# Дз # 2

0.1) Для каких вещественных $\alpha$ и $\beta$ сходится интеграл

$$\int_0^{0,7} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$

$$\int_0^{0,7} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx = \int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx + \int_\delta^{0,7} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$

Второй интеграл сходится:

$$\int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)} = \int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)\cos^{4+\beta}(x)}{\sin^\beta(x)} \underset{\text{по.с.}}{\sim} \int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)}{\sin^\beta(x)}dx$$

$$\sim \int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)}{x^\beta}dx = \int_0^{\delta} \frac{\ln^\alpha(1/x)dx}{x^{\beta-1}\cdot x} = \left| t = \ln(1/x) \quad \frac{1}{x} = e^t \right|$$

$$= \int_k^{+\infty} t^\alpha \cdot e^{t(\beta-1)}dt$$

При $\beta = 1$ $\int_k^{+\infty} t^\alpha dt$ При $\alpha < -1$, => интеграл сходится, при $\beta > 1$ интеграл расходится

При $\beta < 1$

$$\int_k^{+\infty} t^\alpha \cdot e^{t(\beta-1)}dt = |\beta - 1 = -\delta| =$$

$$= \int_k^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\delta t}}dt.$$ Так как у нас отрезок $[k + \infty)$, а функции числителя и знаменателя $x^n$ и $a^x$, то интеграл сходится

0.2) Пусть функция $f$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'' \sim x^p$ при $x \to +\infty$, где $p>0$. При каких $p$ сходится интеграл $\int_1^\infty \cos(f(x))dx$

$$\int_1^\infty \cos(f(x))dx = \underbrace{\int_1^\delta \text{—"—}}_{\substack{\text{конечное} \\ \cos(f(x)) - \text{непр.}}} + \int_\delta^{+\infty} \text{—"—}$$

$$\int_\delta^{+\infty} \cos(f(x))dx = \int_\delta^{+\infty} \frac{\cos(f(x))f'(x)}{f'(x)}dx = \int_\delta^{+\infty} \frac{d(\sin f(x))}{f'(x)} =$$

$$= \left|\text{интегрируем по частям}\right| = \frac{\sin(f(x))}{f'(x)}\Bigg|_\delta^{+\infty} +$$

$$+ \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(f(x)) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} dx$$

$f'' \sim x^p$ при $x \to +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \Delta>0 \ \forall x>\Delta :$

$: \left|\frac{f''(x)}{x^p} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow$ —"— —"— $: (1-\varepsilon)x^p < f''(x) <$

$< (1+\varepsilon)x^p$.

$$(1-\varepsilon)\int_\Delta^x x^p dx < \int_\Delta^x f''(x)\,dx < (1+\varepsilon)\int_\Delta^x x^p dx$$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{p+1}x^{p+1}+C_1 < f'(x)+C_2 < \frac{(1+\varepsilon)}{p+1}x^{p+1}+C_1 \quad \text{при } p \neq -1$$

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x \geq \Delta \Rightarrow C_2 = C_1 \Rightarrow f'(x) \sim \frac{1}{p+1}x^{p+1}$

при $x \to +\infty$ и $p \neq -1$

При $p = -1 \Rightarrow f'(x) \sim \ln(x)$

$$\frac{\sin f(x)}{f'(x)}\Bigg|_{\delta}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(f(x))}{f'(x)} - \underbrace{\frac{\sin(f(\delta))}{f'(\delta)}}_{\text{конст.}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(f(x))}{f'(x)} \sim \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(f(x))}{\ln x} = 0$$

Возьмем такое $\delta$, что $\forall x \geq \delta$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\sin f(x)}{x\ln^2 x}\right| \leq \left|\frac{\sin(f(x))\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| \leq \frac{3}{2}\left|\frac{\sin(f(x))}{x\ln^2 x}\right| \Rightarrow$$

сходимость

$$\int_{\delta}^{+\infty}\left|\frac{\sin(f(x))\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|dx \sim \int_{\delta}^{+\infty}\left|\frac{\sin(f(x))}{x\ln^2 x}\right|dx$$

$$\int_{\delta}^{+\infty}\left|\frac{\sin(f(x))}{x\ln^2 x}\right|dx \leq \int_{\delta}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_{\delta}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{\delta}^{+\infty} \text{ — сходится}$$

2)

$$\Rightarrow \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(f(x))\, f''(x)}{(f'(x))^2}\, dx \text{ — сходится}$$

при $p \neq -1 \Rightarrow f' \sim \frac{1}{p+1} x^{p+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(f(x))}{f'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(f(x)) \cdot (p+1)}{x^{p+1}} \quad \text{при } p > -1$$

Возьмем такое $\delta$, что $\forall x \geq \delta$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x^p}{x^{2p+2}} \leq \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{x^p}{x^{2p+2}} \Rightarrow \text{сходимость}$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(f(x))\, f''(x)}{(f'(x))^2}\, dx \sim \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(f(x))}{x^{p+2}}\, dx \leq$$

$$\leq \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+2}} \quad \text{при } p > -1 \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \cos(f(x))\, dx \quad \text{сходится при } p \geq -1$$

