

Math Logic

Если что пишете @TheMifik

June 2022

Содержание:

- 1.1) Исчисление высказываний
- 1.2) Общезначимость
- 1.3) Следование
- 1.4) Доказуемость (Выводимость)
- 1.5) Корректность
- 1.6) Полнота
- 1.7) Непротиворечивость
- 1.8) Теорема о дедукции для исчисления высказываний
- 2.1) Теорема о полноте исчисления высказываний
- 3.1) Интуиционистское исчисление высказываний
- 3.2) Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод
- 3.3) ВНК - интерпретация
- 3.4) Решетки
- 3.5) Булевы и псевдобулевы алгебры
- 4.1) Алгебра Линденбаума
- 4.2) Полнота И И В в псевдобулевых алгебрах
- 4.3) Модели Крипке
- 4.5) Нетабличность И И В
- 5.1) Гёделева Алгебра
- 5.2) Операция $\Gamma(A)$
- 5.3) Дизъюнктивность И И В
- 6.1) Исчисление предикатов
- 6.2) Общезначимость, следование, выводимость
- 6.3) Теорема о дедукции для И П
- 6.4) Теорема о корректности И П
- 7.1) Непротиворечивые множества формул
- 7.2) Доказательства существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном И П
- 7.3) Теорема Гёделя о полноте И П
- 7.4) Доказательство полноты И П
- 8.1) Машина Тьюринга
- 8.2) Задача об остове, её неразрешимость
- 8.3) Доказательство неразрешимости И П
- 9.1) Порядок теории (0, 1, 2)

- 9.2) Теории первого порядка, структуры и модели
- 9.3) Аксиоматика Пеано
- 9.4) Арифметические операции
- 9.5) Формальная Арифметика
- 10.1) Прimitивно-рекурсивные и рекурсивные функции
- 10.2) Прimitивная рекурсивность арифметических функций, функция вычисления простых чисел, частичного логорифма
- 10.3) Выразимость отношений и представимость функций в ΦA
- 10.4) Харктеристические функции
- 10.5) Представимость примитивов N, Z, S, U в ΦA
- 11.1) Бетта-функция Гёделя
- 11.2) Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в ΦA
- 11.3) Гёделева нумерация
- 11.4) Рекурсивность представимых в ΦA функций
- 12.1) Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности) и ω - непротиворечивость
- 12.2) Первая теорема о неполноте арифметики
- 12.3) Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в Форме Россера
- 12.4) Неполнота арифметики. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики. Consis
- 12.5) Неформальное пояснение метода доказательств
- 13.1) Теория множеств
- 13.2) Определения равенства
- 13.3) Аксиоматика Цермело-Френкеля
- 13.4) Частичный, линейный, полный порядок
- 13.5) Ординальные числа аксиома бесконечности
- 13.6) Конечные ординалы
- 13.7) Существования ординала ω
- 13.8) Операции над ординалами
- 14.1) Кардинальные числа
- 14.2) Мощность множества
- 14.3) Теорема Кантора-Бернштейна
- 14.4) Теорема Кантора
- 14.5) Аксиома выбора
- 14.6) Теорема Диаконеску
- 15.1) Теорема Лёвенгейма-Сколема
- 15.2) Парадокс Сколема
- 16.1) Система S_∞
- 16.2) Доказательство непротиворечивости ΦA

1.1) Исчисление высказываний

(1)

а) **Язык:** {Предметный-язык, мета-язык}

Высказывание это либо:

- Большая латинская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами.
- Выражение вида $(\alpha \& \beta)$ $(\alpha \vee \beta)$ $(\alpha \rightarrow \beta)$ $(\neg \alpha)$, где α , β - высказывания.

Метапеременные: α , β , γ ;

X, Y, Z - метапеременные для пропозициональных переменных.

Приоритеты: \neg , $\&$, \vee , \rightarrow .

Истинностное значение { И, Л }.

$\llbracket \alpha \rrbracket$ - оценка высказывания.

Аксиомы - список высказываний.

Схема аксиом - высказывание с метапеременными, при любой подстановке высказываний вместо мето переменных, получаем аксиому.

$$1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$2) (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$3) \alpha \& \beta \rightarrow \alpha$$

$$4) \alpha \& \beta \rightarrow \beta$$

$$5) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$$

$$6) \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$$

$$7) \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$$

$$8) (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$$

$$9) (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\neg \alpha)$$

$$10) \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$$

1.2) Общезначимость (2)

α общезначима (истина), если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$, при любой оценки пропозициональных переменных $\{\models\}$.

α невыполнима (ложна), если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{Л}$, при любой оценки пропозициональных переменных.

α выполнима, если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$, при некоторой оценки пропозициональных переменных.

