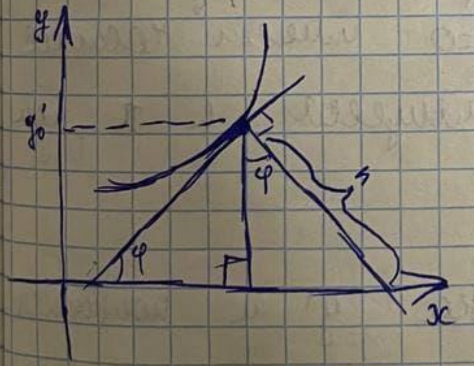
Дз # 5

5.1 Найти кривые, у которых в любой точке радиус кривизны вдвое больше отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс. Рассмотреть два случая:

а) кривая обращена выпуклостью к оси абсцисс;

б) вогнутостью к оси абсцисс.



$$R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

$$n = \frac{y_0}{\cos\varphi} \qquad y_0' = \operatorname{tg}\varphi$$

$$n = \frac{y_0}{\sqrt{\frac{1}{(y')^2+1}}} = y_0\sqrt{(y_0')^2+1}$$

а) $$\frac{(1+(y_0')^2)^{3/2}}{y_0''} = 2y_0\sqrt{(y_0')^2+1} \qquad 2y_0y_0'' = 1+(y_0')^2,$$

$$y_0' = z;\ y_0'' = z'z \qquad 2y_0 z z' = 1+z^2 \qquad \int\frac{z}{1+z^2}dz = \int\frac{dy_0}{2y_0}$$

$$\ln|y_0| = \ln(z^2+1)+C$$

б) $-2y_0 y_0'' = 1 + (y_0')^2$, $y_0' = z$, $y_0'' = z z'$

$$\int \frac{z}{1+z^2} dz = -\int \frac{dy_0}{2y_0} \qquad \ln|y_0| = -\ln(z^2+1) + C$$

5.2) Доказать, что уравнение движений маятника $y'' + \sin y = 0$ имеет частное решение $y(x)$, стремящееся к π, при $x \to +\infty$

Умножив обе части на y' и проинтегрировав, получим:

$$y'^2 = 2C_1 + 2\cos y$$

Подберем такое решение, что $y'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, имея что $y(x) \to \pi$ при $x \to +\infty$, получаем что $C = 1$: Тогда интегрируя

$$\pm\int\frac{dy}{\sqrt{c_1(1+\cos y)}}=x+C_2$$

очевидно, что соотношение

$$\frac{1}{2}\int_0^y\frac{dt}{\cos\frac{t}{2}}=x+\ln C_2 \quad (0<y<\pi)$$

также есть частное решение данного уравнения. Выполнив интегрирование левой части, получим

$$\ln(\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi+y))=x+\ln C_2 \Leftrightarrow y=\operatorname{arctg}(C_2e^{x})-\pi$$

$C>0$, очевидно что $y(x)\to\pi$, при $x\to+\infty$

5.3) $xy''=y'+x\sin\left(\frac{y'}{x}\right)$

$y'=z$, $y''=z'$

$x\cdot z'=z+x\cdot\sin\left(\frac{z}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z'=\frac{z}{x}+\sin\frac{z}{x}$

$\frac{z}{x}=t \quad z'=t+x\cdot t' \quad t+xt'=t+\sin t$

$\Leftrightarrow \cancel{t+}x\frac{dt}{dx}=\cancel{t+}\sin t \quad \Leftrightarrow \frac{dt}{\sin t}=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{dx}{x} \quad \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|=\ln|x|+C$

$tg\frac{t}{2} = c \cdot x \iff \frac{t}{2} = arctg\, cx \iff$

$\iff \frac{z}{x} = 2arctg\, cx \qquad y' = 2x\, arctg\, cx$

$dy = 2x\, arctg\, cx\, dx \iff \int dy = \int 2x\, arctg\, cx\, dx$

$\int 2x\, arctg\, cx\, dx = x^2 arctg\, cx - \frac{1}{c}\int \frac{c^2x^2}{1+c^2x^2}dx$

