ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание этой книги соответствует программе первого семестра четырехсеместрового университетского курса математического анализа. В течение многих лет я читаю такой курс студентам специальности “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем” на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. В книгу вошли следующие разделы: введение, последовательности в метрических пространствах, предел и непрерывность отображений, дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной, неопределенный интеграл.

Несмотря на существующую обширную учебную литературу по математическому анализу, я надеюсь, что этот учебник будет полезен студентам и позволит им в основном освоить теоретический курс анализа за сравнительно небольшой срок, так сказать, “в боевой обстановке”.

Это пожелание накладывает некоторые условия на стиль учебника.

Курс не должен быть “неподъемным” для студента, слишком раздутым за счет красивых примеров, приложений, обобщений, исторических замечаний и многочисленных пояснений. Классический трехтомный “Курс дифференциального и интегрального исчисления” Г. М. Фихтенгольца, послуживший основой многих читавшихся курсов, написан очень подробно и содержит необычайно много примеров и приложений. Это достоинство является в то же время и недостатком. Кроме того, по языку он уже довольно архаичен, местами изложение недостаточно строго, и многолетний опыт показал, что многие разделы целесообразнее рассказывать по-другому.

Вместе с тем, курс должен быть по возможности строгим, содержать все необходимые определения и доказательства. Неизбежные “вольности”, на мой взгляд, должны быть сконцентрированы во введении, а после этого логические пробелы в курсе крайне нежелательны. Поэтому детали доказательств и особенно определений, которые часто вызывают трудности у студентов, подробно разъясняются.

Можно сказать, что учебник написан в жанре подробного конспекта лекций.

Введение в курс (глава 1) достаточно короткое, его основная задача — познакомить слушателя с общеупотребительными терминами и дать необходимый минимум предварительных сведений. Подход к теории множеств — "наивный". Из элементов математической логики используется только символика, а кванторы употребляются как стенографические значки. В тех случаях, когда приводится сокращенная запись утверждений с кванторами, она также расшифровывается словесно, чтобы студент научился и записывать утверждения, и читать собственные записи. Вещественные числа определяются аксиоматически. Построение множества вещественных чисел в курсе анализа я считаю излишним, а времени, потраченного в первом семестре, не хватит в четвертом.

Теория пределов и непрерывных отображений рассказывается в метрических пространствах, без отдельного предварительного изложения для числовых последовательностей и функций вещественной переменной. Поэтому понятия метрического и нормированного пространств появляются в курсе рано, на 4-й — 5-й лекции. Утверждения для вещественного и комплексного случаев при возможности и отсутствии специфики выводятся как следствия из общих утверждений. На мой взгляд, такой уровень общности оптимален для данного курса (подчеркну, что речь идет о четырехсеместровом курсе анализа, включающем и теорию функций комплексной переменной). Во-первых, он позволяет значительно сэкономить лекционное время, не слишком увеличив трудность восприятия. Во-вторых, имеет методический смысл не отвлекать внимание слушателя на специфику числовой прямой (наличие порядка) в тех вопросах, где она несущественна. В то же время, более общий уровень изложения (топологические пространства, предел по базе) затруднил бы понимание первокурсникам. Понятие топологического пространства обычно вводится в курсе геометрии и топологии во втором семестре, а в анализе необходимость в этом понятии возникает гораздо позже, в курсе функционального анализа. Теория пределов начинается с более наглядного понятия предела последовательности (глава 2), и лишь потом (в главе 3) изучается предел отображения. В главе про последовательности (§ 3) появляются понятие компактности и теорема Гейне – Бореля. В курсе дается строгое определение степенной и показательной функций и используется “школьное” геометрическое определение синуса и косинуса.

Дифференциальное исчисление (глава 4) в первом семестре, напротив, излагается для функций одной вещественной переменой, что легко объяснить спецификой этого случая. Изложение достаточно стандартно, однако последний параграф (§ 5) про выпуклые функции содержит довольно много материала, входящего не во всякий курс: лемма о трех хордах, выпуклость и опорные прямые, классические неравенства. Неравенство Иенсена доказывается самым естественным способом — с помощью опорной прямой.

Из главы 5 про интеграл в эту часть курса вошел лишь первый параграф о первообразной и неопределенном интеграле. Опыт показывает, что после прочтения материала этой книги (за вычетом некоторых примеров и замечаний) у лектора в первом семестре остается еще несколько лекций для рассказа про определенный интеграл. Однако, программа экзамена первого семестра обычно заканчивается неопределенным интегралом, а с определенного интеграла начинается программа второго семестра. Таким же образом разбит на части и этот курс.

Книга не содержит никакой специально подобранной коллекции задач, но иногда дополнительные сведения сообщаются читателю без доказательства.

Нумерация теорем и лемм отдельная в каждом параграфе; нумерация формул отдельная в каждой главе; нумерация следствий и замечаний отдельная к каждому утверждению или группе утверждений, к которым эти следствия и замечания относятся; определения, как правило, не нумеруются. Конец доказательства обозначается символом $\square$.

Автор благодарен А. Л. Громову и А. А. Флоринскому, высказавшим множество ценных замечаний по тексту рукописи, а также всем коллегам по кафедре математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета, чьи методические находки использовались в этой книге.

Сентябрь 2009 года О. Л. Виноградов

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Множества

Понятие *множества* будет для нас первичным, неопределяемым. Поскольку всякое определение сводит новое понятие к уже известному, какие-то понятия приходится считать известными заранее. Не определяя понятие множества, мы, тем не менее, обсудим его свойства и правила обращения с ним. Возможен и другой подход: в математической логике множество определяется аксиоматически; аксиомы описывают свойства множеств и правила построения одних множеств из других. Однако, в курсе нам будет удобнее оставаться в рамках “наивной” теории множеств.

Вместо слова “множество” часто употребляются его синонимы: класс, совокупность, набор, коллекция, собрание. Теория множеств была основана Г. Кантором.

Множество состоит из объектов, вещей, называемых его *элементами.* Запись $x \in X$ означает, что объект x принадлежит множеству X, является элементом множества X, а запись $x \notin X$ или $x \overline{\in} X$ — что объект x не принадлежит множеству X, не является элементом множества X.

Множество может задаваться перечислением своих элементов: $\{1, 2, 3\}$, $\{A, B\}$ — или указанием свойства: запись $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ или $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ обозначает множество всех элементов, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Элементами множеств могут быть множества. Например, в множестве $\bigl\{1, \{1\}, \{1, 2\}\bigr\}$ три элемента: число 1, множество, единственным элементом которого является число 1, и множество из двух элементов — чисел 1 и 2. При образовании множеств из элементов следует соблюдать известную осторожность; так, понятие множества всех множеств противоречиво (то есть такого множества нет). Чтобы избежать противоречий, требуют, чтобы элементы были определены раньше множества. В частности, никакое множество не может содержать себя в качестве элемента. Обычно рассматриваются элементы, принадлежащие некоторому основному множеству U (объемлющему множеству, множеству допустимых элементов). Множество U фиксировано и либо ясно из контекста, либо явно указывается. Например, в планиметрии U — это плоскость, в стереометрии — трехмерное пространство и т.д.

Определение. Если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y, то говорят, что X *содержится в* Y (а также — что X — *подмножество* Y, X — *часть* Y, Y *содержит* X), и пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множества X и Y называют *равными* и пишут $X = Y$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Другими словами, $X = Y$ тогда и только тогда, когда $X \subset Y$ и $Y \subset X$.

Удобно ввести в рассмотрение *пустое множество* — множество, в котором нет ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество содержится в любом множестве Y, так как в нем нет ни одного элемента, не принадлежащего Y.

Несколько числовых множеств имеют общепринятые обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел (натуральный ряд);

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, то есть дробей вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных (действительных) чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два утверждения, то запись $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ называется *импликацией* и означает, что если верно $\mathcal{P}$, то верно и $\mathcal{Q}$. Также говорят, что из $\mathcal{P}$ следует $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ влечет $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ достаточно для $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}$ необходимо для $\mathcal{P}$. Запись $\mathcal{Q} \Leftarrow \mathcal{P}$ означает то же самое. Если $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, то говорят, что утверждения $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ *равносильны* (или *эквивалентны*) или $\mathcal{P}$ необходимо и достаточно для $\mathcal{Q}$, и пишут $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. Через $\overline{\mathcal{P}}$ или $\rceil\mathcal{P}$ обозначается отрицание утверждения $\mathcal{P}$.

Для сокращения записи бывает удобно использовать два специальных значка, называемых кванторами:

$\forall$ — *квантор общности* (или *квантор всеобщности*); заменяет слова "любой", "всякий", "каждый" или "для любого", "для всякого", "для каждого";

$\exists$ — *квантор существования*; заменяет слова "существует", "найдется", "можно подобрать".

Двоеточие в формулах с кванторами заменяет слова "такой, что", но будет ставиться не всегда. Например, утверждения

$$\exists x : x > 0,\ x^2 = 2, \qquad \exists x > 0 : x^2 = 2, \qquad \exists x > 0 \ \ x^2 = 2$$

означают одно и тоже и читаются: "существует x, такое что x больше нуля и x-квадрат равно двум" или "существует такое положительное x, квадрат которого равен двум". Фразы

$$\forall x : x > 0,\ x < 2 \ \ x^2 < 4, \qquad \forall x > 0 : x < 2 \ \ x^2 < 4$$

также означают одно и то же и читаются: "для любого x, такого что x больше нуля и меньше двух, x-квадрат меньше четырех" или "для любого положительного x, меньшего двух, x-квадрат меньше четырех" (а не "для любого x будет x больше нуля, x меньше двух и x-квадрат больше четырех" и не "для любого положительного x будет x меньше двух и x-квадрат больше четырех"!) Некоторые авторы предпочитают записывать последнее утверждение в виде

$$\forall x \ ((x > 0,\ x < 2) \Rightarrow x^2 < 4), \qquad \forall x > 0 \ (x < 2 \Rightarrow x^2 < 4),$$

но мы предпочитаем запись, по возможности близкую к устной речи и менее громоздкую.

Пусть $\mathcal{P}(x)$ — утверждение, зависящее от параметра $x \in X$. Отрицание утверждения "для любого x верно $\mathcal{P}(x)$" означает, что "существует x, для которого $\mathcal{P}(x)$ неверно", а отрицание утверждения "для некоторого x верно $\mathcal{P}(x)$" означает, что "для любого x неверно $\mathcal{P}(x)$":

$$\overline{\forall x \in X \ \ \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \ \ \overline{\mathcal{P}(x)}, \quad \overline{\exists x \in X \ \ \mathcal{P}(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \ \overline{\mathcal{P}(x)}.$$

Итак, справедливо такое правило отрицания утверждений, содержащих кванторы: нужно заменить все кванторы на противоположные и самое последнее утверждение на его отрицание.

Мы будем пользоваться логической символикой как вспомогательной, не формализуя ее применение.

Множество определяется своими элементами, поэтому бессмысленно говорить, что какой-то элемент принадлежит множеству в нескольких экземплярах, или что множество содержит несколько одинаковых элементов. Чтобы рассматривать несколько экземпляров одного и того же элемента, используют понятие *семейства.* Строго говоря, семейство — это отображение, так что определение семейства будет дано в § 3. Здесь мы опишем понятие семейства неформально.

Пусть X и A — множества, и некоторые элементы множества X снабжены (занумерованы) значками — элементами множества A (индексами). При этом каждый индекс использован ровно один раз, но элементы X могут быть снабжены более чем одним индексом. Последнее и означает, что элементы X могут присутствовать в семействе во многих экземпярах. Семейство обозначается так: $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ или $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Индекс α в этом обозначении, как говорят, "немой" и может быть заменен другой буквой.

Определение. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство множеств. *Объединением* семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X_α:

$$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \exists\alpha\in A \quad x\in X_\alpha\}.$$

Если семейство состоит из двух множеств X и Y, пишут $X\cup Y$ (неважно, как нумеровать множества). Ясно, что

$$(X\cup Y)\cup Z = X\cup(Y\cup Z), \quad X\cup Y = Y\cup X, \quad X\cup X = X\cup\varnothing = X.$$

Определение. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство множеств. *Пересечением* семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется множество всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств X_α:

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : \forall\alpha\in A \quad x\in X_\alpha\}.$$

Если семейство состоит из двух множеств X и Y, пишут $X \cap Y$. Ясно, что

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \quad X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cap X = X, \quad X \cap \varnothing = \varnothing.$$

Когда множество индексов A есть $\{1, \ldots, n\}$, то пишут $\bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k$, а когда $A = \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Рассматривают также объединение и пересечение не семейства, а множества множеств в том же смысле (впрочем, можно занумеровать каждое множество, используя в качестве индекса само множество, и свести дело к случаю семейства).

Определение. *Разностью* множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}.$$

В этом определении не предполагается, что $Y \subset X$. Если $Y \subset X$, то разность $X \setminus Y$ называется еще *дополнением* множества Y до множества X. Дополнение X до основного множества U называется короче — дополнением X — и обозначается X^c (иногда также используются обозначения CX, $\overline{X}$, X'). Таким образом, дополнение X есть множество всех элементов основного множества, не принадлежащих X.

Ясно, что равенство множеств равносильно равенству их дополнений, $(X^c)^c = X$, $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \varnothing$. Соотношения $X \subset Y$, $Y^c \subset X^c$, $X \cap Y^c = \varnothing$ и $Y \cup X^c = U$ равносильны.

Теорема 1. Законы де Моргана. *Пусть* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *— семейство множеств,* Y *— множество. Тогда*

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha), \tag{1}$$

$$Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π левую и правую части равенства (1). По определению разности соотношение $x \in \Lambda$

означает, что $x \in Y$ и x не принадлежит объединению множеств X_α. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и x не принадлежит ни одному из множеств X_α, то есть $x \in Y \setminus X_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. По определению пересечения последнее значит, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано.

Соотношение (2) доказывается аналогично. $\square$

Тем же способом доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *— семейство множеств,* Y *— множество. Тогда*

$$Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha), \tag{3}$$

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha). \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через Λ и Π левую и правую часть равенства (3). По определению пересечения соотношение $x \in \Lambda$ означает, что $x \in Y$ и $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. По определению объединения это значит, что $x \in Y$ и существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in X_{\alpha_0}$. Другими словами, существует такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in Y \cap X_{\alpha_0}$. Последнее означает, что $x \in \Pi$. Равенство $\Lambda = \Pi$ доказано.

Соотношение (4) доказывается аналогично. $\square$

Упорядоченная пара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$. При этом в обозначении упорядоченной пары (a, b) считается, что на первом месте написан элемент, занумерованный индексом 1, а на втором — индексом 2. Порядок элементов удобно указывать с помощью индексации: (x_1, x_2). Подчеркнем, что элементы x_1 и x_2 могут совпадать (в отличие от случая неупорядоченной пары — двухэлементного множества $\{x_1, x_2\}$: если $x_1 = x_2$, то это одноэлементное множество), и что порядок элементов существенен. Иначе говоря, Равенство пар (a, b) и (c, d) означает, что $a = c$ и $b = d$. Аналогично определяется упорядоченный набор из m элементов $(x_1, \ldots, x_m)$. Элементы упорядоченного набора называются его координатами или компонентами.

Определение. *Декартовым* или *прямым произведением* множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Это определение обобщается на несколько сомножителей:

$$X_1 \times \dots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i \text{ при всех } i = 1, \dots, m\}.$$

Порядок сомножителей существенен; можно сказать, что прямое произведение определено для упорядоченного набора множеств. Если $X_1 = \ldots = X_m = X$, то произведение обозначают также через X^m; в частности, $X^1 = X$. Таким образом, X^m — это множество упорядоченных наборов из m элементов, принадлежащих множеству X. В частности, $\mathbb{R}^m$ (читается: "эр-эм", а не "эр в степени эм") — это множество упорядоченных наборов из m вещественных чисел, а $\mathbb{C}^m$ ("це-эм") — из m комплексных чисел. Точку прямой можно отождествить с вещественным числом, точку плоскости — с парой, а точку пространства — с тройкой чисел, служащих ее координатами. Поэтому множество $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ называют прямой, $\mathbb{R}^2$ — плоскостью, а $\mathbb{R}^3$ — трехмерным пространством. По аналогии множество $\mathbb{R}^m$ называют m-мерным (вещественным) пространством, а его элементы — m-мерными точками или векторами. Последний термин объясняется тем, что и вектор можно отождествить с набором чисел — его координат.

§ 2. Вещественные числа

Читателю, конечно, знакомы из школы свойства вещественных (действительных) чисел, хотя четкое определение вещественного числа, скорее всего, неизвестно. В этом параграфе мы определим множество вещественных чисел аксиоматически: множество $\mathbb{R}$ называется множеством вещественных чисел, если выполнен некоторый набор условий (аксиом).

Множество вещественных чисел может быть определено и конструктивно, то есть построено: с помощью бесконечных десятичных дробей, дедекиндовых сечений, фундаментальных последовательностей или иным способом. Построение множества $\mathbb{R}$ в этом курсе проводиться не будет.

Для удобства разобьем аксиомы, которых всего шестнадцать, на группы.

I. Аксиомы поля. В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции, называемые сложением и умножением, действующие из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие следующим свойствам.

I.1. Сочетательный закон (ассоциативность) сложения:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

I.2. Переместительный закон (коммутативность) сложения:

$$x + y = y + x.$$

I.3. Существует вещественное число нуль (0, нейтральный элемент по сложению), такое что $x + 0 = x$ для всех x.

I.4. Для любого числа x существует такое число $\tilde{x}$, что $x + \tilde{x} = 0$ (это число $\tilde{x}$ называется противоположным числу x и обозначается $-x$).

I.5. Сочетательный закон (ассоциативность) умножения:

$$(xy)z = x(yz).$$

I.6. Переместительный закон (коммутативность) умножения:

$$xy = yx.$$

I.7. Существует вещественное число единица (1, нейтральный элемент по умножению), отличное от нуля, такое что $x \cdot 1 = x$ для всех x.

I.8. Для любого числа x, отличного от нуля, существует такое число x', что $xx' = 1$ (это число x' называется обратным к x и обозначается x^{-1} или $\frac{1}{x}$).

I.9. Распределительный закон (дистрибутивность):

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Множество, в котором определены две операции, удовлетворяющие свойствам I.1–I.9, называется *полем,* а сами свойства I.1–I.9 — аксиомами поля.

Аксиома I.4 позволяет определить вычитание: $x - y = x + (-y)$, а аксиома I.8 — деление на любое число, отличное от нуля: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

II. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ определено отношение $\leqslant$ со следующими свойствами.

II.1. Для любых x, y верно $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

II.2. Транзитивность: если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

II.3. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

II.4. Если $x \leqslant y$, то $x + z \leqslant y + z$ для любого z.

II.5. Если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant xy$.

Поле, в котором введено отношение порядка, удовлетворяющее свойствам II.1–II.5, называется *упорядоченным.*

Другие знаки неравенств определяются так:

$$a < b \text{ означает, что } a \leqslant b \text{ и } a \neq b,$$
$$a \geqslant b \text{ означает, что } b \leqslant a,$$
$$a > b \text{ означает, что } b \leqslant a \text{ и } a \neq b.$$

Аксиомы поля и порядка — это привычные свойства арифметических действий и неравенств с вещественными числами. Другие знакомые свойства (например, $0 < 1$ или $(-x)(-y) = xy$), при аксиоматическом определении вещественных чисел с помощью этой системы аксиом являются теоремами и могут быть выведены из аксиом. Мы не будем доказывать все подобные теоремы (это совсем просто, в отличие от осознания, что тот или иной факт требует доказательства), и будем считать их доказанными.

Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа — точками на этой прямой. Поэтому числа называют еще и точками.

Наличие порядка позволяет определить промежутки в множестве $\mathbb{R}$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Если $a \leqslant b$, то множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *отрезком* или *сегментом.* Если $a < b$, то множество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

называется *интервалом,* а множества

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

— *полуинтервалами.* При $a = b$ отрезок состоит из одной этой точки и называется вырожденным. Множества

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

называются *лучами* (первое и третье — замкнутым лучом, второе и четвертое — открытым). Все множество $\mathbb{R}$ обозначается еще $(-\infty, +\infty)$. Символам $-\infty$ и $+\infty$ в этих обозначениях не приписывается самостоятельного значения. Через $\langle a, b\rangle$ обозначается промежуток любого из четырех типов с концами a и b; через $\langle a, b)$ — любой из двух промежутков (a, b) и $[a, b)$, и т.д. Положим также $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Если $a, b \in \mathbb{R}$, а точка c принадлежит интервалу с концами a и b, то говорят, что *c лежит между a и b.*

Обозначим еще через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных вещественных чисел, то есть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется *расширенной числовой прямой.* Таким образом, в $\overline{\mathbb{R}}$ к вещественным числам добавляются два новых символа (несобственных элемента): $-\infty$ и $+\infty$. Считают, что $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $-\infty < +\infty$. Тогда можно рассматривать промежутки в $\overline{\mathbb{R}}$ вида $\langle a, +\infty]$ или $[-\infty, b\rangle$.

