

Зайкидинов
М3237

Мирзофидов
Вариант ВФЖМ

Шавкатов

Задача 1)

Дано линейное рекуррентное соотношение

1) Постройте производящую функцию для найденной последовательности

2) Оцените асимптотическое поведение a_n

3)

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{для } n \geq 3$$

$$Q(t) = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}t^2 - t^3$$

$$P(t) = 0 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = t^2$$

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{t^2}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}t^2 - t^3}$$

$$1 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}t^2 - t^3 = 2 - t - 5t^2 - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+2) = 0 \Leftrightarrow (t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+2) = 0$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = \frac{1}{2} \quad t_3 = -2 \quad \left(\frac{1}{2}\right) \text{ — нек. по модулю}$$

корень \Rightarrow Ответ $a_n = O(2^n)$

Задача 4

Обозначим за a_n количество упорядоченных разбиений числа n на 4 слагаемых, удовлетворяющих заданным ограничениям,

- 1) Постройте ПРФ для наивысшей последовательности
- 2) оцените асимптотическое поведение.

Р) $n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 2x_1$, $x_3 \geq 2x_2$, $x_4 \geq 2x_3$.

$$A(t) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=2x_1}^{\infty} \sum_{x_3=2x_2}^{\infty} \sum_{x_4=2x_3}^{\infty} t^{x_1+x_2+x_3+x_4} =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} t^{x_1} \sum_{x_2=2x_1}^{\infty} t^{x_2} \sum_{x_3=2x_2}^{\infty} t^{x_3} \sum_{x_4=2x_3}^{\infty} t^{x_4}$$

можно заметить, что $x_i \geq 2x_{i-1} \Rightarrow$ для каждого

$i \geq 2 \Rightarrow \frac{t^{2x_{i-1}}}{1-t} \Rightarrow$ будем сокращать

для каждого перехода \Rightarrow

$$\text{ПРФ} = \frac{1}{(1-t)(1-t^3)(1-t^7)(1-t^{15})}$$

Асимптотическое поведение ПРФ будет равно

$O(n^3)$

так как корень 1, кратность 4, и по формуле нахождения $O(n^3, 1^n) = O(n^3)$

Задача 2

Рассмотрим комбинаторный объект A , помеченный по формуле. Обозначим количество объектов веса n за a_n .

$MSet(A)$ - множества множеств множеств объектов из A
 $MSet^+(A)$ - множества непустых множеств объектов из A
 $Seq(A)$ - множества последовательностей объектов из A
 $Seq^+(A)$ - непустые " " " " " "

- 1) Подсчитайте количество объектов для веса 1-5
- 2) Запишите ПР для числа объектов заданного веса
- 3) Оцените асимптотическое поведение.

Г) Пусть $D = \{a, b, x\}$, где a и b - объекты веса 1, а x - объект веса 2. $A = Seq(Seq^+(D))$

$$A = Seq(Seq^+(D)) = Seq(Seq^+(\{a, b, x\}))$$

По условию и формулам с лекции имеем что,

$$Seq^+(D) = Seq^+(\{a, b, x\}) = \frac{1}{1-t-t^2} - 1 = \frac{t+t^2}{1-t-t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Seq(X) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{t+t^2}{1-t-t^2}} = \frac{1-t-t^2}{1-4t+t^2} = A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

Тогда можно легко вывести a_n по $Q(t)$

$a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$, для $n \geq 3$; $a_0 = 1 \Rightarrow$ по рек. формуле найдем $a_1 = 2$; $a_2 = 0$; $a_3 = 4$; $a_4 = 8$; $a_5 = 12$

$$Q(t) = 1 - 4t + t^2 = (t - 2 + \sqrt{3})(t - 2 - \sqrt{3}) \Rightarrow D = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{1} \text{ или } a_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1} \right)^n + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{1} \right)^n$$