Задание 1

Назовем вершинной связностью графа $\kappa(G)$ минимальное число вершин графа, которое требуется удалить, чтобы граф потерял связность. Назовем реберной связностью графа $\lambda(G)$ минимальное число ребер графа, которое надо удалить, чтобы он потерял связность. Будем обозначать минимальную степень вершины графа как $\delta(G)$.

Вариант A

Постройте граф с указанными реберной и вершинной связностью, а также минимальной степенью вершины. $\kappa = 3$, $\lambda = 4$, $\delta = 5$

Вариант B

Постройте граф с указанными реберной и вершинной связностью, а также минимальной степенью вершины. $\kappa = 2$, $\lambda = 5$, $\delta = 5$

Вариант C

Постройте граф с указанными реберной и вершинной связностью, а также минимальной степенью вершины. $\kappa = 4$, $\lambda = 4$, $\delta = 4$

Задание 2

Пусть G — связный граф, содержащий не менее трех вершин. Рассмотрим следующие утверждения.

1. любые две вершины графа G лежат на реберно простом цикле;
2. любая вершина и любое ребро графа G лежат на реберно простом цикле;
3. любые два ребра графа G лежат на реберно простом цикле;
4. для любых двух вершин и любого ребра графа G существует реберно простой путь, соединяющий эти вершины и проходящий по этому ребру;
5. для любых двух вершин и любого ребра графа G существует простой путь, соединяющий эти вершины и не проходящий по этому ребру;

Вариант D

Докажите, что (1) $\to$ (2).

Вариант E

Докажите, что (1) $\to$ (3).

Вариант F

Докажите, что (1) $\to$ (4).

Вариант G

Докажите, что (1) $\to$ (5).

Вариант H

Докажите, что (2) $\to$ (1).

Вариант I

Докажите, что (3) $\to$ (1).

Вариант J

Докажите, что (4) $\to$ (1).

Вариант K

Докажите, что (5) $\to$ (1).

Задание 3

Напомним, что сумма графов $G+H$ образуется следующим образом: рядом изображаются графы G и H и каждая вершина G соединяется с каждой вершиной H.

Вариант L

Найдите число остовных деревьев графа $K_{3,2}$.

Вариант M

Найдите число остовных деревьев графа $C_4 + K_1$.

Вариант N

Найдите число остовных деревьев графа $K_3 + \overline{K_2}$.

Задание 4

Вариант O

Опишите все графы, которые содержат цикл, который является одновременно эйлеровым и гамильтоновым.

Вариант P

Граф называется вершинным кактусом, если любая вершина лежит не более чем на одном простом цикле. Опишите все вершинные кактусы, которые являются эйлеровыми.

Вариант Q

Граф называется вершинным кактусом, если любая вершина лежит не более чем на одном простом цикле. Опишите все вершинные кактусы, которые являются гамальтоновыми.

Задание 5

Вариант R

Петя пытается нарисовать граф K_6, минимальное число раз отрывая карандаш от бумаги. Сколько раз ему придется оторвать карандаш? Обоснуйте ваш ответ.

Вариант S

Петя пытается нарисовать граф $K_{3,4}$, минимальное число раз отрывая карандаш от бумаги. Сколько раз ему придется оторвать карандаш? Обоснуйте ваш ответ.

Вариант T

Петя пытается нарисовать граф K_5, не проводя рёбра через вершины, которые не являются их концами, и сделав минимальное число пересечений кривых, которые изображают рёбра. Какое минимальное число пересечений получится? Обоснуйте ваш ответ.

Вариант U

Петя пытается нарисовать граф $K_{3,3}$, не проводя рёбра через вершины, которые не являются их концами, и сделав минимальное число пересечений кривых, которые изображают рёбра. Какое минимальное число пересечений получится? Обоснуйте ваш ответ.

Задание 6

Постройте граф, у которого в декомпозиции Эдмондса-Галаи множество D имеет n компонент связности и содержит суммарно d вершин, множество A имеет a вершин и множество C имеет c вершин или докажите, что это невозможно.

Вариант V

(а) $n = 2$, $d = 6$, $a = 1$, $c = 6$ (б) $n = 1$, $d = 1$, $a = 1$, $c = 4$

Вариант W

(а) $n = 4$, $d = 5$, $a = 4$, $c = 3$ (б) $n = 3$, $d = 7$, $a = 2$, $c = 4$

Вариант X

(а) $n = 4$, $d = 10$, $a = 2$, $c = 0$ (б) $n = 0$, $d = 0$, $a = 2$, $c = 8$