Задание 1

Введём модель случайного множества $N(n,p)$ как случайное множество чисел от 1 до n, где каждое число независимо включается в множество с вероятностью p.

По аналогии со случайными графами назовём семейство множеств *свойством* случайного множества.

Порогом свойства называется функция $t(n)$, такая что если $p(n) = o(t(n))$, то $N(n,p(n))$ а.п.н. не обладает заданным свойством, а если $p(n) = \omega(t(n))$, то $N(n,p(n))$ а.п.н. обладает заданным свойством.

По аналогии со случайными графами можно показать, что для любого монотонного свойства случайных множеств найдётся порог.

Вариант A

Найдите порог, что случайное множество содержит степень двойки.

Вариант B

Найдите порог, что случайное множество содержит чётное число.

Вариант C

Найдите порог, что случайное множество содержит полный квадрат.

Вариант D

Найдите порог, что случайное множество содержит полный куб.

Вариант E

Найдите порог, что случайное множество содержит тройку чисел x, y, z, что $x + y = z \pmod{n}$.

Вариант F

Найдите порог, что случайное множество содержит тройку чисел x, y, z, что $x + y = z$.

Вариант G

Найдите порог, что случайное множество содержит тройку различных чисел x, y, z, что $z - y = y - x$.

Задание 2

Вариант H

Докажите, что если $p(n) = \frac{d}{n}$, то в $G(n,p)$ существует независимое множество размера $\Omega(n)$, то есть для некоторого $c > 0$ а.п.н. $\alpha(G(n,p)) \geq cn$.

Вариант I

Докажите, что если $p(n) = 1 - \frac{c}{n}$, то в $G(n,p)$ существует клика размера $\Omega(n)$, то есть для некоторого $\alpha > 0$ а.п.н. $\omega(G(n,p)) \geq \alpha n$.

Вариант J

Найдите пороговую вероятность $p = t(n)$ того, что случайный граф $G(n,p)$ является планарным. (а) Докажите, что для $p = o(t(n))$ граф $G(n,p)$ а.п.н. является планарным. (б) Докажите, что для $p = \omega(t(n))$ граф $G(n,p)$ а.п.н. не является планарным.

Вариант K

Найдите пороговую вероятность $p = t(n)$ наличия в случайном двудольном графе $G(n,n,p)$ подграфа $K_{2,3}$. (а) Докажите, что для $p = o(t(n))$ в $G(n,n,p)$ а.п.н. нет подграфа $K_{2,3}$. (б) Докажите, что для $p = \omega(t(n))$ в $G(n,n,p)$ а.п.н. есть подграф $K_{2,3}$.

Вариант L

Найдите пороговую вероятность $p = t(n)$ наличия в случайном двудольном графе $G(n,n,p)$ лап $K_{1,3}$. (а) Докажите, что для $p = o(t(n))$ в $G(n,n,p)$ а.п.н. нет лап $K_{1,3}$. (б) Докажите, что для $p = \omega(t(n))$ в $G(n,n,p)$ а.п.н. есть лапа $K_{1,3}$.

Задание 3

Вариант M

Турниром называется ориентированный граф, у которого между любой парой различных вершин есть ровно одно направленное ребро. Докажите, что существует турнир, в котором как минимум $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

Вариант N

Рассмотрим квадратную сетку $n \times n$. Для каждого из $2n(n-1)$ ребер независимо принимается решение: оно присутствует с вероятностью p и отсутствует с вероятностью $1-p$. Рассмотрим свойство: «на сетке есть путь от левого нижнего угла до верхнего правого, идущий только вправо вверх».

Докажите, что если $p \leq 1/2$, то а.п.н. такого пути нет.

Вариант O

Пусть ξ_n — семейство случайных величин, принимающих только положительные значения. Докажите, что если $E\xi_n \to +\infty$, а $D\xi_n/(E\xi_n)^2 \to 0$, то для любой константы $k > 0$ выполнено $P(\xi_n \leq k) \to 0$.

Задание 4

Вариант P

Пусть k — константа, и $p(n) = c$ — константа. Докажите, что $G(n,p)$ а.п.н. рёберно k-связен. Указание, рассматривайте пути длины 2.