№1.1)

$2x^2y\cdot y'+y^2=2 \Leftrightarrow 2x^2yy'=2-y^2 \,/ :2x^2 \Leftrightarrow$

$yy'=\frac{2-y^2}{2x^2} \Leftrightarrow \frac{ydy}{dx}=\frac{2-y^2}{2x^2} \Leftrightarrow \frac{ydy}{y^2-2}=-\frac{dx}{2x^2}$

$$\underbrace{\int\frac{ydy}{y^2-2}}_{1)}=\underbrace{\int-\frac{dx}{2x^2}}_{2)}$$

1) $\int\frac{ydy}{y^2-2}=[t=y^2-2]=\frac{dt}{dy}=2y \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{\ln t}{2}=\frac{1}{2}\ln(|y^2-2|)+C$

2) $-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{2}\int x^{-2}dx=\frac{1}{2x}+C \quad \left(\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

Т.о 1) и 2) $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\ln(|y^2-2|)+C=\frac{1}{2x}+C \,/ \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(|y^2-2|)=\frac{1}{x}+C \Rightarrow y^2-2=C\cdot e^{1/x}$

$x^2=0 \Rightarrow x=0$ - нет решение

$2-y^2=0$ $\quad y=\pm\sqrt{2}$ - решение, часть, при $C=0$

$\Rightarrow$ Ответ $\quad y^2=C\cdot e^{1/x}+2$

№ 1.2

$y' = \cos(y-x)$

$\left[\begin{array}{ll} u = y - x & y = u + x \\ u' = y' - 1 & y' = u' + 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow u' + 1 = \cos(u) \Leftrightarrow$

$u' = \cos(u) - 1$

$\frac{du}{dx} = \cos(u) - 1 \Leftrightarrow \frac{du}{\cos(u)-1} = dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{\cos(u)-1} = \int dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ctg\left(\frac{u}{2}\right) + c = x + C \Leftrightarrow ctg\ \frac{y-x}{2} + c = x + c$

$\cos(u) = 1 \Rightarrow u = 2\pi k \Rightarrow y - x = 2\pi k$

Ответ: $ctg\left(\frac{y-x}{2}\right) = x + C$; $y - x = 2\pi k$

№ 1.3

$y' - y = 2x - 3 \Leftrightarrow y' = 2x + y - 3 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} u = y + 2x - 3 & y = -2x + u + 3 \\ u' = y' + 2 & y' = u' - 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u' - 2 = u \quad u' = u + 2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = u + 2 \Leftrightarrow \frac{du}{u+2} = dx$

$\int \frac{du}{u+2} = \int dx \Leftrightarrow \ln(|u+2|) = x + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(|2x + y - 1|) = x + C \Leftrightarrow 2x + y - 1 = Ce^x$

$2x + y = 1$ — не решение $\Rightarrow$ Ответ: $y = Ce^x - 2x + 1$

N 1.4

$y' = \sqrt{4x+2y-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 2y+4x-1 & y = -2x+\frac{u}{2}+\frac{1}{2} \\ u' = 2y'+4 & y' = \frac{u'}{2}-2 \end{array} \right]$

$\frac{u'}{2} - 2 = \sqrt{u} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u'-4 = 2\sqrt{u} \\ u' = 2\sqrt{u}+4 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}+4$

$\frac{du}{2\sqrt{u}+4} = dx \Leftrightarrow \underbrace{\int \frac{1}{2\sqrt{u}+4} du}_{1} = \int 1 dx$

1) $\int \frac{1}{2\sqrt{u}+4} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}+2} du \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| t = \sqrt{u}+2 \to \frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \to du = 2\sqrt{u}\, dt \right| =$

$= 2\int \frac{t-2}{t} dt = 2\int \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt = 2\left(\int 1 dt - 2\int \frac{1}{t} dt\right)$

$= 2(t - 2\ln t) = 2t - 4\ln t =$

$= \left|2(\sqrt{u}+2) - 4\ln(\sqrt{u}+2)\right| \cdot \frac{1}{2} =$

$= \sqrt{u} + 2 - 2\ln(\sqrt{u}+2)$; $\sqrt{u} = 2$ - не решение $\Rightarrow$

Ответ: $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right) = x + C$

№ 1.5

$x^2y' - \cos 2y = 1$ $\qquad y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}, \quad x \to (+\infty)$