α опровержима, если $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{Л}$, при некоторой оценки пропозициональных переменных.

1.3) Следование (3)

Будем говорить, что $\Gamma \models \alpha$, то есть α следует из Γ , если при всех оценках таких, что все $\gamma \in \Gamma$ $\llbracket \gamma \rrbracket = \text{И}$, выполнена $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$.

1.4) Доказуемость (Выводимость) (4)

$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, где γ_i - либо аксиома, либо существует $j, k < i$, что $\gamma_k \equiv (\gamma_j \rightarrow \gamma_i)$ $\{\vdash\}$.

Modus Ponens - $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \beta$

1.5) Корректность (5)

Теория корректна, если доказуемость влечет общезначимость.

1.6) Полнота (6)

Теория полна, если общезначимость влечет доказуемость.

1.7) Непротиворечивость (7)

Множество формул Γ называется непротиворечивым, если для некоторой формулы a , не имеет место одновременно и $\Gamma \vdash a$, $\Gamma \vdash \neg a$.

1.8) Теорема о дедукции для исчисления высказываний (8)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выводится тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

2.1) Теорема о полноте исчисления высказываний (9)

Исчисления высказываний полно: $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

3.1) Интуиционистское исчисление высказываний (10)

Рассмотрим К И В и заменим 10 схему аксиом на $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$.

Теория моделей

Примеры моделей:

- 1) Модели К И В подходят: корректны, но не полны.
- 2) Теория в которой $\llbracket \alpha \rrbracket$ - открытое множество в топологическом пространстве. В ней определены:

- 1) $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$
- 2) $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$
- 3) $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = ((X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket)^\circ$
- 4) $\llbracket \perp \rrbracket = \emptyset$
- 5) $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = (X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket)^\circ$

3.2) Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод (11)

Естественный натуральный вывод - способ доказательства в виде деревьев. Вывод в Гильбертовском стиле (смотри на **1.4 доказуемость**)

3.3) ВНК - интерпретация (Логических связок) (12)

- 1) α, β, γ - конструкции.
- 2) $\alpha \& \beta$ - умеем строить α и β .
- 3) $\alpha \vee \beta$ - умеем строить α или β и знаем, что именно.
- 4) $\alpha \rightarrow \beta$ - умеем перестроить α в β .
- 5) \perp - не имеет построения.
- 6) $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$.

3.4) Решетки (13)

X - частично упорядоченное множество отношений \leq .
Множество верхних граней a, b - $\{x \mid a \leq x, b \leq x\}$.
Множество нижних граней a, b - $\{x \mid x \leq a, x \leq b\}$.
 $a + b$ - наименьший элемент множества верхних граней.
 $a \cdot b$ - наибольший элемент множества нижних граней.

Минимальный элемент - меньше которого нет.

Решетка - частичное упорядоченное множество, где для каждый двух элементов, существует $a + b$ и $a \cdot b$.

Дистрибутивная решетка $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
В дистрибутивной решетке $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Псевдодополнение - $a \rightarrow b$ - наибольший элемент $\{c \mid a \cdot c \leq b\}$.

Импликативная решетка - Есть псевдодополнение для всех a, b .

0 и 1

- 0 - элемент, что $0 \leq x$, при всех x .
- 1 - элемент, что $x \leq 1$, при всех x .

3.5) Булевы и псевдобулевы алгебры (14)

Алгебра Гейтинга - импликативная решетка с 0 (псевдобулева алгебра).

$\tilde{a} \equiv a \rightarrow 0$ (псевдодополнение до нуля).

Булева алгебра - Алгебра Гейтинга, где $a + \tilde{a} = 1$.

α, β - высказывания в И И В.

$\alpha \leq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.

$\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$.

4.1) Алгебра Линденбаума (15)

Пусть E - множество всех высказываний И И В. Тогда (факты множества E по отношению эквивалентности) $[E]_{\approx}$ - Алгебра Линденбаума.

Алгебра Линденбаум - Алгебра Гейтинга; Корректная модель И И В.

4.2) Полнота И И В в псевдобулевых алгебрах (16)

Алгебра Гейтинга - полная и корректная модель И И В.

4.3) Модели Крипке (17)

$\langle \Vdash, W \rangle$

1) \Vdash - вынужденность W - множество миров.

Вынуждение переменной A - определяется моделью, при этом если $W_x \leq W_y$ и $W_x \Vdash A$, то $W_y \Vdash A$.

2) Доопределим \Vdash на всех множествах.

1) $W \Vdash A \& B$, if $W \Vdash A$ and $W \Vdash B$.

2) $W \Vdash A \vee B$, if $W \Vdash A$ or $W \Vdash B$.

3) $W \Vdash \neg A$, if not $W \leq W_x$, that $W_x \Vdash A$.

