

# Дз #10

## Задача 1

Пусть в вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения  $\langle x, y \rangle$  и  $\langle x, y \rangle_1$ . Доказать, что для любых постоянных чисел  $\lambda$  и  $\varphi$  функция  $\langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle_1 + \varphi \langle x, y \rangle_2$  — также скалярное произведение.

$$1) \langle xy \rangle \stackrel{?}{=} \langle yx \rangle$$

$$\langle xy \rangle = \lambda \langle xy \rangle_1 + \varphi \langle xy \rangle_2 = \lambda \langle yx \rangle_1 + \varphi \langle yx \rangle_2 = \langle yx \rangle$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \lambda (\langle xy \rangle_1 + \varphi \langle xy \rangle_2) = \lambda \langle xy \rangle$$

$$2) \langle x, y+z \rangle = \lambda \langle x, y+z \rangle_1 + \varphi \langle x, y+z \rangle_2 = \lambda \langle xy \rangle_1 + \varphi \langle xy \rangle_2 + \lambda \langle xz \rangle_1 + \varphi \langle xz \rangle_2 = \langle xy \rangle + \langle xz \rangle$$

$$3) \langle xx \rangle = \lambda \langle xx \rangle_1 + \varphi \langle xx \rangle_2 \text{ так как}$$

$$\lambda, \varphi > 0, \text{ то } \langle xx \rangle = 0 \text{ при } x=0 \text{ только}$$

$$\text{так так как } \langle xx \rangle_1 \geq 0 \text{ и } \langle xx \rangle_2 \geq 0$$

Задача 2  
Найти угол между векторами

$x$  и  $y$ , если

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|<x, y>|}{|x| |y|} = \frac{|<x, y>|}{\sqrt{<x, x>} \sqrt{<y, y>}} = \cos \alpha$$

$$<x, y> = (i + j + k)(i + 3j + k) = i^2 + 4ij + i^2k + 5j^2 + 4jk + k^2 = 1 + 4(-2) + 2 + 15 - 16 + 6 = 0$$

$$<x, y> = 0 = \cos \alpha \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{11} \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Задача 3

В пространстве многочленов степени  $n \leq 3$  со стандартным скалярным произведением задан  $\Delta$  со сторонами  $t, t^3, t - t^3$ . Найти угол двугонного  $\Delta$  и длины его сторон



$$x = (0, 0, 1)$$

$$y = (1, 0, 0)$$

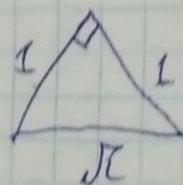
$$z = (-1, 0, 1)$$

$$|x| = 1$$

$$|y| = 1$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow \cos \angle xy = 0$$



Задача 4

Найти угол между ребрами и диагональю  $n$ -мерного куба.

$\{e_i\}_{i=1}^n$  - базис в  $X$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G = E$$

$$\lambda \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{vmatrix} - \text{корень}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{vmatrix} - \text{диагональ куба}$$

$$\cos \angle = \frac{\langle x, D \rangle}{\|x\| \|D\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$$