$x^2y' = 1 - \cos 2y \Leftrightarrow x^2y' = 2\cos^2 y \Leftrightarrow$

$x^2\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 y \Leftrightarrow \int\frac{dy}{2\cos^2 y} = \int\frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{tg} y = -\frac{1}{x} + c \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + c \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{llll} \text{при} & x \to +\infty & y = \operatorname{arctg}(c) \Rightarrow & \operatorname{tg} y = c \\ \text{при} & y = \frac{9\pi}{4} & \operatorname{tg}\frac{9\pi}{4} = 1 \Rightarrow & c = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 2\pi$

№ 1.6

$3y^2y' + 16x = 2xy^3$ $\qquad y(x)$ огр, при $x \to +\infty$

$3y^2y' = 2xy^3 - 16x$

$3y^2y' = 2x(y^3 - 8) \Leftrightarrow y' = \frac{2x(y^3-8)}{3y^2} \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y^3-8)}{3y^2} \Leftrightarrow \frac{3y^2dy}{\cancel{2x}(y^3-8)} = 2x\,dx$

$\underbrace{\int\frac{3y^2}{y^3-8}dy}_{1} = \underbrace{\int 2x\,dx}_{2} \quad \cancel{\Rightarrow}$

1) $\int \frac{3y^2}{y^3-8}\,dy = \left| u = y^3-8 \quad \frac{du}{dy} = 3y^2 \Rightarrow dy = \frac{1}{3y^2}du \right.$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) = \ln(|y^3-8|)$

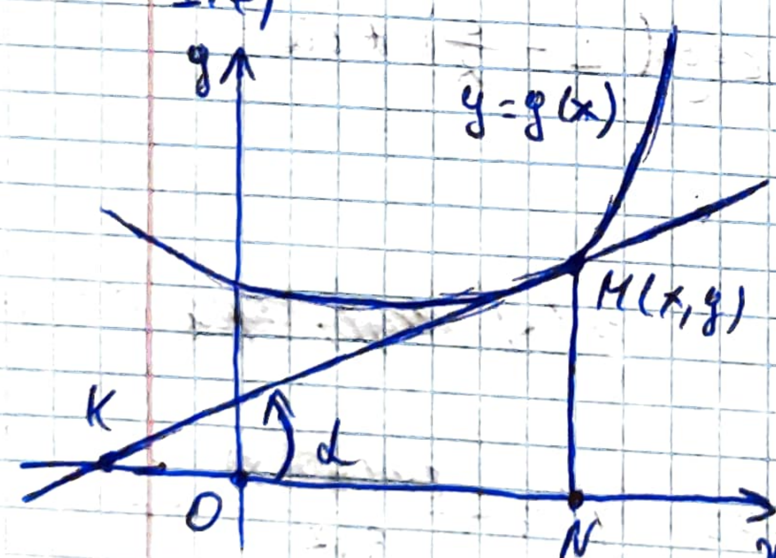
2) $\int 2x\,dx = x^2 + C$

$\ln(|y^3-8|) = x^2 + C \Leftrightarrow y^3 - 8 = Ce^{x^2}$

$y(x)$ огр. $x \to +\infty \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$

Ответ: $y = 2$

1.7)



$S = \frac{1}{2}|NK|\,y$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = y'$, то $S = \frac{y^2}{2y'}$

$y' > 0 \Rightarrow$

$\frac{y^2}{2} = a^2 y'$

Считаем что $y \neq 0$

$\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \frac{2dy}{y^2} = \int \frac{dx}{a^2} \Leftrightarrow -\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$

2) $y = \frac{2a^2}{Ca^2 + x}$ при $y' < 0$ $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$

1) $y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}$. Ответ: 1)

1,8)

