Вариант II

2) Вычислить $\int_1^{e^{\pi}} \frac{\cos(\ln(x))}{x^2} dx$

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{\cos \ln(x)}{x^2} dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Подставляем} \quad u = \ln(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \\ dx = x \cdot du \text{, используем } \frac{1}{x} = e^{-u} \end{matrix} \right] =$$

$$= \int_1^{e^{\pi}} e^{-u} \cos(u)\, du \left[\begin{matrix} \text{используем дважды} \\ \text{интегрирования по частям} \\ \int f g' = f g - \int f' g \end{matrix} \right]$$

$$= \left[\begin{matrix} 1) \; f = \cos(u) & g' = e^{-u} \\ f' = (-\sin(u)) & g = -e^{-u} \end{matrix} \right] = -\int_1^{e^{\pi}} e^{-u} \sin(u)\, du - e^{-u}\cos(u)$$

$$= \left[\begin{matrix} 2) \; f = (-\sin(u)) & g' = -e^{-u} \\ f' = -\cos(u) & g = e^{-u} \end{matrix} \right] =$$

$$= -e^{-u}\cos(u) - \left(-e^{-u}\sin(u) - \int_1^{e^{\pi}} -e^{-u}\cos(u)\,du\right) =$$

$$= -e^{-u}\cos(u) - \left(-e^{-u}\sin(u) + \int e^{-u}\cos(u)\,du\right)$$

Можно заметить что наш интеграл сново повторяется снова в правой части выражения => мы можем решить уравнение по

$$\int_1^{e^{\pi}} e^{-u}\cos(u)\,du = \frac{e^{-u}\sin(u) - e^{-u}\cos(u)}{2}$$

Теперь делаем обратную замену на x, получаем:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{\frac{\sin(\ln(x))}{x} - \frac{\cos(\ln(x))}{x}}{2} + C = \int_1^{e^{\pi}} \frac{\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{2x}$$

$$= \frac{\sin(\ln(e^{\pi})) - \cos(\ln(e^{\pi}))}{2x} - \frac{\sin(\ln(1)) - \cos(\ln(1))}{2x} =$$

$$= \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi}+1}{2} \approx 0,521$$

5) Вычислить с точностью до

1/10 $\int_2^{10} \frac{x \sin \pi x}{e^{2x}} dx = \int_2^{10} (x e^{-2x} \sin(\pi x)) dx =$

Интегрируем по частям

$f = x \quad g' = e^{-2x}\sin(\pi x)$ $\quad \int f g' = fg - \int f' g$

$f' = 1 \quad g = \frac{-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4}$

$= \frac{x(-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x))}{\pi^2+4} -$

$- \int_2^{10} \frac{-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4} dx$

Теперь вычисляем интеграл

$\int \frac{-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4} dx$

Применяем линейность получим

$-\frac{2}{\pi^2+4} \int e^{-2x}\sin(\pi x) dx - \frac{\pi}{\pi^2+4} \int e^{-2}\cos(\pi x) dx$

Вычисляем: $\int e^{-2x}\sin(\pi x)\,dx =$

Дважды интегрируем по частям

$$=\left[\begin{matrix} f=\sin\pi x & g'=e^{-2x} \\ f'=\pi\cos(\pi x) & g=-\frac{e^{-2x}}{2}\end{matrix}\right] = -\frac{e^{-2x}\sin(\pi x)}{2} - \int -\frac{\pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{2}$$

$$=\left[\begin{matrix} f=\pi\cos(\pi x) & g'=-\frac{e^{-2x}}{2} \\ f'=-\pi^2\sin(\pi x), & g=\frac{e^{-2x}}{4}\end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{e^{-2x}\sin(\pi x)}{2} - \left(\frac{\pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{4} + \frac{\pi^2}{4}\int e^{-2x}\sin(\pi x)\,dx\right) =$$

[Исходный интеграл повторяется =>]

$$= \frac{-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4}$$

Теперь вычисляем $\int e^{-2x}\cos(\pi x)\,dx$

Дважды интегрируем по частям

$$\left[\begin{matrix} f=\cos(\pi x) & g'=e^{-2x} \\ f'=-\pi\sin(\pi x), & g=-\frac{e^{-2x}}{2}\end{matrix}\right] = -\frac{e^{-2x}\cos(\pi x)}{2} - \int \frac{\pi e^{-2x}\sin(\pi x)}{2}\,dx$$

$$= \cancel{-\frac{e^{-2x}\cos(\pi x)}{2} - \int \frac{\pi e^{-2x}\sin(\pi x)}{2}}$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f = -\pi \sin(\pi x) & g' = -\frac{e^{-2x}}{2} \\ f' = -\pi^2 \cos(\pi x) & g = \frac{e^{-2x}}{4} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{e^{-2x}\cos(\pi x)}{2} - \left(-\frac{\pi e^{-2x}\sin(\pi x)}{4} + \frac{\pi^2}{4}\int e^{-2x}\cos(\pi x)dx \right)$$

Исходный интеграл находится решением уравнения, то $\int e^{-2x}\cos(\pi x)dx$

$$= \frac{\pi e^{-2x}\sin(\pi x) - 2e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4}$$

Подставим уже вычисленные интегралы

$$-\frac{2}{\pi^2+4}\int e^{-2x}\sin(\pi x)\,dx - \frac{\pi}{\pi^2+4}\int e^{-2x}\cos(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{\pi(\pi e^{-2x}\sin(\pi x) - 2e^{-2x}\cos(\pi x))}{(\pi^2+4)^2} -$$

$$- \frac{2(-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x))}{(\pi^2+4)^2}$$

Подставим в главный интеграл

$$\frac{x(-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x))}{\pi^2+4} - \int \frac{-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x)}{\pi^2+4}$$

$$= \frac{\pi(\pi e^{-2x}\sin(\pi x) - 2e^{-2x}\cos(\pi x))}{(\pi^2+4)^2} +$$

$$+ \frac{x(-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x))}{\pi^2+4}$$

$$+ \frac{2(-2e^{-2x}\sin(\pi x) - \pi e^{-2x}\cos(\pi x))}{(\pi^2+4)^2} =$$

$$= \frac{e^{-2x}((2(\pi^2+4)x - \pi^2+4)\sin(\pi x) + \pi((\pi^2+4)x+4)\cos(\pi x))}{(\pi^2+4)^2}\Big|_{2}$$

$$\approx \int_{2}^{10} f(x)\,dx = \frac{2\pi^3+12\pi}{e^4\pi^4+8e^4\pi^2+16e^4} - \frac{10\pi^3+44\pi}{e^{20}\pi^4+8e^{20}\pi^2+16e^{20}}$$

$$= \frac{2e^{-20}\pi((e^{16}-5)\pi^2+6e^{16}-22)}{\pi^4+8\pi^2+16} \approx 0{,}01$$