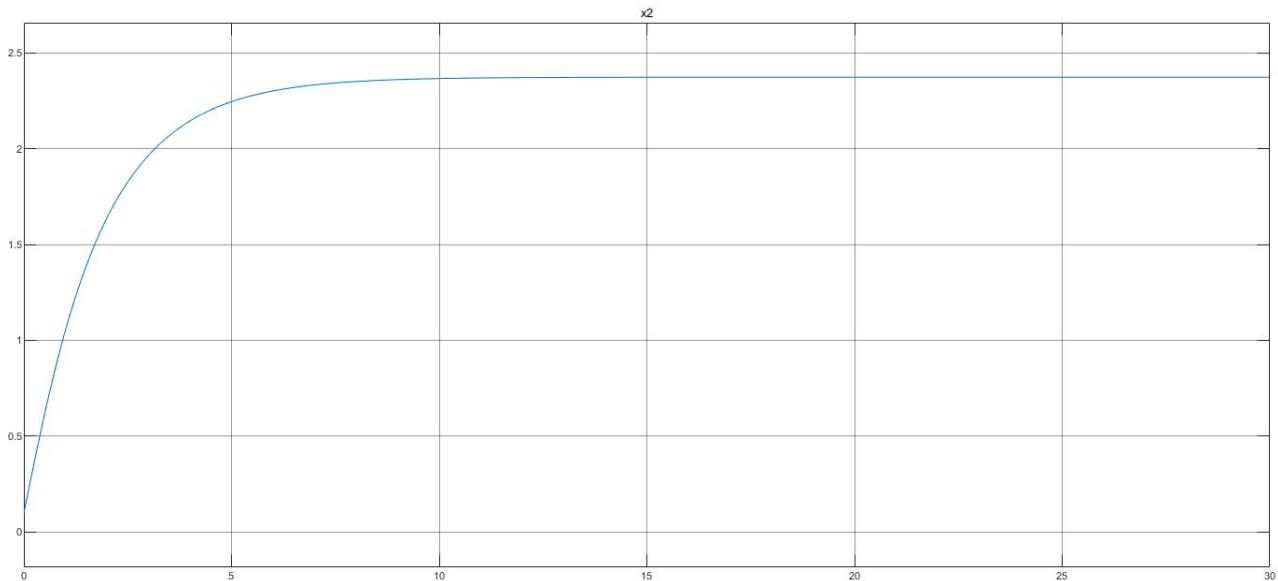


Figura 3.51: Andamento della x_2 del controllo FBL con variazione parametrica

Come si può vedere i risultati delle risposte soggette a disturbo e a rumore non ottengono errore a regime nullo.

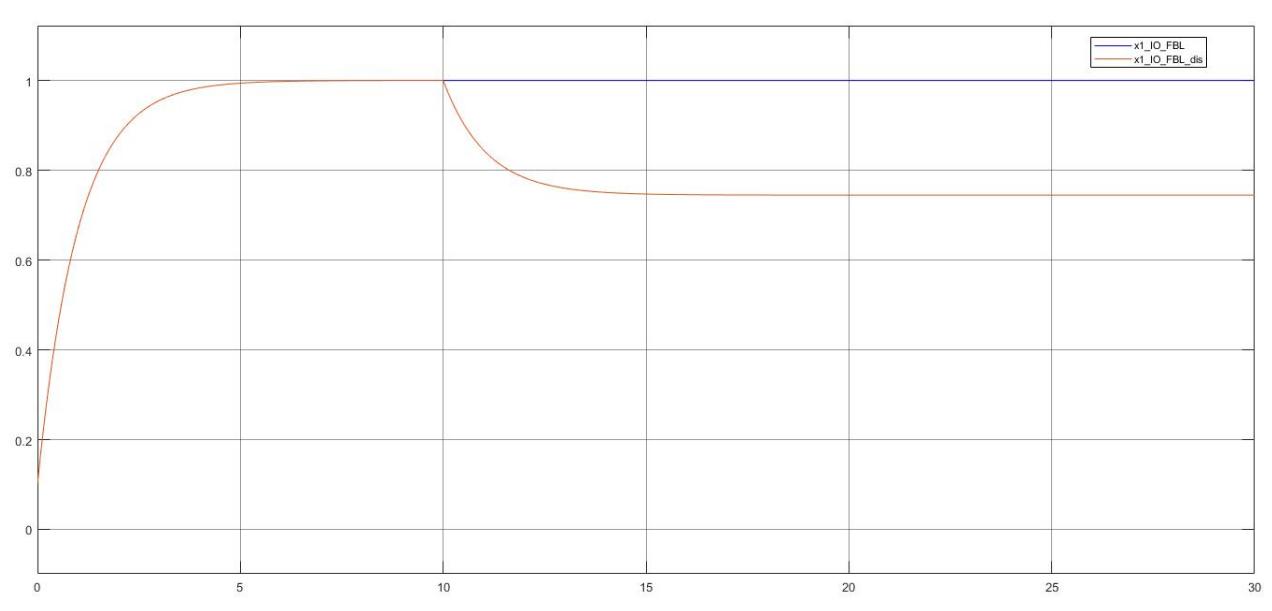


Figura 3.52: Valutazione performance controllo I/O FBL in presenza di disturbo

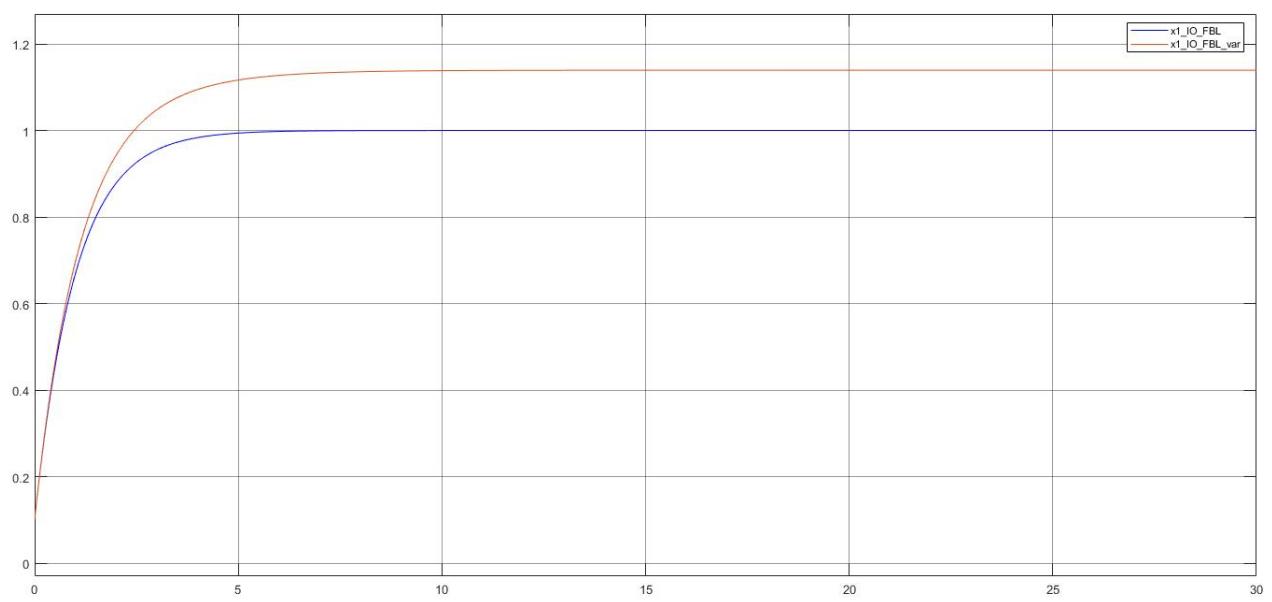


Figura 3.53: Valutazione performance controllo I/O FBL in presenza di variazione parametrica

In conclusione si può affermare che il sistema FBL ha un comportamento simile al LQ, ma soggetto a disturbo ed rumore peggiora significativamente le sue prestazioni.

