

Задание 1

Вариант А

Непомеченные корневые объекты. Пусть задано множество непомеченных комбинаторных объектов A . Обозначим как A_n множество объектов веса n . Множеством корневых объектов для A называется множество $\Theta A = \sum_n A_n \times \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$, где ϵ_i — различные объекты веса 0. Иначе говоря, если считать элементы A состоящими из атомов единичного веса, то операция построения корневого множества состоит в том, что с атомов выделяется, становясь «корнем» объекта.

Докажите, что если производящая функция для A равна $A(z)$, то производящая функция для $B = \Theta A$ равна $B(z) = z \frac{d}{dz} A(z)$.

Вариант В

Помеченные корневые объекты. Пусть задано множество помеченных комбинаторных объектов A . Обозначим как A_n множество объектов веса n . Множеством корневых объектов для A называется множество $\sum_n A_n \times \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$, где ϵ_i — различные объекты веса 0. Иначе говоря, если считать элементы A состоящими из атомов единичного веса, то операция построения корневого множества состоит в том, что один из атомов выделяется, становясь «корнем» объекта.

Докажите, что если экспоненциальная производящая функция для A равна $a(z)$, то производящая функция для $B = \Theta A$ равна $b(z) = z a'(z)$.

Задание 2

Вариант С

Пусть задано множество непомеченных комбинаторных объектов A . Обозначим как $MSet_3(A)$ семейство мультимножеств объектов из A , содержащих ровно 3 объекта.

Докажите, что если производящая функция для A равна $A(z)$, то производящая функция для $B = MSet_3(A)$ равна $B(z) = \frac{1}{6}(A(z)^3 + 3A(z)A(z^2) + 2A(z^3))$.

Вариант D

Пусть задано множество непомеченных комбинаторных объектов. Обозначим как $Set_3(A)$ семейство множеств объектов из A , содержащих ровно 3 объекта.

Докажите, что если производящая функция для A равна $A(z)$, то производящая функция для $B = Set_3(A)$ равна $B(z) = \frac{1}{6}(A(z)^3 + 3A(z)A(z^2) + 2A(z^3))$.

Вариант E

Пусть задано множество непомеченных комбинаторных объектов. Обозначим как $Cyc_3(A)$ семейство циклов объектов из A , содержащих ровно 3 объекта.

Докажите, что если производящая функция для A равна $A(z)$, то производящая функция для $B = Cyc_3(A)$ равна $B(z) = \frac{1}{3}(A(z)^3 + 2A(z)^3)$.

Задание 3

Вариант F

Унарно-бинарное дерево — это дерево, у которого каждая внутренняя вершина имеет либо одного, либо двух детей. Если вершина имеет двух детей, то они упорядочены: один левый, другой правый, а если один ребенок, то для него не указано, левый он или правый.

Найдите производящую функцию для числа унарно-бинарных деревьев с n вершинами.

Вариант G

Ветвистое дерево — это дерево с порядком на детях, у которого каждая внутренняя вершина имеет не менее двух детей.

Найдите производящую функцию для числа ветвистых деревьев с n вершинами.

Вариант H

Двоичное дерево — это дерево, где каждая вершина, кроме листа, имеет ровно два ребенка, один левый, один правый.

Найдите производящую функцию от двух переменных для числа двоичных деревьев с n вершинами и m листьями (коэффициент $A(t, u)$ должен быть равен искомому числу деревьев).

Задание 4

Вариант I

Используя производящие функции, докажите, что среднее число жеств среди разбиений чисел от 1 до n на множества равно $1/B(n) - 1$, где $B(n)$ — n -е число Белла.

Вариант J

Зафиксируем r . Постройте экспоненциальную производящую функцию от двух переменных для перестановок n элементов с k циклами r . Найдите среднее количество циклов длины r среди перестановок n элементов.

Вариант K

Определим гиперкуб как множество n -мерных точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , где все $x_i \in [0, 1]$. Например, 1-мерный гиперкуб это отрезок $[0, 1]$, 2-мерный гиперкуб — единичный квадрат на плоскости. Определим гиперкуба как множество вида $\prod_{i=1}^n S_i$, где каждое S_i это одно из множеств $\{0\}$, $\{1\}$, или $[0, 1]$. Размерностью грани называется количество S_i , $x_i \in [0, 1]$. Обозначим $a_{n,m}$ как количество граней размерности m у n -м гиперкуба (например, у 3-х мерного куба есть 12 одномерных граней). Постройте комбинаторную конструкцию для $a_{n,m}$, найдите производящую функцию $A(t, u)$. Найдите математическое ожидание размерности случайной n -гиперкуба в зависимости от n .