Дз # 7

Задача 1

Доказать, что матрица линейного преобразования в некотором базисе диагональная тогда и только тогда, когда все векторы базиса собственные.

1) Пусть матрица линейного оператора в базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

~~Учит~~ учитывая, что i-й столбец матрицы линейного оператора A в базисе e является столбцом координат вектора Ae_i $i = 1, 2, \ldots n$, в базисе e, получим $Ae_1 = (a_{11}, 0, .0) = a_{11} e_1$

$Ae_2 = (0, a_{22}, \ldots, 0) = a_{22} e_2$ $\ldots$, $Ae_n(0, 0, \ldots, a_{nn})$ $= a_{nn} e_n$. Таким образом, вектор e_1

является собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению a_{11}, вектор e_2 - собственным вектором, отвечающим собственному значению a_{22}, ..., вектор e_n - собственным вектором, отвечающим собственному значению a_{nn}.

2) Пусть векторы базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ являются собственными векторами оператора A, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Тогда $Ae_1 = \lambda_1 e_1 = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2 = (0, \lambda_2, \dots, 0)$, ..., $Ae_n = \lambda_n e_n = (0, 0, \dots, \lambda_n)$. Матрица линейного оператора в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Задача 2

Какой вид имеет матрица линейного преобразования если первые к базисных векторов являются ег собственными векторами

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$$ где λ - диагональная матрица с собственными значениями оператора A

Задача 3

Линейное преобразование вещественного-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \chi = |A - \lambda E| = (-\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$$

$$\sigma = \{3;\ -1^{(2)}\} \qquad * \ \lambda = 3$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & +2 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\exists\ x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow g = (1; 1; 2)^T$

$* \ \lambda = -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \exists\ x_2 = 0 & x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = -1 & x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow y^1 = (1;0;-1)^T \quad , \quad y^2 = (1;-1;0)^T$

$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \chi = |A - \lambda E| =$

$= \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) \qquad \delta = \{1;2;3\}$

$* \ \lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\exists \ x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y^1 = (0;1;1)^T$

$* \ \lambda = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\exists \ x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y^2 = (1;1;1)$

$* \ \lambda = 3$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \exists \ x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y^3 = (1;0;1)$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \chi = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & -1 & -1 \\ 1 & -1 & (1-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$= (\lambda-2)^3(\lambda+2) \qquad \sigma = \{-2; 2^{(3)}\}$

$\lambda = -2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\exists\ x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow y^1 = (-1; 1; 1; 1)^T$

$\lambda = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$y^2 = (1; 1; 0; 0)^T \qquad y^3 = (1; 0; 1; 0)^T$

$y^4 = (1; 0; 0; 1)^T$