№2.1

$$xy' = y(\ln y - \ln x) \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{matrix} z = \frac{y}{x} & z' = \frac{y'}{x^2} \\ y = zx & y' = z'x + z \end{matrix} \right| \Leftrightarrow z'x + z = z\ln z \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} + z = z\ln z \quad \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z(\ln(z)-1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\ln z - 1) = \ln x + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\ln z - 1 = \ln x + C \Leftrightarrow \ln\frac{y}{x} - 1 = \ln x + C}$$

$\ln|t| = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = e$ Ответ: $\ln\left|\ln\frac{y}{x} - 1\right| = \ln x + C$, $y = ex$

№2.2

$$2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$$

$$\cancel{\begin{cases} 2x+3y-5=0 \end{cases}} \left[\begin{matrix} x = 1 + X & dx = dX \\ y = 1 + Y & dy = dY \end{matrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{2x+3y-5}{3x+2y-5} = \frac{2(1+X) + 3(1+Y) - 5}{3(1+X) + 2(1+Y) - 5} = \frac{2X+3Y}{3X+2Y} = \frac{2+3\frac{Y}{X}}{3+2\frac{Y}{X}} \quad \frac{Y}{X} =$$

$$y' = t + t'X$$

$$\Leftrightarrow t + t'X = \frac{2+3t}{3+2t} \Leftrightarrow t'X = \frac{2-2t^2}{3+2t} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{3+2t}{2-2t^2}\,dt}_{1} = \underbrace{\int \frac{1}{X}\,dX}_{2} \qquad \boxed{\frac{Y}{X} = \pm 1 \qquad y - 1 = \pm(x-1)}$$

$y = x$ - не подх

1) $$-\frac{1}{2}\ln\left|1 - \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2\right| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+y-2}{x-y}\right| = \ln|x-1| + C$$

$y - 1 = -x + 1$ не подход

№ 2.3

$y(1+\sqrt{x^2y^4+1})\,dx + 2x\,dy = 0$ $\qquad \exists\ y = \frac{t^{1/4}}{x^{1/2}} \Rightarrow$

$y' = -\frac{t^{1/4}}{2x^{3/2}} + \frac{t'}{4x^{1/2}t^{3/4}}$

$\frac{t^{1/4}}{x^{1/2}}(1+\sqrt{t+1}) + 2x\left(-\frac{t^{1/4}}{2x^{3/2}} + \frac{t'}{4x^{1/2}t^{3/4}}\right)$

$t^{1/4}(1+\sqrt{t+1}) + 2x^{3/2}\left(-\frac{t^{1/4}}{2x^{3/2}} + \frac{t'}{4x^{1/2}t^{3/4}}\right) = 0 \Leftrightarrow t^{1/4}(1+\sqrt{t+1}) - t^{1/4} + \frac{2xt'}{2t^{3/4}}$

$t^{1/4}(\sqrt{t+1}) + \frac{xt'}{2t^{3/4}} = 0 \,/\cdot t^{3/4}$ $\quad t(\sqrt{t+1}) + \frac{x}{2}t' = 0$ $\quad$ О.Р.: $t=-1 \in$ О.О. $t=0 \Rightarrow y=0$

$\int -\frac{2}{x}dx = \int \frac{t'}{t\sqrt{t+1}}dx$ $\qquad \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| + C$ $\quad t = y^4x^2$

$\int \frac{t'}{t\sqrt{t+1}} = \ln|\sqrt{y^4x^2+1} - 1| - \ln|\sqrt{y^4x^2+1} + 1| \Rightarrow$

Ответ: $y=0$, $\ln|\sqrt{y^4x^2+1}-1| - \ln|\sqrt{y^4x^2+1}+1| = -2\ln|x| + C$

№ 2.4

$4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$

$\exists\ y = t^\alpha \Rightarrow 4t^{6\alpha} + x^3 = 6x^{5\alpha}t^{\alpha-1}\cdot\alpha$ $\qquad 6\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1/2$

$y = t^{1/2} \Rightarrow 4t^3 + x^3 = 6x\cdot t^{5/2}\cdot t^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}$

