Кр #2

Задача 1

Доказать, что если последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве к функции $f(x)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом множестве, то последовательность $g(x)\ f_n(x)$ равномерно сходится к $g(x)\ f(x)$.

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad \forall x\in E \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

(по определению равномерной сходимости f_n к F на E)

$\exists M\in\mathbb{R}$ - const такая, что $\forall x\in E \quad |g(x)|\leq M$

(по определению ограниченности функции $g(x)$ на том же множестве E)

$|g(x)f_n(x)-g(x)\ f(x) = |g(x)|\ |f_n(x)-f(x)| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad \forall x\in E$

$|g(x)f_n(x)-g(x)f(x)| = |g(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)| < M\varepsilon$

$M = const \Rightarrow$

где

$\Rightarrow$ по определению равномерной сходимости

$g(x) f_n(x) \rightrightarrows g(x) F(x)$ на E

Задача 2

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость следующие ряды на указанных промежутках.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right)$, $E = \mathbb{R}$

при фикс. x $u_n(x) = \log\left(1+\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right) =$

$= \frac{nx^2}{2+n^3x^2} + O\left(\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right)^2 = \frac{n}{n^3} \cdot \frac{x^2}{\frac{2}{n^3}+x^2} + O\left(\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right) \le$

$\le \frac{1}{n^2} + \frac{C}{n^4}$ при $n \to +\infty$ C - const

$\forall x \in E$ $0 \le u_n(x) \le \frac{1}{n^2} + \frac{C}{n^4}$ - образующий сходящийся ряд $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - сходится поточечно на E;

$|u_n(x)| = u_n(x) = \frac{nx^2}{2+n^3x^2} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(1+k)^2} \cdot \left(\frac{nx^2}{2+n^3x^2}\right)^2$,

где $0 < k < \frac{nx^2}{2+n^3x^2}$ - формула Тейлора с остатком в формуле Лагранжа

$|u_n(x)| \le \frac{nx^2}{n^3x^2} = \frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - сходящийся ряд $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится на E

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{3+x\sqrt{n^5}}{2+x\sqrt{n^5}}\right)$, $E = [1; +\infty)$

при фиксированном x $u_n(x) = \log\left(\frac{3+x\sqrt{n^5}}{2+x\sqrt{n^5}}\right)$

$= \log\left(1 + \frac{1}{2+x\sqrt{n^5}}\right)$ - монотонно стремится ко 0 при $x \in E \Rightarrow$ по признаку Лейбница $\forall x \in E$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ - сходится

$\forall x \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) \ge u_{n+1}(x) \ge 0$

$\left|\sum\limits_{n=N}^{n+p} (-1)^n u_n(x)\right| = |\overbrace{u_n(x) - u_{n+1}(x)}^{\ge 0} + \overbrace{u_{n+2}(x) - \ldots}^{\ge 0}| \le$

$\underbrace{- u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x)}_{\le 0} \ldots \underbrace{- \ldots}_{\le 0}$

$\leq u_n(x) + u_{n+p}(x)$, так как при $p \vdots 2$ модуль данной суммы $\leq u_n(x)$, а при других p можно вынести последн~~юю~~ее слагаемое;

$$u_n(x) = \log\left(1 + \frac{1}{1 + x\sqrt{n^5}}\right) \leq \log\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{n^5}}\right) \leq \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^5}}\right)$$

$\underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на E ~~так~~ как $E \ni x \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} (-1)^k u_k(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n u_n(x)$ – равномерно сходится на E.

Задача 3)

Доказать, что последовательность $f_n(x) = nx(1+x^2)^n$ сходится на $[0, 1]$ к непрерывной функции $f(x)$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$

при $x = 0$ $f_n(x) = 0$, при $x = 1$ $f_n(x) = 0$

при $x \in (0; 1)$ $f_n(x) = nx \cdot e^{n\ln(1-x^2)} = -\frac{x}{\ln(1-x^2)} \cdot \frac{-n\ln(1-x^2)}{e^{-n\ln(1-x^2)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, при фиксированном x,

так как $\ln(1-x^2) < 0$ при $x \in (0; 1)$; $\Rightarrow$

$f_n(x) \rightrightarrows F(x)$ на E, где $F(x) \equiv 0$ - непрерывная

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n\,d(x^2) = -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n$$

$$= -\frac{n}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = -\frac{n}{2}\left(0-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{n}{n+1}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

Ч.Т.Д

Задача 4)

Исследовать степенные ряды на сходимость (найти интервал сходимости и исследовать на границе):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \Rightarrow R = e$$

$x = e$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \quad \ln\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n = n\left(1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$= n\left(1 + n\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$ при $n \to +\infty$ $=$