С несобственными элементами можно совершать некоторые арифметические действия. Для $x \in \mathbb{R}$ полагают

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$
$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases}$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Кроме того, полагают

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Символам $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$ и $(\pm\infty) \cdot 0$ не приписывается никакого значения.

III. Аксиома Архимеда. *Каковы бы ни были положительные числа $x, y \in \mathbb{R}$, существует такое натуральное число n, что $nx > y$.*

Упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Архимеда, называется *архимедовым.*

Из аксиомы Архимеда следует, что существуют сколь угодно большие натуральные числа.

Сформулированные пятнадцать аксиом еще не определяют множество вещественных чисел полностью: этим аксиомам удовлетворяет, например, и множество рациональных чисел. Поэтому необходимо ввести еще какие-то аксиомы, которые позволили бы различить множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Для этой цели хватает одной аксиомы; ее называют аксиомой полноты или непрерывности. Сформулировать аксиому полноты можно разными способами; мы сделаем это в виде аксиомы о вложенных отрезках. Участвующий в ее формулировке термин "последовательность" строго определяется в § 3.

IV. Аксиома Кантора о вложенных отрезках. *Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков, то есть*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует точка, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

В множестве $\mathbb{Q}$ это утверждение не выполняется. Приведем план доказательства; у читателя появятся все необходимые для реализации этого плана сведения после прочтения главы 2.

Существуют иррациональные числа, то есть вещественные числа, не являющиеся рациональными, и, в частности, существует $\sqrt{2}$ — такое положительное число c, что $c^2 = 2$. Иррациональность $\sqrt{2}$ читателю известна. Возьмем какое-нибудь иррациональное число c (например, $c = \sqrt{2}$) и обозначим через a_n десятичные приближения c с недостатком, а через b_n — с избытком. Тогда в множестве $\mathbb{R}$ пересечение всех отрезков $[a_n, b_n]$ состоит из одной точки c, а в множестве $\mathbb{Q}$ оно (точнее, пересечение отрезков в $\mathbb{Q}$: $[a_n, b_n]^* = \{x \in \mathbb{Q} : a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$) пусто, так как c иррационально.

Аксиома о вложенных отрезках — способ выразить, что вещественная прямая "сплошная", на ней нет "дырок", в отличие от рациональной прямой, имеющей "дырку" на каждом месте, на котором должно находиться иррациональное число. Известные способы построения множества вещественных чисел как раз и состоят в формализации процедуры "заполнения дырок".

В аксиоме существенно, что речь идет именно об отрезках; пересечение вложенных промежутков другого типа может оказаться пустым. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing$$

(это легко следует из аксиомы Архимеда).

При аксиоматическом определении объекта возникают три вопроса: является ли система аксиом непротиворечивой (то есть не следуют ли из нее одновременно некоторое утверждение и его отрицание), независимой (то есть не является ли одна из аксиом следствием остальных — и тогда ее можно удалить) и полной (то есть единственный ли объект описывается системой аксиом). Мы не будем обсуждать эти вопросы и примем на веру, что для приведенной аксиоматики вещественных чисел ответ на них, после некоторых уточнений, положителен.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Число

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

называется *модулем* или *абсолютной величиной* числа x.

Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x на числовой оси до точки 0. Напомним известные свойства модуля:

$$|x| \geqslant 0, \qquad |-x| = |x|, \qquad \pm x \leqslant |x|,$$
$$|xy| = |x||y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0,$$
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|.$$

Если $a > 0$, то неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$.

График функции модуль изображен на рисунке 1.

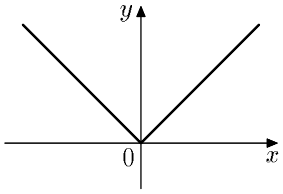

Рис. 1

Кратко сформулируем определение и простейшие свойства комплексных чисел. Подробнее комплексные числа изучаются в курсе алгебры. *Комплексное число* z — это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y), так что как множество $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Чтобы получить право называть элементы $\mathbb{C}$ числами, следует определить арифметические действия между ними. Складываются комплексные числа, как и вектора, покоординатно (см. рисунок 2).

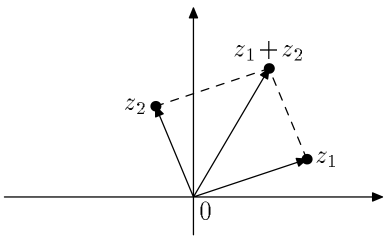

Рис. 2

Если $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Нулем является точка $(0, 0)$, а числом, противоположным z, — число $-z = (-x, -y)$. Умножение комплексных чисел задается формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{5}$$

Единицей является точка $(1, 0)$. Вещественные числа x отождествляются с комплексными числами вида $(x, 0)$; по этому соглашению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Точка $i = (0, 1)$ называется *мнимой единицей,* а числа вида $(0, y)$ — *мнимыми* (чисто мнимыми). Всякое комплексное число может быть записано в виде

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

(здесь под iy понимается произведение вектора i на вещественное число y). Равенство $z = x + iy$ называется *алгебраической формой записи* комплексного числа. Легко видеть, что $i^2 = -1$. Умножение комплексных чисел по формуле (5) может быть описано так: нужно раскрыть скобки, положить $i^2 = -1$ и привести подобные члены. Если $z \neq 0$, то обратным к z является число

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Легко проверяется, что комплексные числа образуют поле. Однако, это поле неупорядоченное.

Если $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, то x называют *вещественной частью,* а y — *мнимой частью* z, и пишут $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к z. Видно, что

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$
$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2},$$

где $*$ обозначает одно из четырех арифметических действий. *Модулем* числа z называется длина отвечающего ему вектора:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Модуль комплексных чисел обладает следующими свойствами:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ z_2 \neq 0,$$
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad z\overline{z} = |z|^2.$$

Если $z \neq 0$, то угол φ, отсчитанный от вектора 1 до вектора z против часовой стрелки, называется *аргументом* числа z и обозначается $\arg z$. Аргумент определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Множество всех значений аргумента z обозначают $\operatorname{Arg} z$, а через $\arg z$ обозначают любой элемент этого множества. Можно дополнительно потребовать, чтобы $\arg z$ принадлежал фиксированному полуинтервалу длины 2π; обычно для этой цели выбирают полуинтервал $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$, а соответствующее значение аргумента называют *главным.* Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ называются *полярными координатами* точки $z = (x, y)$ на плоскости (см. рисунок 3).

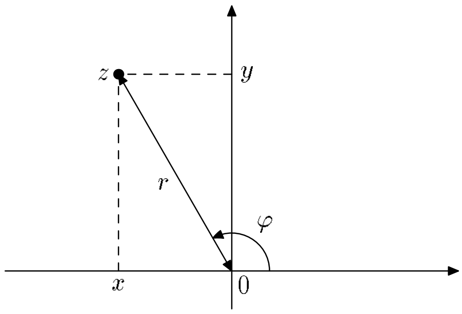

Рис. 3

По известным формулам для прямоугольного треугольника

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Поэтому

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r = |z|, \ \varphi = \arg z.$$

Это равенство называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

При перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Точнее, если $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, то $\varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$. Геометрически умножение комплексного числа z_1 на число z_2, по модулю равное 1, означает поворот вектора z_1 на угол φ_2 против часовой стрелки. Умножение комплексных чисел изображено на рисунке 4.

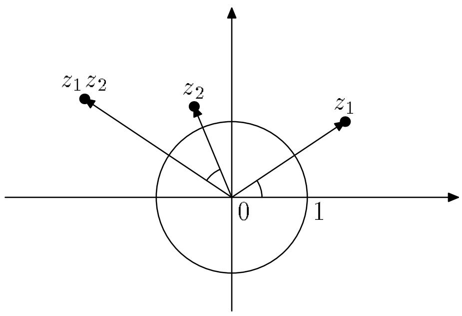

Рис. 4

В частности, если $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то $n\varphi \in \operatorname{Arg} z^n$. Отсюда вытекает формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

верная для всех целых n.

Принципом математической индукции называют следующее утверждение.

Принцип математической индукции. *Пусть* $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность утверждений. Если*

1) $\mathcal{P}_1$ *верно,*

2) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *из* $\mathcal{P}_n$ *следует* $\mathcal{P}_{n+1}$,

то $\mathcal{P}_n$ *верно для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1) называется *базой индукции,* а утверждение 2) — *индукционным переходом*; при этом $\mathcal{P}_n$ называют *индукционным предположением.*

Подчеркнем, что при проверке утверждения 2) нужно доказывать не истинность $\mathcal{P}_n$, а тот факт, что из $\mathcal{P}_n$ следует $\mathcal{P}_{n+1}$.

Иногда используется следующая модификация принципа математической индукции. Если последовательность утверждений $\{\mathcal{P}_n\}_{n=m}^{\infty}$ задана для всех целых n, не меньших некоторого целого числа m, то базой индукции служит утверждение $\mathcal{P}_m$, а индукционный переход делается для всех $n \geqslant m$. Для доказательства достаточно применить принцип математической индукции к утверждениям $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_{n+m-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

При аксиоматическом определении множества натуральных чисел принцип математической индукции (или какое-нибудь близкое утверждение) принимается за аксиому. Мы не будем приводить аксиоматику $\mathbb{N}$, а определим $\mathbb{N}$ как подмножество $\mathbb{R}$. Разумеется, чтобы не попасть в порочный круг, множество $\mathbb{N}$ должно быть определено до формулировок аксиом Архимеда и Кантора.

Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным,* если $1 \in M$ и вместе с каждым своим элементом x множество M содержит и элемент $x+1$. Индуктивные множества существуют: $\mathbb{R}$ — индуктивное множество.

Определение. Множеством *натуральных чисел* называется минимальное по включению индуктивное подмножество $\mathbb{R}$.

Другими словами,

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{индуктивно}}} M. \tag{6}$$

Действительно, правая часть равенства (6) является индуктивным множеством и содержится в любом индуктивном множестве.

Принцип математической индукции используется в математике гораздо чаще, чем явно упоминается. Если в каком-то определении или рассуждении встретились слова "и так далее", "продолжим этот процесс неограниченно" или заменяющее их многоточие — это верный признак того, что при формальном изложении должен использоваться принцип математической индукции. Не являются исключением записанные ниже "определения" суммы и произведения нескольких чисел, на самом деле, опирающиеся на индукцию. Тем не менее, предупредив читателя о принципиальной возможности, а иногда и необходимости расшифровки слов "и так далее", мы не будем заниматься этой расшифровкой.

В качестве одного из применений метода математической индукции докажем формулу бинома Ньютона. Предварительно введем ряд обозначений.

Если $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$, то полагаем

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Если $m > n$, то сумма $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ считается равной 0, а произведение $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$ — равным 1. В более общей ситуации символами $\sum\limits_{\alpha\in A} a_\alpha$ и $\prod\limits_{\alpha\in A} a_\alpha$ обозначаются сумма и произведение конечного числового семейства (то есть такого, что множество индексов конечно). Индексы k и α в этих обозначениях "немые" и могут быть заменены другими буквами, например: $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{j=m}^{n} a_j$.

Следующее преобразование называют *сдвигом индекса суммирования:* если $p \in \mathbb{Z}$, то

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_{j-p}.$$

В самом деле, в обеих частях равенства записана сумма чисел $a_m, \ldots, a_n$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то произведение $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ называется *факториалом* числа n; по определению $0! = 1$. Числа

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

называются *биномиальными коэффициентами,* в англоязычной литературе они обозначаются $\binom{n}{k}$. Отметим, что

$$C_0^0 = C_n^n = 1, \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n, \qquad C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

Договоримся считать $x^0 = 1$ при всех x, в том числе при $x = 0$.

Теорема 1. Бином Ньютона. *Если $n \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ равенство очевидно; при $n = 1$ оно служит базой индукции. Сделаем индукционный переход. Пусть формула верна для номера n; докажем, что она верна и для $n+1$. По индукционному предположению

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k}.$$

В первой сумме сдвинем индекс: $j = k+1$, а затем переименуем j в k и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} = \\
&= C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_n^0 x^0 y^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k},
\end{aligned}$$

что и завершает индукционный переход.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху,* если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. Число M при этом называется *верхней границей* множества E.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу,* если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $x \geqslant m$ для всех $x \in E$. Число m при этом называется *нижней границей* множества E.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным,* если оно ограничено и сверху, и снизу.

Замечание 1. Если M — верхняя граница множества E, то всякое число, большее M, — тоже верхняя граница множества E. Если m — нижняя граница множества E, то всякое число, меньшее m, — тоже нижняя граница множества E.

Замечание 2. Ограниченность множества E равносильна его "ограниченности по модулю", то есть существованию такого числа K, что $|x| \leqslant K$ для всех $x \in E$.

Доказательство. Если $|x| \leqslant K$ для всех $x \in E$, то $-K \leqslant x \leqslant K$ для всех $x \in E$, и можно положить $m = -K$, $M = K$. Обратно, если $-m \leqslant x \leqslant M$ для всех $x \in E$, то можно взять в качестве K наибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$. $\square$

Определение. Число M называется *максимумом* или *наибольшим элементом* множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $x \leqslant M$ для всех $x \in E$.

Число m называется *минимумом* или *наименьшим элементом* множества $E \subset \mathbb{R}$, если $m \in E$ и $x \geqslant m$ для всех $x \in E$.

Максимум и минимум множества E обозначаются $\max E$ и $\min E$.

Ясно, что максимум множества является его верхней границей, а минимум — нижней границей. В то же время, не всякое, даже ограниченное сверху (снизу), множество имеет максимум (минимум). Например, в интервале $(0, 1)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента.

Теорема 2. Существование максимума и минимума конечного множества. *Во всяком конечном подмножестве* $\mathbb{R}$ *есть наибольший и наименьший элемент.*

Доказательство проведем индукцией по числу n элементов множества. База индукции — случай $n = 1$: если в множестве всего один элемент, то он и наибольший, и наименьший. Для определенности индукционный переход проведем в случае максимума. Пусть всякое n-элементное подмножество $\mathbb{R}$ имеет максимум, E — $(n+1)$-элементное подмножество $\mathbb{R}$:

$$E = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}.$$

Обозначим

$$c = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Если $c \leqslant x_{n+1}$, то, очевидно, $x_{n+1} = \max E$, а если $c > x_n$, то $c = \max E$. $\square$

Следствие 1. *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Выберем какой-нибудь элемент $n_0 \in E$ и положим

$$E_1 = \{n \in E : n \geqslant n_0\}.$$

Поскольку E ограничено сверху, множество E_1 конечно: если M — натуральное число, служащее верхней границей E, то в множестве E_1 не более $M - n_0 + 1$ элементов. По теореме 2 в множестве E_1 есть наибольший элемент; ясно, что он и будет наибольшим элементом E.

Случай ограниченного снизу множества разбирается аналогично. $\square$

Следствие 2. *Во всяком непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.*

Это свойство называется *полной упорядоченностью* множества $\mathbb{N}$.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется *целой частью* x и обозначается $[x]$.

Существование целой части обеспечивается следствием 1, поэтому определение корректно.

Замечание 1. Из определения следует, что

$$[x] \leqslant x < [x]+1, \qquad x-1 < [x] \leqslant x.$$

Обратно, если $y \in \mathbb{Z}$ и $x-1 < y \leqslant x$, то $y = [x]$.

Теорема 3. Плотность множества рациональных чисел. *Во всяком интервале есть рациональное число.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$, и по аксиоме Архимеда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b-a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и

$$c \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a+b-a = b,$$
$$c > \frac{na-1+1}{n} = a,$$

то есть $c \in (a, b)$. $\square$

Свойство, выраженное в теореме 3, называют *плотностью* множества $\mathbb{Q}$ в множестве $\mathbb{R}$.

Следствие 3. *Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть в некотором интервале (a, b) количество рациональных чисел конечно. Обозначим через x_1 наименьшее из них. Тогда в интервале (a, x_1) нет ни одного рационального числа, что противоречит теореме 3. $\square$

§ 3. Отображения

Пусть X и Y — множества. Если каждому элементу x множества X сопоставлен по определенному правилу f один элемент y множества Y, то говорят, что задано *отображение* множества X в множество Y, и пишут

$$f\colon X \to Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описание нельзя считать строгим определением понятия "отображение", так как оно содержит не получившие до сих пор определения понятия "правило" и "сопоставлен". И хотя можно дать строгое формальное определение отображения на основе уже известного понятия множества, нам будет удобнее не проводить эту формализацию и считать понятие отображения неопределяемым.

Отображение — это тройка объектов (X, Y, f). Если из контекста ясно, о каких множествах X и Y идет речь, то упоминание о них опускают, указывают только последний элемент тройки — правило f — и говорят "отображение f".

Множество X называют *областью определения* или *областью задания,* а множество Y — *областью значений* или *областью изменения* отображения.

Тот элемент $y \in Y$, который сопоставляется элементу $x \in X$ по правилу f, обозначается через $f(x)$ и называется *значением* отображения f на элементе x или *образом* элемента x. При этом x называется *аргументом* отображения или *независимой переменной,* а y — *значением* отображения или *зависимой переменной.* Пишут также $x \mapsto f(x)$, $x \in X$.

Разумеется, вместо x, y и f могут использоваться и другие буквы.

Если X и Y — числовые множества, то отображение называют *функцией.* Это соглашение не является общепринятым: иногда термин "функция" употребляют в том же смысле, что и "отображение", а иногда функцией называют отображение с числовой областью значений. В последней ситуации используется также термин *функционал.*

Привычнее всего аналитическое задание функции (правила), то есть задание с помощью явной формулы, например: $f(x) = \sin x$ или $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. В этом случае естественной областью определения функции называют множество тех значений аргумента, для которых формула имеет смысл. Здесь для f это будет прямая $\mathbb{R}$, а для g — отрезок $[-1, 1]$. Вместе с тем, может оказаться, что функция задана на меньшем множестве. Так, площадь квадрата является функцией S длины его стороны a: $S(a) = a^2$. Правая часть этой формулы имеет смысл для всех чисел a, но областью определения функции S будет лишь множество положительных чисел.

Подчеркнем, что многозначных отображений не бывает: при отображении каждому элементу $x \in X$ сопоставляется один элемент $y \in Y$, так что f в записи $f(x) = \pm\sqrt{x}$ — не функция.

Если элементы множества Y являются множествами, то отображение сопоставляет каждому $x \in X$ множество. Так, каждому $x \in \mathbb{R}$ можно поставить в соответствие множество $F(x)$ вещественных корней уравнения $t^2 = x$ и тем самым определить отображение F из $\mathbb{R}$ в множество всех подмножеств $\mathbb{R}$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}, & x > 0, \\ \{0\}, & x = 0, \\ \varnothing, & x < 0. \end{cases}$$

Тем не менее, термины “многозначное отображение” и “многозначная функция” используются в математике, но они требуют четких определений, исключающих всякий произвол в выборе значений. Пока нам эти термины не понадобятся, но в теории функций комплексной переменой они играют важную роль.

Определение. Отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество Y называется *последовательностью* в Y. Если Y — числовое множество, то последовательность называется числовой (например, вещественной или комплексной).

Итак, числовая последовательность — это функция натурального аргумента.

Последовательность будет обозначаться символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$. Иногда вместо фигурных скобок используют круглые. Буква x в этой записи означает правило, как раньше f, только вместо $x(n)$ мы пишем x_n, записывая аргумент в виде индекса. Индекс n называется еще номером. Элемент x_n называется n-м членом последовательности.

Запись аргумента в виде индекса типична для последовательности, но употребляется и в других случаях. Семейство $\{f_x\}_{x \in X}$ элементов множества Y есть на самом деле отображение из X в Y, а f_x — другое обозначение для $f(x)$. Индексация и означает сопоставление каждому индексу $x \in X$ элемента $f(x) \in Y$.

Часто термин “последовательность” употребляют в более широком смысле и называют последовательностью отображение, заданное на некотором подмножестве множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Так, говорят о конечной или m-членной последовательности (упорядоченном наборе) $\{x_n\}_{n=1}^m$, а также о бесконечной в обе стороны последовательности $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Если не оговорено противное, мы будем пользоваться первоначальным определением и считать, что последовательность задана на множестве натуральных чисел.