4) $W \Vdash A \rightarrow$, if in all $W \leq W_x$ from $W_x \Vdash A$ follow $W_x \Vdash B$.

4.5) Нетабличность И И В (18)

Модель называется табличной:

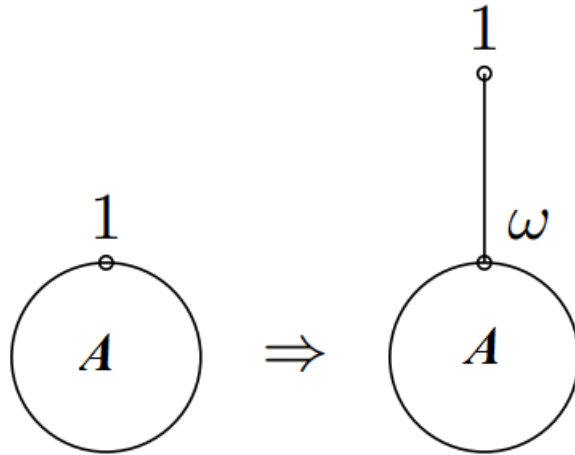
- 1) $V = S$ (V - множество истинных значений).
 - 2) $\llbracket \alpha * \beta \rrbracket = f_*(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$.
 - 3) Существует истина $\in S$ - выделенная истина и $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ тогда и только тогда, когда $\models \llbracket \alpha \rrbracket$.
- У И И В нет полной конечной таблично модели.

5.1) Гёделева Алгебра (19)

Алгебра Гейтинга, в которой из $a + b = 1$, следует что $a = 1$ или $b = 1$.

5.2) Операция $\Gamma(A)$ (20)

Пусть A - Алгебра Гейтинга, тогда:



Добавим новый элемент $1_{\Gamma(A)}$, переименуем 1_A в ω .

Теорема - $\Gamma(A)$ - Алгебра Гейтинга и Гёделева Алгебра.

5.3) Дизъюнктивность И И В (21)

Исчисление дизъюнктивно - если для любых $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$, влечет $\vdash \alpha$ и $\vdash \beta$.

6.1) Исчисление предикатов (22)

Предметные выражения:

- 1) Метапеременной $\theta\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$.
- 2) Одноместные и двухместные функциональные символы.
- 3) Нульместные функциональные символы.

Логические выражения:

Метапеременные $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Предикатные символы.

Оценка И П

D - предметное множество.

F - оценка для функциональных символов: Пусть $f_n - n$ - местный функциональный символ $F_{f_n} : D^n \rightarrow D$.

T - оценка для предикатных символов: Пусть $P_n - n$ - местный предикатный символ: $T_{P_n} : D^n \rightarrow V$, где $V = \{И, Л\}$.

E - оценка для свободных переменных $E(x) \in D$.

6.2) Общезначимость, следование, выводимость (23)

Формула И П общезначима, если истина при любой оценке $\{ \models \}$.
Доказуемость, выводимость, полнота, корректность аналогично И В.

Схема аксиом такая же как и в И В с дополнением:

$$11) \forall x. \phi[x := \theta] \rightarrow \phi$$

$$12) \phi[x := \theta] \rightarrow \exists x. \phi \text{ (везде } \theta \text{ свободен для подстановки } x \text{ в } \phi).$$

Добавим еще два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в ϕ):

Введение \forall

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x. \psi}$$

Введение \exists

$$\frac{\psi \rightarrow \phi}{(\exists x. \psi) \rightarrow \phi}$$

$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \models \alpha$ (α следует из $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$), если выполнено два условия:

1) α - выполнено всегда, когда выполнено $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

2) α - не использует кванторов по переменным, входящих свободно в $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Свободные вхождения

$(\forall x. \phi)$ или $(\exists x. \phi)$. Здесь переменная x связана в ϕ . Все вхождения переменной x в ϕ связаны.

Переменная x входит свободно в ϕ , если не находится в области действия никакого квантора по x . Все её вхождения в ϕ свободны.

Подстановка, свободна для подстановки

Терм θ свободен для подстановки вместо x в ϕ ($\phi[x] := \theta$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть

$$\begin{aligned} &(\forall x. P(y))[y := z] \\ &(\forall y. \forall x. P(x))[x := y] \end{aligned}$$

Свободы нет

$$\begin{aligned} &(\forall x. P(y))[y := x] \\ &(\forall y. \forall x. P(t))[t := y] \end{aligned}$$

6.3) Теорема о дедукции для И П (24)

Если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

6.4) Теорема о корректности И П (25)

Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из Γ , то $\Gamma \models \alpha$.

7.1) Непротиворечивые множества формул (26)

Непротиворечивые множества формул это такое из которого не выводится противоречие.

