Дз # 3

3.1) $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y + \sin x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y + \sin x$

1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

2) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$

3) $u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) = \int\left(\sin y + y\cdot\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \varphi(y)$

$= \sin y\cdot x - \cos x\cdot y + \ln|x| + \varphi(y)$

4) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} = \left(\int P(x,y)\,dx + \varphi(y)\right) = Q(x,y)$

$x\cos y - \cos x + \varphi'(y) = x\cos y - \cos x - \frac{1}{y}$

$\varphi'(y) = -\frac{1}{y}$ $\qquad \varphi = \int -\frac{1}{y}\,dy = -\ln|y|$

Ответ: $x\sin y - y\cos x + \ln|x| - \ln|y| = C$

3.2) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0 \quad | \cdot y^4$

$2xy + (y^2-3x^2)y' = 0$ однородное уравнение

$z = \frac{y}{x} \qquad y' = z + z'x$

$2x^2 z + (z^2x^2 - 3x^2)(z + z'x) = 0 \quad | : x^2$

$2z + (z^2-3)(z+z'x) = 0$

$2z + z^3 + z^2 z' x - 3z - 3z'x = 0$

$z'x(z^2-3) = z - z^3 \qquad \frac{z'(z^2-3)}{z-z^3} = \frac{1}{x}$

$z(1-z^2) = 0$

$z = 0 \,;\, \pm 1$

$\int \frac{z'(z^2-3)}{z-z^3} dx = \int \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{z^2-3}{z-z^3} dz = \int \frac{z^2-3}{z(1-z)(1+z)} dz = \int \left(-\frac{1}{z+1} + \frac{3}{z} - \frac{1}{z-1}\right) dz$

$= \ln|z+1| + 3\ln|z| - \ln|z-1| = 3\ln|z| - \ln|z^2-1|$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$3\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| = \ln|x| + C$

$\frac{y}{x} = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x \qquad \frac{y}{x} = 0$ не может быть ОДЗ

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = \pm x \\ 3\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|\frac{y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C \end{array}\right.$

5.3) $(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0$ $\qquad \varphi_1 = \varphi(x)$

$$\frac{\varphi'}{\varphi_1} = +\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow \ln|\varphi| = \int \frac{(-x^2-2xy+3x^2)}{x^2(y-x)}$$

$$= \int \frac{2x^2-2xy}{x^2(y-x)}\,dx = \int \frac{2x(x-y)}{-x^2(x-y)}\,dx = -2\ln|x|$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} - yx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi' - x = y - x$$

$$\varphi' = y \qquad \varphi = \frac{y^2}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = C$

3.4) $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$ $\quad \mu=\mu(y)$

$$\frac{\mu'}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{4xy-9y^2+3y^2}{3y^3-2xy^2}=\frac{4xy-6y^2}{y^2(3y-2x)}=$$

$$=\frac{-2y(3y-2x)}{y^2(3y-2x)}=-\frac{2}{y}$$

$\ln|\varphi|=-2\ln|y|$

$\varphi=\frac{1}{y^2}$

$(2x-3y)dx+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-3 \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-3 \Rightarrow$ У.П.Д

$u(x,y)=\int P(x,y)\,dx+\varphi(y)=x^2+\varphi(y)-3yx$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'-3x=\frac{7}{y^2}-3x \Rightarrow \varphi'=\frac{7}{y^2} \quad \varphi=-\frac{7}{y}$

Ответ: $x^2-\frac{7}{y}-3yx=C$

3.5) $(3y^2-x)\,dx+(2y^3-6xy)\,dy=0$

$y'=\dfrac{x-3y^2}{2y^3-6xy} \iff 2yy'=\dfrac{x-3y^2}{y^2-3x}$ $\qquad t=y^2$, $t'=2yy'$

$t'=\dfrac{x-3t}{t-3x}=\dfrac{1-3\frac{t}{x}}{\frac{t}{x}-3} \Rightarrow z=\dfrac{t}{x}$

$z+z'x=\dfrac{1-3z}{z-3}$ $\qquad z'x=\dfrac{1-3z}{z-3}-z=\dfrac{1-3z-z^2+3z}{z-3}=$

