

**Письменная часть экзамена по ДМ**  
**Демонстрационный вариант**

1. Приведите пример вероятностного пространства и четырех различных событий, любые два из которых попарно независимы.
2. В популяции вероятность случайно выбранного человека болеть коронавирусом равна  $1/10$ . Тест на коронавирус показывает положительный результат для больного с вероятностью  $7/10$  и для здорового с вероятностью  $1/20$ . Какая вероятность, что тест случайно выбранного человека покажет положительный результат?
3. Дайте определение независимых случайных величин. Приведите пример независимых случайных величин.
4. (Задача) Даны две независимые случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ . Известно, что множества значений  $\xi$  и  $\eta$  совпадают и содержат  $k$  различных значений. Найдите минимум вероятности того, что  $\xi = \eta$ . Приведите пример случайных величин, для которых он достигается.
5. (Задача) Даны две неотрицательные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ ,  $E\xi = 10$ ,  $E\eta = 100$ .  
Может ли выполняться неравенство  $P(\xi \geq 1000) > P(\eta \geq 1000)$ ?
6. Найдите энтропию случайного источника, значение которого (число от 0 до 31) получается в результате бросания пяти нечестных монет, на которых значение 1 выпадает с вероятностью  $1/4$ . В качестве единицы измерения выберем бит — энтропию честной монеты.
7. Приведите пример поглощающей и непоглощающей марковских цепей.
8. В марковской цепи три состояния, из состояния  $i$  в состояние  $j$  переход происходит с вероятностью  $1/4$  для всех  $i \neq j$ , с вероятностью  $1/2$  цепь остается в том же состоянии. Исходно цепь находится в состоянии 1. Найдите распределение вероятностей цепи через 5 шагов.
9. Является ли цепь из предыдущего задания эргодической? Если да, то какое у неё предельное распределение вероятностей?
10. Напишите регулярное выражение для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , в которых второй с начала символ равен второму символу с конца.
11. (Задача) Постройте недетерминированный конечный автомат для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , в которых пятый символ с конца равен последнему. Сколько состояний имеет минимальный детерминированный автомат для этого языка?
12. Докажите, что язык слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , в котором число нулей и единиц различается не более чем в два раза, не является регулярным.
13. (Задача) Приведите пример языка  $L$  и двух недетерминированных автоматов для него, которые не изоморфны и содержат одинаковое и минимальное для  $L$  число состояний.
14. Антипалиндромы. Постройте КС-грамматику для языка слов четной длины над алфавитом  $\{0, 1\}$ , в которых для любого  $k$  выполнено условие:  $k$ -й от начала и  $k$ -й от конца символ различны.
15. Постройте левосторонний вывод и изобразите дерево разбора для строки «010101» в грамматике из предыдущего задания.
16. (Задача) Грамматика без бесполезных символов в нормальной форме Хомского имеет три правила. Может ли она порождать бесконечное число различных слов?
17. Докажите, что язык  $0^a 1^b 2^c$ ,  $a \neq b \cdot c$  не является контекстно-свободным.
18. Постройте автомат с магазинной памятью для языка слов над алфавитом  $\{0, 1\}$ , в которых число нулей больше числа единиц.