Задание 1

Вариант A

Для вершины v обозначим как $b(v)$ число блоков графа, которым принадлежит вершина v. Обозначим как $b(G)$ количество блоков графа G. Докажите, что для связного графа $b(G) = \sum\limits_{v}(b(v) - 1) + 1$.

Вариант B

Для блока B графа G обозначим как $c(B)$ число точек сочленения, принадлежащих данному блоку. Обозначим как $c(G)$ количество точек сочленения графа G. Докажите, что для связного графа $c(G) = \sum\limits_{B}(c(B) - 1) + 1$.

Вариант C

Назовем вершинной связностью графа $\kappa(G)$ минимальное число вершин графа, которое требуется удалить, чтобы граф потерял связность (положим $\kappa(K_n) = n - 1$).

Докажите, что если G — связный граф, то $\kappa(G) = 1 + \min\limits_{v \in V} \kappa(G - v)$.

Задание 2

Вариант D

В двудольных графах размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия. Докажите, что для любого k существует недвудольный связный граф, размер минимального вершинного покрытия в котором на k больше размера максимального паросочетания.

Вариант E

Докажите, что если G имеет хотя бы 11 вершин, то либо G, либо $\overline{G}$ не является планарным. Верно ли утверждение для графов с 8 вершинами?

Вариант F

Пусть T_1 и T_2 — различные остовные деревья графа G. Докажите, что существуют такие ребра $e \in T_1 \setminus T_2$ и $f \in T_2 \setminus T_1$, что и $T_1 \setminus e \cup f$ и $T_2 \setminus f \cup e$ являются остовными деревьями G.

Вариант G

Докажите, что в гамильтоновом кубическом графе можно раскрасить ребра в 3 цвета так, чтобы никакие два ребра, раскрашенных в один цвет, не имели общей вершины.

Вариант H

Реберно простой цикл в графе называется стягивающим, если он проходит через каждую вершину хотя бы один раз.

Докажите, что если в связном графе любое ребро принадлежит треугольнику (для любого ребра uv есть вершина w, которая соединена и с u и с v), то в графе существует стягивающий цикл.

Вариант I

Рассмотрим граф G с n вершинами. Будем выполнять следующую процедуру: пока существует пара вершин u, v, не соединенных ребром, сумма степеней которых не меньше n, соединить их ребром и повторить. Получившийся в итоге граф $c(G)$ не зависит от порядка выполнения операций и называется замыканием графа G.

Докажите, что G гамильтонов тогда и только тогда, когда $c(G)$ гамильтонов.

Вариант J

Рассмотрим граф, уложенный на сфере. Ориентируем каждое его ребро. Будем называть грань *ориентированной*, если окружающие ее ребра образуют ориентированный цикл, будем называть вершину *истоком*, если из нее только выходят ребра, *стоком*, если в нее только входят ребра.

Докажите, что если в графе нет истоков и стоков, то в нем есть хотя бы две ориентированных грани.

Задание 3

Вариант K

Квадратом графа G называется граф G^2, вершинами которого являются пары вершин G, (u_1, v_1) и (u_2, v_2) связаны ребром, если $u_1 = u_2$ и v_1v_2 — ребро графа G, или $v_1 = v_2$ и u_1u_2 — ребро графа G.

Докажите, что если G связен, то G^2 вершинно двусвязен.

Вариант L

Граф называется реберно критическим, если он вершинно двусвязен, и удаление любого ребра приводит к потере этого свойства. Докажите, что реберно критический граф, содержащий хотя бы четыре вершины, не содержит трех вершин u, v и w, таких что uv, uw и vw одновременно присутствуют в графе.

Вариант M

Неориентированный граф с n вершинами называется панциклическим, если он содержит цикл длиной k для всех k от 3 до n.

Граф G с n вершинами и $m \geq n^2/4$ ребрами содержит гамильтонов цикл и цикл длиной $n-1$. Докажите, что G является панциклическим. Указание: используйте математическую индукцию по n.

Вариант N

Реберным графом графа G называется граф, множество вершин которого равно множеству ребер графа G и вершины, соответствующие ребрам e_1 и e_2 соединены ребром, если e_1 и e_2 имеют общую вершину в G.

Граф называется внешнепланарным, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани.

Докажите, что реберный граф G является внешнепланарным тогда и только тогда, когда степени всех вершин G не превышают 3 и любая вершина степени 3 в G является точкой сочленения.

Вариант O

Реберным графом графа G называется граф, множество вершин которого равно множеству ребер графа G и вершины, соответствующие ребрам e_1 и e_2 соединены ребром, если e_1 и e_2 имеют общую вершину в G.

Докажите, что реберный граф G является планарным тогда и только тогда, когда G планарен, степени всех вершин G не превышают 4 и любая вершина степени 4 в G является точкой сочленения.