

Домашняя работа 2

2 апреля 2021 г.

Важно: когда вы рассматриваете интеграл в окрестности особенности и пишете, что сходимость одного интеграла эквивалентна сходимости другого, вам необходимо доказать почему. Например, в интеграле

$$\int_1^\infty \frac{1+o(1)}{x^2}$$

нужно написать что-то вроде: выберем M так, что $\forall x > M$ выполнено $\frac{1}{2} \leq 1+o(1) \leq \frac{3}{2}$, тогда

$$\int_1^\infty \frac{1+o(1)}{x^2} = \int_1^M \frac{1+o(1)}{x^2} + \int_M^\infty \frac{1+o(1)}{x^2}$$

где первый интеграл ..., а второй интеграл

Без пояснений задания не засчитываются.

Внимательно читайте указания!

Также пишите ответ, иначе неясно, решили ли вы задачу, или бросили на полпути.

Упражнение 0.1. Для каких вещественных α и β сходится интеграл

$$\int_0^{0.7} \frac{\log^\alpha(\frac{1}{x}) \cos^4(x)}{\tan^\beta(x)} dx$$

Упражнение 0.2. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на \mathbb{R} и $f'' \sim x^p$ при $x \rightarrow +\infty$, где $p > 0$.

При каких p сходится интеграл

$$\int_1^\infty \cos(f(x)) dx$$

Указание: по частям.

Упражнение 0.3. Введем функцию $\pi(x) := \{\text{количество простых чисел} \leq x\}$ для $x \geq 2$. Например, $\pi(1 + e) = 2$.

Определите, для каких p сходится интеграл

$$\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^p} dx$$

Указание: следующая теорема

Теорема 0.4 (Теорема о распределении простых чисел).

Имеет место эквивалентность

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad (1)$$

Этой теоремой можно пользоваться без доказательства (потому что оно сложное).

Упражнение 0.5. Сходится ли интеграл

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

Указание: мы знаем гармонический ряд. Рассмотрите интеграл на отрезках $[\pi k, \pi(k+1)]$.

Упражнение 0.6. Сходится ли интеграл

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{e^{x^2 \sin(x^2)}} dx$$

Указание: рассмотрите интеграл на отрезках $[\pi k, \pi(k+1)]$. Удобно отдельно посмотреть на маленькие окрестности граничных точек πk и $\pi(k+1)$, т.к. там функции хорошо раскладываются.