$\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$ (непротиворечивое множество).

$\Gamma = \{P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P\}$ (противоречивое множество).

Полное непротиворечивое множество (бескванторных) формул

1) Γ содержит только замкнутые (бескванторные) формулы.

2) Если α - некоторая замкнутая (бескванторная) формула, то $\alpha \in \Gamma$ или $\neg \alpha \in \Gamma$.

Теорема

Пусть Γ - непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула ϕ , хотя бы $\Gamma \cup \{\phi\}$ или $\Gamma \cup \neg\{\phi\}$ - непротиворечиво.

Теорема

Пусть Γ - непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул. Тогда найдется полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ , что $\Gamma \subseteq \Delta$.

7.2) Доказательства существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном И П

Теорема - Если у множества формул M есть модель M' , оно непротиворечиво.

Определение

У множества есть модель, если любая его формула истина в данной модели.

Теорема

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

Определение

Пусть M - полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель M' задаётся так:

1) D - множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных и дополнительная строка "ошибка".

2) $\llbracket f(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = "f(" + \llbracket \theta_1 \rrbracket + ", " + \dots + \llbracket \theta_n \rrbracket + ")"$.

3) $\llbracket P(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = \begin{cases} True & \text{если } "P(" + \llbracket \theta_1 \rrbracket + ", " + \dots + \llbracket \theta_n \rrbracket + ") \in M \\ False & \text{иначе} \end{cases}$

4) $\llbracket x \rrbracket = \text{"ошибка"}$, так как формулы замкнуты.

Лемма

Пусть ϕ - бескванторная формула тогда $M' \models \phi$ тогда и только тогда, когда $\phi \in M$.

Доказательство

Пусть M - непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует M^1 - полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M^1$. По лемме M^1 имеет модель, это модель подойдет для M .

7.3) Теорема Гёделя о полноте И П (27)

Если M - непротиворечивое множество замкнутых формул, то она имеет модель.

Определение

Формула имеет поверхностные кванторы, если соответствует грамматике:

$$\phi ::= \forall x.\phi \mid \exists x.\phi \mid r$$

r - формула без кванторов.

Теорема

Для любых замкнутых формул ψ найдется такая формула ϕ с поверхностными кванторами, что

$$\vdash \psi \rightarrow \phi \text{ and } \vdash \phi \rightarrow \psi$$

Лемма - Если M - непротиворечиво, то каждое множество из M_k - непротиворечиво.

Лемма - Если $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$, и $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, то $M_k \vdash W$.

Определение - $M^* = \cup_k M_k$

Теорема - M^* - непротиворечиво.

Определение

M^b - множество всех бескванторных формул из M^* . По непротиворечивому множеству M можем построить M^b и для него построить модель M' .

Лемма - M' есть модель для M^* .

Теорема Гёделя о полноте И П - И П полно.

7.4) Доказательство полноты И П (28)

- 1) Построим по M , множество формул с поверхностными кванторами M^1 .
- 2) По M^1 построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул M^b ($M^b \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- 3) Дополним его до полного построим для него модель M' (теорема о существовании модели).
- 4) M' будет моделью и для M^1 . ($M^1 \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно для M .

8.1) Машина Тьюринга (29)

Упорядоченная тройка:

- 1) Внешний алфавит. q_1, \dots, q_n .
- 2) Внутренний алфавит (состояния) s_s, \dots, s_f (s_s - начальное s_f - конечное).
- 3) Таблица переходов $\langle k, s \rangle \Rightarrow \langle k', s' \rangle, \Leftarrow \rangle$.

Состояния машины Тьюринга

Упорядоченная тройка.

- 1) Бесконечная лента с символом заполнителем q_e , текст конечной длины.
- 2) Головка над определенным символом.
- 3) Символ состояния - символ внутреннего алфавита.

Язык - множество строк.

Разрешимость языка

Язык L разрешим, если существует машина Тьюринга, которая для любого слова w возвращает ответ "да", если $w \in L$, и "нет", если иначе.

8.2) Задача об остовове, её неразрешимость (30)

Рассмотрим всевозможные описания машин Тьюринга. Составим упорядоченные пары: описание машины Тьюринга и входная строка. Из них выделим язык останавливающихся на данном входе машин Тьюринга.

Теорема - Язык всех останавливающихся машин Тьюринга неразрешим.

8.3) Доказательство неразрешимости И П (31)

Язык всех доказуемых формул И П неразрешим. То есть нет машины Тьюринга, которая бы по любой формуле s определяла, доказуема ли она.

