

$$F(x, y) = -\frac{x^2}{2y^2 e^{2y}} + Cy = -\frac{1}{2e^{2y}} - \frac{x}{2y^2 e^{2y}} = C$$

ответ: $\frac{x^2}{y^2 e^{2y}} + \frac{1}{e^{2y}} = C$; $y=0$

самостоятельная работа

1) Решите уравнение

$y dx + x(2xy+1) dy = 0$, выразите ответ
в виде $f(x, y) = C$, укажите константу
для $y(1) = -1$

2: $y + 2x^2 y y' + x y' = 0$ ~~$y = z^1$ $y' = 1 \cdot z^{1-1} z'$~~

~~$\frac{1}{z} + z^1$~~ Приведем к однородному

то заменой $y = z^1$ найдем 1

при подстановке $x = z$, $y = z^1$ и упрощении сле-
дует z .

С: $1 \cdot z^{1-1} (2z^{1+1} + z) dz = -1 dz$

$$1 = 1 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = -1$$

$$y = \frac{1}{z} \quad dy = -\frac{dz}{z^2}$$

$$-\frac{x dz}{z^2} - \frac{2x^2 dz}{z^3} = -\frac{dz}{z}$$

при подстановке получено решение $y=0$

$$-x^2 dz - 2xz dz = -z^2 dx \Leftrightarrow (-xz - 2xz) dz = z^2 dx$$

Пусть $M(z, x)$ однородна, пусть $M(kz, kx) = k^n M(z, x)$

$$-k^2 xz - 2k^2 x^2 z = -k^2 z^2 \Rightarrow k^2$$

$$u = \frac{z}{x} \quad z = ux \quad dz = u dx + x du$$

$$(-u-2)x^2(udx + xdu) = -u^2 x^2 dx \quad \text{при условии однородности}$$

$$-2ux^2 dx - ux^3 du - x^3 du = 0 \quad (-u-1)x du - u dx = 0$$

$$(-ux - x) du = u dx \quad (-u-2)x du = u dx \quad \left(-\frac{2}{u}-1\right) du = \frac{dx}{x}$$

$$\int -\frac{2}{u}-1 du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -2 \ln|u| - u = 2 \ln|x| + C \Rightarrow \text{(Задание)}$$

$$-\frac{1}{xy} - 2 \ln\left(\frac{1}{xy}\right) = 2 \ln|x| + C \Rightarrow \ln|y^2| - \frac{1}{xy} = C \Rightarrow \underline{C = \ln|y^2|}$$

2) Решить уравнение укажите:

$$y(1) = 0, \quad y(1) = ?$$

$$xy^2 y' = x^2 + y^3$$

$$\frac{xy^2 dy}{dx} = y^3 + x^2$$

$$y = z^{\frac{1}{3}} \quad x = z \quad y = z^{\frac{1}{3}} \quad \text{приводим к однородному}$$

или z приводим к однородному

$$\frac{1}{3} z^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$$

$$2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

dx

$u(z,0)$

$$y = \sqrt[3]{xz}$$

$$dy = \frac{2dz}{3\sqrt[3]{z}}$$

$$\frac{2xzdz}{3dx} = z^4 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xzdz}{3} = (z^4 + x^2)dx$$

$$\Leftrightarrow 2xzdz = (3z^2 + 3x^2)dx$$

Ansatz
u(z,x)

og | $y^k = e$

$M(z,x)$

og | a, u

$$M(kz, kx) = k^n M(z,x), \text{ u. u. u. u.}$$

$$2k^2xz = 3k^2z^2 + 3k^2x^2 \Rightarrow k^2$$

$$u = \frac{z}{x} \Leftrightarrow z = u x \quad dz = u dx + x du$$

$$2u x^2 (u dx + x du) = (3u^2 + 3) x^2 dx$$

$$2u (u dx + x du) = (3u^2 + 3) dx$$

$$2u x du = (u^2 + 3) dx \quad | : 2x \quad u \quad u^2 + 3$$

$$\frac{u du}{u^2 + 3} = \frac{dx}{2x} \Leftrightarrow \int \frac{u}{u^2 + 3} du = \int \frac{1}{2x} dx$$

$$\ln(u^2 + 3) = \ln(x) + C \Leftrightarrow u^2 + 3 = e^C x \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^3}{x^2} + 3 = Cx \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{-3x^4 + Cx^3}$$

$$y(1) = \sqrt[3]{-3 + C} = 0 \Rightarrow C = 3$$

$$y(-1) = \sqrt[3]{-3 - 3} = \sqrt[3]{-6} \quad \text{Hier aufpassen!}$$

3) решим уравнение:

$$y^2(dydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx)$$

$$y^2 = (ydx - 2xdy) = 0 \quad \text{и} \quad x^3(xdy - 2ydx) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{xy^3}, \quad u_1 = \frac{y^2}{x} = C_1, \quad \mu_2 = \frac{1}{x^4y}, \quad u_2 = \frac{x^2}{y} = C_2$$

$$\mu_1 = \frac{1}{xy^3} \varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^4y} \varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{y^2}{x^5} \varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{положим } y^2 = x^4$$

$$\Rightarrow \varphi_1(u) = \frac{u}{x^5} \varphi_2\left(\frac{x^{5/2}}{\sqrt{u}}\right) \quad x > 0, (u > 0)$$

Замечание: первая часть равенства только от u , если взять $\varphi_2(u) = 1^m$

$$\Rightarrow \varphi_1(u) = 3u = y^{2/3} x^{-1/3} \quad \mu(x, y) = x^{-4/3} y^{-7/3}$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu(x, y)$, получим $y^2 dx - 2xy dy$ в точные дифференциалы

$$(x^{-4/3} y^{2/3} + 2x^{5/3} y^{-4/3}) dx - (2x^{-1/3} y^{8/3} + x^{8/3} y^{-2/3}) dy$$

$$f(x, y) = \int_1^x (t^{-4/3} + 2t^{5/3}) dt - \int_1^y (2x^{-1/3} t^{8/3} + x^{8/3} t^{-2/3}) dt$$

$$\Rightarrow \frac{x^{1/3} y^{1/3}}{x^3 - y^2} = c \Rightarrow \underline{c=0}$$

4) За какое время вода, заполняющая
полусферическую чашу диаметром 2 метра
вытечет из нее через круглое отверстие
шириной 10 см, вырезанное на дне чаши,
если скорость вытекания воды

$$v = 0,6 \sqrt{gh}$$

$$(h^2 - 2h) dh = \pi \frac{d^2}{4} v dt = \frac{6d^2}{40} \sqrt{gh} dt$$

$$dt = -\frac{20}{3} \frac{1}{d^2 \sqrt{g}} \frac{h^2 - 2h}{\sqrt{h}} dh$$

$$t = -\frac{20}{3d^2 \sqrt{g}} \int_0^1 (h^{5/2} - 2h^{3/2}) dh = \frac{20}{3d^2 \sqrt{g}} \left(\frac{2}{5} h^{5/2} - \frac{4}{2} h^{3/2} \right) \Big|_0^1$$

$$= -\frac{20}{3d^2 \sqrt{g}} \left(-\frac{14}{15} \right) \approx 35$$