Задание 1

Вариант A

Заданы вещественные числа m и d. Приведите пример случайной величины с математическим ожиданием m и дисперсией d, принимающей четыре различных значения.

Вариант B

Заданы вещественные числа m и d. Приведите пример случайной величины с математическим ожиданием m и дисперсией d, принимающей три различных значения.

Вариант C

Задано вещественное число d. Приведите пример случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией d, принимающей бесконечное число различных значений.

Вариант D

Приведите пример двух случайных величин с разным распределением, которые принимают с ненулевой вероятностью одинаковое конечное число различных значений, имеют одинаковые математическое ожидание и дисперсию.

Задание 2

Вариант E

Докажите, что для любого вещественного числа c и целого k, где $2 \leq k$ и $0 < c \leq \log_2 k$, существует случайный источник с k исходами, энтропия которого равна c.

Вариант F

Докажите, что для любого вещественного c, $c > 1$, существует строго положительная случайная величина ξ и число a, $a > 0$, для которых оценка из неравенства Маркова может быть усилена хотя бы в c раз: $P(\xi > aE\xi) < 1/ca$.

Вариант G

Докажите, что если дисперсия случайной величины равна 0, то эта случайная величина равна некоторой константе.

Вариант H

Докажите, что если случайная величина с ненулевой вероятностью принимает значение, равное своему математическому ожиданию, то она не может принимать ровно два различных значения.

Задание 3

Вариант I

Пять человек стоят в углах правильного пятиугольника и бросают друг другу две тарелки для фризби. Исходно тарелки находятся у двух соседних игроков. Каждую секунду происходит ход: каждый игрок, у которого сейчас тарелка, выбирает случайно равновероятно одного из двух своих соседей и бросает ему тарелку.

Игра заканчивается, когда одному и тому же игроку бросают тарелку оба соседа.

а) Докажите, что игра закончится с вероятностью 1.

б) Найдите математическое ожидание числа ходов до окончания игры.

Вариант J

Пять человек стоят в углах правильного пятиугольника и бросают друг другу две тарелки для фризби. Исходно тарелки находятся у двух соседних игроков. Каждую секунду происходит ход. Если тарелки у разных игроков, то каждый из игроков, у которых сейчас тарелки, выбирает случайно равновероятно одного из двух своих соседей и бросает ему тарелку. Если обе тарелки у одного игрока, он бросает их двум своим соседям.

Игра заканчивается, когда два человека пытаются одновременно бросить тарелку друг другу.

а) Докажите, что игра закончится с вероятностью 1.

б) Найдите математическое ожидание числа бросков до окончания игры.

Вариант K

Четыре человек стоят в углах правильного четырехугольника и бросают друг другу тарелку для фризби. Исходно тарелка находятся у одного из игроков. Каждую секунды игрок, у которого сейчас тарелка, выбирает случайно равновероятно одного из двух своих соседей и бросает ему тарелку. Игра заканчивается, когда каждый человек бросил тарелку хотя бы по одному разу.

а) Докажите, что игра закончится с вероятностью 1.

б) Найдите математическое ожидание числа бросков до окончания игры.

Задание 4

Рассмотрим двоичное сбалансированное дерево глубины $2n$, оно содержит 2^{2n} листьев.

Будем говорить, что вершина лежит на четном уровне, если расстояние от нее до ближайшего листа четно, и на нечетном — в противоположном случае. В частности, корень дерева находится на четном уровне (расстояние от него до любого листа равно $2n$).

Пусть каждый из листьев раскрашен в черный либо в белый цвет. Определим раскраску остальных вершин дерева следующим образом. Для вершин нечетного уровня: если оба ребенка вершины покрашены в черный цвет, то вершина покрашена в черный цвет, иначе — в белый. Для вершин четного уровня: если оба ребенка вершины покрашены в белый цвет, то вершина покрашена в белый цвет, иначе — в черный.

За $O(1)$ можно определить цвет любого листа. Требуется определить цвет корня.

Вариант L

Рассмотрим вероятностный алгоритм определения цвета корня: обойдем дерево в глубину, будем каждый раз случайно равновероятно определять, в какого ребенка сначала пойти. На нечетном уровне, если мы выяснили цвет одного из детей и он белый, то сразу возвращаем информацию, что вершина покрашена в белый цвет, не запускаясь от второго ребенка. Аналогично поступаем в случае обнаружения черного сына на четном уровне.

Докажите, что математическое ожидание времени работы этого алгоритма на любом входе есть $O(3^n)$.

Вариант M

Рассмотрим следующий алгоритм определения цвета корня: обойдем дерево в глубину, будем каждый раз сначала запускаться от левого сына, затем от правого. На нечетном уровне, если мы выяснили цвет одного из детей и он белый, то сразу возвращаем информацию, что вершина покрашена в белый цвет, не запускаясь от второго ребенка. Аналогично поступаем в случае обнаружения черного сына на четном уровне.

Докажите, что математическое ожидание времени работы этого алгоритма на случайной равновероятной раскраске листьев дерева есть $O(3^n)$.