

Задание 1

Дано линейное рекуррентное соотношение.

1. Постройте производящую функцию для получившейся последовательности
2. Оцените асимптотическое поведение a_n .

Вариант А

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3} \text{ для } n \geq 3.$$

Вариант В

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}a_{n-2} + a_{n-3} \text{ для } n \geq 3.$$

Вариант С

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 13a_{n-2} - 12a_{n-3} \text{ для } n \geq 3.$$

Вариант D

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \text{ для } n \geq 3.$$

Задание 2

Рассмотрим комбинаторный объект A , построенный по формуле. Обозначим количество объектов веса n за a_n .

$MSet(A)$ — множество мультимножеств объектов из A .

$MSet^+(A)$ — множество непустых мультимножеств объектов из A .

$Seq(A)$ — множество последовательностей объектов из A .

$Seq^+(A)$ — множество непустых последовательностей объектов из A .

1. Посчитайте количество объектов для веса от 1 до 5
2. Запишите производящую функцию для числа объектов заданного веса a_n
3. Оцените асимптотическое поведение a_n .

Вариант Е

Пусть $2 = \{a, b\}$, где a и b объекты веса 1.

$$A = Seq(MSet^+(2)).$$

Вариант F

Пусть $D = \{a, b, X\}$, где a и b — объекты веса 1, а X — объект веса 2.

$$A = Seq(Seq^+(D)).$$

Вариант G

Пусть $B = \{1, 2\}$, где 1 — объект веса 1, а 2 — объект веса 2.
 $A = Seq(Seq^+(B))$.

Задание 3

Назовем производящей функцией для бесконечной таблицы $a_{n,m}$ формальный степенной ряд $A(x, y) = \sum_n \sum_m a_{n,m} x^n y^m$. Постройте формальный степенной ряд для заданной таблицы.

Вариант H

$$a_{n,m} = m + n$$

Вариант I

$$a_{n,m} = 2^m + 2^n$$

Вариант J

$$a_{n,m} = \min(n, m)$$

Вариант K

$$a_{n,m} = \max(n, m)$$

Вариант L

$$a_{n,m} = F_n F_m, \text{ где } F_i \text{ — } i\text{-е число Фибоначчи}$$

Задание 4

Обозначим за a_n количество упорядоченных разбиений числа n на слагаемые, удовлетворяющих заданным ограничениям.

- Постройте производящую функцию для получившейся последовательности
- Оцените асимптотическое поведение a_n .

Вариант M

Разбиение $n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2x_1$, $x_3 \geq 2x_2$, $x_4 \geq 2x_3$.

Вариант N

Разбиение $n = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2x_1$, $x_3 \geq x_1 + x_2$.

Вариант O

Разбиение $n = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq x_3$.