Над функциями $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в частности, числовыми последовательностями) определены арифметические операции: $f+g$, $f-g$, fg, cf (c — число). Например, сумма $f+g$ — это функция, действующая из X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ по правилу:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in X.$$

Если функция g не обращается в нуль на X, то на множестве X определено и частное $\frac{f}{g}$. В общем случае областью определения частного служит множество $D = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$. Аналогичный смысл придается символам f^2, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ и другим (в последних двух случаях функции f и g вещественнозначны).

Функцию, определенную на подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), называют *функцией нескольких* вещественных (или комплексных) *переменных.* Если значения отображения f принадлежат $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$, то f еще называют *вектор-функцией.* Если $f\colon X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), то каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in Y$. Отображение $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), которое каждому элементу x сопоставляет число $f_k(x)$, называют k-й *координатной функцией* отображения f ($k \in [1:m]$) и пишут $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, $A \subset X$. Множество

$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A \ f(x) = y\}$$

называется *образом* множества A при отображении f. Множество $f(X)$ — образ множества X — называется *множеством значений* отображения f.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$, $B \subset Y$. Множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$$

называется *прообразом* множества B при отображении f.

Условия $A \subset X$ и $B \subset Y$ в определениях образа и прообраза описывают типичные ситуации, но их можно без ущерба опустить, так как значения $f(x)$ определены только при $x \in X$ и принадлежат Y.

Если множество B состоит из одной точки: $B = \{y_0\}$, то его прообраз есть множество корней уравнения $f(x) = y_0$:

$$f^{-1}(\{y_0\}) = \{x \in X : f(x) = y_0\}.$$

В обозначении этого прообраза фигурные скобки иногда опускают и пишут $f^{-1}(y_0)$.

Из определения видно, что мы различаем множество значений $f(X)$ и область значений Y отображения f: всегда $f(X) \subset Y$, но может быть $f(X) \neq Y$.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то отображение f называется *сюръективным,* или *сюръекцией,* или *отображением "на"* (отображением X на Y).

Другими словами, сюръективность отображения f означает, что при любом $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение в X.

Подчеркнем, что предлог "на" несет дополнительную смысловую нагрузку: выражения "отображение в Y" и "отображение на Y" имеют разный смысл.

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Если для любых различных элементов X их образы различны, то отображение f называется *инъективным,* или *инъекцией,* или *обратимым* отображением.

Таким образом, f инъективно, если из того, что $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Другими словами, инъективность отображения f означает, что при любом $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения в X.

Определение. Пусть $f: X \to Y$. Если отображение f одновременно сюръективно и инъективно, то f называется *биективным,* или *биекцией,* или *взаимно-однозначным* отображением (соответствием).

Другими словами, биективность отображения f означает, что при любом $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение в X.

Предупредим читателя о том, что некоторые авторы придерживаются другой терминологии и называют биективные отображения обратимыми, а инъективные — взаимно-однозначными (при этом "взаимно-однозначное соответствие" все-таки означает биекцию).

Отметим, что свойство отображения быть сюръективным, инъективным или биективным зависит не только от правила f, но и от множеств X и Y.

Пример. Пусть функция $f: X \to Y$ задается равенством $f(x) = x^2$.

1. Если $X = Y = \mathbb{R}$, то f не сюръективна (так как не принимает отрицательных значений) и не инъективна (так как, например, $f(-1) = f(1) = 1$).

2. Если $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+$, то f сюръективна, но не инъективна.

3. Если $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$, то f инъективна, но не сюръективна.

4. Если $X = Y = \mathbb{R}_+$, то f сюръективна и инъективна, то есть биективна.

Ясно, что если отображение $f: X \to Y$ обратимо, то отображение $f: X \to f(X)$ биективно (мы сохранили обозначение f для правила).

Определение. Пусть $f: X \to Y$. *Графиком* отображения f называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

Таким образом, $\Gamma_f \subset X \times Y$. В знакомой из школы ситуации, когда f — вещественнозначная функция вещественной переменной, график f есть подмножество плоскости.

График отображения обладает следующим свойством:

$$\text{если } (x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma_f, \text{ то } y_1 = y_2.$$

На плоскости это означает, что никакая вертикальная прямая не может иметь двух общих точек с графиком. Обратно, если множество $G \subset X \times Y$ удовлетворяет условию:

$$\text{если } (x, y_1), (x, y_2) \in G, \text{ то } y_1 = y_2, \tag{7}$$

то G есть график некоторого отображения. Его областью определения служит множество

$$E = \{x \in X : \exists y \in Y \ \ (x, y) \in G\},$$

а правило таково: каждому $x \in E$ сопоставляется тот (единственный в силу (7)) элемент $y \in Y$, для которого $(x, y) \in G$.

Пусть $f: X \to Y$, f обратимо. Тогда для любого $y \in f(X)$ существует ровно один $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Определение. Пусть $f: X \to Y$, f обратимо. Отображение, которое каждому y из множества $f(X)$ сопоставляет то (единственное) значение x из X, для которого $f(x) = y$, называется *обратным* к f и обозначается f^{-1}.

Это определение разъясняет термин "обратимое отображение". Таким образом,

$$f^{-1}: f(X) \to X.$$

Очевидно, что f^{-1} — биекция между $f(X)$ и X. Соотношения $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ для обратимого отображения равносильны. Следовательно, равносильны соотношения $(x, y) \in \Gamma_f$ и $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Для функций это значит, что графики обратимой функции и обратной к ней симметричны относительно прямой $y = x$ (рисунок 5). Если f — биекция, то обратное отображение к f^{-1} есть f.

Обозначение $f^{-1}(B)$ теперь получилось двусмысленным: с одной стороны, так обозначается прообраз множества B при отображении f, а с другой стороны, если f обратимо, — образ множества B при отображении f^{-1}. Это разночтение не приводит к путанице: читателю предлагается доказать, что в случае обратимости f эти два множества совпадают.

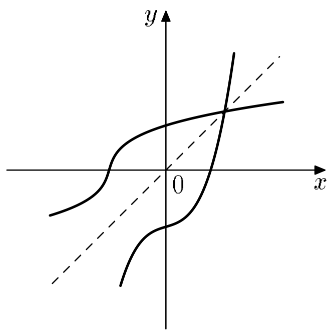

Рис. 5

Определение. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y_0 \to Z$, $f(X) \subset Y_0$. Отображение $h: X \to Z$, действующее по правилу

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in X,$$

называется *композицией* или *суперпозицией* отображений f и g, а также *сложным отображением,* и обозначается $g \circ f$. При этом g называется *внешним,* а f — *внутренним отображением.*

Итак, по определению $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Для того, чтобы композиция была определена на множестве X, требуется, чтобы множество значений внутреннего отображения содержалось в области определения внешнего. Иногда в определении композиции этого не требуют, и тогда композиция оказывается определенной на множестве $f^{-1}(Y_0)$.

Отметим, что, вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$, даже если обе композиции определены.

Определение. Отображение $\mathrm{id}_X: X \to X$, которое каждому элементу множества X сопоставляет сам этот элемент, называется *тождественным отображением* в множестве X.

Если f обратимо, то по определению обратного отображения

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(X)}\,.$$

Определение. Пусть $f: X \to Y$, $X_0 \subset X$. Отображение, которое каждому элементу x множества X_0 сопоставляет значение $f(x)$, называется *сужением* отображения f на множество X_0 и обозначается $f|_{X_0}$. Если отображение g есть сужение отображения f, то f называется *продолжением*, *распространением* или *расширением* g.

Таким образом, в определении сужения правило и область значений остаются теми же самыми, а меняется только область определения: $f|_{X_0}: X_0 \to Y$. Ясно, что сужение единственно, а продолжение — нет.

Если $D \subset X$, $f: D \to Y$, то пишут короче: $f: D \subset X \to Y$. Если же область определения отображения f содержит множество D, то говорят, что f задано *по крайней мере* на множестве D.

§ 4. Счетные множества

Пусть даны два конечных множества. Как узнать, одинаково ли число элементов в них? С одной стороны, можно просто пересчитать элементы и сравнить получившиеся в результате числа. С другой стороны, если в множествах одинаковое число элементов, то можно установить между ними взаимно-однозначное соответствие. Верно и обратное: если между множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то число элементов в них одинаково. Второй способ, в отличие от первого, применим и к бесконечным множествам.

Определение. Множества A и B называют *эквивалентными* или *равномощными* и пишут $A \sim B$, если существует биекция $\varphi: A \to B$. Другими словами: два множества называются эквивалентными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Примеры. 1. Противоположные стороны прямоугольника, очевидно, равномощны: друг другу сопоставляются противоположные точки.

2. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника также равномощны, хотя и имеют разные длины: взаимно-однозначным соответствием будет проекция гипотенузы на катет (рисунок 6).

3. Любые два невырожденных отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$ равномощны: одна из биекций задается формулой

$$y = \frac{x-a}{b-a}\,d + \frac{b-x}{b-a}\,c.$$

Эта же формула задает биекцию интервалов (a, b) и (c, d) (рисунок 7).

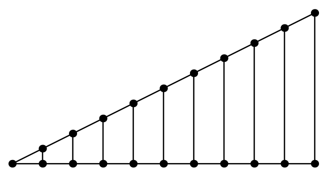

Рис. 6

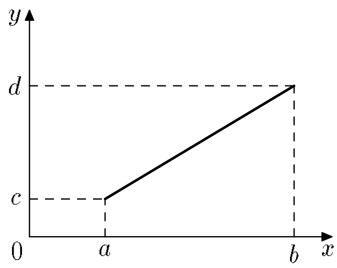

Рис. 7

4. Концентрические окружности равномощны: друг другу сопоставляются точки, лежащие на одном луче, выходящем из центра.

5. Интервал $(-1, 1)$ равномощен $\mathbb{R}$: одна из биекций задается формулой $y = \frac{x}{1-|x|}$.

6. Окружность без точки и прямая равномощны. Взаимно-однозначное соответствие, изображенное на рисунке 8, называется *стереографической проекцией.*

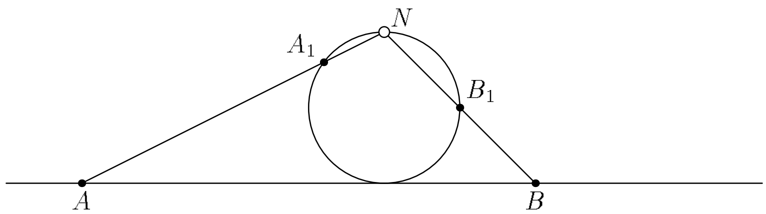

Рис. 8

Эквивалентность множеств является частным случаем общего понятия эквивалентности, которое определяется так.

Определение. Отношение $\sim$ между элементами некоторого множества называется *отношением эквивалентности,* если оно обладает следующими тремя свойствами.

1. Рефлексивность: $A \sim A$.
2. Симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$.
3. Транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Примерами отношений эквивалентности служат равенство треугольников, подобие треугольников, параллельность прямых (если договориться считать прямую параллельной самой себе).

Замечание 1. Равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Так как id_A — биекция множества A на себя, то $A \sim A$. Если $\varphi\colon A \to B$ — биекция, то $\varphi^{-1}\colon B \to A$ — тоже биекция, поэтому из того, что $A \sim B$, следует, что $B \sim A$. Если $\varphi\colon A \to B$ и $\psi\colon B \to C$ — биекции, то $\psi \circ \varphi\colon A \to C$ — тоже биекция, поэтому из того, что $A \sim B$ и $B \sim C$ следует, что $A \sim C$. $\square$

Определение. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Таким образом, множество A счетно, если его элементы можно расположить в виде последовательности:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\},$$

то есть занумеровать натуральными числами так, что каждый элемент будет занумерован ровно один раз и при этом будет израсходован весь натуральный ряд.

Примеры. 1. Множество

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

всех четных натуральных чисел счетно. Биекция: $a_n = 2n$.

2. Множество

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$$

всех квадратов натуральных чисел счетно. Биекция: $a_n = n^2$.

3. Множество целых чисел
$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$$
счетно. Нумерация в указанном порядке задается формулами $a_{2n-1} = n - 1$, $a_{2n} = n$.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть множество A бесконечно. Тогда в нем есть элемент a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нем есть элемент a_2. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно, поэтому в нем есть элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A этот процесс не оборвется ни на каком шаге; продолжая его и далее, получим множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, которое по построению будет счетным подмножеством A. $\square$

Теорема 2. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно: если A счетно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B счетно.*

Доказательство. Расположим элементы A в виде последовательности:
$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}.$$
Будем нумеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд. $\square$

Теоремы 1 и 2 показывают, что счетные множества — самые "бедные элементами" бесконечные множества. Поэтому часто употребляется следующий термин.

Определение. Пустое, конечное или счетное множество называется *не более чем счетным*.

Замечание 1. Иногда счетными называют множества, которые только что были названы не более чем счетными, то есть множества, равномощные какому-либо подмножеству $\mathbb{N}$. Также нет общепринятого соглашения, считать ли пустое множество конечным или выделять в отдельный класс.

Лемма 1. *Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях таблицы (матрицы):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Тогда A счетно.

Замечание 2. Нечеткое выражение "записаны в виде матрицы" на самом деле означает, что элементы множества A занумерованы с помощью упорядоченных пар натуральных чисел (первый элемент пары — номер строки, второй — номер столбца в матрице), причем каждый элемент занумерован ровно один раз и израсходованы все пары. Другими словами, задана биекция множеств $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и A. Тем самым лемма 1 утверждает счетность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Доказательство. Занумеруем элементы множества A "по диагоналям":

$$A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots\}$$

или "по квадратам":

$$A = \{a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, \dots\}. \quad \square$$

Теорема 3. *Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ или $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, множества A_k не более чем счетны. Запишем элементы A_1 в первую строку матрицы, элементы $A_2 \setminus A_1$ — во вторую строку и так далее, то есть если задано множество A_k, то элементы $A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ запишем в k-ю строку матрицы. Таким образом все элементы множества B окажутся записанными в клетки матрицы (но при этом некоторые клетки могут остаться пустыми). Значит, B равномощно некоторому подмножеству счетного по лемме 1 множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. По теореме 2 множество B не более чем счетно. $\square$

Теорема 4. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \qquad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $Q_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\right\}$ счетно. По теореме 3 и $\mathbb{Q}_+ = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} Q_q$ счетно. Очевидно, что $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. Снова по теореме 3 множество

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

счетно. □

Следствие 1. *Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ счетно.*

До сих пор мы не привели ни одного примера бесконечного множества, про которое было бы доказано, что оно не является счетным (такие множества называют *несчетными*).

Теорема 5. *Отрезок $[0, 1]$ несчетен.*

Доказательство. Допустим противное: пусть отрезок $[0, 1]$ счетен, то есть все числа отрезка $[0, 1]$ можно расположить в виде последовательности:

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\}$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1 (если таких два, то все равно, какой). Далее разобьем отрезок $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, который не содержит точки x_2 (если таких более одного, то все равно, какой). Этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, причем $x_n \notin [a_n, b_n]$ для любого n. По аксиоме о вложенных отрезках существует точка x^*, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Тем более, $x^* \in [0, 1]$. Но тогда x^* имеет номер: $x^* = x_m$ при некотором m. По построению $x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности x^* всем отрезкам $[a_n, b_n]$. □

Из доказанной теоремы вытекает существование иррациональных чисел.

Следствие 2. *Множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ и иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ несчетны.*

Определение. Если множество эквивалентно отрезку $[0, 1]$, то говорят, что оно имеет *мощность континуума.*

Отметим без доказательства еще несколько фактов о мощности множеств.

Замечание 1. Ясно, что любой невырожденный отрезок имеет мощность континуума. Можно доказать, что любой невырожденный промежуток и, в частности, вся прямая $\mathbb{R}$, имеет мощность континуума. Более того, при любом $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{R}^m$ имеет мощность континуума.

Замечание 2. Множество всех функций $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ более богато элементами, чем отрезок $[0, 1]$, то есть оно не равномощно отрезку, но имеет часть, равномощную отрезку.

Гипотеза континуума. *Всякое бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{N}$ или $\mathbb{R}$.*

Эта гипотеза была сформулирована Кантором. В 1934 году австрийский математик К. Гёдель доказал, что гипотеза континуума не противоречит остальным аксиомам теории множеств. В 1964 году американский математик П. Коэн доказал, что ее отрицание также не противоречит остальным аксиомам теории множеств.

Замечание 3. Мы определили равномощность множеств, нигде не определяя, что такое мощность множества, и не пользуясь этим понятием. Чтобы определить понятие мощности множества, можно поступить так. Разобьем все множества на классы эквивалентности: два множества попадают в один класс, если они эквивалентны. После этого каждый класс назовем мощностью. Обычно мощность n-элементного множества (класс n-элементных множеств) так и обозначают числом n, а мощность континуума — буквой c.

Замечание 4. Несложно доказать, что если из бесконечного множества удалить один элемент или даже любое конечное множество элементов, то получится множество, равномощное исходному.

Таким образом, всякое бесконечное множество имеет равномощную себе правильную (то есть не совпадающую с ним самим) часть. Конечные множества этим свойством не обладают, поэтому можно даже дать определение бесконечного множества как множества, имеющего равномощную себе правильную часть.

ГЛАВА 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Предел последовательности

Начнем с определения предела числовой последовательности, вероятно, знакомого читателю из школьного курса.

Мы будем записывать это и многие другие определения кратко с помощью кванторов. Во избежание ошибок читателю рекомендуется вспомнить соглашения о правилах чтения формул с кванторами из § 1 введения. Одновременно мы будем давать словесную формулировку, полностью расшифровывающую краткую запись. Удобно представлять себе, что, в то время как краткая формулировка записывается (лектором на доске или студентом при ответе на экзамене), словесная формулировка произносится.

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Число $a \in \mathbb{R}$ называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \;\; |x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Последовательность, имеющая некоторое число своим пределом, называется *сходящейся*; в противном случае (то есть если никакое число не является пределом этой последовательности) — *расходящейся.*

Иногда, если нет опасности недоразумений, запись $n \to \infty$ в обозначении предела опускают и пишут

$$\lim x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a.$$

Говорят также "x_n сходится к a" и "x_n стремится к a".

Пример 1. Докажем по определению, что число $a = 0$ является пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ (с этой фразы удобно начинать доказательство утверждений на "ε-языке"). Постараемся подобрать такое натуральное N, что для всех номеров $n > N$ будет $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, то есть $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$; тогда, если $n > N$, то, тем более, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$. В силу произвольности ε число 0 действительно является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

Пример 2. Пусть все члены последовательности x_n равны одному и тому же значению a. Такая последовательность называется постоянной или *стационарной.* Докажем, что и $\lim x_n = a$.

Действительно, неравенство $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ выполняется для всех $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, поэтому в определении подходит любой номер N, например, $N = 1$.

Пример 3. Докажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $a = \lim(-1)^n$. Тогда для числа $\varepsilon = 1$ найдется такой номер N, что для всех номеров n, больших N, будет $|x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2 = |x_{N+1} - x_{N+2}| = |(x_{N+1} - a) - (x_{N+2} - a)| \leqslant \\ \leqslant |x_{N+1} - a| + |x_{N+2} - a| < 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

что абсурдно.

Сделаем несколько простых, но важных замечаний к определению предела.

Замечание 1. Если для некоторого положительного числа ε_0 нашелся номер N из определения предела, то тот же номер N подходит и для любого числа $\varepsilon > \varepsilon_0$. Действительно, если $|x_n - a| < \varepsilon_0$, а $\varepsilon > \varepsilon_0$, то и подавно $|x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому достаточно проверять справедливость определения (существование номера N) лишь для достаточно малых ε (то есть для всех положительных ε, меньших некоторого положительного числа).

Замечание 2. Если для некоторого положительного числа ε_0 нашелся номер N из определения предела, то для того же ε подходит и любой номер N_1, больший N. Действительно, если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется для всех номеров $n > N$, а $N_1 > N$, то оно и подавно выполняется для всех номеров $n > N_1$. По той же причине в определении предела не обязательно требовать, чтобы N было натуральным числом. Указание на то, что n — натуральное число, мы также будем обычно опускать для краткости.

Так, в примере 1 можно было положить $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (что равно нулю при $\varepsilon > 1$) или даже $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (что не обязано быть целым).

Замечание 3. Определение предела останется равносильным исходному, если вместо $n > N$ писать $n \geqslant N$ и (или) вместо $|x_n - a| < \varepsilon$ писать $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Поясним это для неравенств с $|x_n - a|$. С одной стороны, из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ следует неравенство $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$. Поэтому если число a удовлетворяет определению со знаком "$<$", то оно и подавно удовлетворяет определению со знаком "$\leqslant$". С другой стороны, пусть число a удовлетворяет определению со знаком "$\leqslant$". Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такой номер N, что для всех номеров n, больших N, будет $|x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда тем более $|x_n - a| < \varepsilon$. В силу произвольности ε число a удовлетворяет определению со знаком "$<$".

