Переписывание Дз #2

№1

$$\int_0^{0,7} \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$

Для каких вещественных α и β интеграл сходится

При $x \to 0$, $\cos^4(x) \to 1$ $tg^\beta(x) \to x$ =>
Подберем такое δ, что $\forall x \in [0, \delta]$

$$\frac{0,9}{x^\beta} \leq \frac{\cos^4(x)}{tg^\beta(x)} \leq \frac{1,1}{x^\beta}$$

$$\int_0^{0,7} \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta x}dx = \int_0^\delta \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$

$$+\int_\delta^{0,7} \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$ f - непрерывна на $[\delta, 0{,}7]$

$$=> \int_\delta^{0,7} \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}dx$$ - конечен => сходится

$$0{,}9\int_0^\delta \frac{\log^\alpha(1/x)}{x^\beta}dx \leq \int_0^\delta \frac{\log^\alpha(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)} \leq$$

$1{,}1 \int_0^\delta \frac{\log^\alpha(1/x)}{x^\beta}\,dx$

Следовательно $\int_0^\delta \frac{\log(1/x)\cos^4(x)}{tg^\beta(x)}$ имеет

ту же сходимость, что и

$$\int_0^\delta \frac{\log^\alpha(1/x)}{x^\beta}\,dx = \int_0^\delta (1/x)^\beta \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Разберем случаи

1) $\beta < 1$, тогда β можно представить в виде $\beta = 1 - 2b$, $b > 0$ $\int_0^\delta \left(\frac{1}{x}\right)^\beta \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right)dx =$

$$= \int_0^\delta \left(\frac{1}{x}\right)^{1-b} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^{-b} \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right) dx}_{\substack{\Downarrow\ \delta \to 0 \text{ при малых } \delta \\ b}} \le \int_0^\delta \frac{1}{x^{1-b}}\,dx = \frac{x^b}{b}\Big|_0^\delta =$$

$$= \frac{\delta^b}{b} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad \Rightarrow \text{ сходится}$$

2) $\beta = 1$

$$\int_0^\delta \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx = \int_0^\delta \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right) d(\log x) =$$

$$= \int_0^\delta \log^\alpha\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\log\frac{1}{x}\right) = -\frac{\log^{\alpha+1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\alpha+1}\Big|_0^\delta \text{ сход. при } \alpha < -1$$

3) $\beta > 1$ Представим β в виде

$\beta > 1 + 2b$, $b > 0$ $\int_0^{\delta} \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} \log^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) dx =$

$$= \int_0^{\delta} \left(\frac{1}{x}\right)^{1+b} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^{b} \log^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to \infty \text{ } x \to 0 \text{ при малых } \delta} dx \geq$$

$$\geq \int_0^{\delta} \frac{1}{x^{1+b}} dx = -\frac{1}{b} x^{-b} \Big|_0^{\delta} = +\infty$$ — интеграл расходится

Ответ: интеграл сходится при

$$\begin{cases} \beta = 1, & \alpha \in R \\ \beta < 1, & \alpha < -1 \end{cases}$$

№3

При каких p сходится $\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^p}\,dx$

$$\int_2^{\infty} \ldots = \int_2^{M} \ldots + \int_M^{\infty} \ldots$$

$\frac{\pi(x)}{x^p}$ - имеет конечное число разрывов 1-го рода и не имеет разрывов 2-го рода $\Rightarrow \int_2^{M} \frac{\pi(x)}{x^p}\,dx$ - конечен $\Rightarrow$ сходится

$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ при $x \to +\infty$. Возьмём такое M, что $\frac{1}{2}\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le \frac{3}{2}\frac{x}{\log x}$ тогда

$$\frac{1}{2}\int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{p-1}\log x} \le \int_M^{\infty} \frac{\pi(x)\,dx}{x^p} \le \frac{3}{2}\int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{p-1}\log x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_M^{\infty} \frac{\pi(x)}{x^p}\,dx$ имеет ту же сходимость что и $\int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{p-1}\log x}$.

Разберем случаи:

1) $p-1 < 1 \Rightarrow p-1 = 1-2b$, $b>0$

$$\int_M^\infty \frac{dx}{x^{p-1}\log x} = \int_M^\infty \frac{1}{x^{1-b}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{-b}\log x}}_{\infty \; x\to\infty} dx \geq$$ при больших M

$$\geq \int_M^\infty \frac{dx}{x^{1-b}} = \frac{x^b}{b}\Big|_M^\infty = \infty \Rightarrow \text{расходится}$$

2) $p-1=1$

$$\int_M^\infty \frac{dx}{x\log x} = \int_M^\infty \frac{d(\log x)}{\log x} = \log|\log x|\Big|_M^\infty - \text{расходится}$$

3) $p-1>1 \Rightarrow p-1 = 1+2b, \; b>0$

$$\int_M^\infty \frac{dx}{x^{p-1}\log x} = \int_M^\infty \frac{1}{x^{1+b}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{b}\log x}}_{0 \; x\to\infty} \leq$$ при больших M

$$\leq \int_M^\infty \frac{dx}{x^{1+b}} = -\frac{1}{b}x^{-b}\Big|_M^\infty = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{M^b} - \text{сходится}$$

Ответ: сходится при $p-1>1$ т.е $p>2$