$=\dfrac{1-z^2}{z-3}$

$\int\dfrac{z-3}{1-z^2}z\,dx=\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$\int\dfrac{z-3}{1-z^2}dz=\int\cancel{\dfrac{z}{z^2}}=\frac{3}{2}\ln\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|-\frac{1}{2}\ln|z^2-1|$

$\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\frac{y^2}{x}-1}{\frac{y^2}{x}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^4}{x^2}-1\right|=\ln|x|+C$

$y=0$ не подходит $\quad y=\pm\sqrt{3x}$ тоже нет

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\frac{y^2}{x}-1}{\frac{y^2}{x}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^4}{x^2}-1\right|=\ln|x|+C$

3.6) $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$

$(x - xy)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0$

$\exists\ \mu(y) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{-x^2 - 2x}{x - xy} =$

$= \frac{3x}{x(1-y)} = \frac{3}{1-y} \Rightarrow \ln|\mu| = -3\ln|y-1| \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{(y-1)^3}$

$\exists\ \mu = \frac{1}{(y-1)^3}$ Особое решение $y = 1$ не подходит

$\frac{x - xy}{(y-1)^3}\,dx + \frac{y + x^2}{(y-1)^3}\,dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{(y-1)^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ УПД

$u(x,y) = \int P(x)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1-y}{(y-1)^3}\right) + \varphi(y) =$

$= \frac{-x^2}{2(y-1)^2} + \varphi(y)$

$\frac{u}{\partial y} = \varphi' + \frac{x^2}{(y-1)^3} = \frac{y + x^2}{(y-1)^3} \Rightarrow \varphi' = \frac{y}{(y-1)^3}$

$\varphi = \int \frac{y}{(y-1)^3}\,dy \quad \exists\ u = y - 1 \Rightarrow \int \frac{u+1}{u^3}\,du = \int \frac{1}{u^2}\,du + \int \frac{1}{u^3}$

$= -\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2(y-1)^2}$

Ответ: $-\frac{x^2}{2(y-1)^2} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2(y-1)^2} = C$

~~06.10.2021~~

№

3.7) $(y+\sqrt{xy})dx = xdy \Leftrightarrow (y+\sqrt{x}\sqrt{y})dx = xdy$

$\Leftrightarrow xdy = (y+\sqrt{x}\sqrt{y})dx$

Однородное уравнение:

Ф/я $M(y,x)$ однородная, если $M(ky;kx)=k^n$

$M(y,x)$, имеем:

$kx = k\sqrt{x}\sqrt{y} + ky \Rightarrow k$

$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \quad dy = udx + xdu$

$x(udx + xdu) = (u+\sqrt{u})xdx \Leftrightarrow \quad x \Rightarrow x=0$

$\cancel{uxdx} + x^2du = \cancel{uxdx} + \sqrt{u}\,xdx$

$x^2du = \sqrt{u}\,xdx \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$

$u \Rightarrow u=0 \Rightarrow \frac{y}{x}=0 \Rightarrow y=0$

$\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{u} = \ln|x| + C$

Замена:

$\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \ln(x) + C$

Ответ: $y = \frac{x\ln^2|x|}{4} + \frac{Cx\ln|x|}{2} + \frac{C^2x}{4}, x=0, y=0$

39) $x^2y' + xy + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 dy}{dx} + xy + 1 = 0$

Приведем к однородному заменой $y = z^\lambda$. Найдем λ подставив $x = z$, $y = z^\lambda$ и приравняв степени z:

$\lambda z^{\lambda+1} + z^{\lambda+1} + 1 = 0 \qquad 0 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -1$

Подстановка: $y = \frac{1}{z} \qquad dy = -\frac{dz}{z^2}$

$-\frac{x^2 dz}{z^2 dx} + \frac{x}{z} + 1 = 0 / dx \Leftrightarrow \left(\frac{x}{z} + 1\right) dx - \frac{x^2 dz}{z^2} = 0$

Однородное уравнение: ф-я $M(z, x)$ однородна, если $M(kz, kx) = k^n M(z, x)$, имеем

$\frac{x^2}{z} - \frac{x^2}{z^2} + 1 = 0 \to k^0$

Подстановка: $u = \frac{z}{x} \Leftrightarrow z = ux \Leftrightarrow dz = u\,dx + x\,du$

$\left(\frac{1}{u} + 1\right) dx - \frac{u\,dx + x\,du}{u^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x\,du}{u^2} = -dx$

