Дз №6

Задача 1

Пользуясь алгоритмом Евклида, подбери многочлены $q_1(t)$ и $q_2(t)$ таким образом, чтобы $p_1(t)q_1(t)+p_2(t)q_2(t)=d(t)$, где

$d(t)$ – НОД $p_1(t)$ и $p_2(t)$;

$$p_1(t)=2t^4-2t^3-16t^2+5t+9$$

$$p_2(t)=2t^3-t^2-5t+4$$

$$
\begin{array}{l|l}
2t^4-2t^3-16t^2+5t+9 & 2t^3-t^2-5t+4 \\
\underline{2t^4-t^3-5t^2+4t} & t-0{,}5 \leftarrow s_1 \\
\quad -t^3-11t^2+t+9 & \\
-\ \underline{-t^3+\frac{1}{2}t^2+2{,}5t-2} & \\
\quad -11{,}5t^2-1{,}5t+11 \leftarrow v_1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2t^3-t^2-5t+4 & -11{,}5t^2-1{,}5t+11 \\
\underline{2t^3+\frac{6t^2}{23}-\frac{44}{23}t} & -\frac{4t}{23}+\frac{58}{529} \leftarrow s_2 \\
\quad \underline{-\frac{29}{23}t^2-\frac{87}{529}t+\frac{638}{529}} & \\
\quad -\frac{1546}{529}t+\frac{1948}{529} \leftarrow v_2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-11{,}5t^2 - 1{,}5t + 11 & -\frac{1546}{529}t + \frac{1478}{529} \\
-11{,}5t^2 + \frac{6997t}{1546} & \frac{12167}{3092}t + \frac{2534541}{597529} \leftarrow s_3 \\
\quad -\frac{9658}{773}t + 11 & \\
\quad -\frac{9658}{773}t + \frac{564443}{597529} + 11 & \\
\qquad -\frac{564443}{597529} = V_3 = d &
\end{array}
$$

$P_1 = S_1 \cdot P_2 + V_1$ $\qquad$ $НОД(P_1 P_2) = d = -S_3 P_2 + (1 + S_3 \cdot S_2)(P_1 - S_1 - P_2)$

$P_2 = S_2 \cdot V_1 + V_2$ $\qquad$ $НОД(P_2, V_1) = d = V_1 - S_3(P_2 - S_2 \cdot V_1) = -S_3 P_2 + (1 + S_3 S_2) V_1$

$V_1 = S_3 \cdot V_2 + V_3$ $\qquad$ $НОД(V_1 V_2 = d = V_1 - S_3 \cdot V_2$

$V_3 = d$

$$d = P_1 - S_1 P_2 + P_1 S_2 S_3 - P_2 S_1 S_2 S_3 - P_2 S_3 = \underbrace{(1 + S_2 S_3)}_{q_1} P_1 + \underbrace{(-S_1 - S_3 - S_1 S_2 S_3)}_{q_2} P_2$$

$$q_1 = \frac{529}{773}t^2 - \frac{972945}{1195058}t + \frac{877611}{597529}$$

$$q_2 = \frac{529}{773}t^3 - \frac{17986}{597529}t^2 - \frac{5922120}{597529}t - \frac{4251941}{1195058}$$

Задача 2

Определить полином наименьшей степени, дающий в остатке $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$) при делении $(x-2)^3$

$$\begin{cases} P(x) = (x-2)^3 Q_1(x) + 3x \\ P(x) = (x-1)^2 Q_2(x) + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = 6 & P(1) = 2 & P''(2) = 0 \\ P'(2) = 3 & P'(1) = 2 & \end{cases}$$

Полинома 3-й степени, удовлетворяющего этим условиям ~~7~~. Полином 4 степени ищем в виде $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Записываем систему из 5 уравнений с 5-ю неизвестными.

Получаем

$a=4$ $b=-27$, $c=66$, $d=-65$, $e=24$

Проверяем

$$4x^4-27x^3+66x^2-65x+24=(4x-3)(x^3-6x^2+12x-8)+3x$$

$$4x^4-27x^3+66x^2-65x+24=(4x^2-19x+24)(x^2-2x+1)+2x$$

Задача 3

Пусть

$$p_1(t)\,q_1(t)+p_2(t)\,q_2(t)=d(t)$$

где $d(t)$ – наибольший общий делитель $p_1(t)$ и $p_2(t)$. Чему равен НОД $q_1(t)$ и $q_2(t)$?

$$\frac{p_1(t)}{d(t)} = u(t) \qquad \frac{p_2(t)}{d(t)} = v(t)$$

$$НОД(u(t), v(t)) = 1$$

$$u(t)\, q_1(t) + v(t)\, q_2(t) = 1 \Rightarrow НОД(q_1, q_2) = 1$$

Задача 4

Проверить прямым вычислением теорему Гамильтона - Кэли и найти минимальный полином матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 2 \\ 3 & (-3-\lambda) & 6 \\ 2 & -2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = ((1-\lambda)(-3-\lambda)(4-\lambda)) + (-1\cdot 6\cdot 2) + (3\cdot 2\cdot(-2)) - (-12(1-\lambda)) =$$
$$-(4(-3-\lambda)) - (-3(4-\lambda))$$
$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{-6\lambda}$$

$$\begin{vmatrix} (-3-\lambda) & 6 \\ -2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ (-3-\lambda) & 6 \end{vmatrix} = 2\lambda$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = -3\lambda \qquad \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6\lambda$$

$$\begin{vmatrix} 3 & (-3-\lambda) \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda \qquad \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 3 & (-3-\lambda) \end{vmatrix} = 2\lambda + \lambda^2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda \qquad \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = -5\lambda + \lambda^2$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \lambda \qquad НОД = \lambda$$

$$\mu_A(\lambda) = \frac{(-1)^3 (2\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{-6\lambda})}{\lambda} =$$

$$= -1(2\lambda - \lambda^2 - 6) = \underline{\lambda^2 - 2\lambda \cancel{+6}}$$

Задача 5

Построить корневые подпространства для оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ -4 & (-2-\lambda) & 1 \\ 4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$\chi(\lambda) = -(1+\lambda)^3 \Rightarrow \delta_A = \{-1^3\}$

$\lambda = -1$ единственные СЗ $n=3$ - его полная кр.

По Т - Гамильтона - Кэли

$\chi(A) = 0 \Rightarrow (A-E)^3 = 0$

$$(A+B)^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & +1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & +1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \chi(\lambda) = p(\lambda) \qquad \lambda = -1 \quad (3, 3, 1)$

Корневое пр/ство одно $\dim R = 3 = \dim X \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ базис в котором A имеет вид жордановой клетки

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$