Замечание 4. Пусть последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что, начиная с некоторого номера n_0, их значения совпадают: $x_n = y_n$ при всех $n \geqslant n_0$. Тогда их пределы одновременно существуют или нет и, если существуют, то равны.

В самом деле, если $a = \lim x_n$ и номер N подходит для числа ε из определения $\lim x_n$, то номер $N_1 = \max\{N, n_0 - 1\}$ подходит для числа ε из определения $\lim y_n$. Аналогичное рассуждение верно, если поменять x_n и y_n ролями.

Таким образом, если изменить у последовательности x_n конечное число членов, то ее предел не изменится. Сказанное позволяет, не меняя определения, говорить о пределе последовательности вида $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, заданной на множестве целых чисел, начиная с некоторого n_0 $(n_0 \in \mathbb{Z})$.

Замечание 5. Неравенство для модуля

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Определение. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки a и обозначается $V_a(\varepsilon)$ или V_a, если значение ε несущественно.

Таким образом, определение предела последовательности можно переформулировать, используя понятие окрестности, так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности точки a все члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этой окрестности.

Оказывается, что понятие предела имеет смысл не только для числовых последовательностей. Существенным оказывается то, что между x_n и a определено расстояние (роль которого для числовых последовательностей играет модуль разности: $|x_n - a|$). Поэтому далее мы дадим определение и докажем некоторые свойства предела последовательности в более общей ситуации.

Определение. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *метрикой* или *расстоянием* в множестве X, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y, \qquad x, y \in X.$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \qquad x, y \in X.$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \qquad x, y, z \in X.$

Пара (X, ρ) — множество с метрикой в нем — называется *метрическим пространством.* Условия 1–3 называются аксиомами метрики (метрического пространства). Элементы множества X часто называют *точками.* Свойство 3 называется *неравенством треугольника* по аналогии с известным неравенством треугольника из планиметрии.

Подчеркнем, что расстояние в множестве X может быть определено разными способами; получающиеся при этом метрические пространства считаются различными. Тем не менее, если ясно, о каком расстоянии идет речь, говорят короче: "метрическое пространство X".

Примеры. 1. Пусть X — произвольное множество,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Легко видеть, что ρ — метрика. Такое пространство называется *дискретным,* а метрика — *симплициальной.*

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

3. $X = \mathbb{C}$, $\rho(z, w) = |z - w|$.

Свойства модуля обеспечивают выполнение аксиом метрики.

4. $X = \mathbb{R}^m$; если $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — точки из $\mathbb{R}^m$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}\,. \tag{2}$$

Формула (2) обобщает известную из школьного курса геометрии формулу для расстояния между точками на плоскости и в трехмерном пространстве. Выполнение аксиом 1 и 2 метрики очевидно. Неравенство треугольника при $m = 1, 2, 3$ известно из школьного курса; при произвольном m мы докажем его позже (даже двумя способами). Расстояние (2) называется *евклидовым,* а множество $\mathbb{R}^m$ с евклидовым расстоянием — *вещественным евклидовым пространством.*

5. $X = \mathbb{C}^m$; если $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $w = (w_1, \ldots, w_m)$ — точки из $\mathbb{C}^m$, то

$$\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k - w_k|^2}\,. \tag{3}$$

Множество $\mathbb{C}^m$ с расстоянием (3) называется *комплексным евклидовым пространством.* Этот пример обобщает пример 2; неравенство треугольника будет доказано позднее. Заметим еще, что как множество $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$. Действительно, если обозначить $z_k = x_k + iy_k$, то точку $z = (z_1, \ldots, z_m)$ из $\mathbb{C}^m$ можно рассматривать как точку $z = (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$ из $\mathbb{R}^{2m}$. При этом расстояния между точками z и w ($w_k = u_k + iv_k$) как элементами $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{R}^{2m}$, определенные формулами (2) и (3), совпадают, так как $|z_k - w_k|^2 = (x_k - u_k)^2 + (y_k - v_k)^2$.

Расстояние в множествах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ можно ввести и другими способами.

6. $X = \mathbb{R}^m$, $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k - y_k|$.

7. $X = \mathbb{C}^m$, $\rho(z, w) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k - w_k|$.

8. $X = \mathbb{R}^m$, $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$.

Житейский пример этого расстояния при $m = 2$: расстояние между перекрестками в городе, улицы которого образуют прямоугольную сетку (двигаться можно только по улицам).

9. $X = \mathbb{C}^m$, $\rho(z, w) = \sum\limits_{k=1}^{m} |z_k - w_k|$.

Проверка аксиом не вызывает затруднений (при этом используется неравенство треугольника для модуля) и предоставляется читателю. (Между прочим, в отличие от примеров 4 и 5, в примерах 6 и 7, 8 и 9 расстояния между точками z и w как элементами $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{R}^{2m}$ не совпадают.)

10. Расстояние на сфере (поверхности Земли) — длина кратчайшей дуги, соединяющей две точки.

11. Пусть $Y \subset X$, ρ — метрика в X. Очевидно, что тогда $\rho|_{Y \times Y}$ — метрика в Y.

Определение. Метрическое пространство $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ называется *подпространством* метрического пространства (X, ρ).

Следующие понятия естественным образом обобщают понятия шара и сферы в трехмерном пространстве, круга и окружности на плоскости, интервала и отрезка.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$, $r > 0$. Множество

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке a или *окрестностью* (r-*окрестностью*) точки a и обозначается еще $V_a(r)$ или V_a, если значение r несущественно. Множество

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром,* а множество

$$S(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) = r\}$$

— *сферой* радиуса r с центром в точке a.

Отметим, что пересечение двух окрестностей точки a есть ее окрестность:

$$V_a(r_1) \cap V_a(r_2) = V_a\bigl(\min\{r_1, r_2\}\bigr).$$

Теперь дадим определение предела последовательности в метрическом пространстве и докажем несколько теорем о пределах.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в X. Точку $a \in X$ называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon. \tag{4}$$

Последовательность, имеющая некоторую точку своим пределом, называется *сходящейся*; в противном случае — *расходящейся.*

Сходимость в метрическом пространстве (X, ρ) называют еще сходимостью по метрике (по расстоянию) ρ. С помощью понятия окрестности это определение переформулируется так же, как и для числовой последовательности. Точка a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности точки a все члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этой окрестности:

$$\forall V_a \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ x_n \in V_a.$$

Если сравнить утверждения (4) и (1), то видно, что утверждение (4) означает в точности то, что числовая последовательность $\{\rho(x_n, a)\}$ стремится к нулю:

$$x_n \to a \iff \rho(x_n, a) \to 0.$$

Замечания 1–4 к определению предела числовой последовательности справедливы и для предела последовательности в метрическом пространстве.

Теорема 1. Единственность предела последовательности. *Последовательность в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $a \neq b$. Тогда по первой аксиоме расстояния $\rho(a, b) > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, а $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то по аксиомам расстояния

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b),$$

что абсурдно. $\square$

Определение. Подмножество D метрического пространства X называется *ограниченным,* если оно содержится в некотором шаре:

$$\exists a \in X, R > 0 \ \ D \subset \overline{B}(a, R).$$

Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве X называется *ограниченной,* если множество ее значений ограничено:

$$\exists a \in X, R > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \rho(x_n, a) \leqslant R.$$

Использовать в определении ограниченности открытый или замкнутый шар — безразлично: если множество содержится в открытом шаре, то оно содержится и в замкнутом шаре того же радиуса, а если множество содержится в замкнутом шаре, то оно содержится и в открытом шаре в два раза большего радиуса с тем же центром. Также в этом определении можно с самого начала зафиксировать центр шара. Действительно, если $a, b \in X$ и $x \in \overline{B}(a, R)$, то по неравенству треугольника

$$\rho(x, b) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, b) \leqslant R + \rho(a, b) = R_1,$$

то есть $x \in \overline{B}(b, R_1)$. Поэтому, если множество D содержится в шаре с центром в одной точке, то оно содержится в шаре и с центром в любой другой точке.

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Взяв $\varepsilon = 1$, подберем такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho(x_n, a) < 1$. Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_N, a), 1\};$$

тогда $\rho(x_n, a) \leqslant R$ при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Следующие две теоремы относятся к последовательностям вещественных чисел.

Теорема 3. Предельный переход в неравенстве. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leqslant y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда $a \leqslant b$.* Другими словами: *если $x_n \leqslant y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существуют пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ положительно. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n,$$

что противоречит условию. □

Замечание 1. Как показывает пример последовательностей $x_n = -\frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, стремящихся к нулю, при предельном переходе строгое неравенство может превратиться в нестрогое: из того, что $x_n < y_n$ при всех n, не следует, что $\lim x_n < \lim y_n$.

Следствие 1. 1. *Если $x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_n$, то $\lim x_n \leqslant b$.*

2. *Если $x_n \geqslant a$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_n$, то $\lim x_n \geqslant a$.*

3. *Если $x_n \in [a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_n$, то $\lim x_n \in [a, b]$.*

Для *доказательства* первого утверждения нужно взять в качестве $\{y_n\}$ стационарную последовательность: $y_n = b$ при всех n. Второе утверждение доказывается аналогично, третье следует из первых двух.

Замечание 2. Свойство отрезка из утверждения 3 следствия (неверное для конечных промежутков другого типа) называется замкнутостью. Подробнее понятие замкнутости будет обсуждаться в следующем параграфе.

Теорема 4. О сжатой последовательности. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. Тогда предел $\{y_n\}$ существует и равен a.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $z_n < a + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε предел $\{y_n\}$ существует и равен a. □

Замечание 1. В одном старом учебнике теорема 4 сопровождалась рисунком, на котором два милиционера ($\{x_n\}$ и $\{z_n\}$) под руки вели нарушителя ($\{y_n\}$) в отделение (a). С тех пор теорему о сжатой последовательности (и ее обобщение — теорему о сжатой функции) называют еще *принципом двух милиционеров*.

Замечание 2. Отметим частный случай теоремы 4: *если* $|y_n| \leqslant z_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z_n \to 0$, *то* $y_n \to 0$.

Замечание 3. В теоремах 3 и 4 достаточно выполнения неравенств для всех номеров n, начиная с некоторого.

Определение. Последовательность вещественных или комплексных чисел называется *бесконечно малой,* если она стремится к нулю.

Таким образом, в метрическом пространстве стремление последовательности $\{x_n\}$ к a равносильно тому, что последовательность $\{\rho(x_n, a)\}$ бесконечно мала.

Лемма 1. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая: если* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — *числовые последовательности,* $\{x_n\}$ — *бесконечно малая,* $\{y_n\}$ *ограничена, то* $\{x_n y_n\}$ — *бесконечно малая.*

Доказательство. В силу ограниченности $\{y_n\}$ найдется такое $K > 0$, что $|y_n| \leqslant K$ при всех n. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности $\{x_n\}$ существует такой номер N, что $|x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{K}$ для всех $n > N$. Но тогда для всех $n > N$

$$|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и означает, что $x_n y_n \to 0$. $\square$

Прежде, чем доказывать утверждения об арифметических действиях над пределами, определим понятие векторного и нормированного пространства.

Определение. Пусть K — поле, X — множество, и над элементами X и K определены две операции: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $K \times X \xrightarrow{\cdot} X$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \qquad x, y, z \in X.$
2. $x + y = y + x, \qquad x, y \in X.$
3. $\exists\, \theta \in X \ \ \forall x \in X \ \ 0 \cdot x = \theta.$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \qquad x \in X, \ \lambda, \mu \in K.$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \qquad x, y \in X, \ \lambda \in K.$
6. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x), \qquad x \in X, \ \lambda, \mu \in K.$

7. $1 \cdot x = x, \qquad x \in X.$

Тогда X называется *векторным пространством* или *линейным множеством* над полем K. Элементы X называются *векторами,* элементы K — *скалярами*, а свойства 1–7 — аксиомами векторного пространства. Элемент θ из аксиомы 3 называется нулем (*нулевым вектором,* нейтральным элементом) пространства X.

Через $-y$ обозначим элемент $(-1) \cdot y$, а под разностью $x - y$ будем понимать $x + (-y)$. Проверку несложных общих свойств векторных пространств (например, того, что для любого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in X$, такой что $x + y = \theta$, и этот y равен $-x$) оставляем читателю. Подробнее векторные пространства изучаются в курсе алгебры.

Далее в курсе рассматриваются векторные пространства только над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Примеры. Простейшими примерами векторных пространств служат пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Следующие примеры дают пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$. Сложение векторов и умножение на скаляр в них определяются покоординатно: если $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Из школьного курса геометрии известно, что при операциях с векторами их координаты преобразуются именно так. Нулем является вектор, все координаты которого равны нулю (“жирный нуль”): $\mathbb{O} = \mathbb{O}_m = (0, \ldots, 0)$.

Множество функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), заданных на некотором фиксированном множестве D, является векторным пространством, соответственно, над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нулем служит функция, тождественно равная нулю. Частные случаи этого примера — пространства последовательностей вещественных или комплексных чисел; для них $D = \mathbb{N}$. Дальнейшее обобщение получается, если рассмотреть множество отображений $f\colon D \to Y$ со значениями в векторном пространстве Y.

Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Нормой* в X называется функция $p\colon X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Положительная определенность:

$$p(x) = 0 \iff x = \theta.$$

2. Положительная однородность:

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

3. Неравенство треугольника (полуаддитивность):

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Принято обозначать норму двойными палочками: $p(x) = \|x\|$. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным пространством,* а свойства 1–3 — аксиомами нормы. Если функция $p\colon X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет аксиомам 2 и 3, то p называется *полунормой.*

Понятие нормы обобщает понятие длины вектора.

Лемма 2. Свойства полунорм.
1. $p\Bigl(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Bigr) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| p(x_k)$.
2. $p(\theta) = 0$.
3. $p(-x) = p(x)$.
4. $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y)$.

Доказательство. Первое свойство получается по индукции. Для доказательства свойств 2 и 3 надо подставить $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ в аксиому 2. Докажем свойство 4. По неравенству треугольника

$$p(x) = p(x-y+y) \leqslant p(x-y) + p(y).$$

Отсюда

$$p(x) - p(y) \leqslant p(x-y). \tag{5}$$

Меняя x и y местами, получаем

$$p(y) - p(x) \leqslant p(y-x) = p(x-y). \tag{6}$$

Неравенства 5 и 6 и означают, что $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y)$. $\square$

Примеры. Простейшими примерами нормированных пространств служат $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, норма — модуль числа. *Евклидова норма* в $\mathbb{R}^m$ определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}\,.$$

Евклидова норма (длина) вектора x будет также (в отличие от других норм) обозначаться $|x|$. Аналогично определяется евклидова норма в $\mathbb{C}^m$:

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2}\,.$$

Нормы в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ можно ввести и другими способами, например:

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k| \qquad \text{или} \qquad \|x\| = \sum_{k=1}^{m} |x_k|.$$

Примером полунормы, не являющейся нормой, служит длина проекции вектора на одну из координатных осей.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, то ρ — метрика в X (выполнение аксиом метрики очевидно). В этом случае говорят, что *метрика ρ порождена нормой.*

Таким образом, в нормированном пространстве оказывается определено понятие сходимости. Под сходимостью по норме понимается сходимость по метрике, порожденной этой нормой. Чтобы записать определение предела по норме, в определении предела числовой последовательности нужно заменить одиночные палочки модуля на двойные палочки нормы (а для евклидовой нормы можно и вовсе ничего не менять, только надо понимать, что означает $|x_n - a|$). В частности, соотношения $x_n \to a$ и $\|x_n - a\| \to 0$ равносильны.

Определение бесконечно малой последовательности сохраняет смысл в нормированном пространстве. Определение ограниченности в нормированном пространстве формулируется так: подмножество D нормированного пространства X называется *ограниченным,* если:

$$\exists R > 0 \ \ \forall x \in D \ \ \|x\| \leqslant R.$$

Если метрика порождена нормой, то $\|x\| = \rho(x,\theta)$. Однако, метрика может не порождаться никакой нормой по следующим причинам. Во-первых, метрическое пространство может не быть векторным (никакие алгебраические операции с точками метрического пространства, вообще говоря, не определены). Во-вторых, даже если метрическое пространство является векторным, $\rho(x,\theta)$ может не быть нормой. Пример: $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ — метрика в $\mathbb{R}$, но $\rho(x,0)$ — не норма.

Теорема 5. Арифметические действия над сходящимися последовательностями в нормированном пространстве. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *нормированное пространство,* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — *последовательности в* X, $\{\lambda_n\}$ — *числовая последовательность,* $x_0, y_0 \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$. *Тогда*

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$;
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$;
3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$;
4. $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Отдельно сформулируем теорему для числовых последовательностей, добавив туда утверждение о пределе частного, которое не имеет непосредственного аналога в общем случае.

Теорема 5$'$. Арифметические действия над сходящимися числовыми последовательностями. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — *числовые последовательности,* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*),* $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. *Тогда*

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$;
2. $x_n y_n \to x_0 y_0$;
3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$;
4. $|x_n| \to |x_0|$;
5. *Если, кроме того,* $y_n \neq 0$ *при всех* n *и* $y_0 \neq 0$, *то* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$.

Доказательство теорем 5 и 5$'$.

1. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$, а $\|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ будет

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение 1.

2. По неравенству треугольника

$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)\| \leqslant \\ \leqslant |\lambda_n - \lambda_0|\|x_n\| + |\lambda_0|\|x_n - x_0\|. \tag{7}$$

По условию последовательности $\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$ и $\{\|x_n - x_0\|\}$ бесконечно малые, а по теореме 2 последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена, как и постоянная последовательность $\{|\lambda_0|\}$. Следовательно, по лемме 1 оба слагаемых в правой части (7) бесконечно малые, а тогда по доказанному утверждению 1 о пределе суммы и их сумма бесконечно малая. Наконец, $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| \to 0$ по замечанию 2 к теореме 4, что и требовалось доказать.

3. Утверждение доказывается аналогично утверждению 1 или применением уже доказанных утверждений 1 и 2:

$$x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \to x_0 + (-1)y_0 = x_0 - y_0.$$

4. Утверждение следует из неравенства

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \leqslant \|x_n - x_0\|$$

(леммы 2) и замечания 2 к теореме 4.

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$, так как тогда по утверждению 2 получим, что

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to x_0 \cdot \frac{1}{y_0} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} = (y_0 - y_n) \cdot \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n},$$

последовательность $\{y_0 - y_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\left\{\frac{1}{y_0}\right\}$ ограниченная, по лемме 1 остается доказать ограниченность последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

По определению предела для числа $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2}$, которое по условию положительно, существует такой номер N, что $\|y_n - y_0\| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Тогда при всех $n > N$ по свойствам модуля

$$|y_n| = |y_0 + y_n - y_0| \geqslant |y_0| - |y_n - y_0| > |y_0| - \varepsilon = \frac{|y_0|}{2}.$$

Обозначим $k = \min\left\{|y_1|, \ldots, |y_n|, \frac{|y_0|}{2}\right\}$. Тогда $k > 0$ и $|y_n| \geqslant k$ при всех n. Следовательно, $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant \frac{1}{k}$ при всех n, что и означает ограниченность последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$. $\square$

Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функция $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется *скалярным произведением* в X (обозначение: $\varphi(x, y) = (x, y)$), если она удовлетворяет следующим свойствам (аксиомам скалярного произведения).

1. Линейность по первому аргументу: для всех $x_1, x_2, y \in X$ и всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \cdot (x_1, y) + \mu \cdot (x_2, y).$$

2. Эрмитовская симметричность:

$$(y, x) = \overline{(x, y)}.$$

3. Положительная определенность:

$$(x, x) \geqslant 0; \quad (x, x) = 0 \iff x = \theta.$$

В вещественном случае черту можно опустить.

Перечислим некоторые свойства скалярного произведения.

П1. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

П2. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

П3. $(\theta, y) = (x, \theta) = 0$.

Эти свойства следуют из аксиом 1 и 2.

П4. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца.

$$\left|(x, y)\right|^2 \leqslant (x, x)(y, y). \tag{8}$$

Доказательство. Считая $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = \theta$ и неравенство (8) выполнено), положим

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

Тогда в силу аксиом скалярного произведения и равенства $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y) = \\ = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}.$$

Таким образом,

$$(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 = (y, y)(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0. \quad \square$$

Определение. Два вектора x и y называются *коллинеарными,* если один из них нулевой или существует такой скаляр λ, что $x = \lambda y$. Два вектора x и y называются *сонаправленными,* если один из них нулевой или существует такое $\lambda > 0$, что $x = \lambda y$.