$4t^3 + x^3 = 3xt^2t'$ $\qquad z = \frac{t}{x} \Rightarrow t' = z + z'x$

$4t^3 + x^3 - 3xt^2t' = 0$ $\qquad t = z\cdot x$

$4z^3x^3 + x^3 - 3x^3z^2(z+z'x) = 0$ $\qquad z^3x^3 + x^3 = 3z'z^2x^4$

$x^3(z^3+1) = 3z'z^2x^4$ $\qquad \int \frac{1}{x}dx = \int \frac{3z'z^2}{z^3+1}dx \Rightarrow \ln|x| + C =$

$= \int \frac{3z^2dz}{z^3+1} = \int \frac{dz^3}{z^3+1} = \ln|z^3+1|$ $\qquad$ особое решение $t=-x$, $y^2 = \sqrt{-x}$

Ot. $\ln|x| + C = \ln\left|\frac{y^6}{x^3} + 1\right|$, $y = \pm\sqrt{x}$

№ 2.5

Пусть $v(t)$ - скорость лодки в момент времени t от начала движения. Тогда $\frac{dv}{dt}$ есть её ускорение. =>

$$m\frac{dv}{dt} = F$$ (согласно второму закону Н)

По условию $F = kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}v = k_0 v$

(k_0 - const) Интегрируем и находим:

$$v(t) = Ce^{k_0 t}$$

Зная что $v(0) = 1{,}5$ находим $C = 1{,}5$ <=>

$$v(t) = 1{,}5\, e^{k_0 t}$$

Поскольку $v(4) = 1$ м/с => $1 = 1{,}5e^{4k_0}$ следует что $k_0 = 0{,}25 \ln(2/3)$. Поэтому скорость движения лодки выражается формулой

$$v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$$

Подставляем $v = 0{,}01$ м/с находим t_1

$$t_1 = 4\left(1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln 2/3}\right) \approx 50 \text{ с}$$

Поскольку $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, где $s(t)$ - путь

$s(t) = \frac{4}{\ln(2/3)} \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4-1} + s_0$, где s_0 – постоянная интегрирования. Пусть $s_0 = 0 \Rightarrow s_0 = -\frac{4}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

и закон движения лодки имеет вид

$$s(t) = \frac{6}{\ln(2/3)}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{t/4} - 1\right)$$

Из $v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4-1}$ видим, что

$\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0 \Rightarrow$ получаем из закона

движения лодки

$$s_1 = \lim_{t \to \infty} s(t) = \frac{6}{\ln(3/2)} \approx 15 м$$

Ответ: 15 м

№2.9

Будем считать векторно. Все скорости – векторную систему координат, выберем так, чтобы самолет А в ней двигался в пределах плоскости – повернем евклидову сис. коорд. на угол относительно горизонта на $\pi/4$

$\vec{r}_1$ – радиус-вектор сам. В (догоняет)

$\vec{r}_2$ – радиус-вектор самолета А.

Тогда $\vec{r}_1' = \vec{V}$ $\vec{r}_2' = \vec{u}$ ($\vec{V}$ – скорость В – вектора, $\vec{u}$ скорость А – вектора)

Т.к вектор всегда направлен на текущее положение А, что $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{V} \cdot k(t)$, где $k(t)$ – коэф

$k(0) = \frac{u}{v}$ (А – всегда в точке координат, а В в каком точке $x(0) = 0$, $y(0) = L$)

$k(T) = 0$, где T – время когда догонит $\Rightarrow \vec{u} - \vec{V} = k'(t)\vec{V} + k(t)\vec{V}'$

Ускорение самолета В – всегда перпендикулярна по скорости

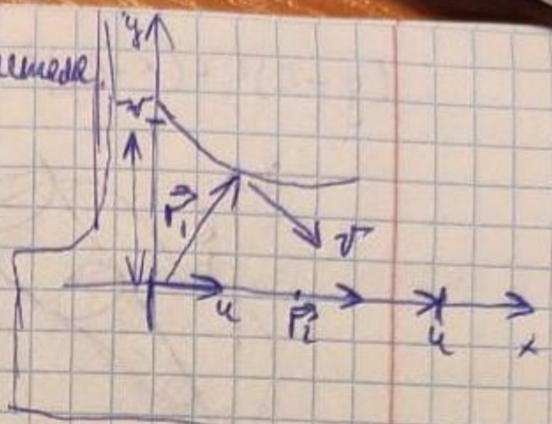
$\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$ – скаляр. произв. $\vec{V}(\vec{u} - \vec{V}) = k'(t)V^2 \Rightarrow uV - V^2 = k'(t)V^2$

