Задание 1

Вариант A

Докажите, что во взвешенном матроиде можно найти базу, минимальный вес элемента которой максимален, с помощью жадного алгоритма.

Вариант B

Пусть веса всех элементов в носителе различны. Рассмотрим цикл C. Докажите, что элемент минимального веса в C не входит в базу максимального веса.

Вариант C

Пусть веса всех элементов в носителе различны. Будем называть разрезом в матроиде минимальное по включению множество A, такое что любая база B матроида имеет общий элемент с A. Докажите, что минимальный по весу элемент в любом разрезе лежит в минимальной по весу базе матроида.

Задание 2

Докажите, или опровергните, что приведенная конструкция является матроидом.

Вариант D

Носитель — множество ребер неориентированного графа, независимые множества — деревья, инцидентные заданной вершине (а также пустое множество ребер).

Вариант E

Носитель — множество ребер ориентированного графа без петель и параллельных ребер, независимые множества — ациклические семейства ребер.

Вариант F

Носитель — заданное множество натуральных чисел, независимые множества — множества чисел, в которых все пары чисел взаимно просты.

Вариант G

Носитель — заданное мультимножество натуральных чисел, независимые множества — множества чисел, в которых все числа различны.

Вариант H

Носитель — множество вершин заданного ориентированного графа, независимые множества — множества, в которых ни для каких двух вершин нет пути от одной вершины до другой (по ребрам исходного графа).

Вариант I

Носитель — множество вершин заданного неориентированного графа, независимые множества — множества, в которых ни для каких двух вершин нет пути от одной вершины до другой (по ребрам исходного графа).

Вариант J

Носитель — множество вершин заданного ориентированного графа, независимые множества — множества A вершин такие, что можно выбрать для каждой вершины из A исходящее из нее ребро, чтобы никакие два выбранных ребра не имели общего конца.

Вариант K

Носитель — множество вершин заданного неориентированного графа, независимые множества — множества A вершин такие, что можно выбрать для каждой вершины из A инцидентное ей ребро, чтобы никакие два выбранных ребра не совпадали и не имели общего конца.

Вариант L

Носитель — множество вершин заданного неориентированного графа, независимые множества — множества, в которых никакие две вершины не соединены ребром.

Вариант M

Носитель — множество ребер заданного неориентированного графа, независимые множества — множества, при удалении которых граф остается связным.

Вариант N

Носитель — множество вершин заданного неориентированного графа, независимые множества — множества, при удалении которых размер максимального паросочетания в графе не меняется.

Задание 3

Вариант O

Рассмотрим множество ребер заданного неориентированного графа. Будем называть множество независимым, если оно содержит не более одного цикла. Докажите, что получившаяся конструкция является матроидом.

Вариант P

Рассмотрим множество правильных скобочных последовательностей длины $2n$. Будем называть подмножество чисел от 1 до $2n$ независимым, если существует правильная скобочная последовательность, где на указанных позициях стоят открывающие скобки. Докажите, что получившаяся конструкция является матроидом.

Вариант Q

Рассмотрим множество чисел $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n$. Рассмотрим $X = \{1, 2, ..., n\}$ Будем называть множество чисел $1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_i \le n$ независимым, если $i \le k$ и $b_j \le a_{k-i+j}$ для всех j от 1 до i.

Докажите, что для любого такого набора $a_1, a_2, \ldots, a_k$ соответствующая конструкция является матроидом.

Докажите, что построенные матроиды для двух различных наборов a_i не изоморфны.

Вариант R

Пусть задан взвешенный матроид $\langle X, \mathcal{I} \rangle$ с весовой функцией $w : X \to \mathbb{R}$. Рассмотрим его множество баз минимального веса $\mathcal{B}_{min}$. Докажите, что оно образует семейство баз некоторого матроида и опишите независимые множества в этом матроиде.