Замечание 1. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектора x и y коллинеарны.

В самом деле, из доказательства следует, что если неравенство (8) обращается в равенство, то или $y = \theta$ или $x + \lambda y = \theta$. Обратное утверждение очевидно.

П5. *Функция* $p(x) = \sqrt{(x, x)}$ *— норма в* X*.*

Доказательство. Положительная определенность функции p следует из положительной определенности скалярного произведения. Далее,

$$p(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x, x)} = |\lambda| p(x).$$

Докажем неравенство треугольника. Применяя П4, имеем

$$p^2(x + y) = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \\ = (x, x) + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + (y, y) \leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leqslant \\ \leqslant p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) = (p(x) + p(y))^2. \quad \square$$

Используя вновь введенную норму, неравенство Коши – Буняковского – Шварца можно переписать так:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Замечание 2. Неравенство треугольника обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектора x и y сонаправлены.

Доказательство. Если один из векторов нулевой, равенство очевидно. Пусть $x, y \neq \theta$. Обращение неравенства треугольника в равенство равносильно тому, что

$$\operatorname{Re}(x, y) = |(x, y)| = \|x\|\|y\|.$$

Второе равенство по замечанию 1 равносильно коллинеарности x и y, то есть равенству $x = \lambda y$. Подставляя в первое равенство, получаем $\operatorname{Re}\lambda(y, y) = |\lambda|(y, y)$, откуда $\lambda > 0$. $\square$

П6. *Если $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$, то $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.*

Доказательство. С помощью П4 получаем

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &\leqslant |(x_n, y_n - y_0)| + |(x_n - x_0, y_0)| \leqslant \\ &\leqslant \|x_n\|\,\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\,\|y_0\|.\end{aligned}$$

Так как сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена, по лемме 1 и теореме $5'$ правая часть стремится к нулю. Следовательно, $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ по теореме 4. $\square$

Примерами пока что для нас будут только пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \qquad (z, w) = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k}.$$

Евклидова норма как раз порождается этим скалярным произведением.

Следствие 3. Неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника в $\mathbb{R}^m$. *Для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2\right),$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}\,.$$

Эти неравенства — конкретизация неравенств из П4 и П5.

Замечание 3. Неравенство (8) и в общем случае, и для различных конкретных пространств называют по-разному: неравенство Коши, неравенство Коши – Буняковского, неравенство Буняковского – Шварца и т.д. В $\mathbb{R}^m$ чаще всего используется название "неравенство Коши – Буняковского".

Остановимся подробнее на сходимости в $\mathbb{R}^m$. Нумеровать члены последовательности в $\mathbb{R}^m$ будем верхним индексом: $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, а нижний индекс оставим для нумерации координат.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ точек $\mathbb{R}^m$ *сходится* к пределу $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ *покоординатно,* если $x_j^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_j^{(0)}$ для всех $j \in [1:m]$.

Лемма 3. *В $\mathbb{R}^m$ покоординатная сходимость и сходимость по евклидовой норме равносильны.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенств

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| \leqslant |x^{(n)} - x^{(0)}| = \\ = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k^{(0)})^2} \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \tag{9}$$

и теоремы о предельном переходе в неравенстве. □

Следствие 4. *Сходимость последовательности комплексных чисел равносильна одновременной сходимости последовательностей их вещественных и мнимых частей:*

$$z_n \to z_0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0, \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0. \end{cases}$$

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$. Если $a_k \leqslant b_k$ $(a_k < b_k)$ при всех $k \in [1:m]$, то будем писать $a \leqslant b$ $(a < b)$. Ясно, что не любые два вектора сравнимы.

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$, $a < b$. Множество

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : a < x < b\}$$

называется *открытым параллелепипедом.*

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$, $a \leqslant b$. Множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *замкнутым параллелепипедом.*

Всякое множество Δ, такое что $(a, b) \subset \Delta \subset [a, b]$, называется *параллелепипедом.* Если все ребра параллелепипеда равны: $b_1 - a_1 = \ldots = b_m - a_m$, то параллелепипед называется *кубом.*

В этих определениях параллелепипедами названы только прямоугольные параллелепипеды с ребрами, параллельными координатным осям.

Неравенства (9) имеют ясный геометрический смысл: в евклидовом m-мерном пространстве шар радиуса R содержится в кубе с тем же центром и ребром $2R$, который, в свою очередь, содержится в шаре радиуса $R\sqrt{m}$ с тем же центром.

Расстояние между любыми двумя точками параллелепипеда не превосходит его диагонали: если $x, y \in [a, b]$, то

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2} = |b - a|.$$

Определение. Говорят, что вещественная последовательность $\{x_n\}$ *стремится к:*

1) *плюс бесконечности,* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $x_n > E$:

$$\forall E > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \ \ x_n > E;$$

2) *минус бесконечности,* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $x_n < -E$:

$$\forall E > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \;\; x_n < -E;$$

3) *бесконечности (бесконечности неопределенного знака),* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

если для любого положительного числа E существует такой номер N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > E$:

$$\forall E > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \;\; |x_n| > E.$$

Третье определение пригодно также для комплексных последовательностей или даже последовательностей в нормированном пространстве (где надо заменить модуль на норму).

Замечание 1. Из определений следует, что если $x_n \to \pm\infty$, то $x_n \to \infty$. Обратное неверно: последовательность $x_n = (-1)^n n$ стремится к бесконечности, но не стремится ни к плюс, ни к минус бесконечности.

Определение. Последовательность, стремящаяся к бесконечности, называется *бесконечно большой.*

Замечание 2. Из определений следует, что если $x_n \to \infty$, то x_n не ограничена. Обратное неверно: последовательность $x_n = (1 + (-1)^n)n$ не ограничена и не стремится к бесконечности.

Замечание 3. Ясно, что последовательность не может одновременно стремиться к конечному пределу и к $(\pm)\infty$ (∞), а также к бесконечностям разных знаков. Отсюда вытекает единственность предела в $\overline{\mathbb{R}}$: *если $\{x_n\}$ — вещественная последовательность, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Замечание 4. Определение достаточно проверять лишь для достаточно больших чисел E; можно также опустить в определении требование $E > 0$.

Замечание 5. Определение сходящейся последовательности не меняется: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел. Бесконечно большие последовательности считаются расходящимися.

Замечание 6. Определение предела на языке окрестностей без изменений переносится на бесконечные пределы: $x_n \to a$, если для любой окрестности точки a все члены последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат этой окрестности. Для этого надо определить окрестности бесконечно удаленных точек:

$$V_{+\infty} = (E, +\infty],\ V_{-\infty} = [-\infty, -E),\ V_{\infty} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > E\} \cup \{\infty\}.$$

Аналогично определяются окрестности ∞ в нормированном пространстве X:

$$V_{\infty} = \{x \in X : \|x\| > E\} \cup \{\infty\}.$$

Если же нужно определить именно ε-окрестности, то полагают $V_{+\infty}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right]$ и т.п.; тогда ε-окрестности сужаются с уменьшением $\varepsilon > 0$.

Замечание 7. 1. *Если $x_n \geqslant y_n$ при всех n и $y_n \to +\infty$, то $x_n \to +\infty$.*

2. *Если $x_n \leqslant y_n$ при всех n и $y_n \to -\infty$, то $x_n \to -\infty$.*

Действительно, в определении предела для числа E и последовательности $\{x_n\}$ подходит тот же номер N, что и для числа E и последовательности $\{y_n\}$. Это замечание дополняет теорему о сжатой последовательности.

Лемма 4. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми. *Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, $x_n \neq 0$ ни при каком n. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая в том и только в том случае, когда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $x_n \to \infty$; докажем, что $\frac{1}{x_n} \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ подберем такой номер N, что для всех $n > N$ будет $|x_n| > E$. Последнее равносильно неравенству $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, что и означает стремление $\frac{1}{x_n}$ к нулю. Доказательство в обратную сторону аналогично. $\square$

Следующая теорема дополняет теорему об арифметических действиях над сходящимися последовательностями. В ней, если не оговорено противное, пределы могут быть и бесконечными, а те утверждения, которые имеют смысл для комплексных последовательностей, верны и для них.

Теорема 6. Арифметические действия над бесконечно большими. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — числовые последовательности.*

1. *Если $x_n \to +\infty$, $\{y_n\}$ ограничена снизу, то $x_n + y_n \to +\infty$.*
2. *Если $x_n \to -\infty$, $\{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \to -\infty$.*
3. *Если $x_n \to \infty$, $\{y_n\}$ ограничена, то $x_n + y_n \to \infty$.*
4. *Если $x_n \to \pm\infty$, $y_n \geqslant b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 > 0$), то $x_n y_n \to \pm\infty$.*
5. *Если $x_n \to \pm\infty$, $y_n \leqslant b < 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 < 0$), то $x_n y_n \to \mp\infty$.*
6. *Если $x_n \to \infty$, $|y_n| \geqslant b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 \neq 0$), то $x_n y_n \to \infty$.*
7. *Если $x_n \to a \neq 0$, $y_n \to 0$, $y_n \neq 0$ при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.*
8. *Если $x_n \to a \in \mathbb{C}$, $y_n \to \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$.*
9. *Если $x_n \to \infty$, $y_n \to b \in \mathbb{C}$, $y_n \neq 0$ при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.*

Доказательство. Докажем для определенности утверждения 1, 6 и 8.

1. Возьмем $E > 0$. По определению ограниченности снизу найдется такое число $m \in \mathbb{R}$, что $y_n \geqslant m$ при всех n. По определению бесконечного предела существует такой номер N, что $x_n > E - m$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$

$$x_n + y_n > E - m + m = E.$$

В силу произвольности E это означает, что $x_n + y_n \to +\infty$.

6. Пусть $|y_n| \geqslant b > 0$ для всех n. Возьмем $E > 0$. По определению бесконечного предела существует такой номер N, что $|x_n| > \frac{E}{b}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$

$$|x_n y_n| > \frac{E}{b} \cdot b = E,$$

что и означает стремление $x_n y_n$ к ∞.

Пусть $y_n \to b_1 \neq 0$. Положим $b = \frac{|b_1|}{2}$, если b_1 — число, и $b = 1$, если b_1 — бесконечность. Тогда, начиная с некоторого номера, $|y_n| \geqslant b$, и применимо только что доказанное утверждение.

8. По теореме о пределе произведения и лемме 4

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot 0 = 0.$$

Доказать остальные утверждения теоремы остается читателю в качестве несложного упражнения. $\square$

Замечание 1. Часть утверждений теорем об арифметических действиях можно объединить следующей формулировкой. *Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, знак $*$ означает одно из четырех арифметических действий и $x_0 * y_0$ определено в $\overline{\mathbb{R}}$, то $x_n * y_n \to x_0 * y_0$.*

Теоремы об арифметических действиях не позволяют сделать заключение о значении предела в следующих четырех случаях.

1. $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$. $\quad x_n + y_n \to\ ?$
2. $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$. $\quad x_n y_n \to\ ?$
3. $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. $\quad \dfrac{x_n}{y_n} \to\ ?$
4. $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$. $\quad \dfrac{x_n}{y_n} \to\ ?$

В этих ситуациях без дополнительной информации об x_n и y_n ничего нельзя сказать о пределе. Приведем примеры для первого случая.

Примеры. 1а. Если $x_n = n + a$ ($a \in \mathbb{R}$), $y_n = -n$, то $x_n + y_n = a \to a$.

1б. Если $x_n = n^2 + n$, $y_n = -n^2$, то $x_n + y_n = n \to +\infty$.

1в. Если $x_n = n^2$, $y_n = -n^2 - n$, то $x_n + y_n = -n \to -\infty$.

1г. Если $x_n = n + (-1)^n$, $y_n = -n$, то $x_n + y_n = (-1)^n$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Таким образом, предел суммы может оказаться равным любому числу, плюс или минус бесконечности или вовсе не существовать. Читатель сам приведет аналогичные примеры для трех оставшихся случаев.

В ситуациях 1–4 говорят, что имеет место *неопределенность* вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно, а нахождение предела называют *раскрытием неопределенности.*

§ 2. Точки и множества в метрическом пространстве

В этом параграфе, если не оговорено противное, (X, ρ) — метрическое пространство, $D \subset X$, $a \in X$.

Определение. Точка a называется *внутренней точкой* множества D, если существует окрестность точки a, содержащаяся в D.

Множество D называется *открытым* (в X), если все его точки внутренние.

Примеры. Множество X, очевидно, открыто. Пустое множество также открыто, потому что в нем нет никаких точек и, в частности, тех, которые не являются внутренними.

Покажем, что открытый шар $B(a, r)$ — открытое множество в смысле данного определения. Пусть $p \in B(a, r)$, то есть $\rho(p, a) < r$ (рисунок 9).

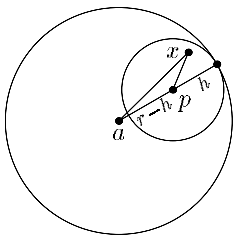

Рис. 9

Докажем, что p — внутренняя точка $B(a, r)$. Положим $h = r - \rho(p, a)$ $(h > 0)$ и проверим, что $B(p, h) \subset B(a, r)$. Пусть $x \in B(p, h)$, то есть $\rho(x, p) < h$. Тогда

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, p) + \rho(p, a) < h + r - h = r,$$

то есть $x \in B(a, r)$. $\square$

Слово "окрестность" употребляется в разных значениях. До сих пор мы называли окрестностью точки открытый шар с центром в этой точке (шаровую окрестность). Окрестностью точки в широком смысле часто называют любое открытое множество, содержащее данную точку. В пространстве $\mathbb{R}^m$ рассматривают еще кубические окрестности (открытые кубы с центром в данной точке) и другие окрестности специального вида. Так как всякая шаровая окрестность точки содержит кубическую и обратно, в определении внутренней точки множества в $\mathbb{R}^m$ шаровые окрестности можно заменить на кубические. Мы по умолчанию будем по-прежнему понимать под окрестностью шаровую окрестность.

Теорема 1. Свойства открытых множеств.

1. *Объединение любого семейства открытых множеств открыто.*

2. *Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

Доказательство. 1. Пусть задано семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $G = \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$, $x \in G$. Докажем, что x — внутренняя точка G. В самом деле, по определению объединения найдется такой индекс α, что $x \in G_\alpha$. Так как G_α открыто, x — внутренняя точка G_α, то есть существует шар $B(x,r)$, содержащийся в G_α. Но тогда тем более $B(x,r) \subset G$.

2. Пусть задано конечное семейство открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^n$, $G = \bigcap\limits_{k=1}^n G_k$, $x \in G$. Тогда x принадлежит каждому из множеств G_k, и в силу открытости G_k найдутся такие положительные числа $r_1, \dots r_n$, что $B(x,r_k) \subset G_k$ при всех $k \in [1:n]$. Обозначим $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$; тогда $r > 0$ и $B(x,r) \subset G_k$ при всех $k \in [1:n]$. Следовательно, по определению пересечения $B(x,r) \subset G$. $\square$

Замечание 1. Пересечение бесконечного семейства открытых множеств не обязано быть открытым. Например,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

а одноточечное множество не является открытым в $\mathbb{R}$.

Определение. Множество всех внутренних точек множества D называется *внутренностью* D и обозначается $\overset{\circ}{D}$ или $\operatorname{Int} D$.

Замечание 2. Внутренность D есть:
а) объединение всех открытых подмножеств D;
б) максимальное по включению открытое подмножество D.

Доказательство. Пусть G — объединение всех открытых подмножеств D. Тогда $G \subset D$, G содержит любое открытое подмножество D, и G открыто по теореме 1, то есть G — максимальное по включению открытое подмножество D. Если x — внутренняя точка D, то D содержит окрестность V_x точки x, а тогда $x \in V_x \subset G$. С другой стороны, если $x \in G$, то x принадлежит некоторому открытому подмножеству D и, значит, является его внутренней точкой и, тем более, внутренней точкой D. $\square$

Замечание 3. Множество D открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

Это замечание очевидно вытекает из предыдущего.

Определение. Точка a называется *предельной точкой* или *точкой сгущения* множества D, если в любой окрестности точки a найдется точка множества D, отличная от a.

Это определение удобно переформулировать с помощью понятия проколотой окрестности точки.

Определение. *Проколотой окрестностью* точки a называется множество

$$\dot{V}_a = V_a \setminus \{a\}.$$

Таким образом, точка a называется предельной точкой множества D, если любая проколотая окрестность точки a имеет с D непустое пересечение.

Замечание 1. Предельная точка множества может принадлежать, а может не принадлежать множеству. Так, каждая точка отрезка $[c, d]$ является предельной для интервала (c, d).

Замечание 2. Если a — предельная точка D, то в любой окрестности точки a (проколотой или нет — неважно) найдется бесконечно много точек множества D.

Доказательство. Пусть в некоторой окрестности V_a точки a лишь конечное число точек D. Перенумеруем их, исключив, быть может, саму точку a:

$$\dot{V}_a \cap D = \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Обозначим

$$r = \min\{\rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_N, a)\}.$$

Тогда $r > 0$ и $\dot{V}_a(r) \cap D = \varnothing$, что противоречит определению предельной точки. $\square$

Следующее замечание поясняет название "предельная точка".

Замечание 3. Точка a является предельной для множества D тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества D, отличных от a, стремящаяся к a.

Доказательство. Пусть a — предельная точка D. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ в проколотой $\frac{1}{n}$-окрестности a найдется точка x_n множества D. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a, так как $\rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$.

Обратно, если существует последовательность $\{x_n\}$ с перечисленными свойствами, то по определению предела в любой окрестности точки a найдется член этой последовательности (туда попадут даже все члены, начиная с некоторого номера), то есть точка множества D, отличная от a. $\square$

Определение. Если точка a принадлежит множеству D, но не является его предельной точкой, то a называется *изолированной точкой* множества D.

Определение. Множество D называется *замкнутым* (в X), если оно содержит все свои предельные точки.

Примерами замкнутых множеств служат X, $\varnothing$, одноточечное множество, $\overline{B}(a, r)$ (последнее предлагается доказать читателю).

Напомним, что через D^c обозначается дополнение множества D: $D^c = X \setminus D$.

Теорема 2. *Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.*

Доказательство. Пусть D^c замкнуто. Возьмем точку $x \in D$ и докажем, что x — внутренняя точка D; в силу произвольности x это и будет означать, что D открыто. Поскольку $x \notin D^c$, а D^c замкнуто, x не является предельной точкой D^c, то есть существует такая окрестность V_x точки x, что $\dot{V}_x \cap D^c = \varnothing$. Тогда и $V_x \cap D^c = \varnothing$, так как $x \in D$. Но это означает, что $V_x \subset D$, то есть x — внутренняя точка D.

Пусть D открыто. Возьмем точку x, предельную для D^c, и докажем, что $x \in D^c$; в силу произвольности x это и будет означать, что D^c замкнуто. Поскольку в любой окрестности точки x найдется точка D^c, x не является внутренней точкой D, а тогда, в силу открытости D, $x \notin D$, то есть $x \in D^c$. $\square$

Теорему 2 можно, конечно, сформулировать и так: множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Теорема 3. Свойства замкнутых множеств.

1. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

2. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Теорема 3 сразу следует из теоремы 2 и формул

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c \right)^c, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} F_\alpha = \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_\alpha^c \right)^c. \quad \square$$

Замечание 1. Объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не обязано быть замкнутым. Например, множество $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q}$ не замкнуто в $\mathbb{R}$. Ведь так как в любом интервале есть рациональное число, все точки числовой прямой, а не только рациональные, являются предельными для $\mathbb{Q}$.

Определение. Точка a называется *точкой прикосновения* множества D, если в любой окрестности точки a, найдется точка множества D.

Множество всех точек прикосновения множества D называется *замыканием* D и обозначается $\overline{D}$ или $\mathrm{Cl}\,D$.

Замечание 2. Как видно, в определении точки прикосновения не требуется, чтобы с D пересекалась именно проколотая окрестность a, поэтому всякая точка множества D является его точкой прикосновения. Таким образом, множество точек прикосновения D состоит из предельных и изолированных точек D.

Замечание 3. Точка a — точка прикосновения множества D тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества D, стремящаяся к a.

Доказательство. Пусть a — точка прикосновения D. Если $a \in D$, то можно взять стационарную последовательность, все члены которой равны a. Если же $a \notin D$, то a — предельная точка D, и искомая последовательность существует по замечанию 3 к определению предельной точки.