Nel caso in cui $x_1 = x_{1max}$, il grado r=0; nel problema in esame, ciò non è importante, perché il valore di x_1 è sempre significativamente inferiore a x_{1max} e quindi il controllo I/O Feedback linearization così implementato risulta essere valido ai fini dell'analisi.

3.6 Model Reference Adaptive Control con controllore PI

Per superare i problemi di robustezza riscontrati nell'I/O Feedback Linearization, si è deciso di utilizzare un controllo adattativo. L'idea alla base di questa tipologia di controllo è che, dato l'impianto, non si vuole controllare l'uscita del sistema, ma si vuole portare l'uscita dell'impianto a inseguire quella di un modello di riferimento virtuale; sulla base dell'errore tra l'uscita dell'impianto e l'uscita desiderata, attraversa una scelta opportuna dei guadagni. Per l'esercizio in esame si è scelto di utilizzare un controllore PI, con guadagno proporzionale $K_p = 10$ e guadagno integrale $K_i = 20$. Il modello di riferimento lineare scelto è:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_m \end{cases} \quad (22)$$

La matrice A scelta è hurwitz

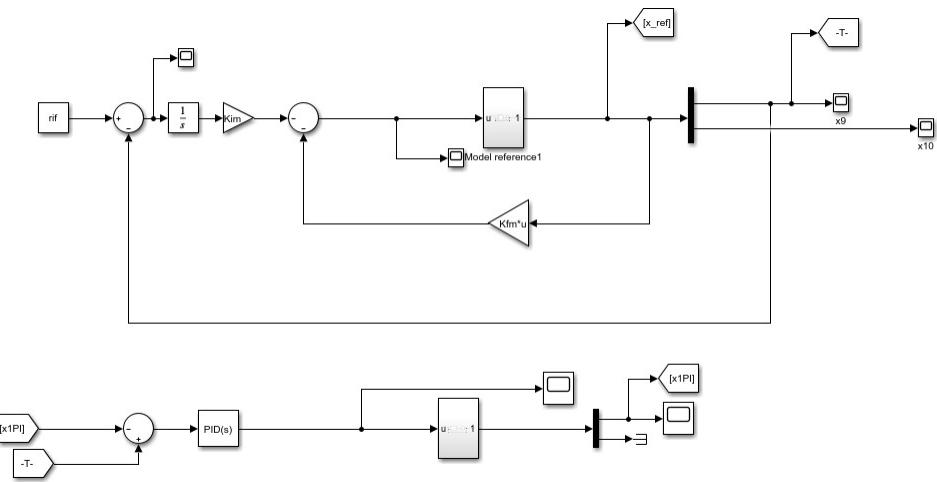


Figura 3.54: Controllo adattativo con PI

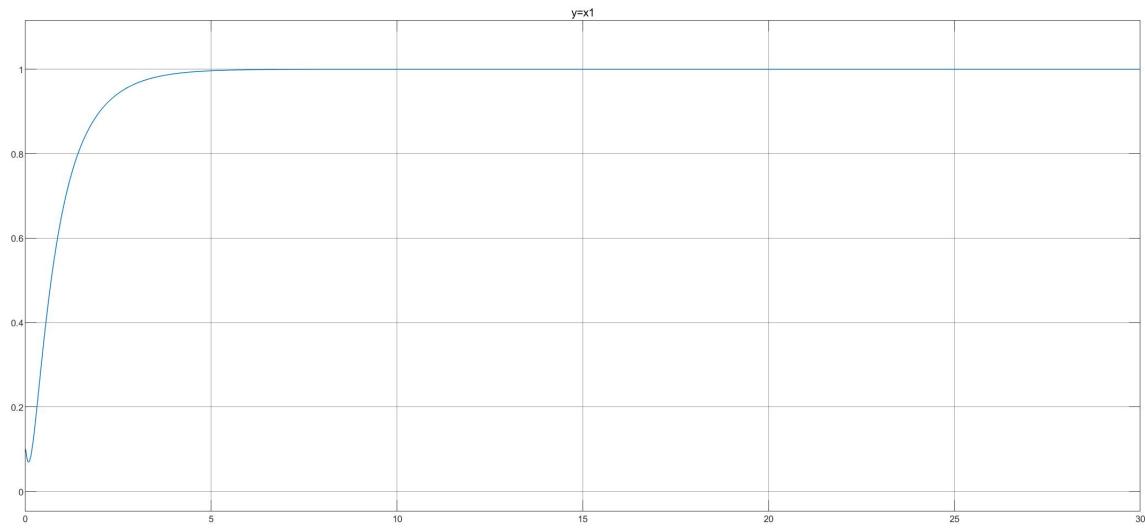


Figura 3.55: Risposta del sistema al controllo adattativo PI

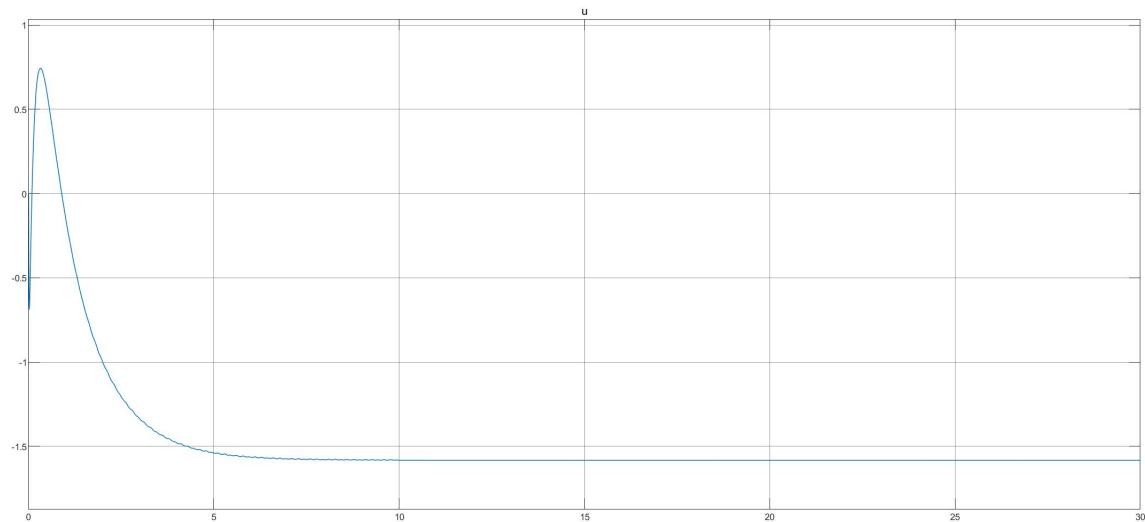


Figura 3.56: Andamento della u del controllo adattativo PI

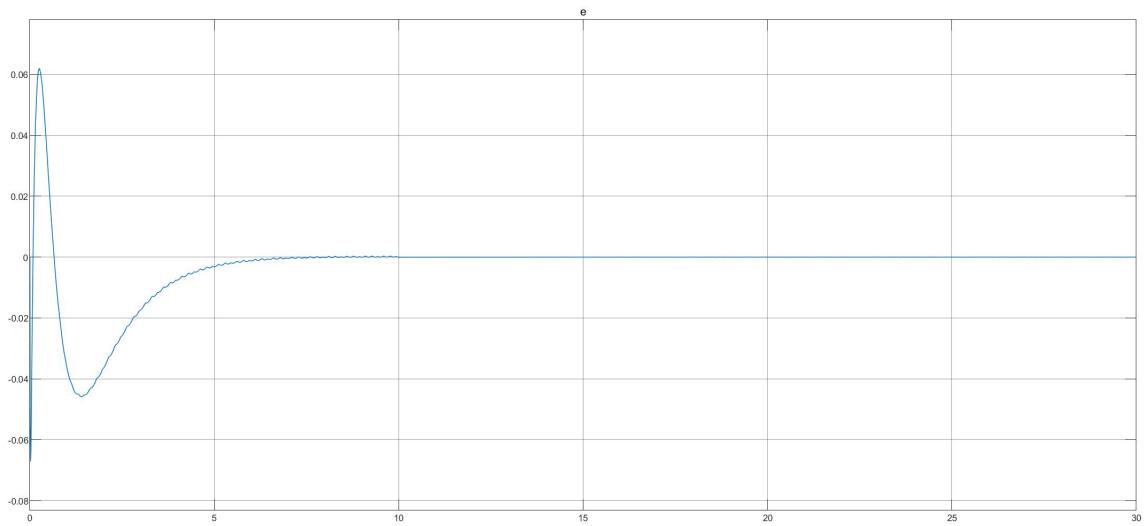


Figura 3.57: Andamento della e del controllo adattativo PI

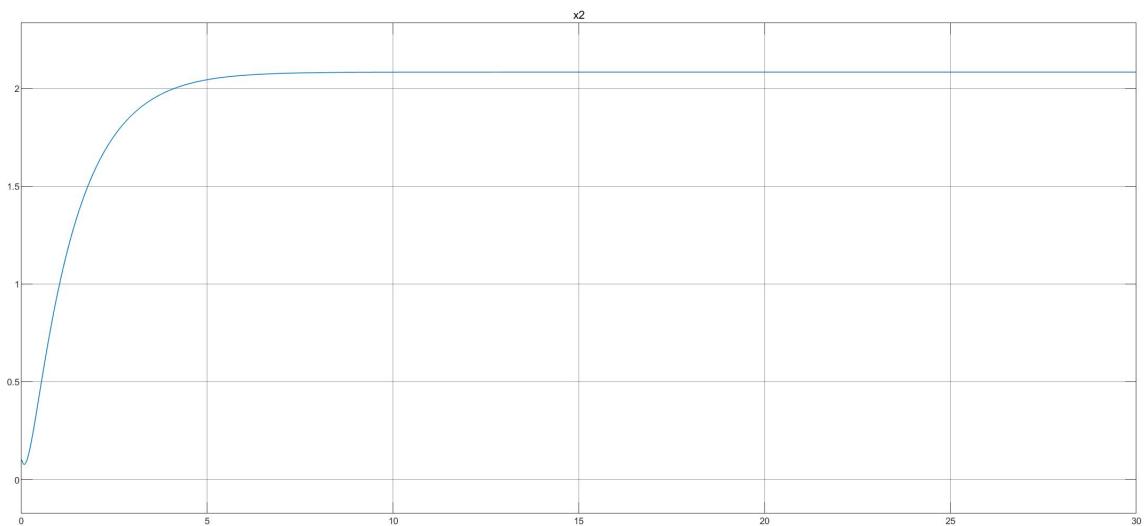