$= x^2 arctg\, cx - \frac{1}{c}\int dx + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{1+c^2x^2} = x^2 arctg\, cx - \frac{x}{c} + \frac{1}{c^2} arctg\, cx$

Ответ: $y = x^2 arctg\, cx - \frac{x^2}{2c} + \frac{arctg\, cx}{c^2} + C_1$

5.4) $x^2yy'' = (y - xy')^2$

$u = \frac{y'}{y} \qquad y' = uy$

$y'' = u'y + u^2y$

$x^2y(u'y + u^2y) = (y - uxy)^2$ (потеряно решение $y=0$

$\frac{x^2(u'y + u^2y)}{y} = \frac{(y - uxy)^2}{y^2} \qquad \left(u'(x) = \frac{du}{dx}\right)$

$\frac{x^2\left(\frac{y\,du}{dx} + u^2y\right)}{y} = \frac{(y - uxy)^2}{y^2}$

Приведение к однородному заменой $u = z^{\lambda}$

найдем λ подставив $x = z$, $u = z^{\lambda}$ и приравняв

степени z

$$\frac{z^2(yz^{\lambda}+\lambda y z^{\lambda-1})}{y} = \frac{(y-yz^{\lambda+1})^2}{y^2}$$

$$0 = \lambda+1 = \lambda+1 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$u = \frac{1}{z} \qquad du = -\frac{dz}{z^2}$$

$$-\frac{x^2 dz}{z^2 dx} = 1 - \frac{2x}{z} \Leftrightarrow -\frac{x^2 dz}{z^2} = \left(1 - \frac{2x}{z}\right)dx$$

$$v = \frac{z}{x} \qquad z = vx \qquad dz = v\,dx + x\,dv$$

$$-\frac{v\,dx + x\,dv}{v^2} = \left(1 - \frac{2}{v}\right)dx \Leftrightarrow -\frac{x\,dv}{v^2} = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dx$$

$$\frac{dv}{v^2 - v} = -\frac{dx}{x}$$ (потеряно решение $u = \frac{1}{x}$)

$$\int \frac{1}{v^2-v}\,dv = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln(v-1) - \ln(v) = C_1 = \ln(x) \Leftrightarrow \frac{v-1}{v} = \frac{e^{C_1}}{x}$$

$\left|v = \frac{z}{x} \quad z = \frac{1}{u}\right|$ обратная замена $u = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$, $y = 0$

$u = \frac{1}{x}$; при $C_1 = 0$ $\left|u = \frac{y'}{y}\right|$ обратная замена

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 y' = xy + C_1 y \qquad y' = \frac{(x+C_1)y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+C_1)y}{x^2} \Leftrightarrow dy = \frac{(x+C_1)y\,dx}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx$$

$$\ln(y) = \ln(x) - \frac{C_1}{x} + C_2$$

Ответ: $y = xe^{C_2 - \frac{C_1}{x}}$; $y = 0$, при $C_1 = \infty$

5,5) $x^3y'' = (y-xy')(y-xy'-x)$

$$x^3y'' = (y-xy')^2 - x(y-xy')$$

$$x = kx \quad y' = k^{m-1}y' \quad y = k^m y \quad y'' = k^{m-2}y''$$

$$x^3 \cdot k^{m-2}y'' = (k^m y - kxk^{m-1}y')(k^m y - kxk^{m-1}y' - kx)$$

$$x^3k^{m-2}y'' = (k^m y - k^m xy')^2 - kx(k^m y - k^m xy')$$

$$k^3x^3k^{m-2}y'' = k^{2m}(y-xy')^2 - k^{m+1}x(y-xy')$$

$$2m = m+1 \Leftrightarrow m = 1$$

При $x > 0$ $\begin{cases} x = e^t \\ y = ze^t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{z'e^t + ze^t}{e^t} = z' + z$$