Обратно, если существует последовательность $\{x_n\}$ с перечисленными свойствами, то по определению предела в любой окрестности точки a найдется член этой последовательности (туда попадут даже все члены, начиная с некоторого номера), то есть точка множества D. $\square$

Замечание 4. Замыкание D есть:

а) пересечение всех замкнутых множеств, содержащих D;

б) минимальное по включению замкнутое множество, содержащее D.

Доказательство. Пусть F — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих D. Тогда $D \subset F$, F содержится в любом замкнутом множестве, содержащем D, и F замкнуто по теореме 3, то есть F — минимальное по включению замкнутое множество, содержащее D. Если $x \in \overline{D}$, то есть x — точка прикосновения D, то тем более x — точка прикосновения F, а тогда $x \in F$ в силу замкнутости F. С другой стороны, если $x \notin \overline{D}$, то у точки x существует окрестность V_x, содержащаяся в D^c. Тогда ее дополнение V_x^c замкнуто и содержит D, поэтому $F \subset V_x^c$, то есть $V_x \subset F^c$ и, в частности, $x \notin F$. $\square$

Замечание 5. Множество D замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Это замечание очевидно вытекает из предыдущего.

Определение. Внутренность дополнения множества D называется *внешностью* D и обозначается $\operatorname{Ext} D$.

Точка a называется *граничной точкой* множества D, если в любой окрестности точки a найдется как точка, принадлежащая D, так и точка, не принадлежащая D. Множество всех граничных точек множества D называется *границей* D и обозначается ∂D или $\operatorname{Fr} D$.

Множество всех предельных точек множества D называется *производным множеством* множества D и обозначается D'.

Замечание 6. 1. $\operatorname{Ext} D = (\overline{D})^c$.

2. $\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$.

3. Граница замкнута.

4. Множество D' замкнуто.

Доказательство замечания 6 остается читателю.

Пример. На рисунке 10

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1, y > 0 \text{ или } x = y = 0\}.$$

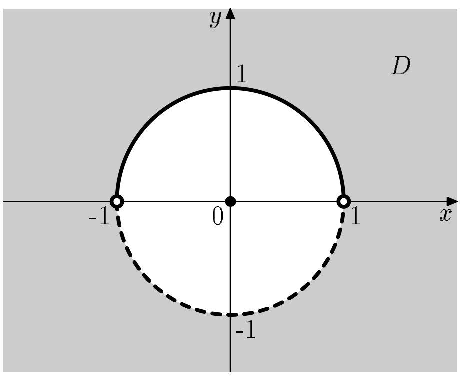

Рис. 10

Для этого множества

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= \{(x,y) : x^2+y^2 \geqslant 1\} \cup \{(0,0)\},\\
\mathring{D} &= \{(x,y) : x^2+y^2 > 1\},\\
\operatorname{Ext} D &= \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\},\\
D' &= \{(x,y) : x^2+y^2 \geqslant 1\},\\
\partial D &= \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\},\\
(0,0) &\text{ — изолированная точка } D.
\end{aligned}$$

Пусть Y — подпространство X, $D \subset Y$. Тогда можно ставить вопрос об открытости (замкнутости) D в X и в Y. Оказывается, что свойство множества D быть открытым (замкнутым) зависит от того, в каком объемлющем пространстве рассматривать множество D. Так, всякое подмножество метрического пространства X открыто и замкнуто в самом себе как подпространстве X. Интервал является открытым подмножеством прямой, но не плоскости, если рассматривать прямую как подпространство плоскости.

Чтобы установить связь между открытостью и замкнутостью в пространстве и подпространстве, запишем, как связаны окрестности:

$$\begin{aligned}
B^X(a,r) &= \{x \in X : \rho(x,a) < r\},\\
B^Y(a,r) &= \{x \in Y : \rho(x,a) < r\},\\
B^Y(a,r) &= B^X(a,r) \cap Y.
\end{aligned}$$

Теорема 4. Открытость и замкнутость в пространстве и подпространстве. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $D \subset Y \subset X$.*

1. *D открыто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество G, открытое в X, что $D = G \cap Y$.*

2. *D замкнуто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество F, замкнутое в X, что $D = F \cap Y$.*

Доказательство. 1. Пусть $D = Y \cap G$, где G открыто в X. Возьмем точку $a \in D$. В силу открытости G в X существует окрестность V_a^X точки a в X: $V_a^X \subset G$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность a в Y и $V_a^Y \subset D$. Значит, a — внутренняя точка D. В силу произвольности a множество D открыто в Y.

Обратно, пусть D открыто в Y. Тогда для каждой точки $a \in D$ найдется ее окрестность в Y, содержащаяся в D: $V_a^Y = B^Y(a, r_a) \subset D$. Обозначим $G = \bigcup\limits_{a \in D} B^X(a, r_a)$. Тогда G открыто в X как объединение открытых в X множеств, и

$$G \cap Y = \bigcup_{a \in D} \left(B^X(a, r_a) \cap Y\right) = \bigcup_{a \in D} B^Y(a, r_a) = D.$$

2. По теореме 2 замкнутость D в Y равносильна открытости $Y \setminus D$ в Y. По доказанному последнее равносильно существованию такого открытого в X множества G, что $Y \setminus D = G \cap Y$. Осталось обозначить $F = G^c$ и учесть, что соотношения $D = F \cap Y$ и $Y \setminus D = G \cap Y$ равносильны.

Замечание 7. Определение предельной точки применимо и когда $X = \mathbb{R}$, $a = (\pm)\infty$ или X — нормированное пространство, $a = \infty$. Так, в $\mathbb{R}$

$$\dot{V}_{+\infty} = (E, +\infty), \ \dot{V}_{-\infty} = (-\infty, -E), \ \dot{V}_{\infty} = (-\infty, -E) \cup (E, +\infty).$$

Замечания 2 и 3 к определению предельной точки остаются в силе, требуются лишь небольшие изменения в доказательствах. Например, если предположить, что в некоторой окрестности $+\infty$ содержится лишь конечное число точек $x_1, \ldots x_N$ множества $D \subset \mathbb{R}$, то в проколотой окрестности $(R, +\infty)$, где $R = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} x_i$, нет точек D. Легко также видеть, что неограниченность D (сверху, снизу) равносильна тому, что ∞ (соответственно, $+\infty$, $-\infty$) — предельная точка D. Это расширение области применения термина “предельная точка” не меняет определения замкнутости: множество D называется замкнутым в X, если оно содержит все свои предельные точки, принадлежащие X.

§ 3. Компактность, принцип выбора, полнота

Пусть отрезок $[a, b]$ покрыт семейством интервалов:

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Оказывается, что тогда отрезок $[a,b]$ можно покрыть конечным набором интервалов из исходного семейства:

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A \quad [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}).$$

Это утверждение называется теоремой Гейне – Бореля. Для промежутков другого типа утверждение неверно. Так,

$$(0,1) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}, 1\right),$$

но интервал $(0,1)$ нельзя покрыть никаким конечным набором интервалов вида $\left(\frac{1}{k}, 1\right)$ $(k-1 \in \mathbb{N})$. Обобщения теоремы Гейне – Бореля приводят к понятию компактности.

Определение. Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется *покрытием* множества K, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$. Покрытие $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ множества K называется *открытым,* если при любом $\alpha \in A$ множество G_α открыто в X.

Определение. Подмножество K метрического пространства X называется *компактным,* если из любого открытого покрытия K можно извлечь конечное подпокрытие:

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}: \ K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ открыты в } X$$

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}.$$

Вообще говоря, это свойство следовало бы назвать компактностью в X, так как если рассмотреть K как подмножество Y, где Y — подпространство X, то определение изменится: в нем вместо множеств, открытых в X, будут участвовать множества, открытые в Y. В частности, можно говорить о компактности K в себе $(Y = K)$. Тем не менее, оказывается, что безразлично, рассматривать покрытия K множествами, открытыми в X или Y: свойство компактности (в отличие от открытости и замкнутости) не зависит от объемлющего пространства.

Лемма 1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, Y — подпространство X, $K \subset Y$. Тогда свойства компактности K в X и Y равносильны.*

Доказательство. Пусть K компактно в X. Возьмем покрытие K множествами V_α, открытыми в Y. По теореме 2.4 $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где множества G_α открыты в X. Множества G_α образуют покрытие K:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Пользуясь компактностью K в X, извлечем из покрытия $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$. Но, поскольку $K \subset Y$,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^{N} V_{\alpha_i}.$$

Итак, из произвольного покрытия K множествами, открытыми в Y, можно извлечь конечное подпокрытие, что и означает компактность K в Y.

Пусть теперь K компактно в Y. Возьмем покрытие K множествами G_α, открытыми в X. Положим $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$; тогда множества V_α открыты в Y и образуют покрытие K. В силу компактности K в Y из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^{N}$. Но тогда $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{N}$ — тоже покрытие K, и компактность K в X доказана. $\square$

Компактное множество называют также *компактным пространством* или *компактом.*

Теорема 1. Простейшие свойства компактов. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.*

1. *Если K компактно, то K замкнуто и ограничено.*
2. *Если X компактно, а K замкнуто, то K компактно.*

Доказательство. 1. Докажем, что K^c открыто. Возьмем точку $a \in K^c$ и докажем, что a — внутренняя точка K^c; в силу произвольности a это и будет означать, что K^c открыто. Для каждой точки $q \in K$ положим

$$r_q = \frac{\rho(q,a)}{2}, \qquad V_q = B(a, r_q), \qquad W_q = B(q, r_q).$$

Тогда $V_q \cap W_q = \varnothing$. Семейство $\{W_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие компакта K. Извлечем из него конечное подпокрытие $\{W_{q_i}\}_{i=1}^N$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N W_{q_i} = W$. Тогда $V = \bigcap\limits_{i=1}^N V_{q_i}$ — окрестность точки a, причем $V \cap W = \varnothing$. Тем более, $V \cap K = \varnothing$, то есть $V \subset K^c$.

Докажем, что K ограничено. Зафиксируем точку $a \in X$ и рассмотрим покрытие множества K открытыми шарами $\{B(a,n)\}_{n=1}^\infty$. В силу компактности K покрывается конечным набором шаров $\{B(a,n_i)\}_{i=1}^N$ и, следовательно, содержится в шаре $B\left(a, \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} n_i\right)$.

2. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие K. Тогда, поскольку K замкнуто, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{K^c\}$ — открытое покрытие X. Пользуясь компактностью X, извлечем из него конечное подпокрытие X: $X = \bigcup\limits_{i=1}^N G_{\alpha_i} \cup K^c$. Но тогда $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ — покрытие K. $\square$

Замечание 1. Далее мы докажем, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ верно обращение первого утверждения теоремы: если множество замкнуто и ограничено, то оно компактно. В произвольном метрическом пространстве это обращение, вообще говоря, неверно.

Следующая лемма служит обобщением аксиомы о вложенных отрезках на многомерный случай и выводится из последней.

Лемма 2. *Пусть $\left\{[a^{(n)}, b^{(n)}]\right\}_{n=1}^\infty$ — последовательность вложенных параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$, то есть*

$$a_k^{(n)} \leqslant a_k^{(n+1)} \leqslant b_k^{(n+1)} \leqslant b_k^{(n)} \text{ при всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } k \in [1:m].$$

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^\infty [a^{(n)}, b^{(n)}] \neq \varnothing$.

Доказательство. При каждом $k \in [1:m]$ имеем последовательность вложенных отрезков $\left\{\left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]\right\}_{n=1}^\infty$. По аксиоме Кантора найдется точка x_k^*, принадлежащая всем отрезкам $\left[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right]$.

Тогла m-мерная точка $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ принадлежит всем параллелепипедам $[a^{(n)}, b^{(n)}]$. $\square$

Лемма 3. *Замкнутый куб в* $\mathbb{R}^m$ *компактен.*

Доказательство. Пусть $I = [a, b]$ — куб в $\mathbb{R}^m$, δ — его диагональ. Допустим, что I не компактен. Обозначим через $\{G_\alpha\}$ такое открытое покрытие I, из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Разделив каждый отрезок $[a_k, b_k]$ пополам, разобьем куб I на 2^m кубов. Среди них найдется тот, который не покрывается никаким конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$ (так как иначе куб I покрывался бы конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$). Обозначим этот куб (если таких кубов несколько — то все равно, какой) через I_1. Продолжая процесс деления и далее, получим последовательность вложенных замкнутых кубов $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ со следующими свойствами:

1) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots,$
2) I_n не покрывается никаким конечным набором множеств из семейства $\{G_\alpha\}$,
3) Если $x, y \in I_n$, то $|x - y| \leqslant \frac{\delta}{2^n}$.

По лемме 2 существует точка x^*, принадлежащая одновременно всем кубам I_n. Следовательно, $x^* \in I$. Тогда x^* принадлежит некоторому элементу покрытия G_{α^*}. Поскольку G_{α^*} открыто, найдется такое $r > 0$, что $B(x^*, r) \subset G_{\alpha^*}$. Так как $\frac{\delta}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, найдется такое n, что $\frac{\delta}{2^n} < r$. По свойству 3) для любой точки $y \in I_n$ будет $|y - x^*| \leqslant \frac{\delta}{2^n} < r$, то есть $I_n \subset B(x^*, r)$. Значит, куб I_n покрывается одним множеством G_{α^*}, что противоречит свойству 2). $\square$

Компактность бывает удобно характеризовать с помощью последовательностей.

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность в множестве X, $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел (то есть $n_k < n_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$). Их композиция ($\{x_n\}$ — внешнее отображение, $\{n_k\}$ — внутреннее) называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Строгое возрастание последовательности индексов $\{n_k\}$ выражает тот факт, что члены подпоследовательности расположены "в том же порядке", что и члены исходной последовательности. Так, последовательности $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ и $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ — подпоследовательности последовательности $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (соответственно, $n_k = 2k$ и $n_k = k^2$), а последовательности $\{1, 1, 2, 3, \ldots\}$ и $\{2, 1, 3, 4, \ldots\}$ — нет.

Замечание 1. Для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ при всех k будет $n_k \geqslant k$. Действительно, $n_1 \geqslant 1$ (база индукции), и из неравенства $n_k \geqslant k$ следует, что $n_{k+1} \geqslant n_k + 1 \geqslant k + 1$ (индукционный переход).

Лемма 4. *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, и притом к тому же пределу: если $\{x_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X, $\{x_{n_k}\}$ — ее подпоследовательность, $a \in X$, $x_n \to a$, то $x_{n_k} \to a$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела существует такой номер N, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда, если $k > N$, то по замечанию 1 и $n_k > N$, а значит, $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. □

Лемма 5. *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X, $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_l}\}$ — ее подпоследовательности, причем объединение множеств их индексов равно $\mathbb{N}$, $a \in X$. Тогда, если $x_{n_k} \to a$, $x_{m_l} \to a$, то и $x_n \to a$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела одной и другой подпоследовательности найдутся такие номера K и L, что

$$\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } k > K, \tag{10}$$

$$\rho(x_{m_l}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } l > L. \tag{11}$$

Положим $N = \max\{n_K, m_L\}$. Если $n > N$, то или n равно некоторому n_k, причем $k > K$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ в силу (10), или n равно некоторому m_l, причем $l > L$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ в силу (11). □

Замечание 2. Леммы 4 и 5 сохраняют силу для $a = \infty$ (в нормированном пространстве) и для $a = \pm\infty$ (для вещественных последовательностей). В доказательстве следует заменить неравенства вида $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ на $|x_n| > E$ и т.п. или воспользоваться языком окрестностей.

Теорема 2. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *K замкнуто и ограничено.*
2. *K компактно.*
3. *Из всякой последовательности точек K можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий K.*

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Поскольку K ограничено, K содержится в некотором замкнутом кубе I. Тогда K замкнуто в I по теореме 2.4, так как $K = K \cap I$ и K замкнуто в $\mathbb{R}^m$. Куб I компактен по лемме 3. По теореме 1 заключаем, что K компактно как замкнутое подмножество компакта.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в K; обозначим через D множество ее значений. Если D конечно, то из $\{x^{(n)}\}$ можно выделить стационарную подпоследовательность, причем ее предел будет совпадать со значением и, значит, принадлежать K.

Содержателен случай, когда D бесконечно. Докажем от противного, что в этом случае в K есть предельная точка D. Если в K нет предельных точек D, то у каждой точки $q \in K$ найдется окрестность V_q, содержащая не более одной точки множества D. Тогда получаем противоречие с компактностью K: $\{V_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие K, из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия не только K, но даже D.

Пусть $a \in K$ — предельная точка D. Тогда найдется номер n_1, для которого $\rho(x^{(n_1)}, a) < 1$. Так как множество $B(a, \frac{1}{2}) \cap D$ бесконечно, найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $\rho(x^{(n_2)}, a) < \frac{1}{2}$. Этот процесс продолжаем неограниченно: на шаге с номером k, поскольку множество $B(a, \frac{1}{k}) \cap D$ бесконечно, найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $\rho(x^{(n_k)}, a) < \frac{1}{k}$. По построению $\{x^{(n_k)}\}$ — подпоследовательность, и $x^{(n_k)} \to a$.

$3 \Rightarrow 1$. Если K не ограничено, то для каждого натурального n найдется такая точка $y^{(n)} \in K$, что $|y^{(n)}| > n$. Последовательность $\{y^{(n)}\}$ стремится к бесконечности, а тогда из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как по лемме 4 любая ее подпоследовательность стремится к бесконечности.

Если же K не замкнуто, то у K есть предельная точка b, не принадлежащая K. Следовательно, существует последовательность точек K, стремящаяся к b. Но тогда по лемме 4 любая ее подпоследовательность также стремится к b и, значит, не имеет предела, принадлежащего K. $\square$

Замечание 1. Утверждение о том, что в $\mathbb{R}^m$ всякое замкнутое ограниченное множество компактно (импликацию $1 \Rightarrow 2$), и его частный случай — лемму 3 — называют **теоремой Гейне – Бореля.**

Замечание 2. Как уже отмечалось, импликация $2 \Rightarrow 1$ верна в любом метрическом пространстве (теорема 1), а $1 \Rightarrow 2$ — не в любом. На самом деле, утверждения 2 и 3 равносильны в любом метрическом пространстве. Доказательство $2 \Rightarrow 3$ сохраняет силу в любом метрическом пространстве. Утверждение $3 \Rightarrow 2$ в общем случае оставим без доказательства. Свойство 3 называется *секвенциальной компактностью* K.

Замечание 3. В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое бесконечное подмножество компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ имеет предельную точку, принадлежащую K. Читателю предлагается убедиться самому, что это свойство множества K равносильно компактности.

Следствие 1. Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса. *Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В силу ограниченности все члены последовательности принадлежат некоторому замкнутому кубу I. Поскольку I компактен, из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий I. $\square$

Следующее замечание дополняет принцип выбора для неограниченных последовательностей.

Замечание 4. *Если вещественная последовательность не ограничена (сверху, снизу), то из нее можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности). Для бесконечности без знака утверждение верно и в нормированном пространстве.*

Доказательство. Для определенности докажем утверждение для $+\infty$. Так как последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, найдется номер n_1, для которого $x_{n_1} > 1$. Далее, найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $x_{n_2} > 2$ (иначе $\{x_n\}$ была бы ограничена сверху числом $\max\{x_1, \ldots, x_{n_1}, 2\}$). Этот процесс продолжаем неограниченно: на шаге с номером k найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $x_{n_k} > k$. По замечанию 7 к определению бесконечного предела $x_{n_k} \to +\infty$. $\square$

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в метрическом пространстве X. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится в себе*, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n и l, больших N, выполняется неравенство $\rho(x_n, x_l) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n, l > N \ \ \rho(x_n, x_l) < \varepsilon.$$

Сходящуюся в себе последовательность также называют *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши.*

Как видно, в определении сходимости в себе требуется, чтобы члены последовательности с достаточно большими номерами были близки не к точке a, а друг к другу.

Лемма 6. 1. *Сходящаяся в себе последовательность ограничена.*

2. *Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.*

Доказательство. 1. Пользуясь сходимостью $\{x_n\}$ в себе, подберем такой номер N, что для всех $n, l > N$ будет $\rho(x_n, x_l) < 1$. В частности, тогда $\rho(x_n, x_{N+1}) < 1$ для всех $n > N$. Пусть $b \in X$. Следовательно, для всех $n > N$ по неравенству треугольника $\rho(x_n, b) < 1 + \rho(x_{N+1}, b)$. Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, b), \ldots, \rho(x_N, b), 1 + \rho(x_{N+1}, b)\};$$

тогда $\rho(x_n, b) \leqslant R$ для всех номеров n.