Figura 3.58: Andamento della x_2 del controllo adattativo PI

Come nei casi precedenti, si aggiunge un disturbo pari a -0.3 all'istante 10s

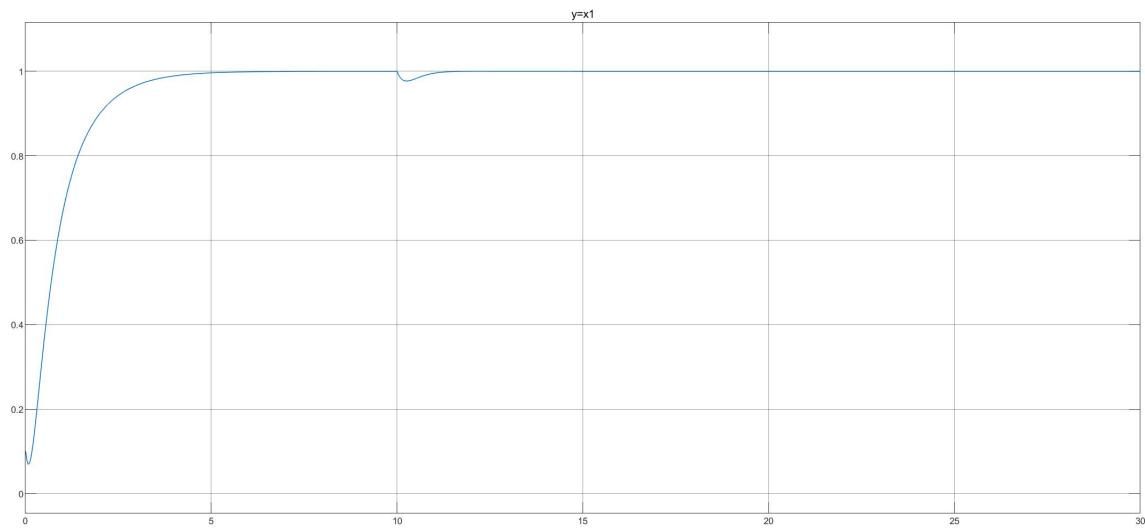


Figura 3.59: Risposta del sistema al controllo adattativo PI con disturbo

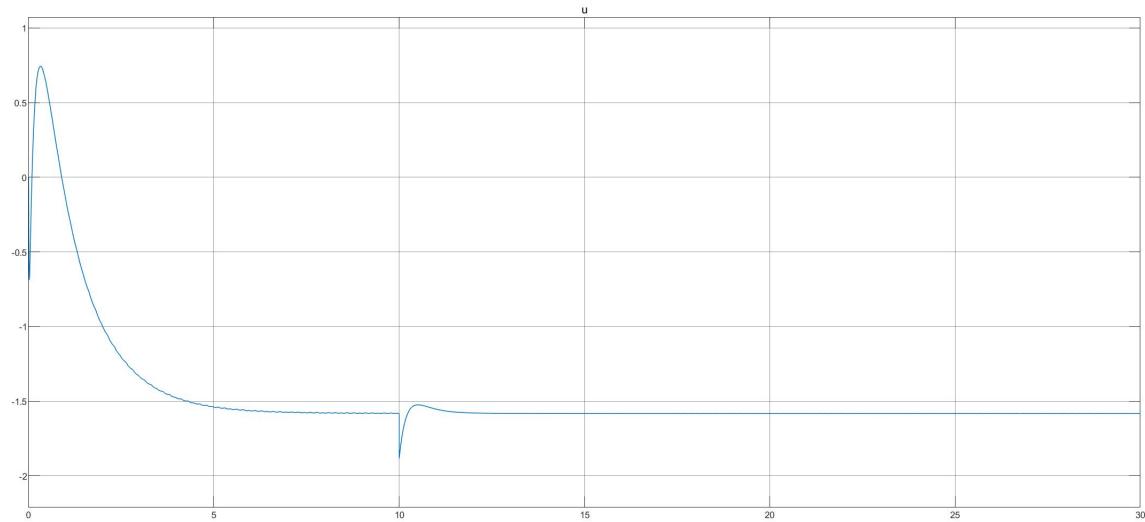


Figura 3.60: Andamento della u del controllo adattativo PI con disturbo

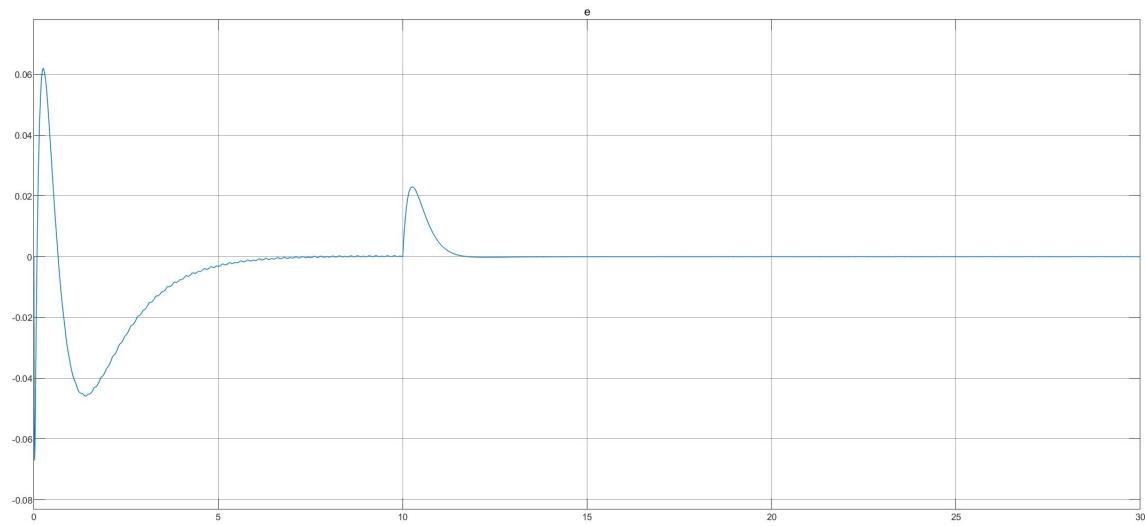


Figura 3.61: Andamento della e del controllo adattativo PI con disturbo

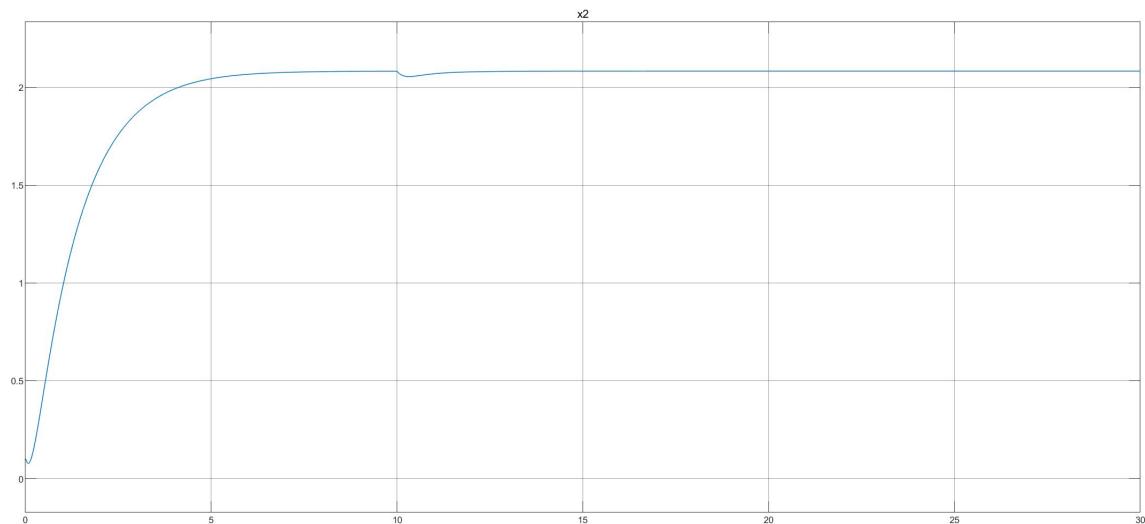


Figura 3.62: Andamento della x_2 del controllo adattativo PI con disturbo

In caso di variazione parametrica del 10%, si ottiene:

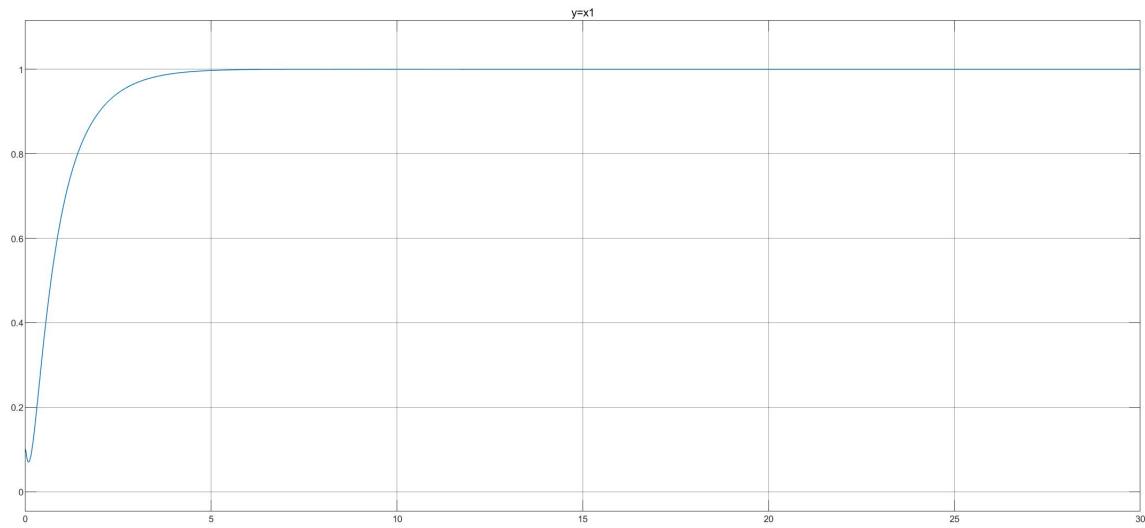


Figura 3.63: Risposta del sistema al controllo adattativo PI con variazione parametrica

