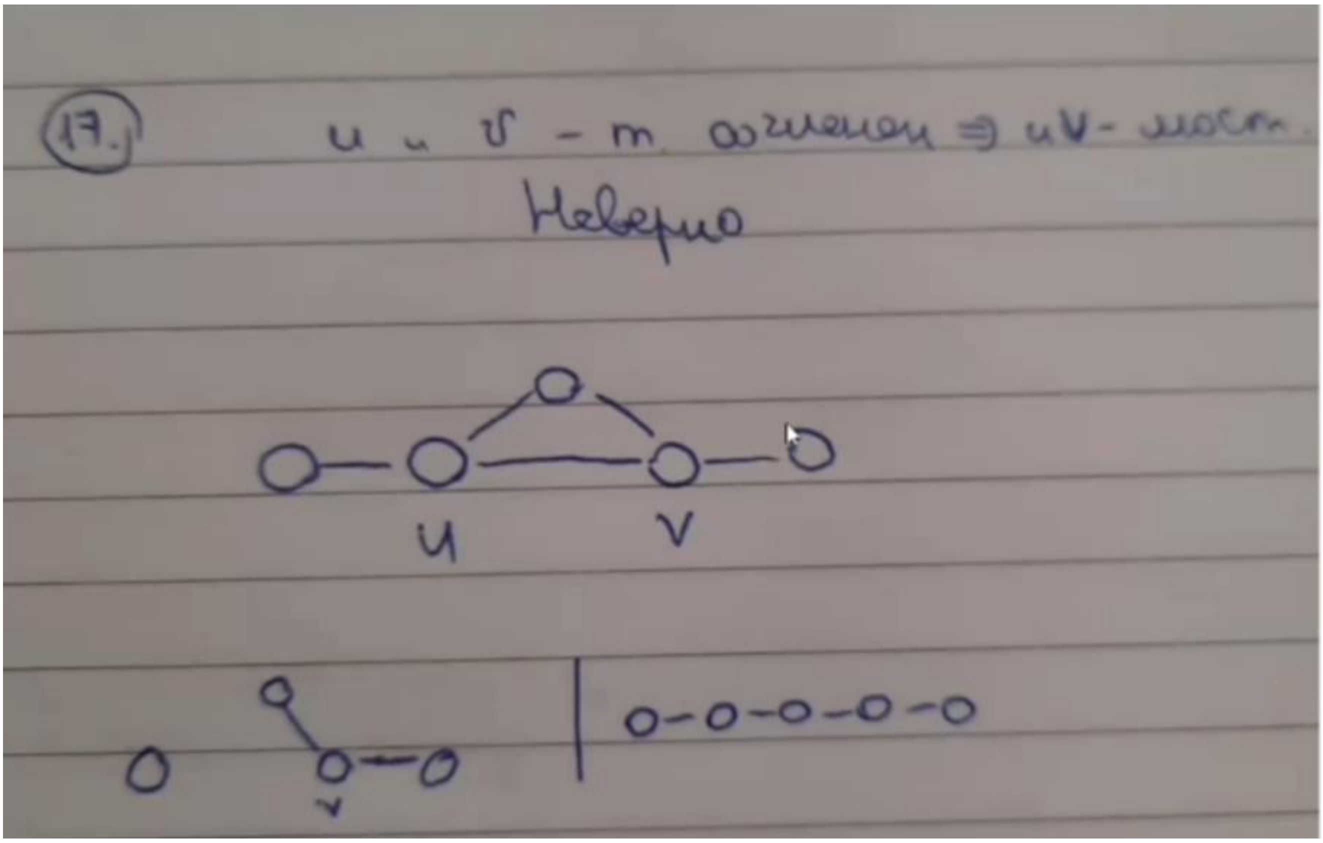
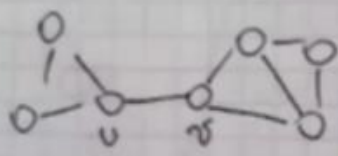
7. Докажите, что любой граф, содержащий хотя бы две вершины, имеет две вершины одинаковой степени.

Решение:

Идем от обратного. Допустим, что все вершины нашего графа содержат различные степени. Максимальная степень вершины в графе порядка n может быть ровна (n - 1), то есть вершины должны иметь степени (n - 1), (n - 2), (n - 3), … , 2, 1, 0. Очевидно в графе не может существовать сразу вершины с (n - 1) и 0 степенями. Тогда наша утверждение не правильно, доказано!



(19)



(=>) uv - мост

] ∃ путь ab, такой, что uv вершинно двусвязно с ab.

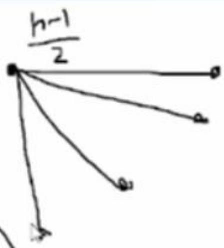
Тогда при удалении ребра uv мы сможем пройти uabv или ubav и ~~граф~~ новых к.с не добавится

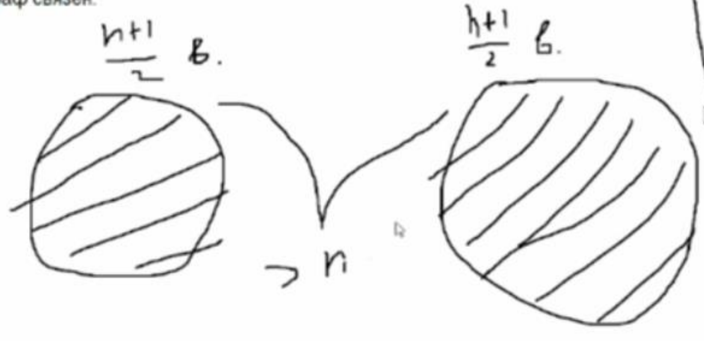
=> uv - не мост => противор.

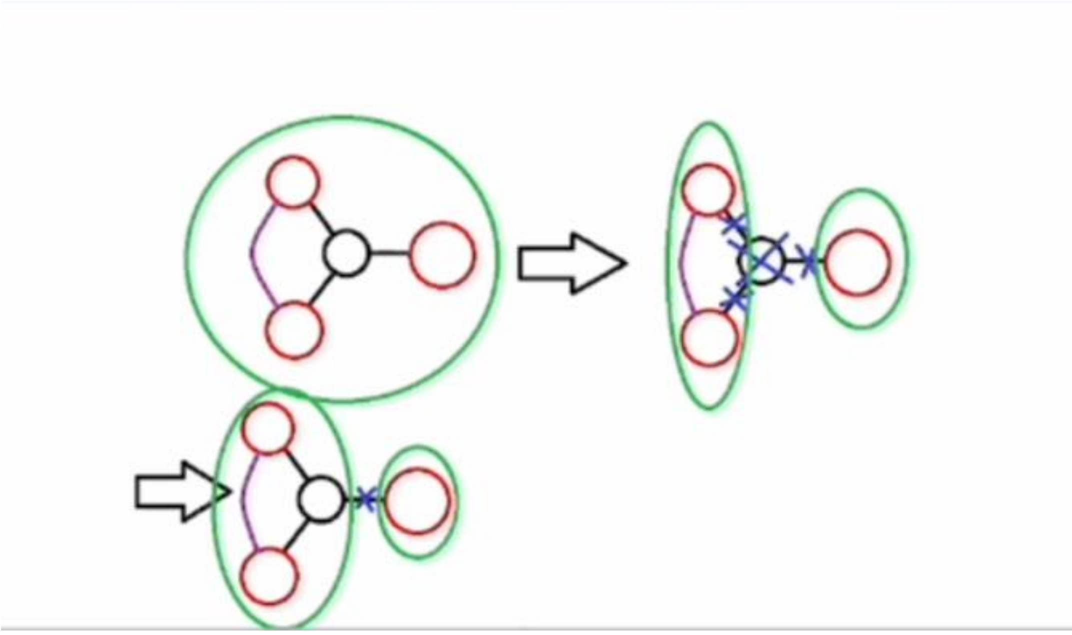
(<=) uv вершинно двусвязно только с самим собой => существует один путь из u в v => при удалении uv появится новая кс => мост

20

Предположим, что граф не связен. Тогда в каждой компоненте более (n - 1) / 2 + 1 вершин, то есть больше, чем (n + 1) / 2. Тогда общее число вершин в графе ((n + 1) / 2) * k, где k - количество компонент. Если k > 1, то число вершин > n, противоречие. Тогда k = 1 и граф связен.







