Дз #4

Задача 1.

Пусть L – подпространства X. Отображение $\varphi: X \to L$ определим правилами ~~$\varphi: X \to L$~~

$\varphi x = x \quad x \in L$ и $\varphi x = 0 \quad x \in L$

Является ли отображение φ линейным.

$\varphi(x_1 + x_2) \neq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ пусть $x_1 + x_2 \in L$,

тогда $\varphi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)$ x_1 и $x_2 \notin L$, тогда

$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0 \quad x_1 + x_2 \neq 0$ ч. т. д

Задача 2

Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства E_3 на подпространство. L – плоскость натянутая на векторы:

$e_1 = (-1, +1, -1) \quad e_2 = (1, -3, 2)$

$(e_1 \times e_2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -i + j + 2k \quad (-1, 1, 2)$

$P' = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \quad P' = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{matrix} \right\|$

Задача 3

Найти матрицу проектирования E_3 на подпространство E_3 на подпространство M, если

$$L: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases} \qquad M: 2x+3y-4z=0$$

$$M: Lin\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$L: lin\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad P = A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} A^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1/2 & 3/4 & -1 \\ 1 & 3/2 & -2 \\ 1/2 & 3/4 & -1 \end{vmatrix}$$

задача 4

Линейное отображение n-мерного арифметического ~~тического~~ пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей. Числа n и m определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора, если:

$$A = \begin{vmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad a = (0\ 1\ 1\ 2\ -1)^T$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 30 & 9 & 4 & 0 \\ -24 & -15 & 2 & 1 \\ 43 & 8 & 9 & 1 \\ -50 & 5 & -20 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 30 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & -230 & 156 & 30 \\ 0 & -147 & 98 & 30 \\ 0 & 600 & -400 & 60 \\ 0 & 105 & -70 & -30 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} -234 & 0 & -78 & -9 \\ 0 & -234 & 156 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -87 \\ 0 & 0 & 0 & -1068 \\ 0 & 0 & 0 & 129 \end{array}\right|$$

=> нет решений

Задача 5

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ ФСР:

$\ell_4 : (-1\ 2\ -2\ 1\ 0\ 0)^T$

$\ell_6 : (1\ -1\ 2\ 0\ 0\ 1)^T$ Базис подпространства M.

$\vec{A}x = y$

полный прообраз.

для b_4:

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = -1 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 0 \end{array}\right.$$

для λ_0:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 6 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Задача 7

$[\varphi(p)](x,y) = x\dfrac{dp}{dx} - y\dfrac{dp}{dy}$ - линейно

$\Delta[\varphi(p+q)] = x\dfrac{d(p+q)}{dx} - y\dfrac{d(p+q)}{dy} = x\dfrac{dp}{dx} + x\dfrac{dq}{dx} - y\dfrac{dp}{dy} - y\dfrac{dq}{dy} = [\varphi(p)] + [\varphi(q)]$

Матрица в базисе $\{x^2, xy, y^2\}$

$x^2: [\varphi(x^2)](x,y) = x\dfrac{d(x^2)}{dx} - \underbrace{y\dfrac{dx^2}{dy}}_{=0} = \dfrac{x2xdx}{dx} = 2x^2$ $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$xy: [\varphi(xy)](x,y) = \underbrace{x\dfrac{d(xy)}{dx}}_{=y} - \underbrace{y\dfrac{d(xy)}{dy}}_{=x} = xy - yx = 0$ $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$y^2: [\varphi(y^2)](x,y) = x\dfrac{d(y^2)}{dx} - y\dfrac{d(y^2)}{dy} - \dfrac{y2ydy}{dy} - 2y^2$ $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

задача 6

Доказать, что

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

2) ранг матрицы линейного инъективного отображения равен числу ее столбцов.

~~Матрица $\|\hat{A}\|_{ef}$ размера $m \times n$, этот~~

Отметим, что в конечномерном случае сюръективность отображения означает выполнения условия $\Theta = \Pi^m$, а инъективность - условия $\ker \hat{A} = \{0\}$. Отсюда следует, что ранг матрицы линейного операто ра, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов. Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет взаимно однозначным — или биекцией.