$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{u^2} du = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{1}{u} = C - \ln|x|$

об. замена $\Rightarrow \frac{x}{z} = C - \ln|x| \Leftrightarrow xy = C - \ln|x|$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = \frac{-\ln|x| - C}{x}$

3.8) $2x^2y' = y^3 + xy \Leftrightarrow \frac{2x^2dy}{dx} = y^3 + xy$

Приведение к однородному заменой $y = z^\lambda$

Найдем λ подставив $x = z$, $y = z^\lambda$ и приравняв степени z:

$$2\lambda z^{\lambda+1} = z^{\lambda+1} + z^{3\lambda} \qquad 3\lambda = \lambda+1 = \lambda+1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$y = \sqrt{z} \Leftrightarrow dy = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$ $\qquad \frac{x^2dz}{\sqrt{z}dx} = z^{3/2} + x\sqrt{z} \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2dz}{\sqrt{z}} = (z^{3/2} + x\sqrt{z})dx$$

Однородное ур-е: Ф-я $M(z,x)$ однородна если $M(kz, kx) \equiv k^n M(z,x)$, имеем:

$$\frac{k^{3/2}x^2}{\sqrt{z}} = k^{3/2}z^{3/2} + k^{3/2}x\sqrt{z} \Rightarrow k^{3/2}$$

Подстановка $u = \frac{z}{x} \Leftrightarrow z = ux \Leftrightarrow dz = udx + xdu$

$$\frac{x^{3/2}(udx + xdu)}{\sqrt{u}} = (u^{3/2} + \sqrt{u})x^{3/2}dx$$

$$\cancel{\sqrt{u}x^{3/2}dx} + \frac{x^{5/2}du}{\sqrt{u}} = u^{3/2}x^{3/2}dx + \cancel{\sqrt{u}x^{3/2}du}$$

$\frac{x^{5/2}du}{\sqrt{u}} = u^{3/2}x^{3/2}dx \;|: x^{5/2}$ и $u^{3/2} \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$

$u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{x} = 0 \Rightarrow \underline{y = 0}$ $\qquad \int \frac{1}{u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{u} = C - \ln|x| \Rightarrow$ Замена: $\Rightarrow$ Ответ: $y^2 = \frac{x}{C - \ln|x|}$, $y = 0$ при $C = \infty$

3.10) $xy^2y' = x^2 + y^3 \iff \frac{xy^2\,dy}{dx} = y^3 + x^2$

Приведем к однородному заменой $y = z^\lambda$

Найдем λ подставив $x = z$, $y = z^\lambda$ и приравняв степени z!

$$\lambda z^{3\lambda} = z^{3\lambda} + z^2 \qquad 2 = 3\lambda = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Подстановка

$$y = \sqrt[3]{z^2} \iff dy = \frac{2\,dz}{3\sqrt[3]{z}}$$

$$\frac{2xz\,dz}{3\,dx} = z^2 + x^2 \iff \frac{2xz\,dz}{3} = (z^2 + x^2)\,dx$$

$$2xz\,dz = (3z^2 + 3x^2)\,dx$$

Однородное уравнение. Функция $M(z,x)$ однородна, если $M(kz,kx) = k^n M(z,x)$, имеем:

$$2k^2xz = 3k^2z^2 + 3k^2x^2 \Rightarrow k^2$$

$u = \frac{z}{x} \iff z = ux \qquad dz = u\,dx + x\,du$

$$2ux^2(u\,dx + x\,du) = (3u^2 + 3)x^2\,dx$$

Группировка по дифференциалам

$$2ux\,du = (u^2 + 3)\,dx$$

$$\frac{u\,du}{u^2+3} = \frac{dx}{2x} \iff \int \frac{u}{u^2+3}\,du = \int \frac{1}{2x}\,dx \Rightarrow$$

$\ln(u^2+3) = \ln|x| + C \iff u^2 + 3 = e^{C}x$ Обратная замена

Ответ: $\frac{y^3}{x^2} + 3 = Cx \iff y = \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{Cx-3}$

3.11) $(1+y^2\sin 2x)\,dx - 2y(\cos x)^2\,dy = 0$

Уравнение в полных дифференциалах.

