Дз #8

Задача 1

Найти жорданову форму матрицы:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad A-E\lambda = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -3 & 4 \\ 4 & (-7-\lambda) & 8 \\ 6 & -7 & (7-\lambda) \end{vmatrix} = -(+\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-3)$

$\sigma^A = \{-1^{(2)}, 3\}$

$\lambda = -1$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ $\quad \vartheta_1 = \{1, 2, 1\}^T$

$\lambda = -3$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$

$\vartheta_2 = (0{,}5,\ 1,\ 1)^T$

$(A+E\lambda)\,\vartheta_3 = \vartheta_1$

$\vartheta_3 = \{0, 1, 1\}^T$ - присоединенный к ϑ_1

$S = T^{-1}$ $\quad T = [\vartheta_1\ \vartheta_2\ \vartheta_3] = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$A^J = SAT = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$|A-E\lambda| = \begin{vmatrix} (\alpha-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-\lambda) & 0 \\ \alpha & 0 & (\alpha-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

$\Delta = (\alpha-\lambda)^3$ $\quad \delta^A = \{\alpha^{(3)}\}$

$\lambda = \alpha$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\vartheta_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$ – система несовместна

$$\vartheta_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$ – совместна

$\vartheta_3 = \{1/\alpha, 0, 0)$

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^{\mathfrak{J}} = SAT = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

Задача 2

Найти жорданову форму матриц

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad A - E\lambda = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -4 & 0 & 2 \\ 4 & (-5-\lambda) & -2 & 4 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-1)$$

$$\sigma_i^A = \{ -1^{(2)}, \ 1^{(2)}$$

$\lambda = 1$

$$\vartheta_1 = \{1, 1, 1, 1\}^T$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right|$$

$$(A + E\lambda)\vartheta_2 = \vartheta_1$$

$$\vartheta_2 = \{0{,}5; 0, 0{,}5, 0\}^T$$

$\lambda = -1$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\vartheta_3 = \{1, 1, 0, 0\}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad \vartheta_4 = \begin{vmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 5/4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & (-4) & (-4) & 4 \end{vmatrix}$$

$$A^J = SAT = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$(A - E\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$\Delta = (1-\lambda)^n \qquad \sigma^A = \{1^{(n)}\}$

$$\lambda = 1 \quad \left|\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ 0 \end{matrix}\right|$$

$\theta_1 = \{1 \dots 0\}^T$

Присоединяем к θ_1

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ 0 \end{matrix}\right|$$

$\theta_2 = \{1\,1 \dots 0\,0\}^T$ Сделаем это $(n-1)$ раз

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

~~S 1~~ $A^J = SAT =$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = A^J$$

Задача 3

Выяснить, является ли данная матрица подобной диагональной матрице в полях рациональных, вещественных и комплексных чисел:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 7 & -5 \\ -4 & (5-\lambda) & 0 \\ 1 & 9 & (-4-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i))(\lambda - 1)$$

$\delta^A = \{1,\ 2+3i,\ 2-3i\}$ — кол-ство совпадает с $rg(A) = 3$ и жордановых клеток

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{vmatrix}$$

Матрица является подобной диагональной

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A = -\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) \qquad \sigma = \{0^{(2)}, 1\}$$

$$\lambda = 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix} \qquad v = \begin{vmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$\lambda = 0$, корню второй кратности соответствует только одно собственное значение => нет диагональной формы.