$y''_{xx} = \frac{z''+z'}{e^t}$

$\frac{e^{3t}(z''+z')}{e^t} = (ze^t - e^t(z'+z))^2 - e^t(ze^t - e^t(z'+z))$

$e^{2t}(z''+z') = z^2e^{2t} - 2ze^{2t}(z'+z) + e^{2t}(z'+z)^2 - e^{2t}\cdot z + e^{2t}(z'+z)$

$z''+z' = z^2 - 2z(z'+z) + (z'+z)^2 - \cancel{z} + z' + \cancel{z}$

$z''+\cancel{z'} = \cancel{z^2} - \cancel{2zz'} - \cancel{2z^2} + z'^2 + \cancel{2zz'} + \cancel{z^2} + \cancel{z'}$

$z'' = z'^2 \iff z' = u \iff z'' = u' \quad u' = u^2 \quad \frac{du}{dt} = u^2$

$\frac{du}{u^2} = dt \quad \int\frac{du}{u^2} = \int dt \iff -\frac{1}{u} = t + C_1 \Rightarrow u = -\frac{1}{t+C_1}$

$z' = -\frac{1}{t+C_1} \quad z = -\ln|t+C_1| + C_2 \quad y = (-\ln|t+C_1|)e^t = -x\ln|\ln x + C_1| + C_2 x$

$z' = 0 \Rightarrow z = C \Rightarrow y = Cx$

5.6) $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$

$x = kx \quad y = k^m y \quad y' = k^{m-1}y \quad y'' = k^{m-2}y''$

$k^2x^2(2k^m y k^{m-2}y'' - k^{2(m-1)}y'^2) = 1 - 2kxk^m y k^{m-1}y'$

$2 + m + m - 2 = 2 + 2m - 2 = 0 = 1 + m + m - 1 \iff 2m = 0 \quad m = 0$

$\begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \end{cases}$

$y'_x = \frac{z'}{e^t} = z'e^{-t}$

$y''_{xx} = \frac{z''e^{-t} - e^{-t}z'}{e^t} = \frac{e^{-t}(z''-z')}{e^t} = e^{-2t}(z''-z')$

$e^{2t}(2ze^{-2t}(z''-z')-z'^2e^{-2t})=1-2e^tzz'e^{-t}$

$2z(z''-z')=z'^2=1-2zz'$

$2zz''-2zz'-z'^2=1-2zz'$

$-z'^2+2zz''-1=0$

$z'=p(z)$

$z''=pp'$ $\quad -p^2+2zpp'-1=0$ $\quad 2zpp'=1+p^2$

$\frac{2zp\,dp}{dz}=1+p^2$ $\quad \frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{dz}{2z}$

$\int\frac{p\,dp}{1+p^2}=\int\frac{d(1+p^2)}{2(1+p^2)}=\frac{1}{2}\ln(p^2+1)$

$\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=\frac{1}{2}\ln|z|+C^*$

$\ln(p^2+1)=\ln|z|+\ln|C|$ $\quad p^2+1=Cz$ $\quad p^2=Cz-1$

$p=\pm\sqrt{Cz-1}$ $\iff$ $z'=\pm\sqrt{Cz-1}$

$\frac{dz}{\sqrt{Cz-1}}=\pm dt$ $\iff$ $\int\frac{dz}{\sqrt{Cz-1}}=\int dt$ $\iff$ $\frac{2\sqrt{Cz-1}}{C}=\pm t+C_1$

