ДЗ # 1

Глава 1; §2; № 51

Выяснить, является ли функция

$$u = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & \text{если } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

а) непрерывной по x

б) непрерывной по y

с) непрерывной

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1) Непр. по x:

$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow y_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0} (x, y_0) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = u(0; y_0) \Leftrightarrow$ непр.

по x в $(0;0)$

2) Непр по y:

$x_0 = 0$

$\lim\limits_{y \to 0} u(x_0; y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = u(x_0; 0) \Leftrightarrow$ непр по y

в $(0;0)$

3) Непрерывность:

$\exists\ y = kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}} \frac{xk\cancel{x}}{x^2+(kx)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} =$$

$= \dfrac{k}{1+k^2}$ - зависит от $k \Leftrightarrow$ не непр в $(0;0)$

Глава 1; §3; №14

Найти точки, в которых дифференциал функций f равен нулю если:

а) $f(x;y) = (5x + 7y - 25)\, e^{-(x^2+xy+y^2)}$

б) $f(x;y;z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$

а) $f(x,y) = (5x + 7y - 25)\, e^{-(x^2+xy+y^2)}$

$$\begin{cases} e^{-(x^2+xy+y^2)}\left(-10x^2 + x(50-19y) - 7y^2 + 25y + 5\right) = 0 \\ e^{-(x^2+xy+y^2)}\left(-5x^2 + x(25-17y) - 14y^2 + 50y + 7\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x^2 + x(50-19y) - 7y^2 + 25y + 5 = 0 \\ -5x^2 + x(25-17y) - 14y^2 + 50y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1;\ -\frac{1}{26} \\ y = 3;\ -\frac{3}{26} \end{cases}$$

б) $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$

$$\begin{cases} 4 - y^2 = 0 \\ -2(x-2)y - z = 0 \\ 2z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4};\ \frac{7}{4} \\ y = 2;\ -2 \\ z = 1;\ -1 \end{cases}$$

Глава 1; §3; №16

Найти дифференциал функции $f(x;y;z)$, если:

а) $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; б) $f=e^{xy\sin z}$;

в) $f=(xy)^z$; г) $= x^{y/z}$

в) $f=(xy)^z=e^{z\ln(xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{z\ln(xy)}z\frac{1}{xy}y=(xy)^z\frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(xy)^z\frac{z}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=e^{z\ln(xy)}\ln(xy)$$

$$df=(xy)^z\left(\frac{z}{x}dx+\frac{z}{y}dy+\ln(xy)dz\right)$$

г) $f=x^{y/z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{y/z\ln x}\,y/z\,\frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^{y/z}\frac{\ln x}{z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^{y/z}y\ln x\left(-\frac{1}{z^2}\right) \qquad df=x^{y/z}\cdot\frac{1}{z}\left(y/x\,dx+\ln x\,dy-\frac{y\ln x}{z}\right.$$

а) $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$df = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

б) $f = e^{xy\sin z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy\sin z}\, y\sin z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy\sin z}\, x\sin z$$

$$df = e^{xy\sin z}(y\sin z\,dx + x\sin z\,dy + xy\cos z\,dz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy\sin z}\, xy\cos z$$

Глава 1; §4; N 21

Найти $d^3 f$, если:

а) $f = x^2y$; б) $f = x^3+y^3+3xy(y-x)$; в) $f = \sin(x^2+y^2)$

г) $f = xyz$

а) $f = x^2y$; $df = 2xy\,dx + x^2dy$;

$d^2f = 2y\,d^2x + 2x\,dy\,d^2x + 2x\,dx\,dy = 2y\,d^2x + 4x\,dx\,dy$

$d^3f = 4d^2x\,dy + 2d^2x\,dy = 6d^2x\,dy$

г) $f = xyz$; $df = dx\,yz + x\,dy\,z + xy\,dz$

$d^2f = dx\,dy\,z + dx\,y\,dz + dy\,dx\,z + x\,dy\,dz + dx\,y\,dz + x\,dy\,dz$

$d^3f = 6\,dx\,dy\,dz$

б) $f = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y$

$df = (3x^2 + 3y^2 - 6xy)dx + (3y^2 + 6xy - 3x^2)dy$

$\frac{\partial(df)}{\partial x} = (6x - 6y)dx + (6y - 6x)dy$

$\frac{\partial(df)}{\partial y} = (6y - 6x)dx + (6y + 6x)dy$

$d^2f = (6x - 6y)dx^2 + \underline{(6y - 6x)dxdy} + \underline{(6y - 6x)dxdy} + (6y + 6x)dy^2$

$\frac{\partial(d^2f)}{\partial x} = 6dx^2 - 12dxdy + 6dy^2$

$\frac{\partial(d^2f)}{\partial y} = -6dx^2 + 12dxdy + 6dy^2$

$d^3f = 6(dx^3 + dy^3 + 3dxdy(dy - dx))$

в) $f = \sin(x^2 + y^2)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2)2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 + y^2)2y$

$df = \cos(x^2 + y^2)2xdx + \cos(x^2 + y^2)2ydy$

$\frac{\partial(df)}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2)2dx - \sin(x^2 + y^2)4x^2dx - \sin(x^2 + y^2)4xydy$