$\Leftrightarrow ux - V^2 t = k(t)V^2 + \text{const}$. Начальные условия определяют

$\text{const} = -LV \Rightarrow ux - V^2 t = k(t)V^2 - LV$ В моменте $t = T$

$x = uT$ и $k(t) = 0 \Rightarrow T = \frac{LV}{V^2 - u^2}$ момент времени

Теперь найдём угол в полярной системе коорд. А. Разложение ϑ - сом. В =>



$$V_r = -V + u\cos(\pi-\varphi) = -V - u\cos\varphi$$

$$V_\varphi = u\sin(\pi-\varphi) = u\sin\varphi$$

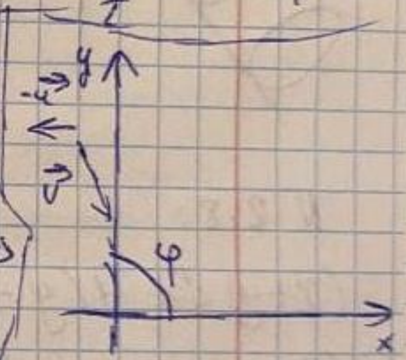
т.к. $V_r = r'$, $V_\varphi = r\varphi'(t)$ =>

=> $r' = -V - u\cos\varphi$; $r\varphi' = u\sin\varphi$

Первое уравнение делим на второе с учетом того что

$$\frac{r'}{\varphi'} = \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{V+u\cos\varphi}{u\sin\varphi} \Rightarrow \ln\frac{r}{L} = -\int_{\pi/2}^{\varphi}\frac{V+u\cos\varphi}{u\sin\varphi}\,d\varphi = I$$

Замена $z = \cos\varphi$ $\quad \frac{\frac{V}{u}+z}{1-z^2} = \frac{A}{1-z} - \frac{B}{1+z}$



$$A = \frac{1}{2}\left(1+\frac{V}{u}\right) \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{u}-1\right) \Rightarrow$$

$$I = \ln\frac{(1+\cos\varphi)^B}{(1-\cos\varphi)^A} = \ln\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{V/u}\frac{1}{\sin\varphi}\right] \Rightarrow$$

$$r = \frac{L}{\sin\varphi}\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{V/u}$$

№2.7

$$(x^2+2xy-y^2)\,dx + (y^2+2xy-x^2)\,dy = 0 \quad |:x^2$$

$$\left(1+2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-1\right)dy = 0$$

$$\exists\, t = \frac{y}{x} \Rightarrow \quad y' = t'x + t$$

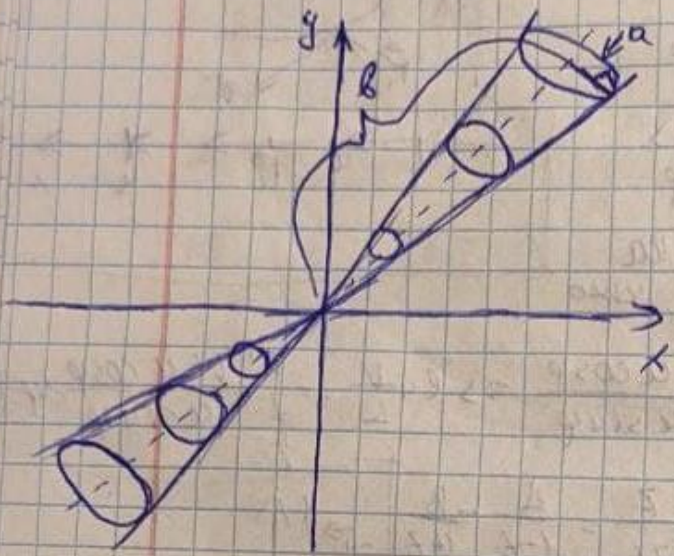
$$1+2t-t^2+(t^2+2t-1)(t'x+t) = 0$$

$$1+2t-t^2+t^3+2t^2-t = -(t^2+2t-1)t'x$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{t^2+2t-1}{t^3+t^2+t+1}\,dt \Leftrightarrow \ln|x|+\ln|C| = \ln\frac{|t^2+1|}{|t+1|}$$

$$Cx = \frac{t^2+1}{t+1} \qquad C = \frac{y+x}{y^2+x^2} \qquad y^2+x^2 = C_1(x+y)$$