$\sqrt{Cz-1}=\frac{C(\pm t+C_1)}{2}=\frac{\pm C(t\pm C_1)}{2}$

$Cz-1=\frac{C^2(t\pm C_1)^2}{4}=\frac{C^2(t+C_2)^2}{4}$

$z=\frac{1}{C}+\frac{C^2(t+C_2)^2}{C4}=\frac{1}{C}+\frac{C(t+C_2)^2}{4}$

$y=\frac{1}{C}+\frac{C(\ln(x)+C_2)^2}{4}$

5.7) $y''^2 - yy''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$

4

$z = \frac{y'}{y}$, $y' = zy$, $y'' = z'y + zy' = t'y + t^2 y$

$y''' = t''y + t'y' + 2tyt' + t^2 y' = t''y + t'ty + 2tyt' + t^3 y$

$y^2(t' + t^2)^2 - y^2(t'' + 3tt' + t^3) = \frac{t^2y^2}{x^2}$ $\underline{y = 0}$

$t'^2 + 2t't^2 + t^4 - t'' - 3tt' - t^3 = \frac{t^2y^2}{x^2}$

5.8) $x(y''+y'^2) = y'^2 + y'$

$y' = u$

$(u'+u^2)x = u^2 + u \qquad u'(x) = \frac{du}{dx}$

$x\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) = u^2+u \Leftrightarrow u^2 x\,dx + x\,du = (u^2+u)dx$

$\Leftrightarrow x\,du = (-u^2x + u^2+u)dx \Leftrightarrow x\,du - (-u^2x + u^2+u)dx = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{u} - 1\right)dx + \frac{x\,du}{u^2} = 0$ (потеряли решение $u=0$)

Выделяем полный дифференциал

$d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(-\frac{x}{u}\right) + d(-x) = 0$

$\frac{u\,dx - x\,du}{u^2} = d\left(\frac{x}{u}\right)$, $a\,dx = d(ax)$ $x^a dx = d\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)$

интегрируем обе части уравнения

$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{u} - x = C_1 \Leftrightarrow u = \frac{2x}{x^2-2x+C_1}$

$u=0$, при $C_1 = \infty$

$|u = y'|$ (обратная замена) $y' = \frac{2x}{x^2-2x+C_1}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-2x+C_1} \Leftrightarrow dy = \frac{2x\,dx}{x^2-2x+C_1} \Leftrightarrow$

$\int dy = \int \frac{2x\,dx}{x^2-2x+C_1} \Rightarrow$ Ответ: $y = \ln(x^2-2x+C_1) + \frac{2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{C_1-1}}\right)}{\sqrt{C_1-1}} + C_1$

5.9) $y''^4 = y'^5 - yy'^3 y''$

$\left| y' = u \quad y'' = uu' \right| \Leftrightarrow u^4 u'^4 = u^5 - u^4 u' y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u'^4 = u - u' y$ (потеряно решение $u = 0$

уравнение неразрешенное относительно производной

$F(y, u, u') = 0$

Метод введения параметра для $u = f(y, u')$

$p = u'$, $\Rightarrow$ $p = u' = \frac{du}{dy}$ $\Rightarrow du = p\,dy$

$u = py + p^4 \Leftrightarrow du = p\,dy + y\,dp + 4p^3 dp$ $|du = p\,dy|$

$p\,dy = p\,dy + y\,dp + 4p^3 dp \Leftrightarrow 0 = y\,dp + 4p^3 dp \Leftrightarrow 0 = dp$

$\int 1\,dp = \int 0\,dy \Leftrightarrow p = C_1$

Выразим параметр p из $p = C_1$. Подставляем p в $u = py + p^4 \Rightarrow u = C_1 y + C_1^4$; $u = 0$

$(u = y')$ (обратная замена) $y' = C_1 y + C_1^4$ $\left| y'(x) = \frac{dy}{dx} \right|$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y + C_1^4 \Leftrightarrow dy = (C_1 y + C_1^4)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{C_1 y + C_1^4} = dx$

$\int \frac{dy}{C_1 y + C_1^4} = \int dx \Leftrightarrow \frac{\ln(y + C_1^3)}{C_1} = x + C_2 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(y + C_1^3)}{C_1}} = e^{x + C_2}$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = C_2 e^{x/C_1} - C_1^3$ $y = -C_1^3$, при $C_2 = 0$