(25) (⇒)] Граф связен.

Тогда $\forall y \in Y \ \exists \ path(x, y)$

Тогда обязательно $\exists$ ребро между X и Y.

(⇐)] $\forall X \oplus Y = V \ \exists \ uv$ $u \in X$, $v \in Y$

Покажем, что для любого $\forall p \in V$ можно построить путь до $\forall q \in V$

Рассмотрим $\underset{p}{H} / \underset{q}{T}$, $H \oplus T = V$

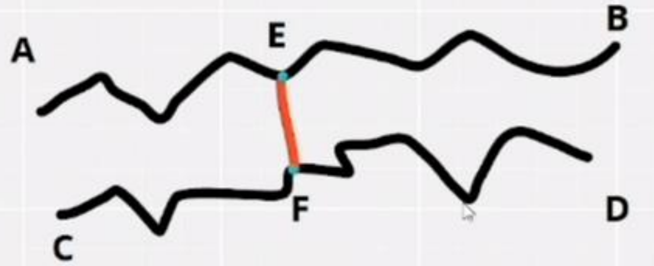
Тогда $\exists e \in E : beg(e) \in H$
$end(e) \in T$

$H += end(e)$

Процесс конечный, так как граф конечный ⇒

⇒ Рано или поздно найдём путь до $\forall q \in V$

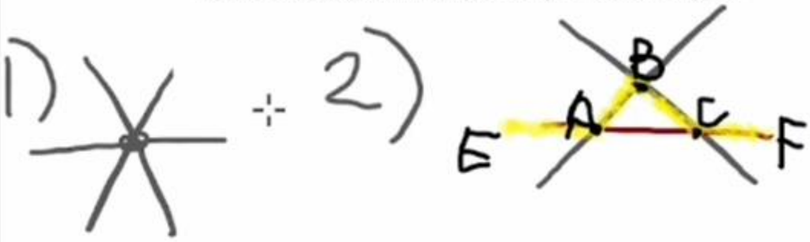
26. Докажите, что в связном графе любые два самых длинных простых пути имеют общую вершину.



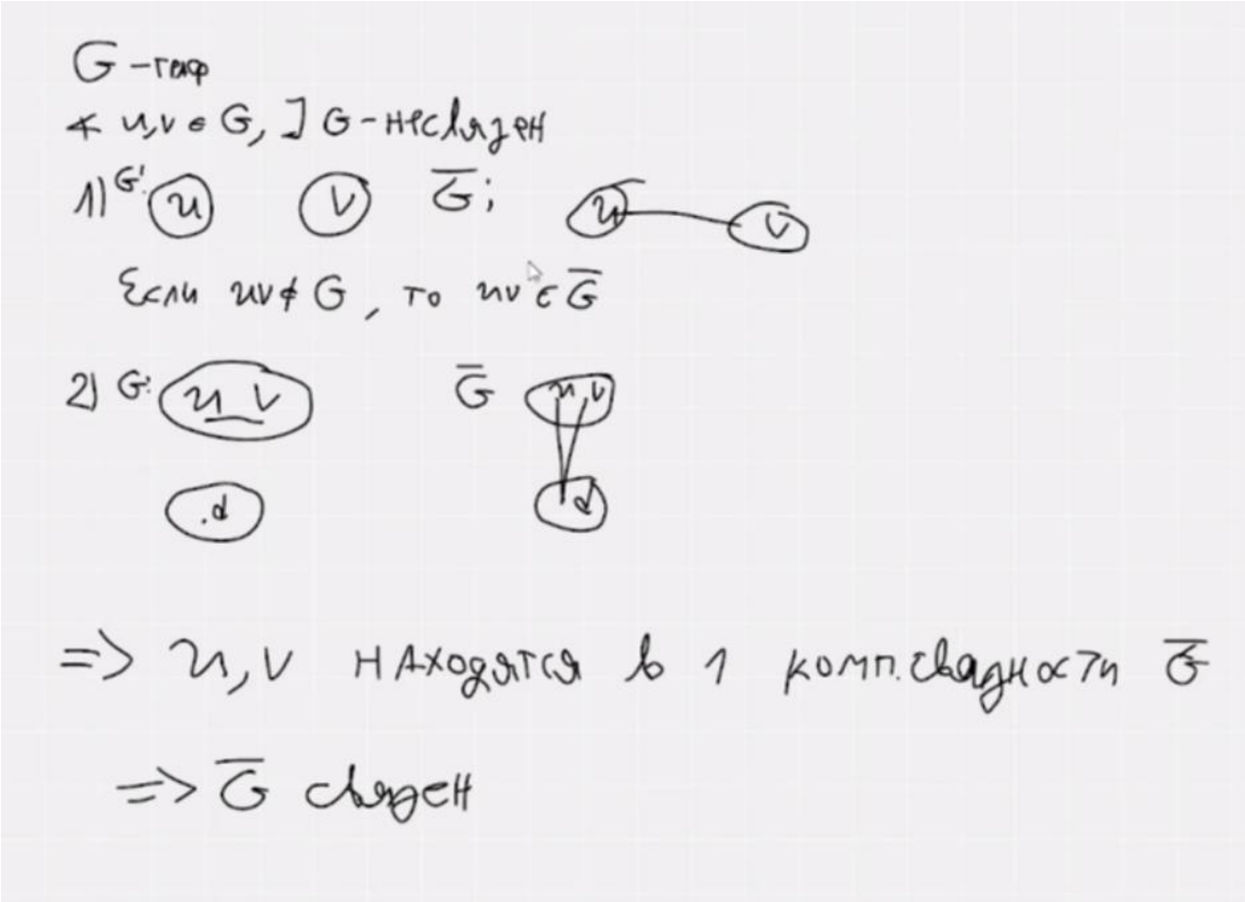
27

27. Докажите или опровергните, что в связном графе все простые пути, имеющие максимальную возможную длину в этом графе, имеют общую вершину.

В задаче 26 было доказано, что в связном графе любые два самых длинных простых пути имеют общую вершину.
Рассмотрим любые 2 самые длинные простые пути a и b. Выберем из оставшегося множества самых длинных простых путей какой-то путь c.