$(y-c)^2 + (x-c_2)^2 = 2c_2^2$



$a = c_2\sqrt{2}$

$b = 2c_2$

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} = const \Rightarrow$

гомотетия отн. O

N 2.8

$(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$

$(x+y)\,dx = -(y-x)\,dy$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

$\exists\, t = \frac{y}{x}$, $y = tx$

$y' = t'x + t \Rightarrow t' = \frac{y'-t}{x}$

$t'x + t = \frac{x+tx}{x-tx} \Leftrightarrow t'x + t = \frac{1+t}{1-t}$ $\qquad \frac{dt}{dx}\cdot x = \frac{1+t^2}{1-t}$

$\underset{2)}{\int \frac{dt\cdot(1-t)}{1+t^2}} = \underset{1)}{\int \frac{dx}{x}} \Rightarrow 1) \ln|x| + C$

2) $\int \frac{dt(1-t)}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t - (\ln(t^2+1))/2 + C$

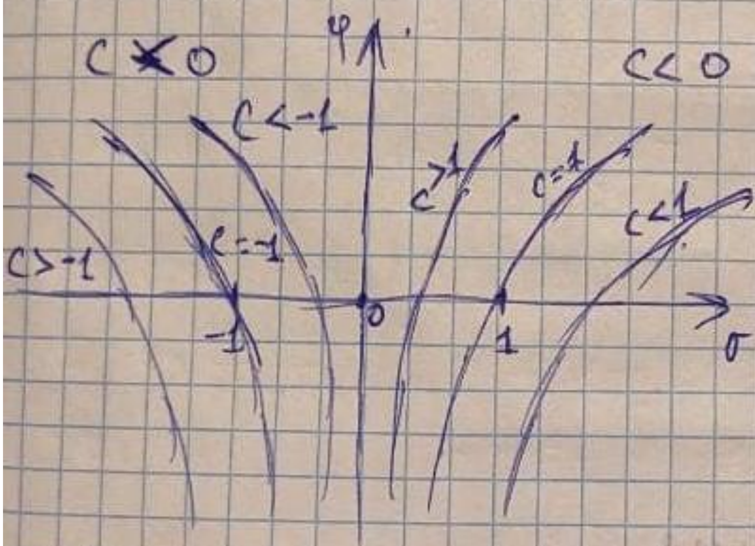
$\Rightarrow 2\ln|x| = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + C$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\sqrt{y^2+x^2} + C$

tg угла φ радиус r

$\varphi = \ln|r| + C$ $\quad \exists\ C^* = \ln|C| \Rightarrow \varphi = \ln(r C^*)$

2) Построим графики



3) Уравнение вида $r = p(\varphi)$ $\quad r = \frac{e^{\varphi}}{C^*}$

$r(1) = \frac{e^0}{C^*} = 1 \Rightarrow C^* = 1 \Rightarrow r(\pi) = e^{\pi}$

Ответ: $r(\pi) = e^{\pi}$

№ 2.6.

$y' = y(y-2)$

1) Векторное поле

2) Общее решение

1) Вручную

$\frac{dy}{y(y-2)} = dx \quad y \neq 0 \quad y \neq 2$

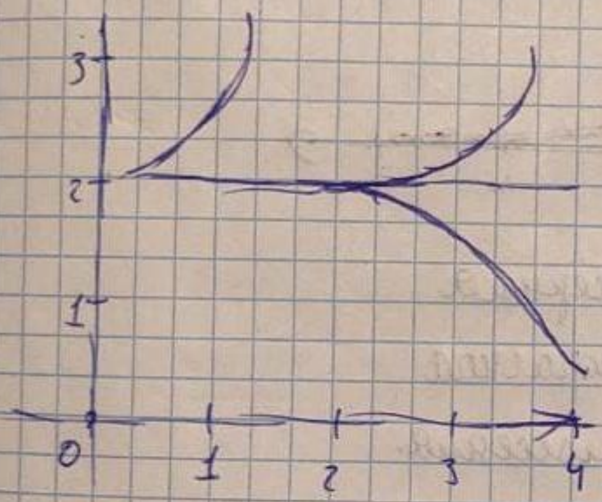
$y = 0,\ y = 2$ – решения

$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int dx \qquad \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right) dy = \int dx$

$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = x + C \qquad 1 - \frac{2}{y} = \pm e^{2x+C}$

