Дк #1

Задача 0.1) Вычислите интегралы. Возможно появление функции li(x)

1) $\int \frac{x \operatorname{arcctg}(x)}{(x^2+1)^2} dx =$

Интегрируем по частям ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$= \left| f = \operatorname{arcctg}(x),\ g' = \frac{x}{(x^2+1)^2} \right| \Rightarrow \left| f' = -\frac{1}{x^2+1},\ g = -\frac{1}{2(x^2+1)} \right|$

$= -\frac{\operatorname{arcctg}(x)}{2(x^2+1)} - \int \frac{1}{2(x^2+1)^2} dx$

$\int \frac{1}{2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx =$

$= \left| \int \frac{1}{(ax^2+b)^n} dx = \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}} dx + \frac{x}{2b(n-1)(ax^2+b)^{n-1}} \right.$; $a = 1;\ b = 1;\ n = 2 \Big|$

$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \left| \int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) \right| =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} \right) = \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg}(x)}{4} \Rightarrow$

$\int \frac{x \operatorname{arcctg}(x)}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\operatorname{arcctg}(x)}{2(x^2-1)} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{\operatorname{arcctg}(x)}{4} + C$

$= -((x^2+1)\operatorname{arcctg}(x) + 2\operatorname{arcctg}(x) + x) / (4(x^2+1)) + C$

2) $\frac{x^{100}dx}{\ln(x)}$ $x<1$

$$\frac{x^{100}dx}{\ln(x)} = \left| \begin{array}{l} u=\ln(x) \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \quad dx=x\,du \\ x^{101}=e^{101u} \quad \frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{u} \end{array} \right|$$

$$=\int e\frac{^{101u}}{u}du$$

Из №2092 Демидовича!

$$\int\frac{e^{101u}}{u}du = li(e^{101u}) = li(e^{101\ln x})+C = li(x^{101})+C$$

3) $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \int \frac{(\sqrt{x+1}-(1+\sqrt{x}))\,dx}{x+1-(x+2\sqrt{x}+1} =$$

$$= -\int \frac{(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx - 2\sqrt{x} - x\right)$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \Big|\; u = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \quad v = x \quad du = \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}\,x}\Big|$$

$$\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)' = \cancel{1\sqrt{x}}\;\frac{-1}{2x\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} + \int \frac{x\,dx}{2x\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}} = \sqrt{x(x+1)} + \operatorname{arcsh}(\sqrt{x})$$

Задача 0.2) Вычислите предел суммы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7+tg(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{\sin(1!)}{1}} + \frac{(7+tg(\frac{1}{n}))^{2/n}}{n+\frac{\sin(2!)}{2}} + \ldots + \frac{(7+tg(\frac{1}{n}))^{n/n}}{n+\frac{\sin(n!)}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7+tg(\frac{1}{n}))^{i/n}}{n+\frac{\sin(i!)}{i}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(\frac{1}{n}))^{i/n}}{n+1} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(7+tg(\frac{1}{n}))^{i/n}}{n+\frac{\sin(i!)}{i}} \le$$

$$\le \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(\frac{1}{n}))^{i/n}}{n-1}$$ (Th. о двух городовых

Докажем корректность:

$-1 \le \frac{\sin(i!)}{i} \le 1$ это очевидно так как $\sin(x) \in [-1, 1]$

Тогда при $n\to\infty$ будет:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(\frac{1}{n}))^{i/n}}{n+1} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(1/n))^{i/n}}{n-1} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(1/n))^{i/n}}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(7+tg(1/n))^{i/n}}{n+\frac{\sin(i!)}{i}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(1/n))^{i/n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(1/n))^{i/n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (7+tg(\lim_{n\to\infty}(1/n)))}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} (7)^{i/n}}{n} = \frac{6}{\ln 7} \approx 3{,}08$$

Задача 0.3) Вычислите определенный интеграл

$$\left(\cancel{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}\right)$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k C_n^k \Rightarrow \Big|$$

$\Rightarrow$ (по линейности получим) $\Big| =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 (-x^2)^k = \Big| \int_0^1 (-x^2)^k = (-1)^k \int_0^1 x^{2k} = \frac{(-1)^k}{2k+1} \Big|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Задача 0.4) Вычислите определенные интегралы, если они существуют:

1) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{(1/x+2)(1/x+3)}$

$\int_{-1}^{1} = \int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{-1/3} + \int_{-1/3}^{0} + \int_{0}^{1}$

$\int_{-1}^{1/2} \frac{1}{x^2} \frac{dx}{(1/x+2)(1/x+3)} = \left| \begin{matrix} t = 1/x \\ dt = t^2 dx \end{matrix} \right| =$

$= \int_{-1}^{-2} \frac{-t^2 \cdot \frac{1}{t^2} dt}{(t+2)(t+3)} = \int_{-1}^{-2} \left(-\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3}\right) dt = \cancel{\ln|t+3| \Big|_{-1}^{-2}}$

$\cancel{- \ln|t+2| \Big|^{-2}} = \ln|t+3| - \underbrace{\ln|t+2|}_{=\infty} \Big|_{-1}^{-2} =$

$= \ln 2 - \lim_{t \to -2+0} \ln(t+2)$ расходится =>

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{(1/x+2)(1/x+3)}$ тоже расходится

ч.т.

2) $\int_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x-1x}} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} dx =$

$= \left| u = \arcsin(\sqrt{x}) \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} \quad dx = 2\sqrt{1-x}\sqrt{x}\, du \right|$

$= 2\int_0^1 u\, du = u^2 = \arcsin^2\sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$

2) Функция f удовлетворяет условию $f \sim x^p$ для $x \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-1}} \int_0^1 f(nx) \cdot$

$\cdot \sin\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \Rightarrow$

мы можем заменить, получим:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-1}} \int_0^1 f(nx) \cdot \frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right) dx =$

(подставим ещё и f)

$\stackrel{f}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^p \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + \underbrace{\frac{1}{p+2} \frac{x^{p+2}}{n}}_{=0}\right) =$

$= \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$