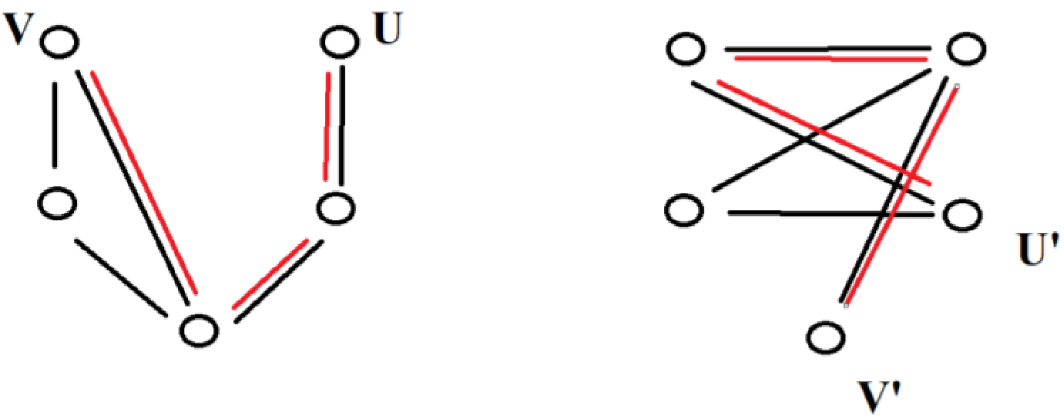


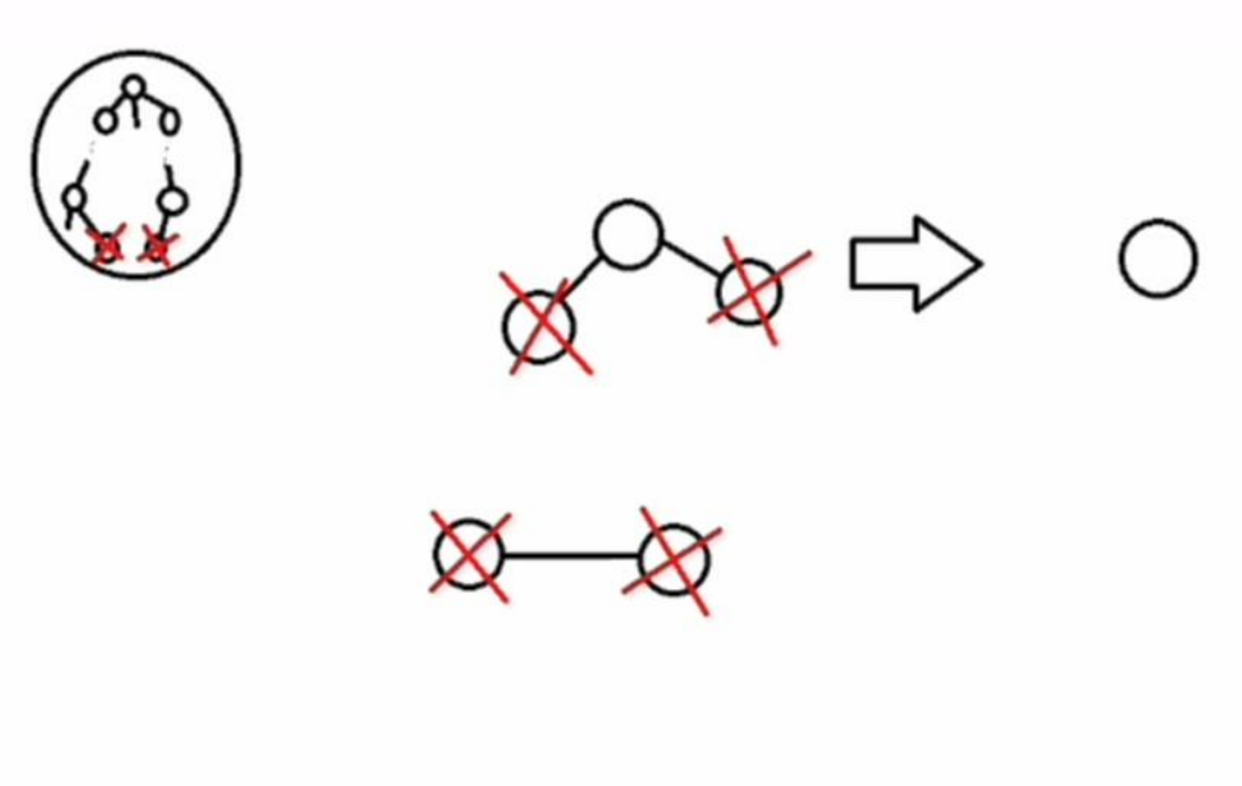
Рассмотрим случай 2, когда все пути пересекаются попарно, но не пересекаются в одной точке. Не умаляя общности, скажем, что AB>=BC>=AC. Но тогда можно провести путь EABCF, который будет очевидно длиннее пути EACF, т.е. этот путь не является самым длинным, т.е. противоречие, а значит - все три прямые пересекаются в одной точке.



30. Приведите пример графа, что ни он, ни его дополнение не связаны путями длины не больше 2.

Просто приведем пример графа, который удовлетворяет этим условиям:





50.

Лемма: Номер вершины v встречается в коде Прюфера тогда и только тогда, когда v не является листом, причём встречается этот номер ровно deg v − 1 раз.

Вспомним, как строится код Прюфера:

Пока колич. вершин ≥ 2

1. Выбирается лист v с мин. номером.
2. В код Прюфера добавляется номер верш., смежной с v.
3. Вершина v и инцидентное ей ребро удаляются из дерева.

Теперь докажем лемму:

1. Вершина с номером n не может быть удалена, следовательно на послед. шаге у неё была смеж. вершина, и число n встретилось в коде.
2. Если вершина не лист, то у неё на нек. шаге была смежная вершина-лист, ⇒ номер этой верш. есть в коде.
3. Если вершина явл. листом с номером меньше n, то она была удалена до того, как был удален её сосед ⇒ ⇒ её номера нет в коде.

Значит, номера всех вершин, которые не лист или имеют ном n, встречаются в коде Прюфера, а остальные — нет.

55) Пусть граф произвольно вычерчиваем из U

=> U - принадлежит всем эйлеровым циклам.

∃ V - еще одна точка сочленения

=> При ее удалении граф должен распадаться на компоненты

=> V - точка, соединяющая два эйлеровых цикла U - не принадлежит одному из них

без точек сочленения

U - точка сочленения.

59. *Будем называть последовательность $(d_n 1, \dots, d_n)$ степенной последовательностью, если существует граф с такими степенями вершин. Приведите критерий, проверяемый за полиномиальное время, что заданная последовательность является степенной.*

Сначала докажем одно утверждение. Пусть у нас есть отсортированный в невозрастающем порядке список степеней вершин $A = (s, t_1, ..., t_s, d_1, ...d_k)$. Тогда если $A' = (t_1 - 1, ..., t_s - 1, d_1, ...d_k)$ задаёт некоторый простой граф, то A тоже задаёт простой граф. (Рекурсивное утверждение, которым мы будем пользоваться в нашем алгоритме, который на самом деле назван в часть Гавеля и Хакими).

Докажем в одну сторону. Пусть A' задаёт некоторый простой граф G'. Тогда Возьмём первые t вершин в порядке невозрастающей сортировки, создадим ещё одну вершину S, присоединим к ней ребрами t вершин. Получим искомый граф G.

Доказательство в другую сторону менее тривиально. Рассмотрим $A = (s, t_1, ..., t_s, d_1, ...d_k)$, которое задаёт некоторый граф G. Имеем следующие случаи - либо вершина S связна ребром с T_{1-s} и мы просто удалим рёбра, соединяющие S с этими вершинами, получив валидный граф, либо же имеем случай, когда вершина S не связана ребром с некоторыми T_i. Покажем, что мы можем перестроить граф G так, чтобы он сохранил свою степенную последовательность, но отсылал к первому случаю. Тогда вершина S может быть связна ребром с некоторой вершиной D_j - пусть её степень будет d_j. Известно, что $d_j \leq t_i$ - по порядку вершин. В частном случае равенства степеней мы можем просто поменять эти вершины местами и вернуться к к первому случаю. Если же у нас строгое неравенство, то у вершины T_i больше соседей чем у D_j - назовём этого соседа W (которого нет у D_j). Тогда проведём с G следующие модификации - удалим рёбра S, D_j и T_i, W, затем добавим новые рёбра S, T_i и D_j, W - эта модификация сохраняет степенную последовательность, но теперь S связана ребром с T_i. Этот процесс мы можем проводить вплоть до случая, пока S не станет связана ребром с множеством вершин T - это первый случай.

Сам алгоритм подразумевает рекурсивную проверку получившейся последовательности на каждом шаге, пока мы не дойдём до нулевого вектора. Сложность - $O(n^2)$ (объясню словами).