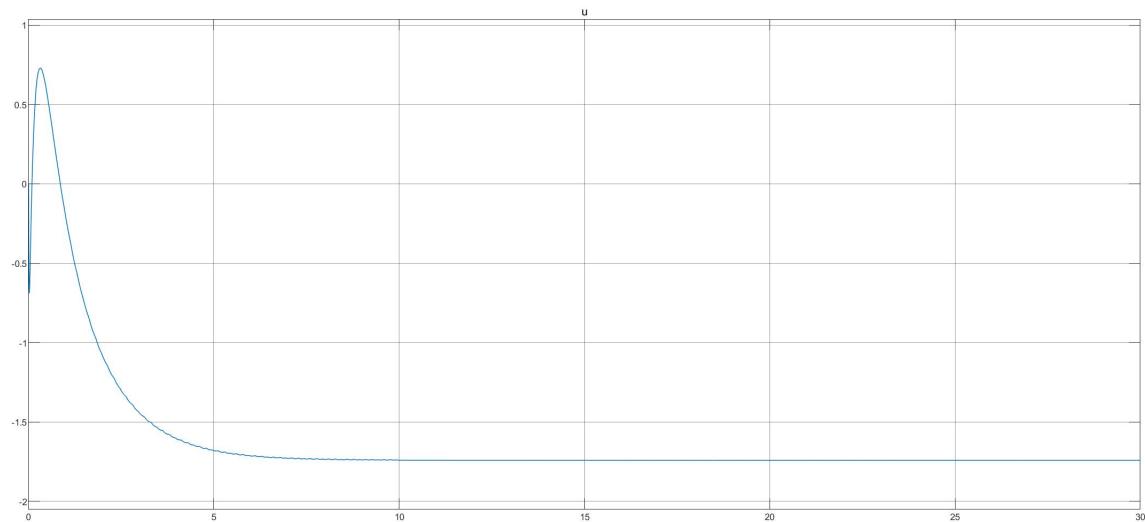


Figura 3.64: Andamento della u del controllo adattativo PI con variazione parametrica

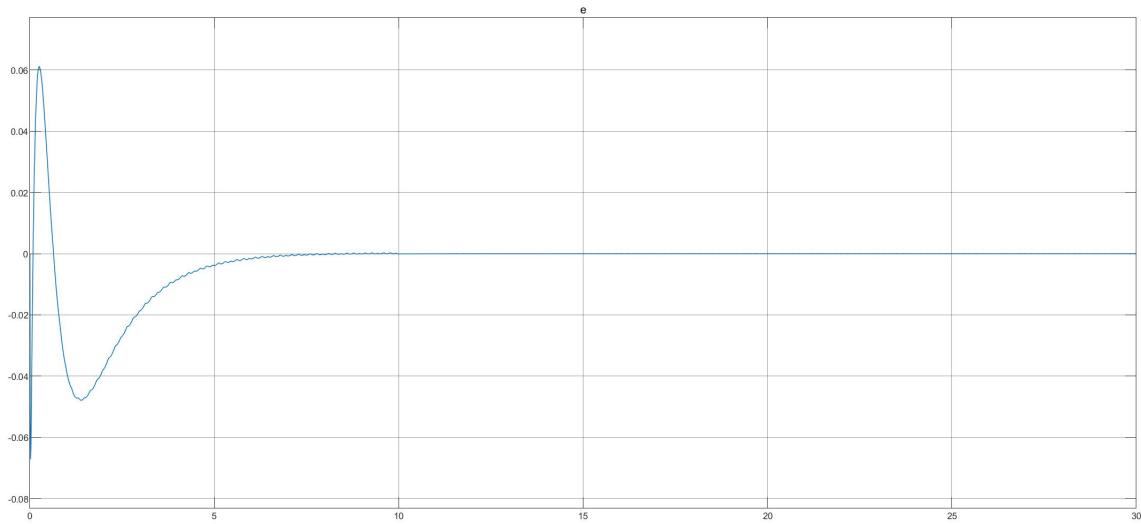


Figura 3.65: Andamento della e del controllo adattativo PI con variazione parametrica

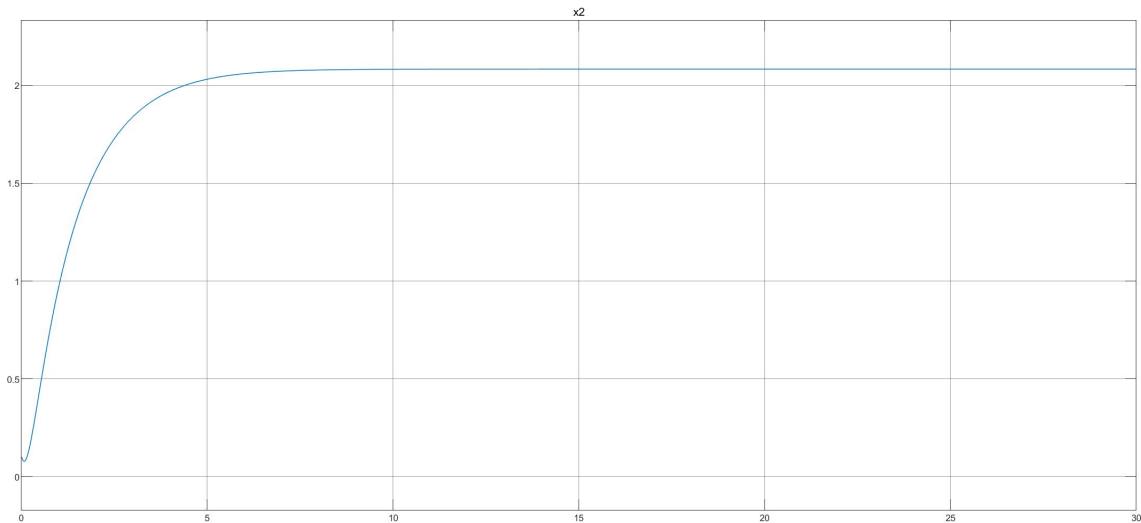


Figura 3.66: Andamento della x_2 del controllo adattativo PI con variazione parametrica

Di seguito vengono illustrate le uscite del sistema di riferimento e dei PI adattativi