$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0$, где $M(x,y) = -2\cos^2(x)\,y$

и $N(x,y) = \sin(2x)\,y^2+1$

Проверка на полный дифференциал:

$M(x,y)'_x = N(x,y)'_y = 4\cos(x)\sin(x)y$

Найдем: $F(x,y)$: $dF(x,y) = F'_y\,dy + F'_x\,dx$

$F(x,y) = \int N(x,y)\,dx = \int \sin(2x)y^2+1 =$

$= \int y^2\sin(2x)+1\,dx = y^2\int\sin(2x)dx + \int 1\,dx = x - \frac{y^2\cos(2x)}{2} + C_y$

$\left(x - \frac{\cos(2x)y^2}{2}\right)'_y = -\cos(2x)y$

$C_y = \int M(x,y) - \left(x - \frac{\cos(2x)y^2}{2}\right)'dy = \int \cos(2x)y -$

$-2\cos^2(x)\,y\,dy = \frac{\cos(2x)y^2}{2} - \cos^2(x)y^2$

$\Rightarrow F(x,y) = x - \frac{\cos(2x)y^2}{2} + C_y = \frac{\cos(2x)y^2}{2} - \cos^2(x)y^2 -$

$- \frac{\cos(2x)y^2}{2} + x \Rightarrow \frac{\cos(2x)y^2}{2} - \cos^2(x)y^2 - \frac{\cos(2x)y^2}{2} + x = C$

Ответ: $y^2 = -\frac{C-x}{\cos^2(x)}$

3.12) $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy$ (найти интегрирующий множитель)

$\Leftrightarrow (y^3 + x^2y + x^2)\,dy - xy\,dx = 0$

Уравнение в полных дифференциалах

$\mu(x,y) M(x,y)\,dy + \mu(x,y) N(x,y)\,dx = 0$

где $M(x,y) = y^3 + x^2y + x^2$ и $N(x,y) = -xy$

Проверка на полный дифференциал:

$M(x,y)'_x = 2xy + 2x \neq -x = N(x,y)'_y$

Поиск интегрирующего множителя $\mu(x,y)$

$M(x,y)'_x = \frac{\partial M}{\partial x}$ и $N(x,y)'_y = \frac{\partial N}{\partial y}$

Из условия: $M\frac{\partial \mu}{\partial x} - N\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$

Пусть $\mu(x,y) = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ тогда условие принимает вид: $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} =$

$= -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$ (где первая часть - функция от y)

$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)dy = \int -\frac{3}{y} - 2y = -3\ln(y) - 2y$

$\ln(\mu) = -3\ln(y) - 2y \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^3 e^{2y}}$

$$\left(\frac{x^2}{y^2e^{2y}}+\frac{x^2}{y^3e^{2y}}+\frac{1}{e^{2y}}\right)dy-\frac{x\,dx}{y^2e^{2y}}=0$$

при делении потеряно решение: $\frac{1}{y^3e^{2y}}$

$y=0$

Уравнение в полных дифференциалах

$M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$

где $M(x,y)=\frac{x^2}{y^2e^{2y}}+\frac{x^2}{y^3e^{2y}}+\frac{1}{e^{2y}}$ и

$N(x,y)=-\frac{x}{y^2e^{2y}}$

Проверка на полный дифференциал:

$M(x,y)'_x=N(x,y)'_y=\frac{2x}{y^2e^{2y}}+\frac{2x}{y^3e^{2y}}$

Найдем $F(x,y)$: $dF(x,y)=F'_y\,dy+F'_x\,dx$

$F(x,y)=\int N(x,y)dx=\int -\frac{x}{y^2e^{2y}}dx=-\frac{x^2}{2y^2e^{2y}}+C_y$

$\left(-\frac{x^2}{2y^2e^{2y}}\right)'=\frac{x^2}{y^2e^{2y}}+\frac{x^2}{y^3e^{2y}}$

$C_y=\int M(x,y)-\left(-\frac{x^2}{2y^2e^{2y}}\right)'_y dy=\int\frac{1}{e^{2y}}dy=-\frac{1}{2e^{2y}}$

$$F(x,y) = -\frac{x^2}{2y^2e^{2y}} + C_y = -\frac{1}{2e^{2y}} - \frac{x}{2y^2e^{2y}} = C$$

Ответ: $\frac{x^2}{y^2e^{2y}} + \frac{1}{e^{2y}} = C$; $y=0$