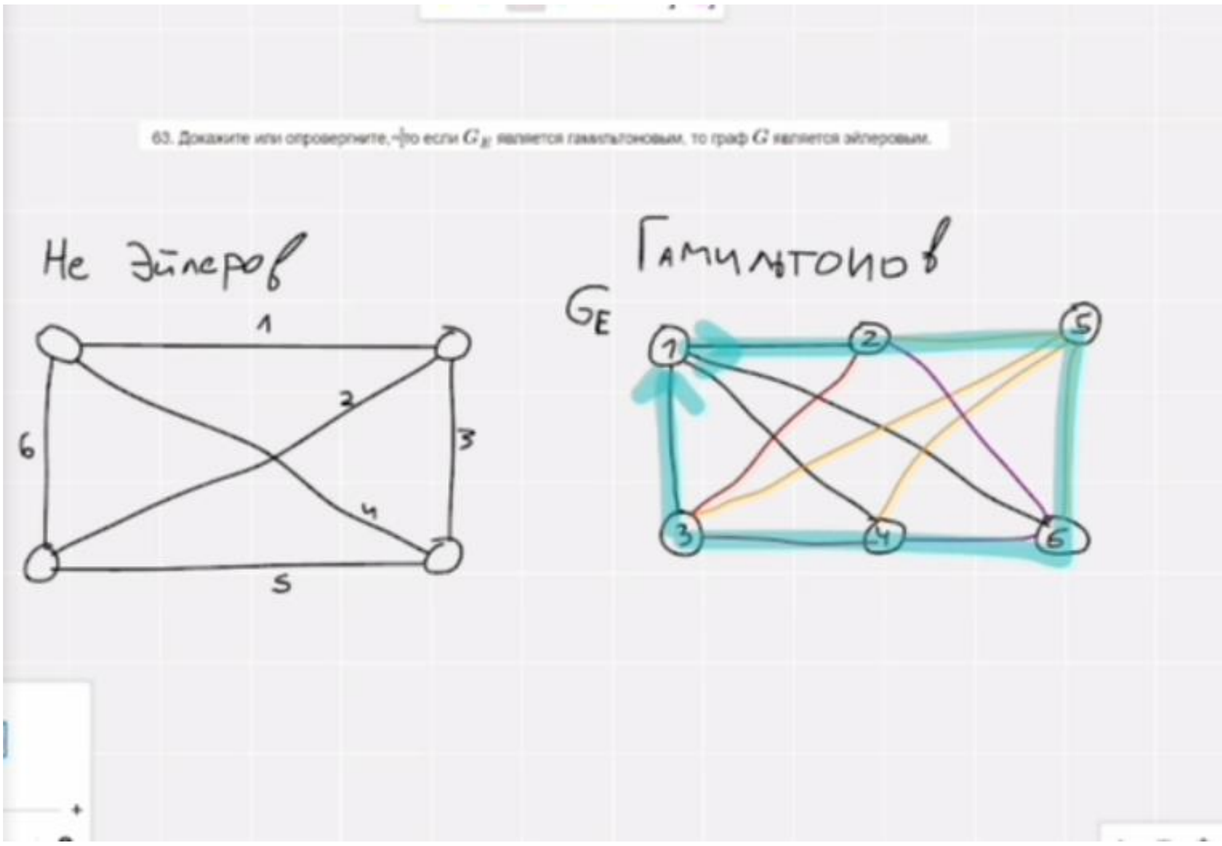
62. Реберным графом для графа G называется граф G_E, множество вершин которого совпадает с множеством ребер исходного графа, два ребра e и f соединены ребром в реберном графе, если у них есть общая инцидентная вершина. Докажите или опровергните, что если G является эйлеровым, то реберный граф является гамильтоновым.

62)

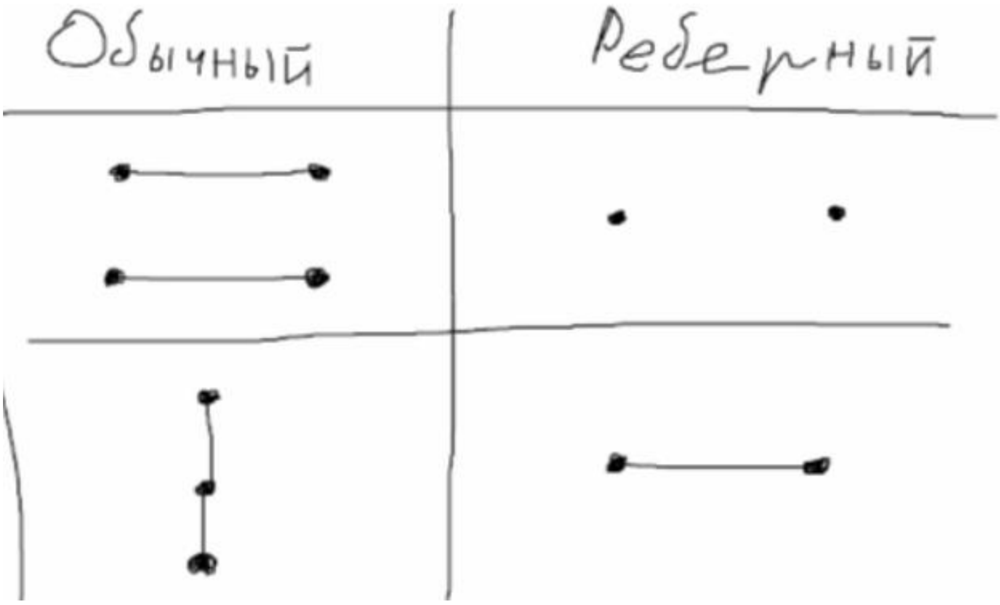
Рассмотрим Эйлеров путь $e_{i_1}, v_{k_1}, e_{i_2}, \dots v_{k_{n-1}}, e_{i_n}$ в исходном графе G. Составим из вершин реберного графа G_E последовательность $v_{j_1}, \dots, v_{j_n}$ поставив в соответствие ребру e_{i_k} вершину v_{j_k}. Так как два подряд идущих ребра $e_{i_k}, e_{i_{k+1}}$ из исходного пути смежны, то из определения реберного графа следует, что соотв. подряд идущие вершины в получающ. пос/ти $v_{j_k}, v_{j_{k+1}}$ смежны, след/но мы получим Гамильтонов путь $v_{j_1}, e'_{t_1}, \dots, e_{t_{n-1}}, v_{j_n}$ в G_E.

Док/ство для циклов аналогично.

63


63. Докажите или опровергните, что если G_E является гамильтоновым, то граф G является эйлеровым.
Не Эйлеров
Гамильтонов
G_E
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6

69

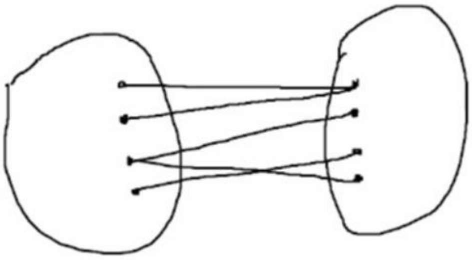

Обычный
Реберный

$\delta \le \lambda$

Если $\lambda(G) > \delta(G)$, то удалим все ребра из вершины с минимальной степенью, их будет $\delta(G) < \lambda(G)$, но граф распадется на две компоненты, получаем противоречие. Тогда доказано, что $\lambda(G) \le \delta(G)$

Докажем теперь $\kappa(G) \le \lambda(G)$.

Если $\lambda(G) = 1$, то граф содержит мост, тогда просто удалим ту из вершин моста, в компоненте которой больше вершин, получим $\kappa(G) = \lambda(G) = 1$. Если $\lambda(G) > 1$, то при удалении из графа $\lambda(G) - 1$ ребра получим граф с мостом, пусть этот мост из вершин x и y. Тогда для каждого удаленного ребра будем удалять одну из вершин на нем, не равную x и y. Получим граф с $\lambda(G) - 1$ удаленными вершинами и ребром xy, которое раньше было мостом. Если граф несвязный, то доказано. Если он остался связным, то xy остался мостом. Тогда удалим либо x, либо y, получим несвязный граф, в котором $\kappa(G) = \lambda(G)$. В любом случае $\kappa(G) \le \lambda(G)$.



