Дз 4

Задача 1

Найти cos угла $\angle ABC$, если $A(5, 2, 7)$ $B(2, 0, 4)$ и $C(-2, -5, 0)$

По теореме косинусов имеем такое выражение.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC \cos\varphi$

$D = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$ – используя эту формулу находим $AB = \sqrt{22}$ $BC = \sqrt{57}$ $AC = \sqrt{147}$

Поставляем полученные числа в выражение получаем уравнение, решаем его $\cos\alpha = -1$

Задача 2

Установить образуют ли $\vec{a}(-5; 0; -4)$ $\vec{b}(2, -1, -4)$ и $\vec{c}(2, -3, 0)$ базис на множестве всех векторов.

Если они образует базис => эти вектора не линейно зависимы. Давайте докажем это.

$$\begin{cases} -5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 - \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 - \alpha_2 - 0\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -5\alpha_3 \\ \alpha_2 = -4\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_3 = -\frac{\alpha_2}{5} \\ \alpha_1 = \frac{-\alpha_2}{4} \end{matrix}$$

$$\frac{5\alpha_2}{4} + 2\alpha_2 - \frac{2\alpha_2}{5} = 0 \qquad -25\alpha_2 + 40\alpha_2 - 8\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0;\ \alpha_1 = 0;\ \alpha_3 = 0$$

Доказано!

Задача 3

Найти координаты вектора $\vec{x}(4,3)$ в базисе $\vec{e_1}(1,1)$ и $\vec{e}_2(-2,-1)$

$(4,3) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-2,-1) \Leftrightarrow (4,3) = (1\alpha_1, 1\alpha_1) + (-2\alpha_2, -1\alpha_2)$

$= (1\alpha_1 - 2\alpha_2,\ 1\alpha_1 - 1\alpha_2)$

$4 = 1\alpha_1 - 2\alpha_2 \quad 3 = 1\alpha_1 - 1\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = -1$

Задача 4

Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}(-4,-5)$ и $\vec{b}(2,-4)$, заданных в базисе $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ если $|\vec{e_1}| = 3$ $|\vec{e_2}| = 4$ и $\angle(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \frac{\pi}{4}$

$(a,b) = (-4\vec{e_1}, -5\vec{e_2})(2\vec{e_1} - 4\vec{e_2}) = -8|\vec{e}|^2 + 6(\vec{e_1}\vec{e_2}) +$

$+ 20|\vec{e_2}|^2 = -8 + 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20 \approx 298,91$

Задача 5

Найти $\Pi p_{\vec{b}}(-3\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

$\Pi p_{\vec{b}}(-3\vec{a} + \vec{b}) = \Pi p_{\vec{b}}(-3\vec{a}) + \Pi p_{\vec{b}}(\vec{b}) = \Pi p_{\vec{b}}(-3\vec{a}) + |\vec{b}| =$

$= -3|\vec{a}| \cos\frac{\pi}{4} + |\vec{b}| = -3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = -10$

задача 6

Определить вид четырёхугольника ABCD, если
$A(3,-3,-1)$ $B(7,-4,-2)$, $C(7,-1,-5)$ $D(3,0,-4)$

По формуле длины отрезка получим
что $AB = BC = CD = AD = \sqrt{18}$

$$\cos\varphi = \frac{(x_a \cdot x_b)+(y_a \cdot y_b)(z_a z_b)}{|a|\cdot|b|}$$

Для всех сторон получим $\cos\varphi = 0$
$\Rightarrow$ это квадрат!

задача 8

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3$,
$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Вычислить $|[-\vec{a}+3\vec{b}, -4\vec{a}+3\vec{b}]|$

$$[-\vec{a}, -4\vec{a}+3\vec{b}] + [3\vec{b}, -4\vec{a}+3\vec{b}] =$$

$$= [-\vec{a}, -4\vec{a}] + [-\vec{a}, 3\vec{b}] + [3\vec{b}, -4\vec{a}] + \overset{0}{[3\vec{b}, 3\vec{b}]} =$$

$$= 4\overset{0}{[\vec{a}, \vec{a}]} - 3[\vec{a}, \vec{b}] + 12[\vec{a}, \vec{b}] + 9[\vec{b}, \vec{b}] =$$

$$= |9[\vec{a}, \vec{b}]| = 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 57{,}2756443$$

Задача 7

Найдите точку D, такую, что она лежит на биссектрисе угла $\angle ABC$, если $A(1,0,2)$ $B(-1,0,2)$ $C(2,-1,1)$

$|AB| = 2$ $|BC = \sqrt{11}$ $|AC| = \sqrt{3}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BA}{BA+BC} = \frac{2}{2+\sqrt{11}}$$

$$d = \frac{2}{2+\sqrt{11}}$$

$$AD = (d, -d, -d)$$

$$D = AD + A = (d+1, -d, -d+2) =$$

$$= (1,37618, -0,376179, 1,62382)$$