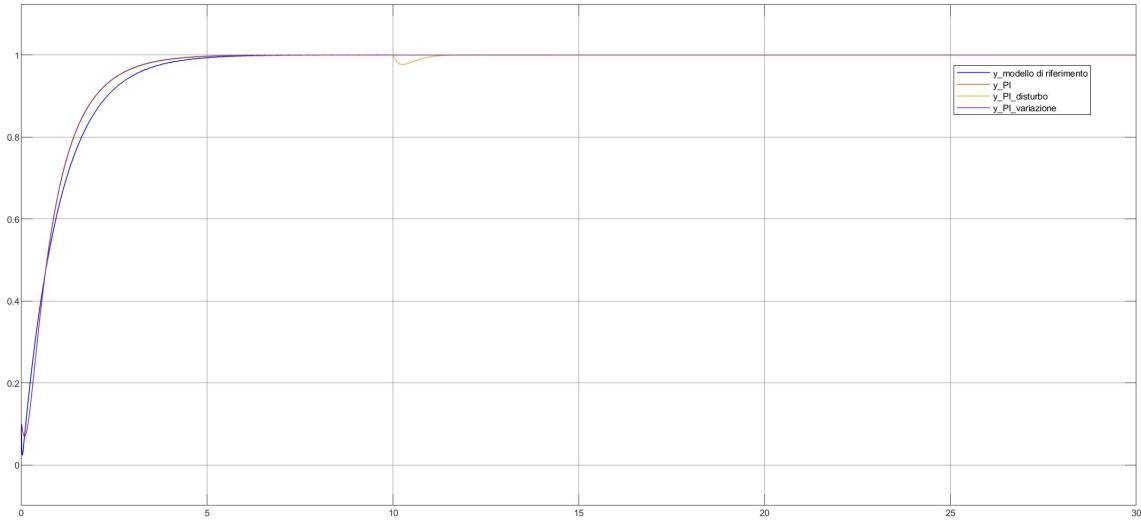


Figura 3.67: Confronto delle uscite dei controllori PI adattativi e del modello di riferimento

Si è consapevoli che il modello così presentato non rispecchia fedelmente l'approccio presentato a lezione. La ragione per cui si è scelta questa strada è che MRAC classico nasce per sistemi lineari, e i risultati ottenuti applicandolo prima al sistema linearizzato e poi al sistema non lineare differiscono di molto, senza risultare soddisfacenti. Mentre MCS, nonostante sia un controllore leggermente più incline a sistemi non lineare, non assicura il suo funzionamento per tutti i sistemi non lineari(poichè il controllo MCS garantisce che l'errore $e = x_m - x$ va a 0, nel caso in cui il modello di riferimento e il modello da controllare siano lineari);infatti, sono state svolte varie simulazioni anche sul controllo MCS, ma i risultati ottenuti si sono rivelati scadenti. Il controllore PI presentato deficita della capacità di far variare i guadagni nel tempo, ma ai fini dell'esercizio, il risultato è soddisfacente. Questo controllore PI utilizza la logica alla base del controllo adattativo, ovvero sfruttare un modello di riferimento per sopperire alle mancanze di informazioni del modello da controllare, e nonostante i guadagni rimangano costanti nel tempo, il controllo continua ad essere coerente con la strategia del controllo adattativo.

4 Capitolo 4

4.1 Confronto

In questo capitolo si vanno a confrontare le performances del controllore LQ applicato al sistema non lineare; del controllore progettato attraverso l'I/O Feedback Linearization e del PI adattativo. Per quanto riguarda l'uscita $y = x_1$ si ha ciò che è mostrato in figura 4.1



Figura 4.1: Confronto fra le uscite negli schemi di controllo proposti

È facile notare che le performance delle uscite sono molto simili.

Per quanto riguarda gli errori, si può notare che l'errore del PI adattativo parte da 0, a differenza del LQ e dell'I/O, perché nel caso del controllo adattativo non si sta seguendo un segnale a gradino, ma la risposta del sistema di riferimento

