Дз # 5

Задача 1

Как изменится матрица линейного преобразования φ, если заданная в базисе $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ если вектор e_i заменить на комбинацию $e_i + \lambda e_j$? Ответ обосновать.

$\exists \varphi : X \Rightarrow Y$ базис в X $\{e_j\}_{j=1}^{n}$

базис в Y $\{e_j\}_{j=1}^{n}$

$\varphi_1 = \varphi(e_1) = \varphi_1^1 e_1 + \varphi_1^2 e_2 + \dots \varphi_1^n e_n = \varphi_1^i e_i$

$\vdots$

$\varphi_n = \varphi(e_n)\ \varphi_n^1 e_1 + \varphi_n^2 e_2 + \dots + \varphi_n^n e_n = \varphi_n^i e_i$

Матрица

$$A\varphi \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & \dots & \varphi_n^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \dots & \varphi_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ \varphi_1^n & \varphi_2^n & \dots & \varphi_n^n \end{vmatrix}$$

$\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^{n}$ – новый базис в X и Y

$\tilde{e}_i = e_i + \lambda e_j$ при $i = j$

$\tilde{e}_j = e_j + \lambda e_j \Rightarrow$ при $\lambda = -1$ $\tilde{e}_j = 0$

$\Rightarrow$ размерность уменьшится.

$(\tilde{\varphi}_1\ \tilde{\varphi}_2 \dots \tilde{\varphi}_n) = (e_1 e_2 e_3 \dots e_n)(A\varphi + \lambda B_j) = (\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_n)\tilde{A}\varphi$

Задача 2

При линейном отображении $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ столбцы матрицы A переходят в соответствующие столбцы матрицы B. Выяснить, является ли данное отображение инъективным, сюръективным, найти размерность ядра и образа отображения φ, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (a_i^i \to b_i^i)$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{vmatrix} \to g_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{vmatrix} \to y_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ -5 \\ -9 \end{vmatrix} \to y_2 = \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = -x_3 \\ y_2 = -y_3 \end{matrix}$$

Данное отображение $A \to B$ одновременно сюръективно и инъективно

$\dim X = 2 \quad \dim Y = \dim(\mathrm{Im}\varphi) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 0$

Задание 3

Вычислить матрицу оператора дифферен-цирования в пространстве многочленов $\deg \le 2$ если базис формирует следую-щие элементы:

$1+t \quad , \quad 2+2t^2 \quad , \quad 3t^2-1$

$\varphi(p) = \frac{dp(t)}{dt}$

$\varphi_1 = \varphi(e_1) = 1 \qquad \varphi_1 = 0 \cdot e_1 + \varphi_1^2 e_2 + \varphi_1^3 e_3 = 2\varphi_1^2 + 2\varphi_1^2 t^2 +$

$\varphi_2 = 4t \qquad 3\varphi_1^3 t^2 - \varphi_1^3 = (2\varphi_1^2 + 3\varphi_1^3)t^2 + (2\varphi_1^2 - \varphi_1^3) = 1$

$\varphi_3 = 6t$

$\begin{cases} 2\varphi_1^2 + 3\varphi_1^3 = 0 \\ 2\varphi_1^2 - \varphi_1^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1^2 = \frac{3}{8} \\ \varphi_1^3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} \varphi_1 = 0 e_1 + \frac{3}{8} e_2 - \frac{1}{4} e_3 = 1 \\ \varphi_2 = 4t = 4e_1 - 4 = 4e_1 - \frac{12}{8} e_2 + \frac{4}{4} e_3 = 4e_1 + \frac{3}{2} e_2 + e_3 \\ \varphi_3 = 6t = 6e_1 - 6 = 6e_1 - \frac{18}{8} e_2 + \frac{6}{4} e_3 = 4e_1 + \frac{9}{4} e_2 + \frac{3}{2} e_3 \end{cases}$

$A_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3/8 & -3/2 & -9/4 \\ -1/4 & 1 & 3/2 \end{vmatrix}$

Задание 4

Линейные преобразования $\varphi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданы матрицами A и B соответственно

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ Вычислить матрицу следующих преобразований:

$\varphi^2 - \psi^2$ $4\varphi\psi^{-1}$

$\varphi^2 - \psi^2 \Rightarrow C = A\varphi A\varphi - B\varphi B\varphi$

$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$

$4\varphi\psi^{-1} \Rightarrow 4A\varphi B\varphi^{-1} = \begin{vmatrix} -16 & 12 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

Задача 5

Пусть $L(X, Y)$ - линейное пространство операторов, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y. Выяснить, образуют ли следующие множество отображений подпространство в $L(X,Y)$

1) Множество всех инъективных отображений
2) Множество всех сюръективных отображений
3) множество всех отображений, чьи образы имеют размерность $r \geq 1$

$L(X,Y)$ - Л.П $\varphi: X \to Y$

1) Множество всех инъективных отображений не образует подпространств ЛП L так.к $\exists$ φ и φ_1 ~~$\in L$~~ такие что $\varphi(x)=x$ - инъек.
$\varphi_1(x)=-x$ инъективно
$\varphi(x)+\varphi_1(x)=0$ - не инъек.

2) Мн/ство всех сюръективных отображений образует подпространство т.к. $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$
$Y = \mathrm{Im}\,\varphi$

3) Мн/ство всех отображений чьи образы имеют размерность $r \geq 1$ не образует подпространство, т.к. в этом мн/ве нет нуля