

Карточки теста №3

Вариант I

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1** Пусть $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ — последовательности в \mathbb{R}^n , обладающие пределами в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Верно ли, что последовательность $\{x^k + y^k\}$ является сходящейся в себе?
 - 2** Является ли компактом множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |6x| + 9y^2 + \cos(x - 4y) \leq 100\}$?
 - 3** Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и все частные производные первого порядка функции f в каждой точке существуют и постоянны. Означает ли это, что функция f линейна?
-

Вариант 2

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1** Найти предел $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}}$, либо установить его отсутствие.
 - 2** Пусть B — некоторый замкнутый шар в \mathbb{R}^3 , $f(x, y, z) \in C(B)$. Верно ли, что график $\Gamma = \{(x, y, z, t) : (x, y, z) \in B, t = f(x, y, z)\}$ функции f является компактом в \mathbb{R}^4 ?
 - 3** Что представляет собой дифференциал второго порядка функции $f(x, y)$ в точке $\mathbf{0}$, если $f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ при $(x, y) \neq \mathbf{0}$ и непрерывна в нуле?
-

Вариант 3

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1** Найти предел $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x^2 + y^2)^{xy}$, либо установить его отсутствие.
 - 2** Пусть $f(x, y) \in C([0; 1]^2)$. Верно ли, что график $\Gamma = \{(x, y, z) : (x, y) \in [0; 1]^2, z = f(x, y)\}$ функции f является компактом в \mathbb{R}^3 ?
 - 3** Найти вторую производную по вектору $v = (5, 1, 0)$ функции $P(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 4y^3 + 4xz - 8z^3$ в точке $(0; 1; 2)$.
-

Вариант 4

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1** Верно ли, что из существования двойного предела следует существование повторного?
- 2** Пусть множество E задается в \mathbb{R}^3 системой условий:

$$E = \{(x, y, z) : P(x, y, z) = 0, \quad |x|, |y|, |z| \leq 5\}$$

где $P(x, y, z)$ — многочлен. Верно ли, что множество E компактно?

- 3** Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и все частные производные первого порядка функции f в некоторой точке $a \in \mathbb{R}^n$ существуют и равны единице. Означает ли это, что функция f дифференцируема в точке a ?
-

Вариант 5

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1 Верно ли, что из любой последовательности в \mathbb{R}^n можно извлечь подпоследовательность, обладающую пределом в $\overline{\mathbb{R}^n}$?
- 2 Является ли компактом множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 + \sin(x - 4y) \leq 10\}$?
- 3 Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и все частные производные первого порядка функции f в каждой точке существуют и равны нулю. Означает ли это, что функция f постоянна?
-

Вариант 6

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1 Найти предел $\lim_{(x;y) \rightarrow \infty} \frac{3x+y}{2x^2+y^2-xy}$, либо установить его отсутствие.
- 2 Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C([a; b])$. Верно ли, что график $\Gamma = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = f(x)\}$ функции f является компактом в \mathbb{R}^2 ?
- 3 Найти четвертую производную по вектору $v = (5, 1)$ функции $P(x, y) = \ln(x + 2y)$.
-

Вариант 7

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1 Пусть $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ — последовательности в \mathbb{R}^n , обладающие пределами в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Верно ли, что последовательность скалярных произведений $\{< x^k, y^k >\}$ является сходящейся в себе?
- 2 Пусть множество E задается на плоскости \mathbb{R}^2 системой условий:

$$E = \{(x, y) : P(x, y) = 0, x^4 + y^4 \leq 10^4\},$$

где $P(x, y)$ — многочлен. Верно ли, что множество E компактно?

- 3 Пусть для некоторой функций $f(x)$ в некоторой внутренней точке a области определения $D \subseteq \mathbb{R}^n$ этой функции существует производная по любому направлению. Означает ли это, что $f(x)$ дифференцируема в точке a ?
-

Вариант 8

Во всех задачах требуется обосновать ответ!

- 1 Пусть $\{x^k\}$ — сходящаяся последовательность в \mathbb{R}^n , $a = (1, 2, 3, \dots, n)$ и $r_k = \|x^k - a\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что $\{r_k\}$ является сходящейся в себе?
- 2 Пусть B — некоторый замкнутый шар в \mathbb{R}^n , $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(B)$, I — (замкнутый) отрезок. Верно ли что прообраз $f^{-1}(I)$ этого отрезка является компактом?
- 3 Вычислить $d^5 \ln(3x + 5y)$.
-