Кр # 1

Задача 1

Найдите пределы

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6-y^6}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^6(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)}{r^4} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} r^2(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi) = 0$

"ограниченная на бесконечно малую"

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y\sin xy}{xy} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y\sin t}{t} = y = 2$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \log_{1+x}(1+x+y) = \lim\limits_{x\to 0} \log_{1+x}(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

г) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \log_{1+x}(1+x+y) = \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+y)}{\ln(1+x)} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{c}{\ln(1+x)} = \infty$

д) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \log_{1+x}(1+x+y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x+y)}{\ln(1+x)} \sim$

$\sim \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$ => Предел не существует.

Задача 2

Докажите, что функция $y^{3/5}\arcsin\sqrt{|x|}$ дифференцируема в точке (0,0).

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, y)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

$$df(0,0)=f'_x(0,0)dx+f'_y(0,0)dy=0$$

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0,\text{ при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y)}\frac{\Delta y^{3/5}\arcsin\sqrt{|\Delta x|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$ Переход к полярной системе координат

$$\begin{cases}\Delta x=r\cos\varphi\to 0\\ \Delta y=r\sin\varphi\to 0\end{cases}\Rightarrow r\to 0$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^{3/5}\sin^{3/5}\varphi\arcsin\sqrt{|r\cos\varphi|}}{\sqrt{r^2}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{|r|}}{r^{3/5}}\quad \left.\begin{matrix}r=a^2\\ r\to 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\to 0$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{\arcsin|a|}{a^{4/5}}=\lim_{a\to 0}\frac{(\arcsin|a|)'}{(a^{4/5})'}=\lim_{a\to 0}\frac{5}{4}\frac{a^{1/5}}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{a^{1/5}}{\sqrt{1-a^2}}=0\Rightarrow\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta y^{3/5}\arcsin\sqrt{|\Delta x|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

Задача 3

Найдите дифференциал функции u в точке $M(x,y,u)$, если:

а) $u^3 - xy + y = 0$, $M = (3,-2,-1)$

$3u^2 u'_x - u - xu'_x = 0 \iff u'_x = \frac{u}{3u^2 - x}$

$3u^2 u'_y - xu'_y + 1 = 0 \iff u'_y = -\frac{1}{3u^2 - x}$

частные производные в точке M отсутствуют => дифференциал в этой точке не опред

б) $x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0$, $M = (1, 1, -2)$

$3x^2 + 3u^2 u'_x - 3yu - 3xy\cancel{y'_x}u'_x = 0 \iff$

$\iff u'_x = \frac{3yu - 3x^2}{3u^2 - 3xy} = -1$

$6y^2 + 3u^2 u'_y - 3xu - 3xy\,u'_y + 2 = 0 \iff$

$\iff u'_y = \frac{3xu - 6y^2 - 2}{3u^2 - 3xy} = -\frac{14}{9}$

$-1dx - \frac{14}{9}dy$

в) Найдите дифференциал функции $z(x,y)$, если: $z=u^3+v^3$, $u+v=x$, $u^2+v^2=y$

$x^2=u^2+v^2+2uv \Leftrightarrow uv=\frac{x^2-y}{2} \Leftrightarrow$

$z=(u+v)(u^2+v^2-uv)=x\left(y-\frac{x^2-y}{2}\right) \Leftrightarrow$

$z'_x=y-\frac{x^2-y}{2}-x^2=\frac{3}{2}(y-x^2) \Leftrightarrow z'_y=\frac{3}{2}x$

$$\frac{3}{2}(y-x^2)dx+\frac{3}{2}x\,dy$$

Задача 4

а) Исследовать на экстремум функцию $u(x,y)$, если

$$(x^2+y^2+u^2)^2=8(x^2+y^2-u^2), \quad u>0$$

$(r^2+u^2)^2=8(r^2-u^2) \Leftrightarrow r^4+u^4+2r^2u^2+8u^2-8r^2=0$

$u^2=-r^2-4\pm4\sqrt{r^2+1}$ $\quad u=\sqrt{-r^2-4\pm4\sqrt{r^2+1}}$

$$u'_r=\frac{-\sqrt{r^2+1}+2}{2\sqrt{-r^2-5r-4+4\sqrt{r^2+1}(r+1)}}=0$$

$\sqrt{r^2+1}=2 \Leftrightarrow r^2=3$ $\quad x^2+y^2=r^2$

$$u_{max}=1$$

б) Исследовать на условные экстремумы функцию

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{при ограничении} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$$

$$F=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_i+2\lambda x_i=0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_i}{-2\lambda}=x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2=4\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_i}{\mp\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}=x_i \\ \lambda=\pm\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}{2} \end{cases}$$

Смотрим 2-ю производную Лагранжа

$\Rightarrow$ Ответ: $x_i=\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$ - макс. $x_i=-\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$ - мин

в) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x,y)=y^4-x^4$ на множестве $x^2+y^2\leq 9$

$u'_x=-4x^3$ $\quad u'_y=4y^3$ $\quad F=y^4-x^4+\lambda(x^2+y^2-9)$

$$\begin{cases} -4x^3+2\lambda x=0 \\ 4y^3+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \quad (x,y,\lambda)=(0,\pm 3,-18),(\pm 3,0,18)$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2}=x^2 \\ -\frac{\lambda}{2}=y^2 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{2}=x^2 \\ -\frac{\lambda}{2}=y^2 \\ -9=0 \end{cases}$$

Решений нет.

Макс. $u=81$ $(x,y,\lambda)=(0,\pm 3,-18)$, мин. $u=-81$

Задача 5

а) Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если сумма длин его ребер равна a.

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Надо найти условный максимум V, при условии $x + y + z = \frac{a}{4}$

$$L = x \cdot y \cdot z + \lambda\left(x + y + z - \frac{a}{4}\right)$$

$$\begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z - \frac{a}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{a}{12} \\ z = \frac{a}{12} \\ x = \frac{a}{12} \\ \lambda = -\frac{1}{144}a^2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{a}{12}, \frac{a}{12}, \frac{a}{12}\right) \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{a^3}{1728}$

8) Определить размеры закрытого прямоугольного короба с заданной толщиной стенок d и ёмкостью V, на изготовление которого потребуется наименьшее количество материала. Стенки в ёмкость не входят.

$$\begin{cases} \lambda yz = 2dz + 2dy + 4d^2 \\ \lambda xz = 2dz + 2dx + 4d^2 \\ \lambda xy = 2dx + 2dy + 4d^2 \\ x(\lambda y - 2d) = 2dy + 4d^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{2dy + 4d^2}{\lambda y - 2d} \qquad x = \frac{2dz + 4d^2}{\lambda z - 2d}$$

$$y = \frac{2dz + 4d^2}{\lambda z - 2d} = x = z \quad \Rightarrow \lambda x^2 = 4dx + 4d^2$$

$$x^3 = V \qquad x = \sqrt[3]{V} = y = z \quad \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{V}$$