9.1) Порядок теории (0, 1, 2) (32)

Порядок	Кванторы	Формализует суждения о...	Пример
нулевой	запрещены	об отдельных значениях	И.В.
первый	по предметным переменным	о множествах $S = \{t \mid \psi[x := t]\}$	И.П.
второй	по предикатным переменным	о множествах множеств $S = \{\{t \mid P(t)\} \mid \varphi[p := P]\}$	
...			

9.2) Теории первого порядка, структуры и модели (33)

Теорией первого порядка назовем И П с дополнительными "нелогическими" или "математическими".

1) Предикатными функциональными символами.

2) аксиомами.

Сущности взятые из исходного И П, назовем логическими.

Структура

Назовем структурой теории первого порядка такую модель И П, что для всех нелогических функциональных и предикатных символов теории в ней задана оценка.

Модель

Назовём моделью теории первого порядка такую структуру, что все нелогические аксиомы данной теории в ней истинны.

9.3) Аксиоматика Пеано (34)

N соответствует аксиоматике Пеано, если следующее выполнено:

1) Операция "'": $N \rightarrow N$, причем нет $a, b \in N$, что $a \neq b$, но $a' = b'$. Если $x = y'$, то x назовем следующим за y , а y предыдущим за x .

2) Константа $0 \in N$, что $x' = 0$.

3) Индукция. Какова бы не было семейство $P : N \in V$, если $P(0)$ и при любых $x \in N$ из $P(x)$ следует $P(x')$, то при любом $x \in N$ выполнимо $P(x)$.

Теорема

0 - единственен: если t таков, что при лбом y выполнено $y' \neq t$, то $t = 0$.

9.4) Арифметические операции (35)

$1 = 0', 2 = 0'', \dots, 9 = 0''''''''''$.

$$a + b = \begin{cases} a & \text{если } b = 0 \\ (a + c)' & \text{если } b = c' \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & \text{если } b = 0 \\ a \cdot c + a & \text{если } b = c' \end{cases}$$

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{если } b = 0 \\ a^c \cdot a & \text{если } b = c' \end{cases}$$

Теорема $a + b = b + a$.

9.5) Формальная Арифметика (36)

Формальная Арифметика - теория первого порядка, со следующими добавлениями нелогическими.

- 1) Двуместными функциональными символами $(+)$, (\cdot) ; Одноместными функциональными символами $(')$; Нульместными функциональными символами (0) .
- 2) Двуместными предикатными символами $(=)$.
- 3) Восемью нелогическими аксиомами:

$$1) a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$$

$$2) a = b \rightarrow a' = b'$$

$$3) a' = b' \rightarrow a = b$$

$$4) \neg a' = 0$$

$$5) a + 0 = a$$

$$6) a + b' = (a + b)'$$

$$7) a \cdot 0 = 0$$

$$8) a \cdot b' = a \cdot b + a$$

- 4) Нелогической съемой аксиом индукции (с метапеременными x и ψ).

$$\psi[x := 0] \& (\forall x. \psi \rightarrow \psi[x := x']) \rightarrow \psi$$

10.1) Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции (37)

Примитивы (Z, N, U, S).

- 1) Примитив "ноль" (Z) - $Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, Z(x_1) = 0$.
- 2) Примитив "инкремент" (N) - $N : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, N(x_1) = x_1 + 1$.
- 3) Примитив "проекция" (U) - семейство функций: пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n, U_n^k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0, U_n^k(x^{\rightarrow}) = x_k$.
- 4) Примитив "подстановка" (S) - семейство функций; пусть $g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0, f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$.
 $S < g, f_1, \dots, f_k > (x^{\rightarrow}) = g(f_1(x^{\rightarrow}), \dots, f_k(x^{\rightarrow}))$

Примитивная рекурсия (R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Тогда $R < f, g > : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$,

$$R < f, g > (x^{\rightarrow}, y) = \begin{cases} f(x^{\rightarrow}) & \text{если } y = 0 \\ g(x^{\rightarrow}, y-1, R < f, g > (x^{\rightarrow}, y-1)) & \text{если } y > 0 \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции

Все функции, которые могут быть выражены как композиция примитивов $\langle Z, N, U, S, R \rangle$.

Теорема $x + 2$ примитивно-рекурсивна.

Лемма $f(a, b) = a + b$ примитивно-рекурсивна.

Общерекурсивные функции

Функция общерекурсивна если может быть построена при помощи примитивов

$\langle Z, N, U, S, R \rangle$ и примитива минимизации (M)

$M < f > (x_1, \dots, x_n) = \min\{y : f(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$. Если $f(x_1, \dots, x_n, y) > 0$ при любом y , результат неопределен.

Функция Аккурмана

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{если } m = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{если } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

теорема - Функция Аккермана общерекурсивна, но не примитивно-рекурсивна.

Тезис Чёрча

Для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ является общерекурсивной.

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ означает $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$.