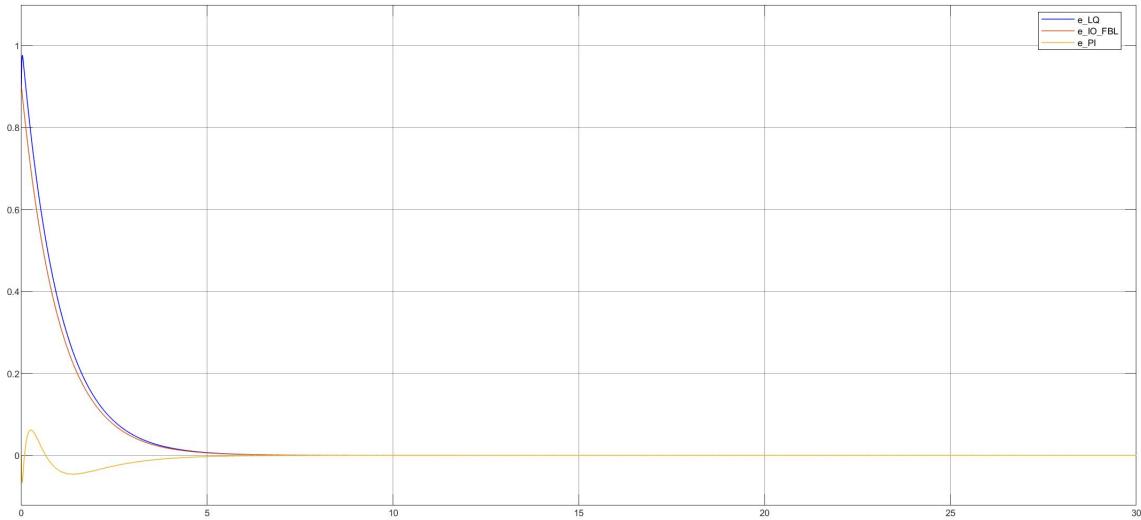


Figura 4.2: Confronto fra gli errori negli schemi di controllo proposti

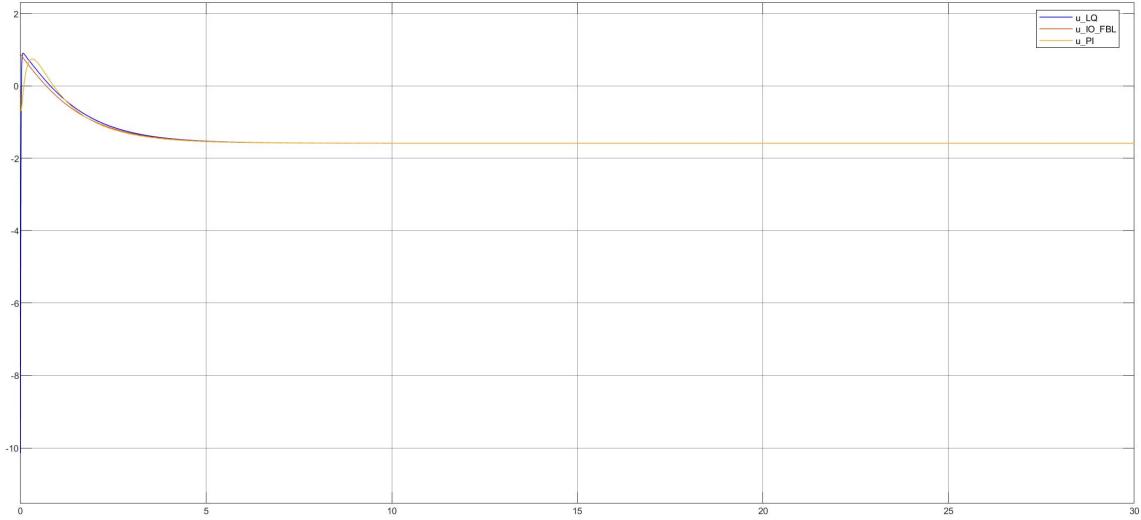


Figura 4.3: Confronto fra gli ingressi negli schemi di controllo proposti

I risultati più discordanti sono visibili nel confronto fra gli ingressi negli schemi di controllo proposti, infatti come si vede nell'immagine 4.3, nel caso del LQ è necessario partire da un valore negativo circa pari a -10, mentre nel caso del FBL parte da un valore di 0.86. Per ridurre il valore della u nell'LQ è sufficiente aumentare il valore della matrice R nello script Matlab. Invece, l'ingresso del PI parte da 0.

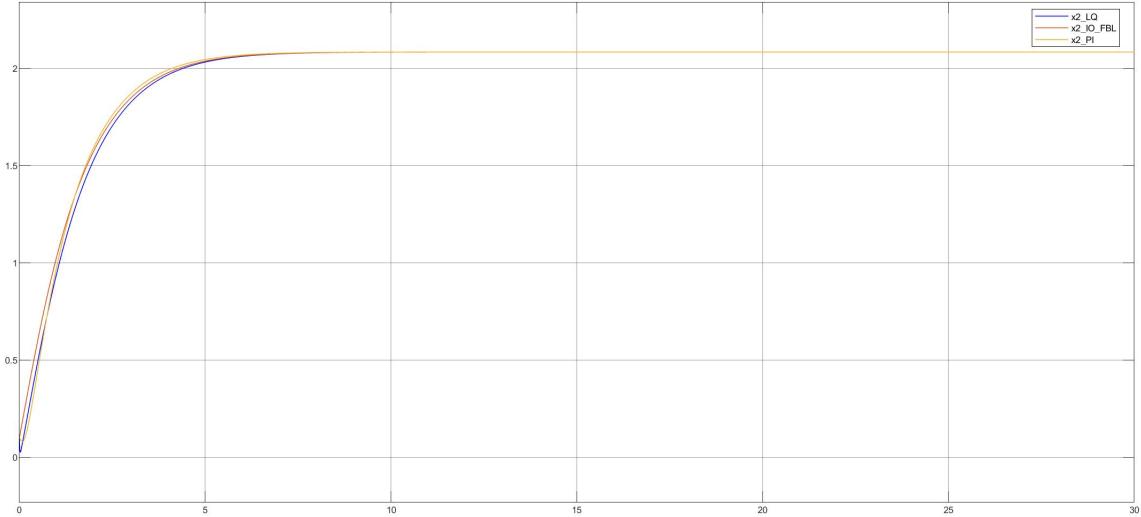


Figura 4.4: Confronto fra le x_2 negli schemi di controllo proposti

Di seguito sono confrontati i segnali generati dai sistemi in presenza di disturbo pari a -0.3 all'istante 10 e variazione parametriche del 10%. Come è facile immaginarsi, FBL assumerà prestazioni peggiori, a causa della sua intrinseca scarsa robustezza.