73

k(G) - минимальное число вершин, которые нужно удалить, чтобы граф потерял связность

Докажите, что не существует графов с k(G) = 3 и 7 ребрами

Рассмотрим случаи

При n > 8 граф уже не является связным

При n = 8 единственный связный граф - бамбук, у которого k(G) = 1

При n = 7 есть только два случая связного графа, оба имеют k(G) <= 2

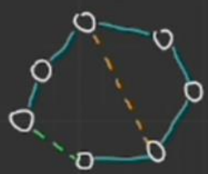
При n = 6 обязательно существует вершина, степень которой <= 2, значит k(G) <= 2

При n = 5, аналогично

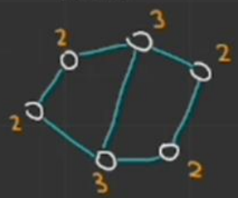
При n = 4, единственное представление близкое к требованиям - полный граф с петлей -> плохой граф

Следовательно, искомого графа не существует

n = 7



n = 6



Если мы хотим граф с k(G) > 2, то каждая вершина должна иметь степень хотя бы 3

n = 6 не может следовать этому правилу, поскольку по лемме о рукопожатиях у нас не хватит ребер

Sum deg(v) = 2 * |E|
18 = 2 * 9

Нужно 9 ребер, а у нас только 7

n = 5

Для случая n = 5 попробуем тоже сделать степени хотя бы 3, но нам вновь не хватит ребер для хотя бы одной вершины

G_1: n_1 вершин, m_1 ребер

G_2: n_2 вершин, m_2 ребер

$--n$ $--m$ $++n$ $++m$

$n_1 \rightsquigarrow n_2$

$m_1 \rightsquigarrow m_2$

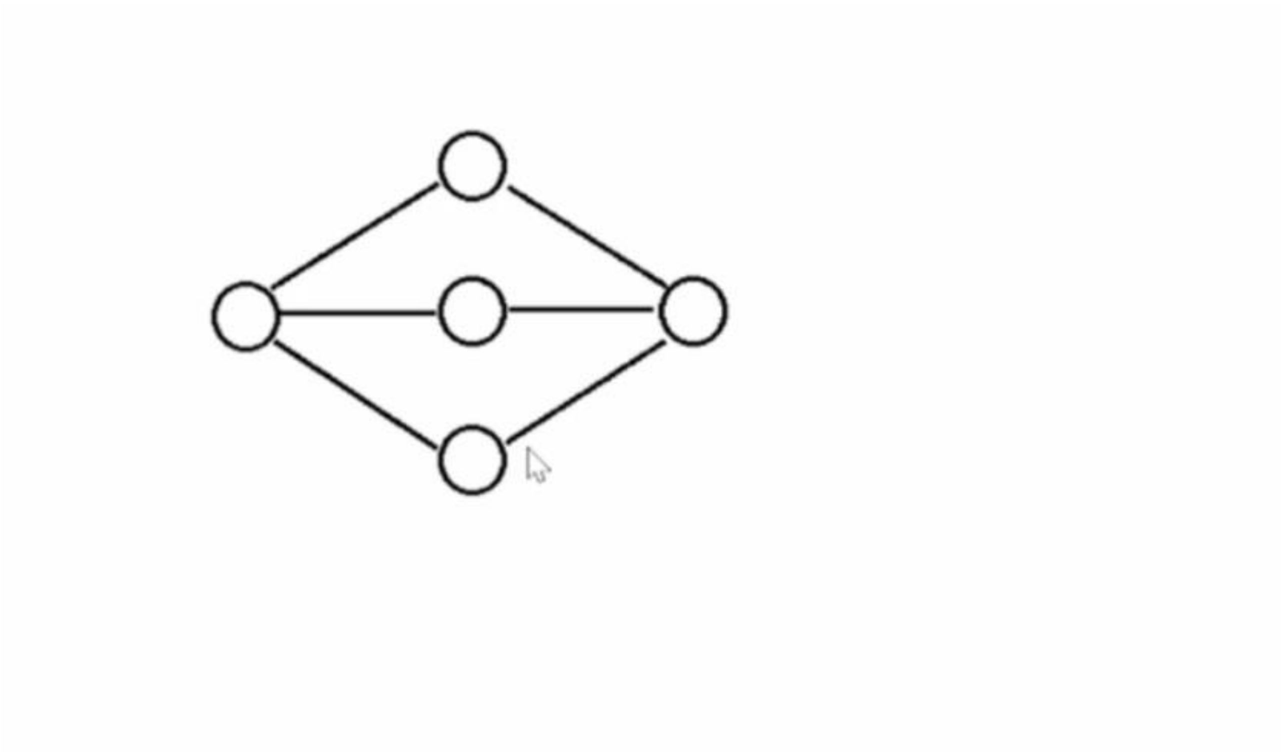
$$\Delta n = \Delta m$$

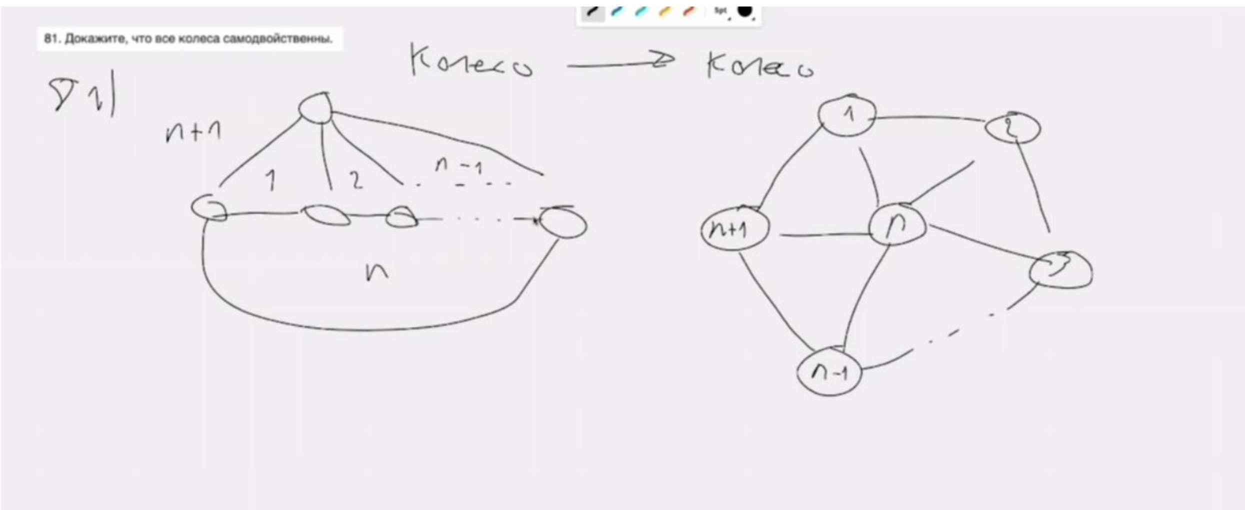
$$\Delta n - \Delta m = 0$$

$$(n_2 - n_1) - (m_2 - m_1) = 0$$

$$n_2 + m_1 = n_1 + m_2$$

77





83. Докажите, что можно ориентировать ребра планарного графа так, что $deg^{-}(v) \leq 5$ для всех вершин v.

Докажем, что
$\exists v \in V: \deg v \leq 5$

От обратного

$\forall u \ \deg u \geq 6$

$2|E| = \sum_{u \in V} \deg u \geq 6|V|$

$|E| \geq 3|V| \Rightarrow$ ⨯ Выполняется $|E| \leq 3|V| - 6$

1) Возьмем $v: \deg v \leq 5$

2) ориентируем ребра в неё

3) удалим v

87

Если можно, то

$$F - 28 + 8 = 0$$

Каждая грань образована минимум тремя ребрами, каждое ребро принадлежит не более чем двум граням, тогда

$$3F \leqslant 2 \cdot 28$$

$$60 > 56$$

Предположение неверно.