Литерал числа

$$\bar{a} = \begin{cases} 0 & \text{если } a = 0 \\ (\bar{b})' & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

10.2) Примитивная рекурсивность арифметических функций, функция вычисления простых чисел, частичного логорифма

$(+)$, (\cdot) , (x^y) , $(:)$, $(\sqrt{})$, (деление с остатком) - примитивно-рекурсивные функции.

Лемма

$p_1 \dots$ - простые числа

$p(i) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $p(i) = p_i$ - примитивно-рекурсивная функция.

$p \log_n k = \max : n^t | k$ - примитивно-рекурсивная функция.

10.3) Выразимость отношений и представимость функций в ΦA

Выразимость отношений в ΦA

Будем говорить, что отношения $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ΦA , если существует формула ρ , что:

1) если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

2) если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg \rho(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

Теорема

Отношение "равно" выразимо в ΦA : $R = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0 \}$.

Представимость функций в ΦA

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в ΦA , если существует формула ϕ , что:

- 1) если $f(a_1, \dots, a_n) = u$, то $\vdash \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{u})$.
- 2) если $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$, то $\vdash \neg \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{u})$.
- 3) $\vdash (\exists x. \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{x})) \& (\forall p. \forall q. \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{p}) \& \phi(\overline{a_1}, \dots, a_n, \overline{q}) \rightarrow p = q)$.

Теорема - любая рекурсивная функция представима в ΦA .

Теорема - любая представимая функция в ΦA рекурсивна.

Теорема - Z, N , и U_n^k , представимы в ΦA .

Теорема

Пусть функции f, g_1, \dots, g_k представимы в ΦA . Тогда $S < f, g_1, \dots, g_k >$ представима в ΦA .

10.4) Характеристические функции (38)

Назовем характеристическим отношением c_f для функции $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ такое отношение $c_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, что $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in c_f$ тогда и только тогда, когда $f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1}$

Лемма

Если функция представима в ΦA , то её характеристическое отношение выразимо в ΦA .

10.5) Представимость примитивов N, Z, S, U в ΦA (39)

Примитивы Z, N, S, U представимы в ΦA .

11.1) Бетта-функция Гёделя (40)

$$\beta(b, c, i) := b \% (1 + (i + 1) \cdot c).$$

Теорема

Бета-функция Гёделя представима в ΦA формулой:

$$\beta(b, c, i, d) := \exists q. (b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

Теорема

Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$.

Китайская теорема об остатках

Если u_0, \dots, u_n - попарно взаимно-просты и $0 \leq a_i < u_i$, то существует такой b , что $a_i = b \% u_i$. Положим, что $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$. Тогда $\text{НОД}(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$. Пусть p - простое число, $u_i : p$ и $u_j : p (i < j)$. Заметим что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c : p$ или $(j - i) : p$. Так как $j - i \leq n$, то $c : (j - i)$, потому, если и $(j - i) : p$, всё равно $c : p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) : p$, отсюда $1 : p$ - что невозможно.
 $0 \leq a_i < u_i$

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b , что

$$a_i = b \% (1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$

11.2) Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в ΦA

Примитив $R < f, g >$ представим в ΦA формулой $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$

$$\exists b. \exists c. (\exists a_0. \beta(b, c, 0, a_0) \& \phi(x_1, \dots, x_n, a_n))$$

$$\& \forall k. k < y \rightarrow \exists d. \exists e. \beta(b, c, k, d) \& \beta(b, c, k', e)$$

$$\& \gamma(x_1, \dots, x_n, k, d, e) \& \beta(b, c, y, a).$$

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ представима в ΦA формулой $\phi(x_1, \dots, x_n, y)$. Тогда примитив $M < f >$ представим в ΦA формулой.

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \phi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \& \forall u. u < y \rightarrow \neg \phi(x_1, \dots, x_n, u, 0).$$

Если f - рекурсивная функция, то она представима в ΦA .

11.3) Гёделева нумерация (41)

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(17	&	0	0, 0	$27 + 6$
5)	19	\forall	(')	0, 1	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	\exists	(+)	0, 2	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	\vdash	(\cdot)	1, 2	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	\neg	$25 + 6 \cdot k$	x_k	(=)	0, 2	$29 + 6 \cdot 9$
13	\rightarrow	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	\vee	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

11.4) Рекурсивность представимых в Φ А функций (42)

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ и f представима в Φ А формулой ϕ , то f - рекурсивна.

Теорема

Существует формула w_1 со свободными переменными x_1 и x_2 такая что:

- 1) $\vdash w_1(\overline{\phi}, \overline{\rho})$, если ρ - гёделев номер доказательства самоприменения ϕ .
- 2) $\vdash \neg w_1(\overline{\phi}, \overline{\rho})$ иначе.