$\frac{\partial(df)}{\partial y} = 2\cos(x^2 + y^2)dy - \sin(x^2 + y^2)4y^2dy - \sin(x^2 + y^2)2xydx$

$d^2f = \cancel{\cos(x^2+y} \frac{\partial(df)}{\partial x} + \frac{\partial(df)}{\partial y} = -8xy\sin(x^2 + y^2)dydx \ \cos(x^2+y^2)(dx^2 + dy^2)$

$(d^2f)'_x = -2\sin(x^2 + y^2)2x(dx^2 + dy^2) - 8x\sin(x^2 + y^2)dx^2 - 4x^2\cos(x^2 + y^2)2xdx^2$
$-8y\sin(x^2 + y^2)dxdy - 8xy\cos(x^2 + y^2)2xdxdy - 8y^2\cos(x^2 + y^2)xdy$

$(d^2f)'_y = -2\sin(x^2 + y^2)2y(dx^2 + dy^2) - 4x^2\cos(x^2 + y^2)2ydx^2 - 8x\sin(x^2 + y^2)dxdy$
$-8xy\cos(x^2 + y^2)2ydxdy - 8y\sin(x^2 + y^2)dy^2 - 4y^2\cos(x^2 + y^2)2ydy^2$

$d^3x = (x^3dx^3 + 2x^2ydx^2dy + y^2xdy^2dx + x^2ydx^2dy + 2xy^2dxdy^2 + y^3dy^3) =$
$= (xdx + ydy)^3$

-

Глава 1; § 2; № 29

Найти ~~$f(x;y) = \varphi(xy) + \psi(y/x)$~~

$f(x;y) = \varphi(x) + \psi(y+e^x)$, если $f(0;y) = y^2$

$f(x;-e^x) = x^2+1$

$$\begin{cases} \varphi(0) + \psi(y+1) = y^2 \\ \varphi(x) + \psi(0) = x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi(y+1) = y^2 - \varphi(0) \\ \varphi(x) = x^2 - \psi(0) + 1 \end{cases}$$

$\psi(y) = (y-1)^2 - \varphi(0)$ $\quad \psi(y+e^x) = (y+e^x-1)^2 - \varphi(0)$

$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y+e^x) = x^2+1+(y+e^x-1)^2 - (\varphi(0)+$

$+\psi(0)) = [f(0,-1) = \varphi(0)+\psi(0) = 1] =$

$= \varphi(x) + \psi(y+e^x) = x^2 + (y+e^x-1)^2$

Глава 1; § 4; № 31

Доказать, что функция $u = \frac{C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}}{r}$,

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, k, C_1, C_2 - постоянные, удовлетворяет уравнению ~~Гальмь~~ Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u$$

$u = \frac{C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, k, C_1, C_1 - const

$$u'_x = \frac{1}{r}(C_2 e^{kr} \cdot kr'_x - C_1 e^{-kr} \cdot kr'_x) - \frac{r'_x}{r^2}(C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr})$$

$$= \frac{kr'_x}{r}(C_2 e^{kr} - C_1 e^{-kr}) - \frac{r'_x}{r^2}(C_2 e^{kr} + C_1 e^{-kr})$$

$$u''_{xx} = \frac{kr'_x}{r} = \frac{kr'_x}{r}(C_2 e^{kr} \cdot kr'_x + C_1 e^{-kr} \cdot kr'_x) + \frac{kr''_{xx} r - kr'^2_x}{r^2}$$
$$(C_2 e^{kr} - C_1 e^{-kr}) - \frac{r'_x}{r^2}(C_2 e^{kr} \cdot kr'_x - C_1 e^{kr} \cdot kr'_x) + \frac{r''_{xx} \cdot r^2 - 2 r'_x r}{r^4}$$
$$(C_2 e^{kr} + C_1 e^{-kr}) = \left(\frac{k^2 r'^2_x}{r} + \frac{r''_{xx} \cdot r - 2 r'^2_x}{r^3}\right)(C_2 e^{kr} + C_1 e^{-kr}) +$$
$$+ \frac{kr''_{xx} \cdot r - kr'^2_x - kr'^2_x}{r^2}(C_2 e^{kr} - C_1 e^{-kr});$$ u''_{yy} и u''_{zz} ан.

$r'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $r''_{xx} = \frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$;

$r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z = 1$ $\quad r''_{xx} + r''_{yy} + r''_{zz} = \frac{2}{r}$

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \left(\frac{k^2(r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z)}{r} + \frac{(r''_{xx} + r''_{yy} + r''_{zz})\,r - 2(r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z)}{r^3} \right)\left(C_2 e^{kr} + C_1 e^{kr}\right) + \frac{kr(r''_{xx} + r''_{yy} + r''_{zz}) - 2k(r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z)}{r^2}\left(C_2 e^{kr} - C_1 e^{-kr}\right) =$$

$$= \left(\frac{k^2}{r} + \frac{2-2}{r^3} \right)\left(C_2 e^{kr} + C_1 e^{-kr}\right) + \frac{2k-2k}{r^2}\left(C_2 e^{kr} - C_1 e^{-kr}\right) =$$

$$= \frac{k^2}{2}\left(C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}\right)$$