Кр # 2

Упражнение 0.1. Для каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\operatorname{arctg} n^{\alpha}}-\sqrt{n}\right)$$

$$\sqrt{n+\operatorname{arctg} n^{\alpha}}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{\operatorname{arctg} n^{\alpha}}{n}}-1\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\cancel{1}+\frac{\operatorname{arctg} n^{\alpha}}{2n}+O\left(\frac{\operatorname{arctg}^2 n^{\alpha}}{n^2}\right)\cancel{-1}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{\operatorname{arctg} n^{\alpha}}{2n}+O\left(\frac{\operatorname{arctg}^2 n^{\alpha}}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} n^{\alpha}}{2\sqrt{n}} + O\,\frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ при $\alpha \geq 0$ расходится $\qquad \Leftarrow$ сходится

$\alpha < 0$ сходится

$$\operatorname{arctg}(n^{\alpha}) = n^{\alpha} + O(n^{3\alpha})$$

$$\frac{n^{\alpha}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{n^{3\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}n^{\alpha-1/2}}_{\text{сходится при } \alpha<\frac{1}{2}} + \underbrace{O(n^{3\alpha-1/2})}_{\text{при } \alpha<-\frac{1}{2} \text{ сходится}}$$

Ответ $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Упражнение 0.2

Сходятся ли ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\log\log\log n \cdot \log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log\log\log n}}$$

$\log\log\log n > 2 \qquad \log\log n > e^2 \qquad \log n > e^{e^2}$

При $n > e^{e^{e^2}}$ $\quad 0 < a_n < \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{x \sin^5 x}{1+x^2}\, dx = \left[t = nx;\ a_n = \int_0^{\pi} \frac{\frac{t}{n} \sin^5 \frac{t}{n}}{1+\frac{t^2}{n^2}} \cdot \frac{dt}{n} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{t \sin^5 \frac{t}{n}}{n^2+t^2}\, dt \le \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} t\, dt = \frac{C}{n^2} \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Упражнение 0.5 Показать что функция
и удовлетворяет уравнению.

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = u + \frac{xy}{z}$$

$$u = \frac{xy}{z}\log x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = \frac{xy}{z} + \log(x) + \overset{+x\varphi(u,v)}{+\frac{xy}{z}} - y\frac{d\varphi}{du} -$$

$$- z\frac{d\varphi}{dv} + \frac{xy}{z}\log(x) + y\frac{d\varphi}{du} - \frac{xy}{z}\log(x) + z\frac{d\varphi}{dV} =$$

$$= \frac{xy}{z}\log(x) + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy}{z} = u + \frac{xy}{z}$$

$$u = \frac{xy}{z}\log(x) + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \frac{xy}{z}\log(x) + x\varphi(u,v)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{y}{z}\log(x) + \frac{y}{z} + \varphi(u,v) + x\left[\frac{d\varphi}{du}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{d\varphi}{dV}\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)\right] = \frac{y}{z}(\log x + 1) - \left(\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{y}{x} + \frac{d\varphi}{dV}\cdot\frac{z}{x}\right)$$

$$+ \varphi(u,v) = \frac{y}{z}(\log x + 1) - \frac{1}{x}\left(y\frac{d\varphi}{du} + z\frac{d\varphi}{dV}\right) + \varphi(u,v)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{x}{z}\log x + x\cdot\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{z}\log(x) + \frac{d\varphi}{du}$$

$\frac{dy}{dz} = -\frac{xy}{z^2}\log(x) + x\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{xy}{z^2}\log x + \frac{d\varphi}{dv}$

Упражнение 0.4. Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и $a_n \le c_n \le b_n$ для $n \ge 1$.

Тогда $\sum c_n$ сходится

$a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow 0 \le b_n - c_n \le b_n - a_n$

$\sum(b_n - a_n)$ – знакопостоянный ряд
$\sum(b_n - c_n)$

$\sum b_n$ $\sum a_n$ – сходится $\Rightarrow \sum(b_n - a_n)$ – сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по пр сравнения $\sum(b_n - c_n)$ – сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ кон. $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum^m b_n - c_n = L = \lim\limits_{m\to+\infty}\left(\sum^m b_n - \sum^m c_n\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \ \forall m > m_0 \quad \left|\sum^m b_n - \sum^m c_n\right| < \varepsilon$

$-\varepsilon + \sum^m b_n - L < \sum^m c_n < \varepsilon + \sum^m b_n - L \Rightarrow$

$\exists$ кон $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum^m b_n = L_b \Rightarrow$ для больших m

$L_b - \varepsilon < \sum^m b_n < L_b + \varepsilon \Rightarrow L_b - L - 2\varepsilon < \sum^m c_n < L_b - L + 2\varepsilon \Rightarrow$

$\left|\sum^m c_n - (L_b - L)\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to+\infty} \sum^m c_n = L_b - L$ конст

Упражнение 0.3. Изучите на абсолютную и относительную сходимость ряды.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos\left(\frac{\pi(n^2+1)}{n}\right)$$

$$\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{n}\right) = \cos(\pi n) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin(\pi n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{n^2 \cdot \sqrt[4]{n}}\right)\right)$$

Оба ряда сходятся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt[4]{n}}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sqrt[4]{n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{n}} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sqrt[4]{n}}\right)$$

$\frac{1}{2\sqrt[4]{n}}$ расходится, $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt[4]{n}}\right|$ расходится

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos\left(\frac{\pi(n^2+1)}{n}\right)$ сходится условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^\alpha} \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)^\alpha} \sim$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^\alpha}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\alpha(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1-\frac{\alpha(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\text{при } \alpha>0} - \underbrace{\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}}_{\text{при } \alpha>0} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)}_{\text{при } \alpha>0} \Rightarrow \text{сходится при } \alpha>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+(-1)^n)^\alpha}$$ проводим те же действия

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{\text{при } \alpha>1} - \underbrace{\frac{\alpha(-1)^n}{n^{\alpha+1}}}_{\text{при } \alpha>1} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)}_{\text{при } \alpha>1} \Rightarrow \text{сходится при } \alpha>1$$

$\Rightarrow$ Абсолютная сходимость при $\alpha>1$

Условная сходимость при $0<\alpha\le 1$