92

У нас есть x цветов, выберем из них k, в которые покрасим первую компоненту, сделать это можно C_x^k способов, теперь нам нужно разложить вершины в k бакетов, это можно сделать $S(n,k)$ способами, но бакеты упорядочены, а число Стирлинга цвета нет, поэтому домножим на $k!$ получается у нас $C_x^k S(n,k)\,k!$ способов

Теперь раскрасим вторую компоненту, в ней m вершин и $(x-k)$ цветов, т.к. они соед с 1 комп, то есть $(x-k)^m$ способов, получаем

$$P(K_{n,m}, x) = \sum_{k=1}^{x} C_x^k S(n,k)\,k!\,(x-k)^m$$

145. *Найдите математическое ожидание и дисперсию степени вершины в биномиальной модели $G(n,p)$.*

Доказательство. По линейности матожидания получим:

$$E[d] = (n-1) \cdot p$$

$$D[d] = (n-1) \cdot (p - p^2)$$

□

146. *Равномерная модель $G(n,m)$ - каждый граф с n вершинами и m ребрами равновероятен. Найдите математическое ожидание степени вершины в равномерной модели $G(n,m)$.*

Доказательство. Рассмотрим равновероятную модель $G_{n,m}$.

$$p(edgeismarked) = \frac{2m}{n(n-1)}$$

$$E[d] = (n-1) \cdot \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{2m}{n}$$

□

(147) $X_i = \begin{cases} 1, & \text{существ ребро в } i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad i \in [1..n-1]$

$$\mathcal{D}d = Ed^2 - (Ed)^2$$

из 146 $\quad Ed = \frac{2m}{n}$

$$p_1(uv) = \frac{2m}{n(n-1)}$$

$$p_2(uv) = \frac{2(m-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$\cancel{Ed^2 = E\sum (X_i)^2 - \sum X_i^2 + 2\sum_{i \neq j}(X_i X_j)}$$

$$Ed^2 = E\left(\sum X_i\right)^2 = \sum X_i^2 + 2\sum_{i \neq j} E(X_i X_j) =$$

$$= \sum X_i + 2\sum_{i \neq j} E(X_i X_j) =$$

$$= \frac{2m}{n} + 2\binom{n-1}{2} \cdot \frac{2m}{n(n-1)} \cdot \frac{2(m-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}d = \frac{2m}{n} + 2\binom{n-1}{2} \frac{2m}{n(n-1)} \frac{2(m-1)}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{2m}{n}\right)^2$$

№ 148

Всего деревьев n^{n-2}

Графов Всего графов $C_{n-1}^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$p = \frac{n^{n-2}}{C_{n-1}^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

№ 149

$$n^{n-2}\, p^{n-1}\, q^{\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)}$$

150. Найдите вероятность, что граф в равномерной модели $G(n, m)$, является гамильтоновым циклом ($m = n$).

Решение:

Найдем количество различных гамильтоновых циклов длины n и он будет равен $\frac{(n-1)!}{2}$

Случай различных бус [править | править код]

Для данного набора из n (различных) бусин число различных ожерелий, сделанных из этих бусин, если считать повёрнутые ожерелья теми же самыми, равно $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Это следует из того, что бусины могут быть расположены линейно $n!$ способами и n циклических сдвигов каждого такого линейного порядка даёт то же самое ожерелье. Аналогично, число различных браслетов, если считать повороты и отражения теми же самыми, равно $\frac{n!}{2n}$ для $n \geqslant 3$.

Общее количество графов с m ребрами равно $\binom{\frac{n*(n-1)}{2}}{n}$ (так как m == n).

Тогда финальный ответ будет:

$$\frac{\frac{(n-1)!}{2}}{\binom{\frac{n*(n-1)}{2}}{n}}$$

151

$$P(m=k) = p^k (1-p)^{C_n^2 - k} \cdot C_{C_n^2}^k$$

$$P(\text{цикл длины } n) = p^n (1-p)^{C_n^2 - n} \cdot C_{C_n^2}^n \cdot \frac{(n-1)!}{2} \cdot \frac{1}{C_{C_n^2}^n} =$$

$$= p^n (1-p)^{C_n^2 - n} \frac{(n-1)!}{2}$$

152. Оцените центральный биномиальный коэффициент $\binom{2n}{n}$ снизу величиной порядка $c\frac{4^n}{\sqrt{n}}$, используя формулу Стирлинга.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$C\frac{4^n}{\sqrt{n}} \le \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow C \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

№153.

$$P(n)=\frac{m(n)}{\binom{n}{2}} \qquad \binom{n}{2}-m(n)\to\infty$$

$m(n)\to\infty$

$$P(m)=p^{m}\cdot(1-p)^{\binom{n}{2}-m}\cdot\binom{\binom{n}{2}}{m}=$$

$$=\frac{m^{m}}{\binom{n}{2}^{m}}\cdot\frac{\left(\binom{n}{2}-m\right)^{\binom{n}{2}-m}}{\binom{n}{2}^{\binom{n}{2}-m}}\cdot\frac{\binom{n}{2}!}{\left(\binom{n}{2}-m\right)!\,m!}\approx$$

По ф-ле Стирлинга:

$$\approx\frac{m^{m}\cdot\left(\binom{n}{2}-m\right)^{\binom{n}{2}-m}}{\binom{n}{2}^{\binom{n}{2}}}\cdot\frac{\left(\frac{\binom{n}{2}}{e}\right)^{\binom{n}{2}}\cdot\sqrt{2\pi\binom{n}{2}}}{\left(\frac{\binom{n}{2}-m}{e}\right)^{\binom{n}{2}-m}\cdot\sqrt{2\pi\left(\binom{n}{2}-m\right)}\cdot\left(\frac{m}{e}\right)^{m}\cdot\sqrt{2\pi m}}=$$

$$=\frac{\cancel{m^{m}}\cancel{\left(\binom{n}{2}-m\right)^{\binom{n}{2}-m}}}{\cancel{\binom{n}{2}^{\binom{n}{2}}}}\cdot\frac{\cancel{\binom{n}{2}^{\binom{n}{2}}}\cdot\sqrt{2\pi\binom{n}{2}}}{\left(\frac{\cancel{\left(\binom{n}{2}-m\right)^{\binom{n}{2}-m}}}{\cancel{e^{\binom{n}{2}-m}}}\cdot\frac{\cancel{m^{m}}}{\cancel{e^{m}}}\sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2}-m\right)}\sqrt{2\pi m}\right)\cancel{e^{\binom{n}{2}}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\binom{n}{2}}}{\sqrt{m}\sqrt{\binom{n}{2}-m}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m}{\binom{n}{2}}}}\Rightarrow P=\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

$\frac{m}{\binom{n}{2}}\to 0$ (по усл

155. Рассмотрим следующую модель генерации случайного графа. Сначала проведем каждое ребро с вероятностью $\frac{1}{2}$. Затем, для каждой пары вершин, между которыми не было проведено ребро на первом шаге, проведем ребро с вероятностью $\frac{1}{3}$. Предложите более простое описание этой модели в терминах моделей Эрдёша-Реньи.

Вероятность, что ребро не будет проведено в итоге:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Следовательно, вероятность, что ребро будет проведено в итоге:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = p$$

Тогда можно предложить следующую биномиальную модель G(n, p) для рассматриваемой генерации: G(n, 2/3)

№156.

$\forall\, x = \dfrac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$ т.к. $1 \geq p_2 \geq p_1$, то

$1 - p_1 \geq p_2 - p_1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \geq x \geq 0$

$\Rightarrow \forall\, G(n, x)$, тогда $\forall\, g = a \cup b$: (соот. пронумерованы)

$a \in G(n, x)$
$b \in G(n, p_1)$, тогда вероятность

p отсутствия ребра в g равна

$$p = (1 - x)(1 - p_1) = \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}\right)(1 - p_1) =$$

$= (1 - p_2)$ — вер-ть отсутствия ребра в $G(n, p_2)$

$\Rightarrow$ наличие ребра в g зав от наличия ребра в объединении (один. в-ть)

$\Rightarrow$ вероятность наличия ребра в g выше чем в a

$(P(G(n, p_2)) \geq P(G(n, p_1)))$

157. Придумайте такое свойство, что вероятность, что $G(n, \frac{1}{2})$ обладает этим свойством, стремится к $\frac{1}{4}$.

