

Контрольная работа 1.
Вычисление неопределенных/определенных
интегралов. Асимптотика.

10 апреля 2021 г.

Задача 0.1. Вычислите неопределенные интегралы. Возможно появление функции $\operatorname{li}(x)$.

1.

$$\int \frac{x \cdot \operatorname{arctg}(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$$

2.

$$\int \frac{x^{100} dx}{\log x}, \quad x < 1$$

3.

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$$

Задача 0.2. Вычислите предел суммы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7 + \tan(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}}{n + \frac{\sin(1!)}{1}} + \frac{(7 + \tan(\frac{1}{n}))^{\frac{2}{n}}}{n + \frac{\sin(2!)}{2}} + \dots + \frac{(7 + \tan(\frac{1}{n}))^{\frac{n}{n}}}{n + \frac{\sin(n!)}{n}}$$

Задача 0.3. Вычислите определенный интеграл.

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

Задача 0.4. Вычислите определенные интегралы, если они существуют:

1.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{(\frac{1}{x} + 2)(\frac{1}{x} + 3)}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Задача 0.5. Вычислите пределы. Заметьте, что мы не умеем дифференцировать интеграл по параметру.

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \int_0^{10} \frac{e^{-xt} dt}{1+t}$$

2. Функция f удовлетворяет условию $f \sim x^p$ для $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p-1}} \int_0^1 f(nx) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) dx$$