$= n\left(1 - 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ ряд расходится ; $x = -e$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$ -

расходится так как члены не $\not\to 0$

$\Rightarrow$ ряд сходится $(-e; e)$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!} x^n$ $:= b_n$

при $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ при $n > a$ $b_n = 0 \Rightarrow$ ряд сходится на $\mathbb{R}$ при $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \left|\frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{a(a-1)\dots(a-(n-1))(a-n)}\right| = \left|\frac{n+1}{a-n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\Rightarrow R = 1$

$x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

при $a < 0$ $b_n = (-1)^n \cdot \frac{(-a)(-a+1)\dots(-a+n-1)}{n!} = (-1)^n c_n$

$c_n > 0$ и $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-a+n}{n+1} = \frac{n+1-a-1}{n+1} = 1 + \frac{(-a-1)}{n+1}$

при $a < -1$ c_n - монотонно возрастает $\Rightarrow (-1)^n c_n \not\to 0$

так как $c_n > 0$ $\Rightarrow \sum b_n$ расходится

при $-1 < a < 0$; $|b_n| = c_n$; $n\left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{-a+n} - 1\right)$

$= n \cdot \frac{n+1+a-n}{-a+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a+1 > 0$ $\Rightarrow$ по признаку

Раабе $\sum C_n = \sum |b_n|$ — сходится $\Rightarrow \sum b_n$ — сходится

при $a>0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $N-1 < a < N$; $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} b_n}_{\text{конечно}} +$

$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ при $n>N$ $b_n = \frac{(a(a-1)\dots(a-(N-1)))(N-a)\dots(n-1-a)}{n!}$

$\cdot (-1)^{n-N} = (-1)^{n-N} \cdot d_n$

$d_n > 0$ $|b_n| = d_n$ $n\left(\frac{d_n}{d_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-a} - 1\right) = n \cdot \frac{n+1-n+a}{n-a} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\to a+1>0 \Rightarrow$ по признаку Раабе $\sum_{n>N} d_n = \sum_{n>N} |b_n|$ —

сходится $\Rightarrow \sum_{n>N} b_n$ — сходится ;

$x=-1$; $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ при $a>-1$ $\Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ —

абсолютно сходится , так как $|b_n| = |(-1)^n b_n|$

~~Задача 3~~

~~При каких значениях x сходится бес-~~

~~конечное произведение~~

$$\cancel{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)}$$

при $a<-1$ $(-1)^n b_n = (-1)^{2n} C_n = C_n$; C_n —

монотонно ↑ и $C_n > 0$ $\Rightarrow C_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд

расходится , так как не выполнено

необходимое условие сходимости

Ответ:

при $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ряд сходится на $\mathbb{R}$

при $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

при $a < -1$ ряд сходится на $(-1; 1)$

при $a > -1$ ряд сходится на $[-1; 1]$

Задача 5

При каких значениях x сходится бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right) \sim \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$$

при $|x| > e$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - монотонно возрастает не то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e < |x| \Rightarrow \left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{x}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n(x) = \ln\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right), \quad \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$$

разложим по Тейлору

$$b_n(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} + O\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)^2$$

рассмотрим $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} y^n$

$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \Rightarrow R = e^{-1}$; $y = \frac{1}{x} \Rightarrow$ при

$|x| > e$ $\quad |y| < e^{-1}$ и $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$ - сходится

рассмотрим $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2} y^{2n} = \sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$, где

$a_{2n+1} = 0 \qquad a_{2n} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2/2}$

$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} = e \Rightarrow R = e^{-1}$;

$z = \frac{1}{x} \Rightarrow$ при $|x| > e$ $\quad |z| < e^{-1}$ и $\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^2}\right)$ -

сходится

$b_n(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} + O\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)^2 \Rightarrow \sum b_n(x)$ - сход

$0 < |x| \leq e$

$\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{|x|^n}\right) = n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln|x|\right) =$

$= n\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln|x|\right) =$

$= n\left(1 - \ln|x| - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n(1-\ln|x|$

$\not\to -\infty$ так как

$\ln|x| \le 1 \Rightarrow 1-\ln|x| \ge 0$ и данное выражение $\to \frac{1}{2}$ либо $\to +\infty \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{|x|^n} \not\to 0$

при $x>0$ $\ln(x) = \ln\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{|x|^n}\right) \not\to 0$ при $n\to+\infty$ по доказанному выше

при $x<0$ $b_n(x) = \ln\left(1+(-1)^n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{|x|^n}\right) \not\to 0$ при $n \to +\infty$ анал

$\Rightarrow$ ряд расходится так как не выполнены необходимые условия для сходимости

$\Rightarrow$ Ответ: произведение сходится, при $|x|>e$