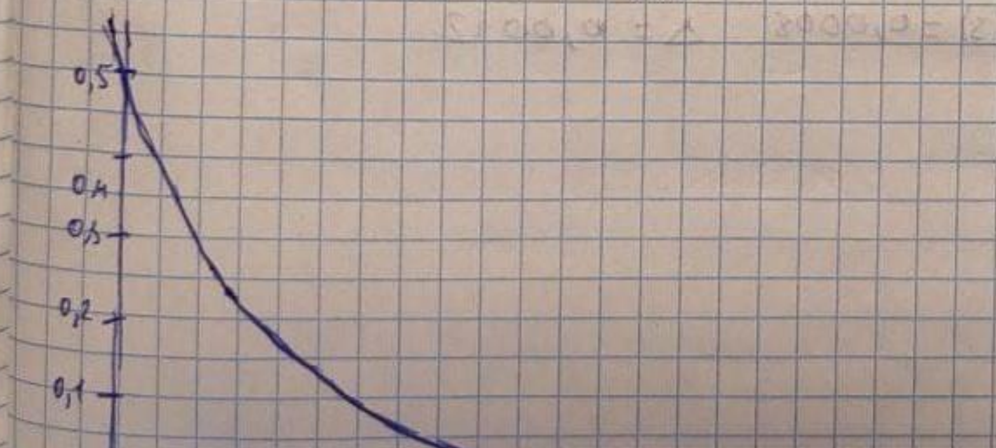
2) Мат пакет

3) Интегральные кривые на изображении...

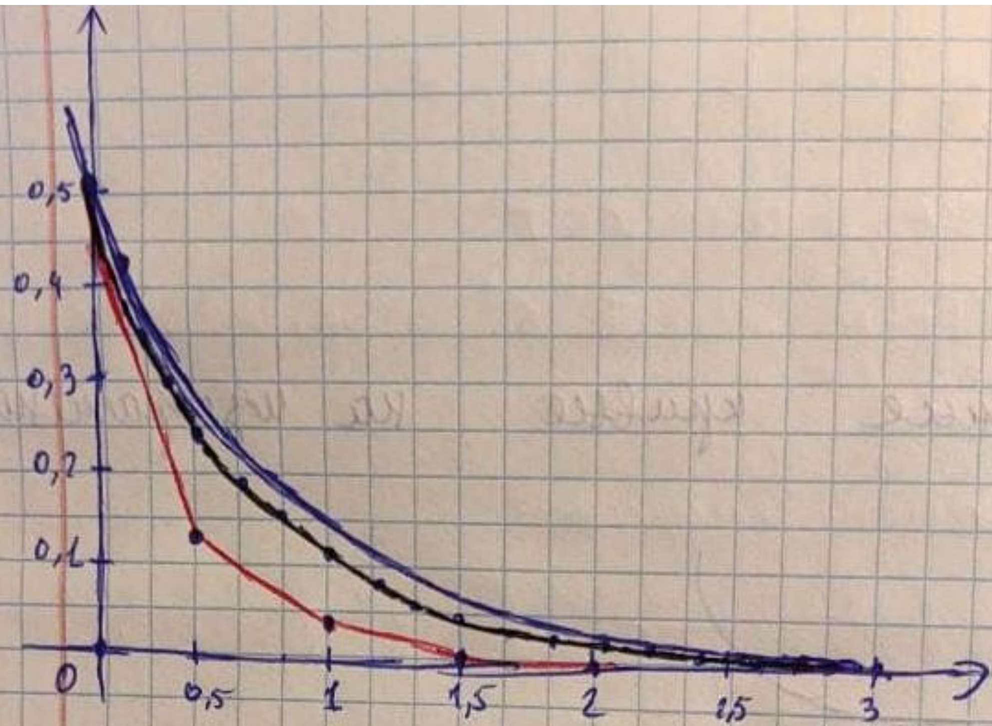


4) $y(0) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1+e^{C}} \Rightarrow C = \ln 3 \Rightarrow y = \frac{2}{1 \pm e^{x+\ln 3}}$$



5)



С шагом 0,1 - чёрная

с шагом 0,5 - красная

6) Ошибка приближения:

$y(3) \approx 0{,}002$

$y_1(3) = 0 \quad \Delta = 0{,}002$

$y_2(3) = 0{,}0008 \quad \Delta = 0{,}0012$