2. Пусть $\{x_n\}$ сходится в себе, $x_{n_k} \to a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер K, что $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

для всех $k > K$, а по определению сходимости в себе найдется такой номер N, что $\rho(x_n, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, l > N$. Покажем, что найденное N — требуемое для ε из определения предела. Пусть $n > N$. Положим $M = \max\{N+1, K+1\}$; тогда $n_M \geqslant n_{N+1} > n_N \geqslant N$ и, аналогично, $n_M > K$. Следовательно,

$$\rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_M}) + \rho(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и означает, что $x_n \to a$. □

Теорема 3. 1. *Во всяком метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность сходится в себе.*

2. *В $\mathbb{R}^m$ любая сходящаяся в себе последовательность сходится.*

Доказательство. 1. Обозначим $\lim x_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n, m > N$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и значит, что $\{x_n\}$ сходится в себе.

2. Пусть $\{x^{(n)}\}$ — сходящаяся в себе последовательность в $\mathbb{R}^m$. По пункту 1 леммы 6 она ограничена. По принципу выбора Больцано – Вейерштрасса из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а тогда по пункту 2 леммы 6 она сама сходится. □

Определение. Если в метрическом пространстве X любая сходящаяся в себе последовательность сходится, то пространство X называется *полным.*

Замечание 1. Второе утверждение теоремы 3 можно сформулировать так: *пространство $\mathbb{R}^m$ полно.*

Примером неполного пространства служит $\mathbb{Q}$ как подпространство $\mathbb{R}$. В самом деле, если взять последовательность рациональных чисел, стремящуюся к иррациональному числу (например, последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$), то она будет сходиться в себе, но не будет иметь предела в $\mathbb{Q}$.

Замечание 2. Утверждение о том, что в $\mathbb{R}^m$ сходимость и сходимость в себе равносильны, называют **критерием Больцано – Коши** сходимости последовательности. Сформулируем его еще раз.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для всех номеров n и l, больших N, выполняется неравенство $|x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, l > N \quad |x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon.$$

Критерий Больцано – Коши бывает удобен тем, что позволяет доказывать существование предела последовательности, не используя само значение предела.

§ 4. Точные границы числовых множеств и монотонные последовательности

В этом параграфе рассматриваются вещественные последовательности.

Говорят, что $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность *стягивающихся* отрезков, если $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ при всех n и $b_n - a_n \to 0$.

Теорема 1. О стягивающихся отрезках.
Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность стягивающихся отрезков. Тогда пересечение всех отрезков $[a_n, b_n]$ состоит из одной точки, то есть

$$\exists c \in \mathbb{R}: \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\};$$

при этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Доказательство. То, что пересечение непусто, следует из аксиомы о вложенных отрезках. Пусть $c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что $c = d$. Поскольку $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ и $a_n \leqslant d \leqslant b_n$, имеем

$$a_n - b_n \leqslant c - d \leqslant b_n - a_n.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве $0 \leqslant c - d \leqslant 0$, то есть $c = d$. Так как

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n, \qquad 0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n,$$

по теореме о сжатой последовательности $a_n \to c$ и $b_n \to c$. $\square$

Напомним, что множество $E \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число M, что $x \leqslant M$ для всех $x \in E$. Число M при этом называется верхней границей множества E.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множества E называется *точной верхней границей,* или *верхней гранью,* или *супремумом* множества E и обозначается $\sup E$.

Аналогично определяется точная нижняя граница.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множества E называется *точной нижней границей,* или *нижней гранью,* или *инфимумом* множества E и обозначается $\inf E$.

Замечание 1. Можно записать определение верхней и нижней грани с помощью неравенств:

$$b = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \leqslant b, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E : \quad x > b - \varepsilon; \end{cases}$$
$$a = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E \quad x \geqslant a, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E : \quad x < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Действительно, в определении супремума первая строчка означает, что b — верхняя граница E, а вторая — что никакое число, меньшее b, не является верхней границей E.

Ясно, что если в множестве E есть наибольший элемент (максимум), то он и будет верхней гранью E. Если же в множестве E нет наибольшего элемента, то существование верхней грани требует доказательства. Аналогично положение дел с нижней гранью.

Теорема 2. Существование верхней и нижней грани. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество* $\mathbb{R}$ *имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Для определенности докажем теорему для ограниченного сверху множества; для ограниченного снизу множества доказательство аналогично. По условию существует точка $x_0 \in E$ и M — верхняя граница E, $x_0 \leqslant M$. Обозначим $[a_1, b_1] = [x_0, M]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $[a_1, b_1] \cap E \neq \varnothing$,
2) $(b_1, +\infty) \cap E = \varnothing$.

Рассмотрим середину отрезка $[a_1, b_1]$ — точку $\frac{a_1+b_1}{2}$. Положим $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, если $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] \cap E = \varnothing$, и $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, если $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] \cap E \neq \varnothing$. В обоих случаях

1) $[a_2, b_2] \cap E \neq \varnothing$,
2) $(b_2, +\infty) \cap E = \varnothing$.

Далее рассмотрим середину отрезка $[a_2, b_2]$, и этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, для которых:

1) $[a_n, b_n] \cap E \neq \varnothing$,
2) $(b_n, +\infty) \cap E = \varnothing$.

При этом отрезки стягивающиеся: $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, причем $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Проверим, что $c = \sup E$. Если $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, то $x \leqslant b_n$ по свойству 2). По теореме о предельном переходе в неравенстве $x \leqslant c$, то есть c — верхняя граница E. Возьмем $\varepsilon > 0$ и докажем, что $c - \varepsilon$ не является верхней границей E. Так как $a_n \to c$, найдется номер N, для которого $a_N > c - \varepsilon$ (по определению предела, начиная с некоторого номера, даже все a_n будут удовлетворять этому неравенству). По свойству 1) найдется точка $x \in [a_N, b_N] \cap E$, а тогда $x > c - \varepsilon$. $\square$

Замечание 2. Если множество E не ограничено сверху, то полагают $\sup E = +\infty$, а если множество E не ограничено снизу, то полагают $\inf E = -\infty$. При этом определении супремум и инфимум в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют у любого непустого множества. Ограниченность E сверху (снизу) равносильна неравенству $\sup E < +\infty$ ($\inf E > -\infty$).

Для пустого множества любое число служит верхней границей и, таким образом, множество верхних границ не ограничено снизу. Поэтому логично положить $\sup\varnothing = -\infty$. По таким же причинам полагают $\inf\varnothing = +\infty$. Это соглашение приводит к несколько странному неравенству $\sup\varnothing < \inf\varnothing$, поэтому иногда, желая его избежать, грани пустого множества не определяют вовсе.

Замечание 3. *Если $D \subset E \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$, то $\sup D \leqslant \sup E$, а $\inf D \geqslant \inf E$.*

Доказательство. Докажем неравенство для верхних граней; для нижних граней доказательство аналогично. Если $\sup E = +\infty$, то неравенство тривиально. Пусть $\sup E < +\infty$. Если $x \in D$, то $x \in E$ и, следовательно, $x \leqslant \sup E$, то есть $\sup E$ — какая-то верхняя граница множества D. Но $\sup D$ — наименьшая верхняя граница D, поэтому $\sup D \leqslant \sup E$. $\square$

Для $E, F \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\},$$
$$-E = \{-x : x \in E\}, \qquad tE = \{tx : x \in E\}.$$

Замечание 4. *Если $E, F \subset \mathbb{R}$, $E, F \neq \varnothing$, $t > 0$, то*

$$\sup(E+F) = \sup E + \sup F, \qquad \inf(E+F) = \inf E + \inf F,$$
$$\sup(tE) = t\sup E, \qquad \inf(tE) = t\inf E,$$
$$\sup(-E) = -\inf E, \qquad \inf(-E) = -\sup E.$$

Эти равенства читатель легко докажет самостоятельно.

Определение. Если вещественнозначная функция f задана по крайней мере на множестве D, то под супремумом (инфимумом) функции f на множестве D понимают супремум (инфимум) образа D:

$$\sup_{x\in D} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D\} = \sup f(D),$$
$$\inf_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D\} = \inf f(D).$$

В частности, речь может идти о гранях последовательности. Аналогично определяются максимум и минимум (наибольшее и наименьшее значение) функции на множестве. При этом немую переменую иногда опускают и, например, наравне с $\sup\limits_{x \in D} f(x)$ пишут $\sup\limits_{D} f$.

Функция называется *ограниченной* (сверху, снизу) на множестве D, если множество $f(D)$ ограничено (сверху, снизу). Понятие ограниченности имеет смысл для отображений со значениями в метрическом пространстве.

Определение. Пусть $D \subset X \subset \mathbb{R}$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется:

возрастающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

строго возрастающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) < f(x_2)$;

убывающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

строго убывающей на множестве D, если для любых x_1, x_2 из D, таких что $x_1 < x_2$, будет $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными*.

Иногда функции, которые только что были названы возрастающими (убывающими), называют неубывающими (невозрастающими), а те, что были названы строго возрастающими (строго убывающими), называют возрастающими (убывающими). Какой терминологией пользоваться — дело вкуса; мы в курсе будем придерживаться первоначально сформулированных определений.

Сформулируем отдельно частный случай этого определения для последовательностей.

Определение. Вещественная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется:

возрастающей, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

строго возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

убывающей, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

строго убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Легко видеть с помощью индукции, что для последовательностей эти определения равносильны предыдущим. Например, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n, то $x_n \leqslant x_m$ для всех n, m: $n < m$.

Когда говорят, что функция ограничена (возрастает, положительна и т.п.) без указания множества, то имеют в виду, что функция обладает указанным свойством на области определения.

Теорема 3. Предел монотонной последовательности.

1. *Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

2. *Всякая убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.*

3. *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме 2 существует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = c \in \mathbb{R}$. Докажем, что $c = \lim x_n$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению супремума (так как $c - \varepsilon$ не является верхней границей последовательности) найдется такой номер N, что $x_N > c - \varepsilon$. В силу возрастания последовательности при любом $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$. Снова по определению супремума $x_n \leqslant c$ при всех n. Итак, для любого $n > N$

$$c - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant c < c + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это значит, что $c = \lim x_n$.

Второе утверждение доказывается аналогично, третье следует из первых двух. □

Замечание 1. *Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к плюс бесконечности. Если последовательность убывает и не ограничена снизу, то она стремится к минус бесконечности.*

Доказательство проведем для возрастающей последовательности $\{x_n\}$. Возьмем $E > 0$. Так как $\{x_n\}$ не ограничена сверху, найдется такой номер N, что $x_N > E$. Тогда для любого номера $n > N$ в силу возрастания последовательности тем более $x_n > E$. $\square$

Замечание 2. Доказано, что *любая монотонная последовательность имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$, конечный или бесконечный. При этом *для всякой возрастающей последовательности*

$$\lim x_n = \sup x_n,$$

а для всякой убывающей последовательности

$$\lim x_n = \inf x_n.$$

Лемма 1. Неравенство Я. Бернулли. *Если* $n \in \mathbb{Z}_+$, $x > -1$, *то*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ (база индукции) неравенство, очевидно, обращается в верное равенство. Сделаем индукционный переход: пусть неравенство верно для номера n. Тогда

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x. \qquad \square\end{aligned}$$

Читателю предлагается доказать, что при $n \geqslant 2$ и $x \neq 0$ неравенство Я. Бернулли строгое.

Пример 1. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$. В самом деле, последовательность $\{|z|^n\}$ убывает и ограничена снизу нулем. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = a$. Перейдя в равенстве $|z|^{n+1} = |z||z|^n$ к пределу, получим $a = |z|a$ или $(1 - |z|)a = 0$. Отсюда $a = 0$, поскольку $|z| < 1$. Таким образом, $|z|^n \to 0$, что равносильно $z^n \to 0$.

Если $|z| > 1$, то $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. По доказанному $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z^n} = 0$, а тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$ по лемме 4 § 1. Если $z = 1$, то очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 1$. При $z = -1$ было доказано, что последовательность $\{z^n\}$ не имеет предела. Читателю предлагается доказать, что при всех $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$, $z \neq 1$ последовательность $\{z^n\}$ не имеет предела.

Пример 2. Число e. Докажем, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Положим $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ясно, что последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу единицей. Кроме того, $\{y_n\}$ убывает:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\frac{n-1}{n} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\frac{n-1}{n} \geqslant \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)\frac{n-1}{n} = 1$$

(мы воспользовались неравенством Бернулли). Следовательно, $\{y_n\}$ сходится, а тогда по теореме о пределе частного и $x_n = \frac{y_n}{1+1/n}$ сходится к тому же пределу.

Определение. Предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ называют *числом Непера* или *основанием натуральных логарифмов* и обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Впоследствии мы докажем, что число e иррационально (более того, оно трансцендентно, то есть не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами), и укажем способ его вычисления с любой точностью. Пока отметим без доказательства, что

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Теорему о пределе монотонной последовательности удобно применять для нахождения пределов последовательностей, заданных рекуррентно, то есть с помощью выражения n-го члена последовательности через предыдущие.

Пример 3. Формула Герона. Пусть $a > 0$, $x_0 > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Ясно, что $x_n > 0$ при всех n и, значит, $\{x_n\}$ ограничена снизу. Воспользовавшись очевидным неравенством

$$t + \frac{1}{t} \geqslant 2, \qquad t > 0,$$

получим, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}.$$

Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant x_n,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ убывает. Следовательно, она сходится; обозначим $\lim x_n = \beta$. Перейдя к пределу в равенстве (12), получим

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{a}{\beta}\right),$$

откуда $\beta = \sqrt{a}$, так как $\beta \geqslant 0$.

Равенство $\lim x_n = \sqrt{a}$ называется формулой Герона и используется для приближенного вычисления значений корня.

Замечание 3. *Пусть $x_n > 0$ при всех n, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.*

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \qquad && a > 1,\ k \in \mathbb{N},\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad && a \in \mathbb{R},\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.
\end{aligned}$$

Доказательство самого утверждения и его приложений остается читателю в качестве упражнения.

Определение. Точка a называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к a.

Говоря о вещественных последовательностях, мы имеем в виду их частичные пределы в $\overline{\mathbb{R}}$. Ясно, что предел последовательности является ее частичным пределом. Числа 1 и -1 — частичные пределы последовательности $x_n = (-1)^n$, так как $x_{2k} \to 1$, $x_{2k+1} \to -1$.

Определение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Величина

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$$

называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Величина

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$$

называется *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 1. Последовательности $z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$ и $y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$ иногда называют *верхней и нижней огибающими* последовательности $\{x_n\}$.

Если $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $z_n = +\infty$ при всех n, и поэтому полагают $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. По таким же причинам, если $\{x_n\}$ не ограничена снизу, полагают $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$.

Замечание 2. *Верхний и нижний пределы вещественной последовательности $\{x_n\}$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, причем $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху и снизу. Так как при переходе к подмножеству супремум не увеличивается, а инфимум не уменьшается, $\{y_n\}$ возрастает, а $\{z_n\}$ убывает. При всех n

$$y_1 \leqslant y_n \leqslant z_n \leqslant z_1.$$

По теореме о пределе монотонной последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то есть существуют конечные пределы $\lim y_n = \underline{\lim}\, x_n$ и $\lim z_n = \overline{\lim}\, x_n$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$.

Если $\{x_n\}$ ограничена сверху, но не снизу, то $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, а последовательность $\{z_n\}$ убывает. Поэтому существует

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim z_n \in [-\infty, +\infty).$$

Если $\{x_n\}$ ограничена снизу, но не сверху, то $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, а последовательность $\{y_n\}$ возрастает, поэтому существует

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim y_n \in (-\infty, +\infty].$$

Если $\{x_n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу, то по определению $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. $\square$

Теорема 4. О верхнем и нижнем пределе последовательности. *Пусть $\{x_n\}$ — вещественная последовательность. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Верхний предел — наибольший, а нижний предел — наименьший из частичных пределов $\{x_n\}$.*

2. *Предел $\{x_n\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. При этом $\lim x_n$ равен их общему значению.*

Доказательство. I. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху, и снизу.

1. Обозначим $b = \overline{\lim}\, x_n$. Докажем, что b — частичный предел $\{x_n\}$, для чего построим подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, стремящуюся к b. При всех n будет $z_n \geqslant b$. Поскольку

$$z_1 = \sup\{x_1, x_2, \ldots\} > b - 1,$$

найдется номер n_1, для которого $x_{n_1} > b - 1$. Поскольку

$$z_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots\} > b - \frac{1}{2},$$

найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $x_{n_2} > b - \frac{1}{2}$. Этот процесс продолжается неограниченно: на k-м шаге, когда номер n_{k-1} уже выбран, поскольку

$$z_{n_{k-1}+1} = \sup\{x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \ldots\} > b - \frac{1}{k},$$

найдется номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $x_{n_k} > b - \frac{1}{k}$. Таким образом, построена подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, члены которой удовлетворяют неравенству

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant z_{n_k}.$$

Подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{z_n\}$, стремящейся к b, тоже стремится к b. По теореме о сжатой последовательности и $x_{n_k} \to b$.

Если $\{x_{m_l}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$, $x_{m_l} \to \beta$, то, сделав предельный переход в неравенстве $x_{m_l} \leqslant z_{m_l}$, получим, что $\beta \leqslant b$, то есть b — наибольший частичный предел $\{x_n\}$.

Аналогично доказывается, что $\varliminf x_n$ — наименьший частичный предел $\{x_n\}$.

2. По определению y_n и z_n при всех n будет

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n.$$

Если $\varliminf x_n = \varlimsup x_n$, то по теореме о сжатой последовательности существует $\lim x_n$ и $\lim x_n = \varliminf x_n = \varlimsup x_n$.

Если же существует $\lim x_n$, то все частичные пределы и, в частности, верхний и нижний предел, с ним совпадают.

II. Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху, но не снизу. Тогда по определению $\varliminf x_n = -\infty$. По замечанию 2 к принципу выбора из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$, то есть $-\infty$ — частичный предел $\{x_n\}$. Разумеется, $-\infty$ меньше любого другого частичного предела, если они есть. То, что $\varlimsup x_n$ — наибольший частичный предел $\{x_n\}$, доказывается, как в части I. Если $\varliminf x_n = \varlimsup x_n$, то есть $z_n \to -\infty$, то и $x_n \to -\infty$, так как $x_n \leqslant z_n$. Обратно, если $\lim x_n = -\infty$, то и $\varlimsup x_n = -\infty$ как частичный предел.

Случай, когда $\{x_n\}$ ограничена снизу, но не сверху, разбирается аналогично.

III. Если $\{x_n\}$ не ограничена ни сверху, ни снизу, то первое утверждение теоремы очевидно, а второе не реализуется. $\square$

Замечание 3. Теорема 4 дает другое доказательство принципа выбора Больцано – Вейерштрасса в одномерном случае.

Замечание 4. Читателю предлагается доказать следующую характеристику верхнего и нижнего предела с помощью неравенств:

$$b = \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n < b + \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n > N \;\; x_n > b - \varepsilon; \end{cases}$$

$$a = \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; x_n > a - \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n > N \;\; x_n < a + \varepsilon. \end{cases}$$

ГЛАВА 3. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. Предел отображения

Определение. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f\colon D \subset X \to Y$, $a \in X$ — предельная точка D, $A \in Y$. Точку A называют *пределом* отображения f в точке a и пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A,$$

если выполняется одно из следующих утверждений.

1. Определение на ε-языке, или по Коши.

Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, a) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{a\}: \;\; \rho_X(x, a) < \delta \;\; \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon.$$

2. Определение на языке окрестностей.

Для любой окрестности V_A точки A существует такая окрестность V_a точки a, что образ пересечения проколотой окрестности $\dot{V}_a$ с множеством D при отображении f содержится в окрестности V_A:

$$\forall V_A \;\; \exists V_a \;\; f\big(\dot{V}_a \cap D\big) \subset V_A.$$

3. Определение на языке последовательностей, или по Гейне.

Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества D, отличных от a, стремящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к A:

$$\forall \{x_n\}: \;\; x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a \;\; f(x_n) \to A.$$

Говорят также: "$f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к a". Переменная x в обозначении предела "немая", поэтому ее можно заменить любой другой буквой или опустить и писать $\lim\limits_{a} f$.

Дадим отдельно определение на ε-языке в частном случае функции вещественной переменной.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$. Число A называют *пределом* функции f в точке a и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A,$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : x \neq a, |x-a| < \delta \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Из условия, что a — предельная точка D, следует, что $\dot{V}_a \cap D \neq \varnothing$ для любой окрестности точки a, и что существует последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$.