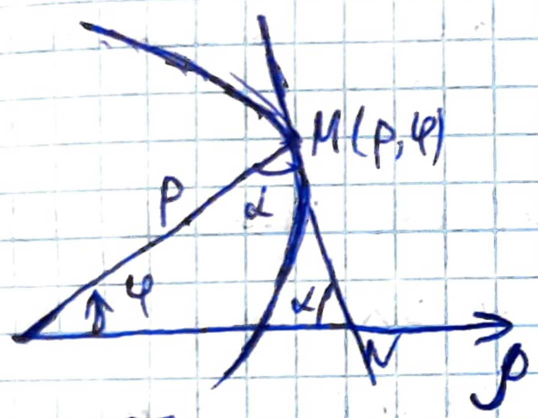


Рисунок 1

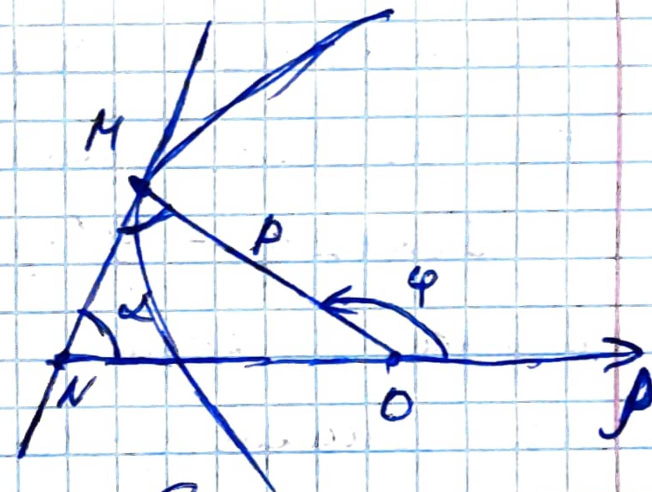


Рисунок 2

Используем соотношения между углами α и φ (рисунок 1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \ln\rho = -2\ln\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \ln 2C \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{C}{1+\cos\varphi}$$

Смотрим на Рисунок 2 $\Rightarrow$ дифф. уравнение будет выглядить вот так;

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \rho = \frac{C}{1-\cos\varphi} \Rightarrow$$

ответ: $\rho = \dfrac{C}{1\pm\cos\varphi}$

1.9) Пусть $y(x)$ - кол-ство света прошедшее через воду толщиной z => по условию

$y(x+\Delta x) - y(x)$ - кол-ство поглощенного света - равно $c\,y(x)\,\Delta x$

=> Имеем такое дифф уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$y(x) = y(0)e^{cx}$. Из условия $y(35) = \frac{1}{2}y(0)$

=> $c = -\frac{1}{35}\ln 2$ => $y(x) = y(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{35}}$

поставим $x = 2м = 200$ см, получим

$$\frac{y(200)}{y(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}} \Rightarrow \frac{y(0) - y(200)}{y(0)} \approx 98\%$$

Ответ: 98%

1.10)

$u(x)$ - удлинение шнура длиной x.

$u(\Delta x + x)$ - удленение шнура длиной x,

а ~~u~~$(\Delta x + x)$

=> удленение шнура длиной Δx будет ровна $u(x+\Delta x) - u(x)$

$f = \frac{P}{l}(l - x - 1\Delta x)$ где $(l - x - 1\Delta x)$ длина шнура,

а $\frac{P}{l}$ - вес шнура. Согласно условию он должен удлиняться на $c_1 f \Delta x$ метра

=> Получаем $u(x+\Delta x) - u(x) = c_1 \frac{P}{l}(l - x - 1\Delta x)\Delta x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{c_1 P}{l}(l - x) \quad \int du = \int \frac{c_1 P}{l}(l - x)\,dx$$

$$u(x) = \frac{c_1 P}{l}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + C$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u(x) = \frac{c_1 P}{l}\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$u(l) = \frac{c_1 P}{l}\left(l^2 - \frac{1}{2}l^2\right) = \frac{c_1 P l}{2}$$ - Ответ.

1.11)

Пусть $M(t)$, $V(t)$ - масса и скорость в момент t => $k(t) = M(t)V(t)$. =>

$k(t+\Delta t) - k(t) = \Delta p$, где p - импульс

~~Δp~~ действующих в течении Δt времени на промежутке $[t; t+\Delta t]$.

В данном случае таким импульсом служат продукты сгорания ракеты, которые отделяются со скоростью $c - v(t)$. Поскольку отделяется масса $M(t) - M(t+\Delta t)$ =>

$$\Rightarrow \Delta p = (c - v(t))(M(t) - M(t+\Delta t))$$

$$M(t+\Delta t)\,v(t+\Delta t) - M(t)\,v(t) = (c - v(t))(M(t) - M(t+\dots$$

$$\cancel{M\Delta v + c\Delta M + o(\Delta t) = 0}$$

$$\Delta M \cdot c + M\Delta v = 0$$

$$M + c\frac{dM}{dv} = 0$$

$$c\frac{dM}{dv} = -m \qquad \int c\frac{dM}{-m} = \int dv$$

$\vartheta = c \ln \frac{1}{m(t)} + C_1$ $\qquad \vartheta(0) = 0$, $m(t) = M$ $\qquad C_1 = -c \ln \frac{1}{M}$

$\vartheta = c \ln \frac{1}{m(t)} - c \ln \frac{1}{M} = c \ln \frac{M}{m(t)} = c \ln \frac{M}{M-k}$

где k - сгор. масса, тогда если сгорит все топливо $k = M - m \Rightarrow$

$\Rightarrow \vartheta = c \ln \frac{M}{m}$