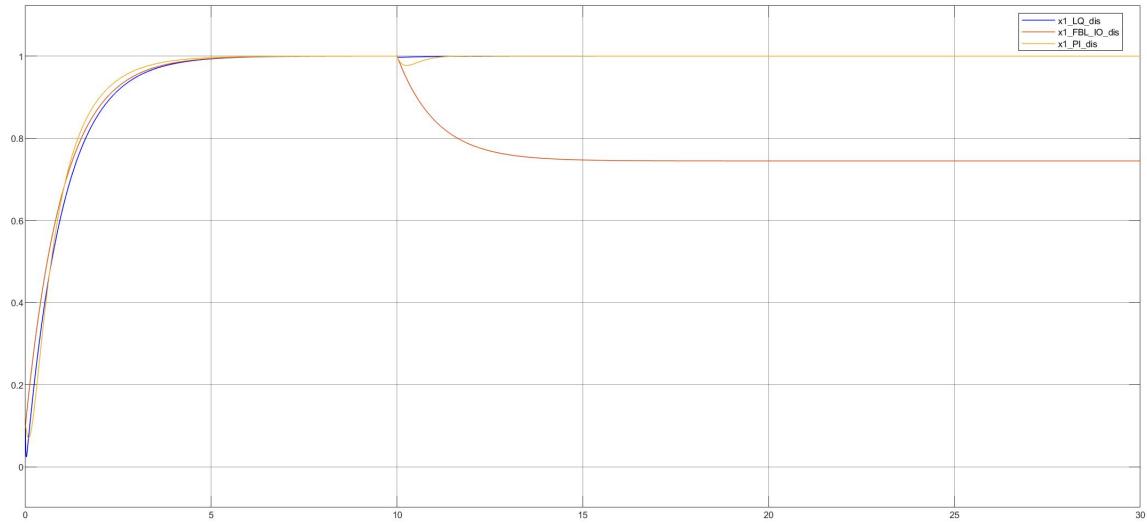


Figura 4.5: Confronto fra le uscite in presenza di disturbo

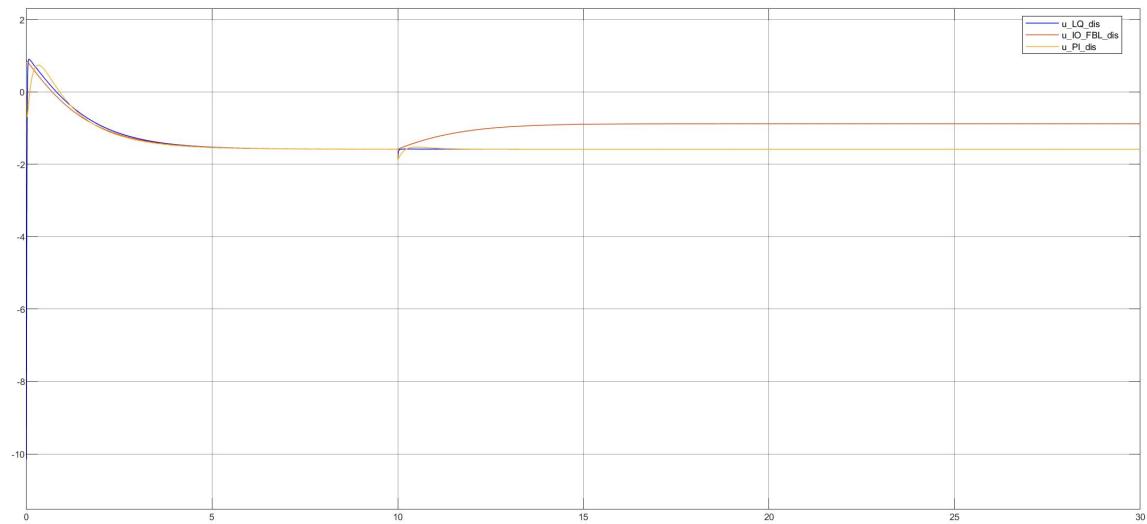


Figura 4.6: Confronto fra gli ingressi in presenza di disturbo

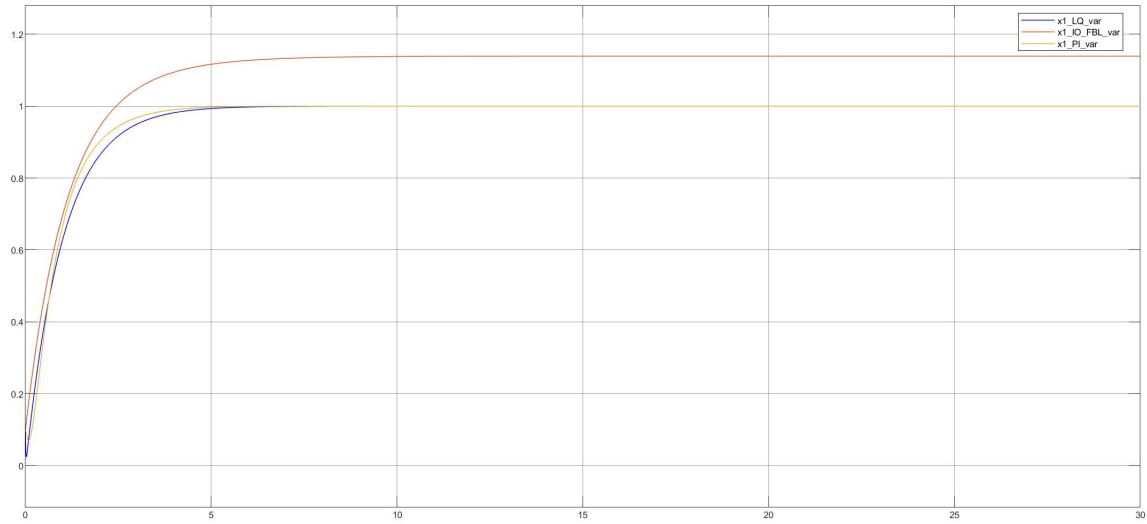


Figura 4.7: Confronto fra le uscite in presenza di variazione parametrica

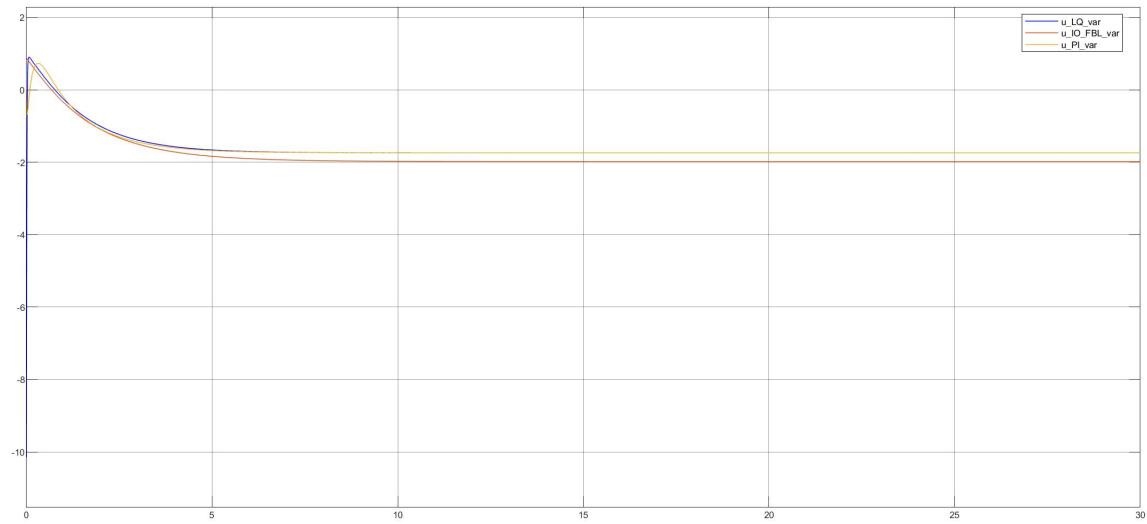


Figura 4.8: Confronto fra gli ingressi in presenza di variazione parametrica

4.2 Conclusioni

In questa tesina è stato analizzato il modello di Richardson sulla corsa agli armamenti con vincoli di budget. Questo modello è uno dei più famosi in ambito militare, perchè permette con un numero non elevato di parametri di prevedere in maniera realistica le spese belliche dovute a conflitti tra stati.

L'analisi del modello si è concentrata su:

- Introduzione del modello e spiegazione del significato fisico dei parametri
- Calcolo e classificazione dei punti di equilibrio con i parametri scelti al variare di b , con considerazioni riguardo l'assenza di cicli limiti
- Analisi di biforcazione al variare del parametro a
- Controllo LQ sul sistema linearizzato, con analisi di robustezza ai disturbi e a variazione parametrica
- Controllo LQ sul sistema non lineare, con analisi di robustezza ai disturbi e a variazione parametrica
- Controllo I/O Feedback linearization, con analisi di robustezza ai disturbi e a variazione parametrica
- Model Reference Adaptive Control con controllore PI, con analisi di robustezza ai disturbi e a variazione parametrica
- Confronto tra controllo I/O Feedback linearization, LQ non lineare e Model Reference Adaptive Control con controllore PI

Tutti i controlli ottengono dei comportamenti pressochè simili. Le uscite arrivano a regime in circa 4s, e non producono errore a regime e sovraelongazione, ma l'I/O FBL si è dimostrato, a causa della sua intrinseca scarsa robustezza, il meno robusto ai rumori e alle variazioni parametriche.

Ovviamente questo modello è soggetto ad alcuni limiti, dovuti al livello di astrazione con il quale si sta effettuando l'analisi, infatti non si tengono in considerazione né alcuni aspetti militari, come la possibilità che altri stati possano intervenire durante il conflitto, né altri aspetti economici come: l'inflazione, sanzioni economiche inflitte da altri stati o sospensioni di accordi commerciali.

Nonostante le limitazioni sopra citate, il modello continua ad essere un buon punto di partenza per analisi militari a fine accademico e non solo. Gli avvenimenti che hanno coinvolto Russia, Ucraina e Nato nel 2022, evidenziano come le tematiche trattate in questa tesina sono ancora attuali e attraverso uno studio serio e approfondito è possibile aumentare la comprensione di questi fenomeni e prevenire eventi catastrofici.

5 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

- [1] Enns, Richard H. It's a nonlinear world. New York: Springer, 2011.
- [2] Lehmann, Brian, John McEwen, and Brian Lane. „Modifying the Richardson Arms Race Model With a Carrying Capacity.“ (2009).
- [3] Squassina, Marco, and Simone Zuccher. Introduzione all'analisi qualitativa dei sistemi dinamici discreti e continui. Springer Milan, 2016.