Задание 1

Укажите, для доказательства неразрешимости каких из приведенных задач можно непосредственно применить теорему Успенского-Райса. Обоснуйте ваш ответ.

Вариант A

1. Определить, является ли язык, распознаваемый заданной машиной Тьюринга, регулярным.
2. Определить, является ли заданная машина Тьюринга по сути конечным автоматом, то есть верно ли, что она не меняет содержимое ленты и каждый раз при переходе перемещается вправо.
3. Определить, эквивалентны ли две контекстно-свободные грамматики.

Вариант B

1. Определить, является ли язык, распознаваемый заданной машиной Тьюринга, бесконечным.
2. Определить, верно ли, что заданная машина Тьюринга на любом входе посещает не более чем константное число ячеек ленты.
3. Определить, является ли дополнение языка, заданного данной контекстно-свободная грамматикой, контекстно-свободным.

Вариант C

1. Определить, является ли данная контекстно-свободная грамматика однозначной.
2. Определить, является ли язык, распознаваемый заданной машиной Тьюринга, контекстно-свободным.
3. Определить, является ли заданная двухленточная машина Тьюринга по сути автоматом с магазинной памятью, то есть верно ли, что она не меняет содержимое входной ленты и перемещается по ней только вправо, а вторую ленту использует в качестве стека.

Вариант D

1. Определить, содержит ли язык, распознаваемый заданной машиной Тьюринга, пустое слово.
2. Определить, верно ли, что заданная машина Тьюринга на пустом входе, не выполняя записи на ленту, переходит в недопускающее состояние.
3. Определить, является ли данная контекстно-свободная грамматика эквивалентной некоторой контекстно-свободной грамматике, содержащей меньшее количество нетерминалов.

Вариант E

1. Определить, экввалентна ли заданная машина Тьюринга другой машине Тьюринга, содержащей меньшее число состояний.
2. Определить, является ли язык, заданный данной контекстно-свободной грамматикой, регулярным.
3. Определить, является ли язык, распознаваемый заданной машиной Тьюринга, разрешимым.

Задание 2

Вариант F

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) \cap L(q) = \varnothing\}$ является неразрешимым.

Вариант G

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) \cup L(q) = \Sigma^*\}$ является неразрешимым.

Вариант H

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) = \overline{L(q)}\}$ является неразрешимым.

Вариант I

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) \subset L(q)\}$ является неразрешимым.

Вариант J

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) \not\subset L(q)\}$ является неразрешимым.

Вариант K

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) \neq L(q)\}$ является неразрешимым.

Вариант L

Докажите, что множество пар программ $\{\langle p, q\rangle \mid L(p) = L(q)\}$ является неразрешимым.

Задание 3

Постройте m-сведение языка A к языку B.

Вариант M

A — множество программ, останавливающихся на любом входе, B — множество программ, реализующих вычисление функции $f(x) = x$.

Вариант N

A — множество программ, останавливающихся на любом входе, B — множество программ, реализующих вычисление функции, что для всех x выполнено $f(x) \neq x$.

Вариант O

A — универсальный язык (множество пар $\langle p, x\rangle$, что $p(x) = 1$), B — множество программ, распознающих регулярный язык.

Вариант P

A — универсальный язык (множество пар $\langle p, x\rangle$, что $p(x) = 1$), B — множество программ, распознающих контекстно-свободный язык.

Задание 4

Вариант Q

Пусть задано множество пар слов X над некоторым алфавитом. Таг-система Поста — это абстрактный вычислитель, который действует следующим образом. У него имеется один регистр, содержащий слово. За один переход система может заменить слово xy на слово yz для любых слов x, y и z, где $(x, z) \in X$.

Докажите, что задача проверки, может ли таг-система Поста получить из заданного слова u заданное слово v, алгоритмически неразрешима.

Вариант R

Рассмотрим первую четверть плоскости, разбитую на единичные квадратики. Каждый квадратик можно раскрасить в один из k цветов. При этом нижний левый квадратик $(0, 0)$ обязательно должен быть раскрашен в первый цвет. Пусть заданы два множества пар цветов H и V. Для каждой пары соседних по горизонтали квадратиков (x, y) и $(x+1, y)$ пара их цветов (c_1, c_2) должна принадлежать множеству H, а для каждой пары соседних по вертикали квадратиков (x, y) и $(x, y+1)$ пара их цветов (c_1, c_2) должна принадлежать множеству V.

Докажите, что по заданному числу k и множествам H, V невозможно алгоритмически определить, можно ли раскрасить четверть плоскости указанным образом.

Вариант S

Пусть заданы два множества положительных целых чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Для целого числа i обозначим как $h(i)$ наименьшую степень двойки, строго большую i. Рассмотрим абстрактный вычислитель с двумя целочисленными регистрами a и b. Исходно значение каждого из регистров равно нулю.

За один ход вычислитель может выбрать число от 1 до n и выполнить присваивание $a \leftarrow a \cdot h(x_i) + x_i$, $b \leftarrow b \cdot h(y_i) + y_i$. Требуется определить, может ли указанный вычислитель получить в обоих регистрах одинаковое положительное значение.

Докажите, что поставленная задача алгоритмически неразрешима.