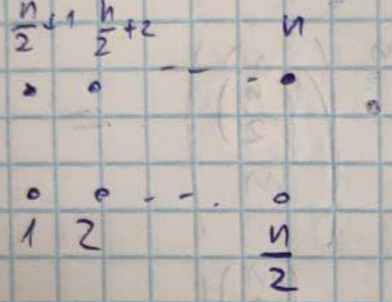
Выберем какую-то вершину и 2 определенных ребра из неё.

Тогда вероятность того, что существуют 2 ребра $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

№158

Пронумеруем вершины у графа

Поделим вершины на две половины



] св-во истинно, если $\exists k$: k верш. имеет ребра с $k-1$ верш. (от 1 до $k-1$) из её множества и с $k+1$ верш из второй половины (от $\frac{n}{2}+1$ до $\frac{n}{2}+k+1$)

$\Rightarrow$ вероятность истинности

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} \to \frac{1}{3}$$

161. Докажите, что $G(n, \frac{2\ln n}{n})$ а.п.н. не содержит вершин степени 0.

$$p = \frac{2\ln n}{n}$$

ξ - кол-во изол. верш

$P(\xi \geqslant 1) \leqslant \frac{E\xi}{1}$ - нер-во Маркова

$\xi_i = 1$, если i изол., иначе 0

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n =$$

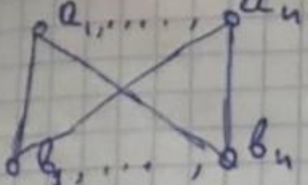
$$= n(1-p)^{n-1} = n\left(\left(1 - \frac{2\ln n}{n}\right)^{-\frac{n}{2\ln n}}\right)^{-\frac{n-1}{n}\cdot 2\ln n} \to 0$$

$n \to \infty \to e$

$\to \frac{1}{n^2}$

162. Рассмотрим модель случайного двудольного графа G (n, n, p): из полного двудольного графа Kn,n каждое ребро удаляется с вероятностью 1−p. Пусть X -- количество изолированных вершин первой доли. Найдите EX и DX.

(162) $G(n,n,p)$



$(1-p)$ в. у. ребра

$X = X(G)$ - кол. из. вершин в первой доле

EX - ? DX - ?

$X = X_1 + \dots + X_n$, $X_i(G) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ из} \\ 0, & \text{если } a_i \text{ не из} \end{cases}$

$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = n(1-p)^n$

поскольку что из $\forall a_i$ выходит n ребер в вторую долю, и все они удаляются с вероятностью $(1-p)^n$

$DX = DX_1 + \dots + DX_n \Rightarrow$ $DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 =$

$\Rightarrow DX = n(1-p)^n(1-(1-p)^n)$ $= EX_i - (EX_i)^2 = EX_i(1 - EX_i)$

№163

$p = o\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$

$$X = \underbrace{X_1 + \ldots + X_{3C_n^3}}_{\text{пути длины 2}}$$

$$EX = \sum_i EX_i = 3 \cdot C_n^3 \cdot p^2 \to 0$$

$$p^2 = o\left(n^{-3}\right) \qquad 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{3!} \cdot p^2 \to 0$$

$\Rightarrow$ апн нет пути длины 2, т.е. все к.с. размера $\leq$

№164

$p = \Omega(n^{-1,5})$, то $G(n,p)$ сод. путь длины 2

$EX = C_n^3 \cdot 3 \cdot p^2$, при $p = \Omega(n^{-1,5})$, $EX \to \infty$

X — кол-во путей длины 2

$\Rightarrow$ М. вторых моментов

$$EX^2 = E\Big(\underbrace{\text{кол-во путей длины 2}}_{\left(\sum_{a,b,c} x_{abc}\right)^2}\Big)^2 = E\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ a',b',c'}} x_{abc}\, x_{a'b'c'}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{a,b,c\\ a',b',c'}} P(\exists \text{ пути по } a,b,c \text{ длины 2 и } \exists \text{ пути по } a'b'c' \text{ длины 2}) =$$

$$= \underbrace{9C_6^3 C_n^6 p^4}_{=E^2X(1+o(1))} + \underbrace{9 \cdot C_n^5 \cdot C_5^3 \cdot 3 \cdot 3\, p^4}_{=E^2X(o(1))} + \underbrace{C_6^1 C_n^4 p^3 \cdot 2 \cdot 2}_{=E^2X(o(1))} +$$

все разные верш. — 1 верш. совп. — 2 верш. совп.

$$+ \underbrace{3C_n^3 p^2}_{= EX = E^2X(o(1))} = E^2X(o(1)+1) \Rightarrow$$

3 верш. совп.

$\exists$ путь длины 2

Вероятность того, что $G(n,p)$ содержит K_4: $\quad n^4 \cdot o(n^{-4}) = o(1) \to 0$

$$P = \binom{n}{4} \cdot p^6 = \left(\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n\right) p^6$$

Заметим, что $\binom{n}{4} \le n^4$.

Тогда, чтобы $P \to 0$ необходимо

$$p^6 = o(n^{-4}) \Rightarrow p = o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right) = o(n^{-\frac{2}{3}})$$

$\Rightarrow G(n,p)$ а.п.н. не содержит K_4

(166) $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, k - const

Д-ть: $G(n,p)$ а.п.н. не сод. цикл дл k.

x - кол-во циклов длины k.

$\binom{n}{k}$ способов выбр. k верш.

$\frac{(k-1)!}{2}$ число составленных циклов

$$Ex = \binom{n}{k}\frac{(k-1)!}{2}\cdot p^k \leq \frac{n^k}{k!}\cdot\frac{(k-1)!}{2}\cdot p^k = \frac{n^k}{2k}\cdot p^k =$$

$$= \frac{n^k}{2k}\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)^k = O(n^k)\cdot o(n^{-k}) \longrightarrow 0$$

$\underset{\text{а.п.н.}}{\Rightarrow}$ $P_{\text{есть цикл длины } k} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ $P_{\text{нет цикла дл } k} \longrightarrow 1$.

ω 167.

$$EX = \binom{n}{k} \frac{k!}{2k} p^k \approx \frac{n^{2k} \cdot p^k}{2k} \approx \frac{\omega^k(1)}{2k} \longrightarrow \infty$$

$$\measuredangle\; EX^2 = E\left(\sum X_i\right)^2 = E\sum_i X_i^2 + E\sum_{i \neq j} X_i X_j =$$

$i = (i_1, i_2, \dots, i_k)$

$$= EX + \underbrace{C_n^{2k} \cdot C_{2k}^{k} \cdot p^{2k} \cdot \frac{(k!)^2}{4k^2}}_{\text{нет пересеч}} = E^2X(1+o(1)) + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \cdot C_n^{2k-i} p^{2k-i+1}}_{i\text{ пересеч}}$$

$\frac{n!}{\cancel{2k!}(n-2k)!} \cdot \frac{\cancel{2k!}}{\cancel{k!k!}}$

$\approx n^{2k}$

(при этом подряд идущие в цикле вершины)

$$\measuredangle\; \alpha_i C_n^{2k-i} p^{2k-i+1} \approx \alpha_i n^{2k-i} \cdot p^{2k-i+1} = E^2X\left(\frac{\alpha_i}{n^i p^{i-1}}\right) =$$

$$= E^2X\left(\frac{\alpha_i p}{\omega^i(1)}\right) = o(1) \cdot E^2X \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i C_n^{2k-i} p^{2k-i+1} = o(1) E^2X$$

$\frac{\alpha_i p}{\omega^i(1)} = o(1)$

Заметим, что если верш не подряд идущие в обоих циклах, то надо больше ребер $\Rightarrow$ эти слаг. также $E^2X \cdot o(1)$, а т.к. их конечно, то их сумма $E^2X \cdot o(1)$

$$\Rightarrow EX^2 = EX + E^2X(1+o(1)) + E^2X \cdot o(1) + E^2X \cdot o(1) =$$

$$= E^2X(1+o(1)) \Rightarrow$$ по методу 2 момента а.н. есть цикл длины k

168. Пусть $p = o(\frac{1}{n})$. Покажите, что $G(n, p)$ а.п.н. не содержит циклов.

