Дз #5

Задача 1

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$ $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Вычислить

$$|[\vec{a}-2\vec{b}, 2\vec{a}+2\vec{b}]| = |E - 4(\vec{a},\vec{b})| + |-4\overset{0}{[\vec{b}]^2}|$$

$$= |-4\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(a,b)| = |-4\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}| = 8$$

Задача 2

Найти площадь ΔABC, если

$A=(0,-4,-3)$, $B(4,-2,-5)$, $C(0,-5,+4)$.

$AB = 2\sqrt{6}$

$BC = \sqrt{26}$ $\Rightarrow S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\sqrt{24}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{48}}{2}=3,464101$

$AC=\sqrt{2}$

Задача 3

Вычислите, если $\vec{a}(4,2,-2)$ и $\vec{b}(0,-1,2)$

$$[\vec{a}, 4a+\vec{b}] + [\vec{a}, 2[\vec{a},\vec{b}]] =$$

$$=[a,\vec{b}] - 2[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}]$$

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i(2\cdot2-(-2)\cdot(-1)) - j(4\cdot2-(-2)\cdot0) +$$

$$+k(4\cdot(-1)-2\cdot0) = (2;-8;-4)$$

$-2[[\vec{a},\vec{b}],\vec{a}] = -2[(2,-8,-4),(4,2,-2)] =$

$= -2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -8 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i((-8)\cdot(-2)-(-4)\cdot 2) - j(2\cdot(-2)-(-4)\cdot 4) + k(2\cdot 2-(-8)\cdot 4)$

$= -2(24; -12; 36) = (-48; 24; -72)$

$[\vec{a},\vec{b}] + (-2)[[\vec{a},\vec{b}],a] = (2; -8; -4) + (-48; 24; -72)$

$= (2+(-48); (-8)+24; (-4)+(-72)) = (-46; 16; -76)$

Задача 4

Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(0,2,3)$ и $\vec{b}(2,-2,-2)$, а также удовлетворяет условию $(\vec{x},\vec{c})=5$, $\vec{c}(-4,2,0)$

$[a,b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = i(2\cdot(-2)-3\cdot(-2)) - j(0\cdot(-2)-3\cdot 2) +$

$+ k\cdot(0\cdot(-2)-2\cdot 2) = i(-4+6) - j(0-6) + k(0-4) =$

$= \{2; 6; -4\}$

$\vec{x}' = (2x; 6x; -4x)$

$(\vec{x},\vec{c}) = 2x + 6x - 4x = 5$ $\qquad x = -\frac{5}{4}$

$\vec{x} = (-10/4; -30/4; 20/4)$

Задача 6

Установить образуют ли векторы $\vec{a}(-1, 1, 2)$, $\vec{b}(-1, 1, -5)$ и $\vec{c}(-1, 4, -3)$ базис на множестве всех векторов.

$\vec{a}(-1, 1, 2)$, $\vec{b}(-1, 1, -5)$ и $\vec{c}(-1, 4, -3)$

$$\begin{cases} -1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -1\alpha_1 + 1\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -1\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha_3 - 3\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_3 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0;\ \alpha_3 = 0;\ \alpha_1 = 0$$

Доказано!

Задача 5

$\square ABCD$; $V = 78$; $\leftarrow A_1 - ?$

$A = (2; 1; 2)$; $B = (1; -4; 6)$ $C(5; -2; 3)$

$AB = \{1; 5; -4\}$

$AC = \{-3; 3; -1\}$

$$[AB, AC] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i(5(-1) - (-4)\cdot 3) - j(1\cdot(-1) - (-4)\cdot(-3)) + k(1\cdot 3 - 5\cdot(-3)) = \{7; 13; 18\}$$

$|\{7; 13; 18\}| = \sqrt{542}$

$$\frac{78}{\sqrt{542}} \cdot \frac{1}{\sqrt{542}} = \frac{78}{542}$$

$$\Rightarrow AA_1 = \{7 \cdot \frac{78}{542}; 13 \cdot \frac{78}{542}; 18 \cdot \frac{78}{542}\} = (1{,}007; 1{,}87; 2{,}59)$$

$A_1 = \{3; 2{,}78; 4{,}59\}$