0.3) Введем функцию $\pi(x) := \{$ кол-ств простых чисел $\leq x \}$ для $x \geq 2$. Например, $\pi(1+e)=2$. Определите при каких $p$ сходится интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^p}\, dx$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^p}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{x}{x^p \ln(x)}\, dx = \left| x = e^t,\ dx = e^t dt \right| = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{e^{2t}}{e^{pt} t}\, dt$$

$$= \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{e^{t(2-p)}}{t}\, dt$$

рассмотрим 3 случая

При $p > 2$: $k > 0$; $\int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{e^{kt} t}\, dx$ - сходится

При $p == 2$: $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e}{t}\, dt = e \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt$ = расходится

При $p < 2$: $k > 0$ $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{kt}}{t}\, dt$ $\left| \lim_{t \to \infty} \frac{e^{kt}}{t} = \infty \right| \Rightarrow$

$\int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{e^{kt}}{t}\, dt$ тоже расходится

6.5) Сходится ли интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx = \underbrace{\int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x}dx}_{\text{сходится}} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{x}dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{x}dx \text{ сходится ли?}$$

Из второй теоремы о среднем:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=|\sin(x)|$, $f(x)$ не возрастает и $f(x)>0$, $g(x)$ интегрируема на $[\pi k, \pi(k+1)] \Rightarrow \exists\ \alpha \in [\pi k, \pi(k+1)]$:

$$\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{x}dx = \frac{1}{\alpha}\cdot\int_{\pi k}^{\pi k+k} |\sin(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin(x)|dx = const \qquad \frac{1}{\alpha}\int_{\pi k}^{\pi k+k}|\sin(x)|dx \geq \frac{\int_{\pi k}^{\pi k+k}|\sin(x)|dx}{\pi k}$$

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\pi k}^{\pi k+k}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_{\pi k}^{\pi k+k}|\sin(x)|dx}{\pi k} = \frac{\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\sin(x)|dx}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ – гармон. ряд $\Rightarrow$ $I$ – расходится $\Rightarrow$ наш интеграл расходится.

0,6) Сходится ли интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin(x^2)}}\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin^2 x}}\,dx = \int_1^{\pi} + \ldots + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin^2 x}} =$$

$$= \underbrace{\int_1^{\pi} + \ldots + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} -''-}_{\text{сходится}} + \sum_{k=N}^{+\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin^2 x}}$$

$$\int_{\pi k}^{\pi k+\pi} \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2\sin^2 x}}\,dx = |t = x - \pi k| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{e^{(t+\pi k)^2\sin^2 t}}\,dt =$$

$$= \int_0^{\delta_1} -''- + \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_2} -''- + \int_{\pi-\delta_2}^{\pi}$$

$\forall\, 0 \le x \le \delta_1$
$0{,}39x \le \sin x \le x \Rightarrow$
сходимость

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|\sin t|}{e^{(t+\pi k)^2\sin^2 t}}\,dt \sim \int_0^{\delta_1} \frac{t}{e^{(t+\pi k)^2 t^2}}\,dt$$

$$\int\limits_0^{\delta_1} \frac{t\,dt}{e^{c(t+\pi k)^2 t^2}} \le \int\limits_0^{\delta_1} \frac{d(t^2)}{\left(e^{c\pi^2k^2}\right)^{t^2}} = -\frac{1}{c\pi^2k^2} \cdot \frac{1}{e^{c\pi^2k^2t^2}}\Bigg|_0^{\delta_1} \le$$

$$\le \frac{1}{c\pi^2k^2}$$

$\exists\, \alpha > 0\ ;\ \forall\, t \in [\delta_1, \pi - \delta_2] \quad \alpha t \le \sin t \le t \Rightarrow$

$$\int\limits_{\delta_1}^{\pi-\delta_2} \frac{\sin t}{e^{(t+\pi k)^2 \sin^2 t}}\, dt \le \int\limits_{\delta_1}^{\pi-\delta_2} \frac{t\,dt}{e^{c(t+\pi k)^2 t^2}} \le \ldots \le \frac{1}{c\pi^2k^2}$$

$$\int\limits_{\pi-\delta_2}^{\pi} \frac{\sin t}{e^{(t+\pi k)^2 \sin^2 t}}\, dt = \left| y = t - \pi \right| = \int\limits_{-\delta_2}^{0} \frac{-\sin y}{e^{(y+\pi+\pi k)^2 \sin^2 y}}\, dy$$

$$\le \int\limits_{-\delta_2}^{0} \frac{-\sin y}{e^{\pi^2k^2 \sin^2 y}}\, dy \sim \int\limits_{-\delta_2}^{0} \frac{-y}{e^{c\pi^2k^2y^2}}\, dy \le \frac{1}{c\pi^2k^2}$$ док. раве

$$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \ldots \le c \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + d$$ – сходится $\Rightarrow$

Ответ: сходится