$$P = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k-1)!}{2} p^k \le \sum_{k=3}^{n} (np)^k$$

$$n \geq n_0 : np < 1$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (np)^k = \frac{(np)^3}{1-np} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

169. Покажите, что матожидание количества остовных деревьев у графа $G(n, \frac{2\ln n}{n})$ стремится к бесконечности. Можно ли это считать доказательством а.п.н. связности графа $G(n, \frac{2\ln n}{n})$? НЕТ

$$p = \frac{2\ln n}{n}$$

Количество остовов n^{n-2}

$$n^{n-2} \cdot p^{n-1} = n^{n-2} \cdot \frac{2^{n-1} \ln^{n-1} n}{n^{n-1}} = \frac{2^{n-1} \ln^{n-1} n}{n} \to \infty$$

w172

Пороговая асимп. пол. K_k, k-const

$\measuredangle$ $EX = C_n^k \cdot p^{\binom{k}{2}} \approx \frac{n^k}{k!} p^{\frac{k^2-k}{2}}$

кол-во K_k

$\exists$ $p = o(n^{-\frac{k}{\binom{k}{2}}}) = o(n^{-\frac{2}{k-1}}) \Rightarrow EX = 0$

$\Rightarrow$ ан.к несод

$\exists$ $p = \omega(n^{-\frac{k}{\binom{k}{2}}}) = o(n^{-\frac{2}{k-1}})$

$\measuredangle$ $Ex^2 = E(\text{кол-во}K_k)^2 = E(\sum_{a_1,\dots,a_k} x_{a_1\dots a_k})^2 = E\sum_{a_1\dots a_k} x_{a_1\dots a_k} x_{a_1'\dots a_k'} =$

$= C_{2k}^k C_n^{2k} p^{2\binom{k}{2}} + C_{2k}^k C_n^{2k-1} p^{2\binom{k}{2}} + \dots$

$C_{2k}^k C_n^{2k} p^{2\binom{k}{2}} = (EX)^2(o(1)+1)$ — нет общих: $\frac{2k!}{k!k!} \cdot \frac{n!}{2k!(n-2k!)} \approx \frac{n^{2k}}{(k!)^2}$

$C_{2k}^k C_n^{2k-1} p^{2\binom{k}{2}} = (EX)^2(o(1)+1)$ — 1 общ

$+ C \cdot C_n^{2k-1} p^{2\binom{k}{2}-1} + \sum_{i=3}^{k} C \cdot C_n^{2k-i} \cdot p^{2\binom{k}{2}-\binom{i}{2}}$

ребро общ: $C_n^{2k-1} p^{2\binom{k}{2}-1} = n^{2k-1} p^{2\binom{k}{2}} p^{-1} = \frac{1}{pn} Ex^2$

i общ: $C_n^{2k-i} p^{2\binom{k}{2}-\binom{i}{2}} = n^{2k-i} \cdot p^{2\binom{k}{2}} \cdot p^{-\binom{i}{2}}$

Ex^2

№181

$$EX = nC_{n-1}^{k+1}p^{k+1} \approx n\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\cdot\frac{n^{k+1}}{(k+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{ne^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{n e^{\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1}}{\left(\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1\right)^{\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1}} = \frac{n e^{\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1}}{6^{\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1}\left(\frac{\ln n+\frac{\ln\ln n}{6}}{\ln\ln n}\right)^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}}} =$$

$$\left(\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1\right)^{\frac{6\ln n}{\ln\ln n}+1} = \left(\frac{6\ln n+\ln\ln n}{\ln\ln n}\right)^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}+1}$$

$$\lambda = \frac{6}{e} > 1$$

$$= \frac{n}{(\lambda)^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}+1}\cdot \ln n^{\frac{6\ln n}{\ln n}+1}\cdot\left(\frac{1+\frac{\ln\ln n}{6\ln n}}{\ln\ln n}\right)^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}+1}} =$$

$$= \frac{(\ln\ln n)^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}+1}}{n^5\ln n\,\lambda^{6\frac{\ln n}{\ln\ln n}+1}\cdot e}\; n^6\cdot\ln n = e\cdot\frac{(\ln t)^{6\frac{t}{\ln t}+1}}{e^{5t}\cdot t\cdot\lambda^{6\frac{t}{\ln t}}} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\ln n}{\ln\ln n} = \log_{\ln n} n$$

$$\ln n = t$$

$$e^{5t}\vee(\ln t)^{6\frac{t}{\ln t}} = e^{6\frac{t\ln(\ln t)}{\ln t}} \leq e^{6\frac{t}{\sqrt{\ln t}}}$$

$$e^{5t} \geq e^{\frac{6t}{\sqrt{\ln t}}} \geq e^{\frac{6t\ln\ln t}{\ln t}}$$

№183

I - первая доля, II - вторая доля — по т-ме Холла

Сущ. полное паросоч $\iff \forall A \subseteq I,\ N(A) \geq |A|$

$N(X)$ - соседи верш. из мн-ва X

X - все такие A, что $N(A) < |A|$

$$EX = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot (1-p)^{k(n-k+1)} \approx \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{(n-k)^{n-k} \cdot k^k} \cdot e^{-pk(n-k+1)}$$

матожид. кол-ва A

$+(1-p)^n$

e^{-pn}

$\frac{1}{n^{\omega(1)}}$

0

$$= \alpha \sum e^{\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(k(n-k))} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^k} \cdot e^{-pk(n-k+1)} \approx$$

$e^{-\frac{k(n-k)}{n}}$, $= e^{k\ln\frac{k}{n}}$

$$\approx \alpha \sum \exp\Big(\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln(n-k) + k - \frac{k^2}{n} - k\ln n + k\ln k$$
$$- pkn + pk^2 - pk\Big) =$$

$$= \alpha \sum_{\text{мал } k} * + \alpha \sum_{k=n-O(1)} *$$

$$\sum_{\text{мал } k} * \leq \sum_{\text{мал } k} \exp\Big(\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(n-k) + \underbrace{k + k\left(\ln\frac{n}{k}\right)}_{\leq c} -$$
$$\underline{-k\log n\,\omega(1)} + \frac{k^2}{n}\log n\,\omega(1) - \frac{k}{n}\log n\,\omega(1)\Big) \approx \sum_{\text{мал } k} e^{-k\log n\,\omega(1)} \approx$$
$$\approx \frac{e^{-\log n\,\omega(1)}}{1 - e^{-\log n\,\omega(1)}} \longrightarrow 0$$

$$\sum_{k=n-c} * \approx \Big(\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln c + n - k - \frac{(n-c)^2}{n} -$$
$$-(n-c)\ln\frac{(n-c)}{n} - \frac{(n-c)}{\log n}\,\omega(1) + \frac{\log n}{n}(n-c)^2\,\omega(1) \ldots$$

$\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln k \to 0$, $n - k \to c$, $(n-c)\ln\frac{n-c}{n} \to -c$, $\geq c\,\omega(1)\log n$

$$\approx \alpha' \sum_{k=n-c} e^{-\log n\,\omega(1)} \leq \alpha' n \cdot n^{-\omega(1)} \longrightarrow 0$$

195. Докажите, что если $x \neq y$, то $M \setminus x / y = M / y \setminus x$

Решение:

Давайте просто посмотрим, что происходит в обоих частях равенства.

Мы уже из 194 и 193 знаем, что такое матроид с выброшенным элементом и так же знаем, что такое матроид стянутый по элементу.

Очевидно, что $M_1 = M_2$ тогда и только тогда, когда $X_1 = X_2$ и $I_1 = I_2$

В первом случаи мы удаляем из X_1 **x** и берем те множества из I_1 которые не содержат **x** и после удаляем из X_1 **y** и берем все множества из I_1 которые содержат **y**.

Во втором случаи все точно так же только порядок другой:

Удаляем из X_2 **y** и берем все множества из I_2, которые содержат **y**, а после удаляем из X_2 **x** и берем все множества из I_2, которые не содержат **x**.

Очевидно, что $X_1 = X_2$ и $I_1 = I_2$