12.1) Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности) и ω - непротиворечивость

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\overline{1}), \vdash \phi(\overline{2}), \dots$ выполнено $\nvdash \exists x. \neg \phi(x)$, то теория ω - непротиворечива.

12.2) Первая теорема о неполноте арифметики (43)

Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\sigma})$.

Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то $\nvdash \neg \sigma(\overline{\sigma})$.

12.3) Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в Форме Россера

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv \exists p. p + \theta_1 = \theta_2 \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \wedge \theta_1 \neq \theta_2$$

Пусть $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

12.4) Неполнота арифметики. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики. Consis

Φ_A с классической моделью неполна.

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof: $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Формулой Consis назовём формулу $\neg \pi(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Теорема

Если Consis доказуем, то Φ_A противоречива.

12.5) Неформальное пояснение метода доказательств (44)

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Φ_A непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\ulcorner \sigma \urcorner, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$. Однако, если формальная арифметика непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$.

13.1) Теория множеств (45)

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двуместным функциональным символом \in , и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

13.2) Определения равенства (46)

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей.

$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$

$A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

13.3) Аксиоматика Цермело-Френкеля

(47)

1) Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.

$$\forall x. \forall y. \forall z. x = y \ \& \ x \in z \rightarrow y \in z.$$

2) Аксиома пустого. Существует пустое множество

$$\emptyset. \exists s. \forall t. \neg t \in s.$$

3) Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. Каковы бы ни были два множества a и b , существует множество, состоящее в точности из них.

$$\forall a. \forall b. \exists s. a \in s \ \& \ b \in s \ \& \ \forall c. c \in s \rightarrow c = a \vee c = b.$$

4) Аксиома объединения: существует $\cup x$. Для любого непустого множества x найдется такое множество, которое состоит в точности из тех элементов, из которых состоят элементы x .

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x.$$

5) Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. Каково бы ни было множество x , существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества x .

$$\forall x. \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow y \subseteq x.$$

) Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x | \varphi(t)\}$. Для любого множества x и любой формулы от одного аргумента $\varphi(y)$ (b не входит свободно в φ), найдется b , в которое входят те и только те элементы из множества x , что $\varphi(y)$ истинно.

$$\forall x. \exists b. \forall y. y \in b \leftrightarrow (y \in x \ \& \ \varphi(y)).$$

Теорема

Для любого множества x существует с множество $\{x\}$, содержащее в точности x .

Теорема - Пустое множество единственно.

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество являющейся их пересечением.

Упорядоченная пара

Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b \rangle$.

Теорема

Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Теорема

$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Инкремент - $x' \equiv x \cup \{x\}$.

13.4) Частичный, линейный, полный порядок (48)

Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).

Линейный: частичный + $\forall a, \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

13.5) Ординальные числа аксиома бесконечности (49)

Аксиома бесконечности - Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$.

Транзитивные множества - элемент его элемента, его элемент.

Ординал - вполне упорядоченное отношением (\in), транзитивное множество.

Предельный ординал - такой x , что $x \neq \emptyset$ и нет $y : y' = x$.

Ординальные числа

$\bar{1} = \emptyset$.

$\bar{2} = \emptyset' = \{\emptyset\}$.

$\bar{3} = \{\emptyset\}' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

....

13.6) Конечные ординалы (50)

Конечный ординал - если меньше любого предельного.

Теорема - x, y - ординалы, то $x \in y$ или $y \in x$.

13.7) Существования ординала ω (51)

ω - наименьший предельный ординал.

Теорема - ω существует.

$\sup x$ - наименьший ординал, содержащий $x : x \subseteq \sup x$.

13.8) Операции над ординалами (52)

$$\begin{aligned}
 a + b &= \begin{cases} a & \text{если } b = 0 \\ (a + c)' & \text{если } b = c' \\ \sup\{a + c \mid c < b\} & \text{если } b \text{ предельный ординал} \end{cases} \\
 a \cdot b &= \begin{cases} 0 & \text{если } b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a' & \text{если } b \equiv c' \\ \sup\{a \cdot c \mid c < b\} & \text{если } b \text{ предельный ординал} \end{cases} \\
 a^b &= \begin{cases} 1 & \text{если } b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a & \text{если } b \equiv c' \\ \sup\{a^c \mid c < b\} & \text{если } b \text{ предельный ординал} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Дизъюнктое множество - множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

Прямое произведение дизъюнктного множества

Прямое произведение дизъюнктного множества a - множество $\times a$ всех таких множеств b , что:

- 1) b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе.
- 2) b содержит элементы только из $\cup a$.

14.1) Кардинальные числа (53)

t - ординал x : для всех $y \in x : |y| \neq |x|$ ординальное число y которого нет меньшего его равномощного.

$|a| = |b|$, если существует биекция $a \rightarrow b$.

$|a| \leq |b|$, если существует инъекция $a \rightarrow b$.

Кардинальное число - множество всех равномощных ординальных чисел.

14.2) Мощность множества (54)

Мощность множества $|x|$ - такое кардинальное число t , что $|t| = |x|$.

$|x| < |y|$, если $|x| \leq |y|$ & $|x| \neq |y|$.

14.3) Теорема Кантора-Бернштейна (55)

Если $|x| \leq |y|$ & $|y| \leq |x|$, то $|x| = |y|$.

14.4) Теорема Кантора (56)

Если x - некоторое множество, то $|X| < |P(x)|$

14.5) Аксиома выбора (57)

- 1) На любом семействе непустых множеств $\{A_s\}_{s \in S}$ можно определить функцию $f : S \rightarrow \cup_s A_s$, которая по множеству возвращает его элемент.
- 2) Любое множество можно вполне упорядочить.
- 3) Для любых сюръективной функции $f : A \rightarrow B$, найдется частично обратная $g : B \rightarrow A$, $g(f(x)) = x$.

14.6) Теорема Диаконеску (58)

Рассмотрим аксиоматику Цермело Френкеля поверх И И П, если добавим аксиому выбора $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$.

15.1) Теорема Лёвенгейма-Сколема (59)

Номер вещественного числа

Номер вещественного числа - первое упоминание в литературе $\langle j, y, n, p, r, c \rangle$

j - гёделев номер;
 y - год издания;
 n - номер;
 p - страница;
 r - страна;
 c - позиция;

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$, для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать, мощность D .

Пусть задана формальная теория с аксиомами a_n . Её мощность - мощность множества $\{a_n\}$.

$M' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ - элементарная подмодель

$M = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

- 1) $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n - сужение F_n, P_n (замкнутая на D').
- 2) $M' \models \phi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $M \models \phi(x_1, \dots, x_n)$, при $x_i \in D'$.

Теорема

Пусть T - множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M' . Тогда найдется элементарная подмодель M'' , причем $|M''| = \max(\aleph_0, |T|)$.

15.2) Парадокс Сколема (60)

1) Как известно $\mathbb{R} = |P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако ZFC-счетно-аксиматизируемая теория. Значит, существует счетная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чем ошибка?

2) У равенств разный смысл, первое - в предметном языке, второе - в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.

16.1) Система S_∞ (61)

1) Язык: связки \neg, \vee, \forall ; нелогические символы: $(+), (\cdot), ('), 0, (=)$.

2) Аксиомы: все истинные формулы вида $\theta_1 = \theta_2$; все истинные отрицания формул вида $\neg\theta_1 = \theta_2$ (θ_i — термы без переменных).

3) Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

и ещё два правила ...

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \overline{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \quad \neg\alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:

α — текущая формула

Число связок в $\neg\alpha$ — степень сечения.

Дерево доказательства

- 1) Доказательства образуют деревья.
- 2) Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
- 3) Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).
- 4) Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).

Теорема - Если $\vdash_{\text{фа}} \alpha$, то $\vdash_{\infty} |\alpha|_{\infty}$.

Теорема - Если $\Phi.A.$ противоречива, то противоречива и S_{∞} .

Обратимость правил Теорема

Если формула α доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции - то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы α доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.

Устранение сечений Теорема

Если α имеет вывод степени $m > 0$ порядка t , то можно найти вывод степени строго меньшей m с порядком 2^t .

Итерационная экспонента

$$(a \uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a \uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

Теорема

Если $\vdash_{\infty} \sigma$ степени m порядка t , то найдётся доказательство без сечений порядка $(2 \uparrow)^m(t)$

16.2) Доказательство непротиворечивости Φ А (62)

Два вида индукции

- 1) (Принцип математической индукции) Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.
- 2) (Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t. x < t \rightarrow \psi(t)) \rightarrow \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема - Принципы математической индукции эквивалентны.

Теорема

Принцип трансфинитной индукции. Если для $\varphi(x)$ - некоторого утверждения теории множеств — выполнено:

$$1) \varphi(\emptyset)$$

$$2) \text{ Если } \forall u. u \in v \rightarrow \varphi(u), \text{ то } \varphi(v) \text{ (где } v \text{ — это ординал)}$$

то $\forall u. \varphi(u)$.

Лемма

Свойство индукции выполнено для натуральных чисел: если $\varphi(0)$ и $\forall x \in \mathbb{N}_0. f(x) \rightarrow f(x')$, то $\forall x \in \mathbb{N}_0. f(x)$.

Теорема - Система S_∞ непротиворечива ($\Rightarrow \Phi$ А непротиворечива).