Замечание 2. Если два отображения $f, g\colon D \to Y$ совпадают на множестве $\dot{U}_a \cap D$, где U_a — какая-нибудь окрестность точки a, и $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, то также и $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$. Действительно, если окрестность V_a подходит для V_A в определении предела на языке окрестностей для f, то окрестность $V_a \cap U_a$ подходит для V_A в определении предела для g.

Таким образом, существование предела отображения в точке a — *локальное* свойство: оно зависит от поведения отображения в любой наперед заданной окрестности точки a.

Замечание 3. Если существует такая окрестность U_a точки a, что $\dot{U}_a \subset D$, то условие $x \in D$ в определении на ε-языке и условие $x_n \in D$ в определении на языке последовательностей можно опустить, а в определении на языке окрестностей писать $f(\dot{V}_a)$ вместо $f(\dot{V}_a \cap D)$.

В самом деле, если $V_a \subset U_a$, то $\dot{V}_a \cap D = \dot{V}_a$, а если $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, то, начиная с некоторого номера, $x_n \in \dot{U}_a$ и, значит, $x_n \in D$.

Замечание 4. Значение отображения f в точке a не участвует в определении предела в точке a. Поэтому для существования и значения предела в точке a несущественно, задано ли отображение f в точке a и, если задано, то как именно.

Замечание 5. Определение предела легко обобщается на случаи, когда a и (или) A равны $+\infty$, $-\infty$ или ∞. Если a (соответственно, A) равно $\pm\infty$, то мы должны считать, что $X = \mathbb{R}$ (соответственно, $Y = \mathbb{R}$). В случае $a = \infty$ ($A = \infty$) будем требовать, чтобы X (Y) было нормированным пространством (в частности, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^m$). Требование, что a — предельная точка D, сохраняется и если $a = (\pm)\infty$.

Определение на языке окрестностей вообще не меняется. Определение на языке последовательностей не меняется, за исключением того, что незачем писать $x \neq (\pm)\infty$. Определение на ε-языке записывается в этих случаях по-разному. Приведем три примера (для функций вещественной переменной), воспользовавшись логической символикой.

1. Говорят, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, если

$$\forall E > 0 \;\; \exists \Delta > 0 \;\; \forall x \in D : x > \Delta \;\; |f(x)| > E.$$

2. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$), если

$$\forall E > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \;\; f(x) < -E.$$

3. Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta > 0 \;\; \forall x \in D : |x| > \Delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самому сформулировать определения в остальных случаях.

Замечание 6. Если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек со свойствами из определения Гейне ($x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$) последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел, то все эти пределы равны между собой и, таким образом, отображение имеет предел в точке a.

Действительно, пусть $x_n, y_n \in D \setminus \{a\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$. Построим новую последовательность $\{z_n\}$: $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$. Тогда $z_n \in D \setminus \{a\}$, $z_n \to a$. Поэтому $f(z_n)$ стремится к некоторому пределу C. Отсюда $A = B = C$ как пределы подпоследовательностей последовательности, имеющей предел.

Таким образом, при доказательстве существования предела отображения в точке на языке последовательностей достаточно проверить лишь существование всех пределов $\{f(x_n)\}$, где $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, а их равенство можно не проверять.

Замечание 7. Понятие предела последовательности, обсуждавшееся во второй главе, — частный случай понятия предела отображения. В самом деле, для последовательности множество D есть $\mathbb{N}$, а $+\infty$ (∞) — предельная точка $\mathbb{N}$ (в записи $n \to \infty$ по традиции опускают знак плюс перед бесконечностью).

Типичный случай, когда ставится вопрос о пределе функции: функция задана по крайней мере в проколотой окрестности точки a или на промежутке вида $\langle c, a)$ или $(a, b\rangle$.

Равносильность определений предела на ε-языке и на языке окрестностей очевидна: во втором записано то же, что и в первом, только с помощью других обозначений. Определение на языке последовательностей сводит новое понятие предела отображения к уже определенному понятию предела последовательности. Равносильность определений предела на ε-языке и на языке последовательностей требует отдельного доказательства.

Теорема 1. *Определения предела отображения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Для определенности докажем теорему при $a \in X$, $A \in Y$, оставив случаи бесконечного предела и предела в бесконечно удаленной точке читателю в качестве упраженния.

1. Пусть A — предел отображения f в точке a по Коши; докажем, что тогда A — предел f и по Гейне. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами из определения Гейне: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Требуется доказать, что $f(x_n) \to A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению Коши подберем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, для которых $x \neq a$ и $\rho_X(x, a) < \delta$, будет $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$. По определе-

нию предела последовательности $\{x_n\}$ для числа δ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ верно неравенство $\rho_X(x_n, a) < \delta$. Но тогда $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$ для всех $n > N$. В силу произвольности ε это значит, что $f(x_n) \to A$.

2. Пусть A — предел отображения f в точке a по Гейне; докажем, что тогда A — предел f и по Коши. Предположим противное: пусть A не есть предел по Коши. Записывая отрицание определения Коши, получаем, что найдется такое число $\varepsilon^* > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует x (зависящее от δ) со свойствами:

$$x \in D, \quad x \neq a, \quad \rho_X(x, a) < \delta, \quad \rho_Y(f(x), A) \geqslant \varepsilon^*.$$

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ по числу $\delta = \frac{1}{n}$ найдется такая точка x_n, что

$$x_n \in D, \quad x_n \neq a, \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \quad \rho_Y(f(x_n), A) \geqslant \varepsilon^*.$$

По теореме о сжатой последовательности построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a, так как

$$0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}.$$

Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$. По определению предела последовательности $\{f(x_n)\}$ для числа ε^* найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon^*$, что противоречит построению. $\square$

Установленная равносильность различных определений предела отображения позволяет выбирать наиболее удобный способ доказательства теорем о пределах. Как правило, эти теоремы могут быть доказаны двумя способами: повторением рассуждений, которыми доказывались аналогичные теоремы для предела последовательности, или сведением к уже доказанным теоремам для предела последовательности с помощью определения Гейне. Чаще мы будем пользоваться вторым приемом.

Теорема 2. Единственность предела отображения. *Отображение в данной точке не может иметь более одного предела: если X и Y — метрические пространства, $f\colon D \subset X \to Y$,*

a — предельная точка D, $A, B \in Y$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$, то $A = B$.

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \in D$, $x_n \ne a$, $x_n \to a$. По определению Гейне $f(x_n) \to A$ и $f(x_n) \to B$. По единственности предела последовательности $A = B$. $\square$

Замечание 1. Если $Y = \mathbb{R}$, то, как и для последовательностей, в теореме 2 можно считать, что $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ (функция не может одновременно стремиться к числу и к бесконечности или к бесконечностям разных знаков). В то же время, если $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, то $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$.

Теорема 3. Локальная ограниченность отображения, имеющего предел. *Пусть X и Y — метрические пространства, $f\colon D \subset X \to Y$, a — предельная точка D, $A \in Y$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$. Тогда существует такая окрестность V_a точки a, что f ограничено в $V_a \cap D$ (то есть $f(V_a \cap D)$ содержится в некотором шаре пространства Y).*

Доказательство. Возьмем окрестность $V_A = B(A, 1)$. По определению предела на языке окрестностей найдется такая окрестность V_a точки a, что $f(\dot{V}_a \cap D) \subset B(A, 1)$. Если $a \notin D$, то на этом доказательство заканчивается, так как $\dot{V}_a \cap D = V_a \cap D$. Если же $a \in D$, то

$$f(V_a \cap D) \subset B(A, R), \text{ где } R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\}. \quad \square$$

Замечание 2. Отображение, имеющее предел в некоторой точке (и даже во всех точках своей области определения), не обязано быть ограниченным. Таковы, например, функции $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) и $g(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Поэтому в названии теоремы присутствует слово “локальная”.

Замечание 3. Если X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство с нулем θ, $D \subset X$, a — предельная точка D, $g\colon D \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $B \ne \theta$, то существует такая окрестность V_a, что $g(x) \ne \theta$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$.

Доказательство. Пусть не так: тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in \dot{V}_a(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) = \theta$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. По определению предела $g(x_n) \to B$, откуда $B = \theta$, что противоречит условию. □

Теорема 4. Арифметические действия над отображениями, имеющими предел. *Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X$, $f, g\colon D \to Y$, $\lambda\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), a — предельная точка D, $A, B \in Y$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$, $\lambda(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda_0$. Тогда*

1. $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$;
2. $\lambda(x)f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda_0 A$;
3. $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A - B$;
4. $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \|A\|$.

Теорема 4′. Арифметические действия над функциями, имеющими предел. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g\colon D \subset X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), a — предельная точка D, $A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$. Тогда*

1. $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$;
2. $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} AB$;
3. $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A - B$;
4. $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |A|$;
5. *Если, кроме того, $B \neq 0$, то* $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{A}{B}$.

Доказательство. С помощью определения на языке последовательностей теоремы 4 и 4′ сводятся к теоремам 5 и 5′ из § 1 главы 2. Докажем, например, первое утверждение. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о пределе суммы для последовательностей $f(x_n) + g(x_n) \to A + B$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и значит, что $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A + B$. При доказательстве утверждения о пределе частного следует еще учесть, что по замечанию 3 существует такая окрестность V_a, что частное $\frac{f}{g}$ определено по крайней мере на множестве $\dot{V}_a \cap D$. $\square$

Замечание 4. Теорема $4'$ верна и для бесконечных пределов, за исключением случаев неопределенности вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. При доказательстве нужно сослаться на теорему 6 § 1 главы 2.

Замечание 5. Определение бесконечно малой и бесконечно большой переносится на функции (и отображения со значениями в нормированном пространстве). Так, функция, стремящаяся к нулю в точке a, называется *бесконечно малой* в точке a. Утверждения о том, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, и о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми сохраняют силу.

Следующие теоремы относятся к вещественнозначным функциям.

Теорема 5. Предельный переход в неравенстве для функций. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g\colon D \subset X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$, $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} B$. Тогда $A \leqslant B$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей $A \leqslant B$. $\square$

Теорема 6. О сжатой функции. *Пусть X — метрическое пространство, $f, g, h\colon D \subset X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$, $h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$. Тогда и $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$. Кроме того, по условию для всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

По теореме о сжатой последовательности $g(x_n) \to A$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и значит, что $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$. $\square$

Замечание 1. Аналогично доказывается, что если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in D \setminus \{a\}$ и $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ($g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$), то и $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ($f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$).

Замечание 2. В теоремах 5 и 6 и замечании 1 достаточно выполнения неравенств на множестве $\dot{V}_a \cap D$, где V_a — какая-нибудь окрестность точки a.

Пусть $f\colon D \subset X \to Y$, $D_1 \subset D$, a — предельная точка D_1 (а следовательно, и D). Тогда, если предел f в точке a существует и равен A, то предел сужения f на D_1 в точке a также существует и равен A. В самом деле, если соотношение $f(x) \in V_A$ выполняется для всех x из $\dot{V}_a \cap D$, то оно тем более выполняется для всех x из $\dot{V}_a \cap D_1$. Однако, возможна ситуация, когда предел сужения существует, а предел исходного отображения — нет.

Определение. Пусть $f\colon D \subset X \to Y$, $D_1 \subset D$, a — предельная точка D_1. Предел $\lim\limits_{x\to a} f\big|_{D_1}(x)$ называется *пределом* отображения f в точке a *по множеству* D_1.

Один типичный случай предела по множеству — предел по кривой на плоскости или в трехмерном (в n-мерном) пространстве. Предел подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ также можно рассматривать как частный случай предела по множеству (а именно, по множеству значений последовательности индексов $\{n_k\}$). Третий типичный случай — односторонний предел отображения, заданного на подмножестве $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to Y$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Если a — предельная точка множества $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, то предел отображения f в точке a по множеству D_1 называется *левосторонним пределом* отображения f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ или $f(a-)$.

2. Если a — предельная точка множества $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, то предел отображения f в точке a по множеству D_2 называется *правосторонним пределом* отображения f в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $f(a+)$.

Вместо $a\pm$ в обозначениях односторонних пределов иногда пишут $a \pm 0$; выражение $a \pm 0$ следует рассматривать как единое обозначение, а не сложение (вычитание).

Запишем определение левостороннего предела на разных языках. Равенство $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ $(A \in Y)$ означает, что:

1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < a - x < \delta \;\; \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$;

2) $\forall V_A \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : 0 < a - x < \delta \;\; f(x) \in V_A$;

3) $\forall \{x_n\} : \; x_n \in D, x_n < a, x_n \to a \;\; f(x_n) \to A$.

В определении правостороннего предела следует написать соответственно $0 < x - a < \delta$ и $x_n > a$. В записи на языке окрестностей можно ввести специальные обозначения для левой и правой окрестности и проколотой окрестности точки a (промежутков $(a-\delta, a]$, $[a, a+\delta)$, $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$), но мы не будем ими пользоваться. Под левосторонним пределом в точке $+\infty$ и правосторонним пределом в точке $-\infty$ понимают обычный предел в этих точках.

Замечание 1. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to Y$, $a \in \mathbb{R}$, $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, a — предельная точка D_1 и D_2. Тогда для существования предела f в точке a необходимо и достаточно, чтобы односторонние пределы f в точке a существовали и были равны друг другу.

Доказательство. Ясно, что если предел существует, то односторонние пределы существуют и равны ему. Обратно, если односторонние пределы существуют и равны A, то для любой окрестности точки A найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что соотношение $f(x) \in V_A$ выполняется для всех $x \in D$: $0 < a - x < \delta_1$ и для всех $x \in D$: $0 < x - a < \delta_2$. Тогда оно выполняется для всех $x \in D$: $0 < |x - a| < \delta$, где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\square$

В условиях замечания 1 предел отображения f в точке a называют двусторонним, в отличие от односторонних пределов. Типичный случай, когда выполняются условия замечания: отображение задано по крайней мере в проколотой окрестности точки a.

Теорема 7. О пределе монотонной функции. *Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (-\infty, +\infty]$, $D_1 = D \cap (-\infty, a)$, a — предельная точка D_1.*

1. *Если f возрастает и ограничена сверху на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$.*

2. *Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение; второе доказывается аналогично. Положим $A = \sup\limits_{x \in D_1} f(x)$; тогда $A \in \mathbb{R}$ в силу ограниченности функции сверху. Докажем, что $f(a-) = A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению верхней грани существует такая точка $x_0 \in D_1$, что $f(x_0) > A - \varepsilon$. Но тогда для всех таких $x \in D_1$, что $x > x_0$, в силу возрастания f

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A < A + \varepsilon.$$

Теперь положим $\delta = a - x_0$ при $a \in \mathbb{R}$ или $\Delta = \max\{x_0, 1\}$ при $a = +\infty$; тогда неравенство из определения предела выполнено для всех таких $x \in D$, что $0 < a - x < \delta$ (соответственно, $x > \Delta$). $\square$

Замечание 2. Аналогично утверждениям 1 и 2 теоремы доказываются следующие утверждения.

3. *Если f возрастает и не ограничена сверху на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $+\infty$.*

4. *Если f убывает и не ограничена снизу на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $-\infty$.*

Замечание 3. Сформулируем аналогичную теорему для правостороннего предела.

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, +\infty)$, $D_2 = D \cap (a, +\infty)$, a — предельная точка D_2.

1. *Если f возрастает и ограничена снизу на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.*

2. *Если f убывает и ограничена сверху на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.*

3. *Если f возрастает и не ограничена снизу на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $-\infty$.*

4. *Если f убывает и не ограничена сверху на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $+\infty$.*

Чаще всего встречаются случаи, когда функция f задана по крайней мере на промежутке вида $\langle c, a)$ или $(a, b\rangle$.

Теорема 8. Критерий Больцано – Коши для отображений. *Пусть X и Y — метрические пространства, Y полно, $f\colon D \subset X \to Y$, a — предельная точка D. Тогда существование в точке a предела f, принадлежащего Y, равносильно следующему утверждению.*

Для любого положительного числа ε существует такая окрестность V_a точки a, что для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ множества D, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{V}_a$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists V_a\ \ \forall\ \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D\ \ \rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in Y$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такая окрестность V_a точки a, что $\rho_Y(f(x), A) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Тогда, если $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D$, то

$$\rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) \leqslant \rho_Y(f(\bar{x}), A) + \rho_Y(A, f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε условие (1) выполнено.

2. Пусть выполнено условие (1). Докажем существование предела f в точке a на языке последовательностей. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, и докажем, что существует $\lim f(x_n) \in Y$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем окрестность V_a из условия (1). По определению предела $\{x_n\}$ найдется такой номер N, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$; тогда $x_n \in \dot{V}_a \cap D$ для тех же n. По выбору V_a для всех $n, l > N$ будет $\rho_Y(f(x_n), f(x_l)) < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в себе и, значит, в силу полноты Y, сходится к некоторому пределу, принадлежащему Y. Тогда, в силу замечания 6 к определению предела, существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in Y$. $\square$

Замечание 1. Полнота Y использовалась только во второй части доказательства.

Следствие 1. Критерий Больцано – Коши для функций. *Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (или $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), a — предельная точка D. Тогда существование конечного предела f в точке a равносильно следующему утверждению.*

Для любого положительного числа ε существует такая окрестность V_a точки a, что для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ множества D, принадлежащих проколотой окрестности $\dot{V}_a$, выполняется неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists V_a\ \ \forall\ \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D\ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самостоятельно записать критерий Больцано – Коши без использования символа окрестности для случаев $a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$, $a = \infty$ и для односторонних пределов.

Остановимся еще на одном вопросе теории пределов, характерном для функций нескольких переменных. Ограничимся обсуждением и формулировками для функций двух переменных, так как общий случай не имеет принципиальных отличий.

Определение. Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка D_1, b — предельная точка D_2, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.

1. Если для каждого $x \in D_1 \setminus \{a\}$ существует конечный предел

$$\varphi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$

то предел функции φ в точке a называется *повторным пределом* функции f в точке (a, b):

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

2. Если для каждого $y \in D_2 \setminus \{b\}$ существует конечный предел

$$\psi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y),$$

то предел функции ψ в точке b называется *повторным пределом* функции f в точке (a, b):

$$\lim_{y \to b} \psi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

3. Точку A называют *двойным пределом* функции f в точке (a, b) и пишут

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \qquad f(x, y) \underset{\substack{x \to a \\ y \to b}}{\longrightarrow} A,$$

если для любой окрестности V_A точки A существуют такие окрестности V_a и V_b точек a и b, что $f(x, y) \in V_A$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, $y \in \dot{V}_b \cap D_2$.

В этих определениях a и b могут быть числами, $\pm\infty$ или ∞.

Теорема 9. О двойном и повторном пределе. *Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка D_1, b — предельная точка D_2, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, и выполнены условия:*

1) *существует конечный или бесконечный двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A$;*

2) *для каждого $x \in D_1 \setminus \{a\}$ существует конечный предел*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to b} f(x,y).$$

Тогда повторный предел $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ существует и равен A.

Доказательство. Для определенности пусть $A \in \mathbb{R}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению двойного предела найдутся такие окрестности V_a и V_b, что для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, $y \in \dot{V}_b \cap D_2$ выполняется неравенство

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя в нем y к b и пользуясь непрерывностью модуля, получаем

$$|\varphi(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для всех $x \in \dot{V}_a \cap D_1$, что и означает требуемое. В случае бесконечного предела A следует изменить неравенство на соответствующее. $\square$

Замечание 1. Аналогично доказывается, что если выполнены условия 1) и

3) для каждого $y \in D_2 \setminus \{b\}$ существует конечный предел

$$\psi(y) = \lim_{x\to a} f(x,y),$$

то повторный предел $\lim\limits_{y\to b} \psi(y)$ существует и равен A.

Следствие 1. *При выполнении условий 1), 2) и 3) оба повторных предела существуют и равны двойному:*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y).$$

Замечание 2. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $Z = X \times Y$,

$$\rho_Z\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)}.$$

Легко проверить, что ρ_Z — метрика в Z, и сходимость по ней равносильна покоординатной сходимости.

Определения двойного и повторных пределов, теорема 9 и следствие 1 вместе с доказательствами обобщаются на следующую ситуацию: $D_1 \subset X$, $D_2 \subset Y$, $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$, $f\colon D \to T$, где T — метрическое пространство.

Замечание 3. Для функций n переменных имеет смысл рассматривать $n!$ повторных пределов, вычисляющихся последовательно по каждой переменной.

Примеры. 1. Пусть $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Тогда повторные пределы f в точке $(0, 0)$ различны:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1, \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1,$$

откуда следует, что двойного предела функции f в точке $(0, 0)$ не существует.

2. Пусть $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Хотя повторные пределы f в точке $(0, 0)$ равны:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0,$$

двойного предела не существует, так как предел f в точке $(0, 0)$ по прямой $y = x$ равен $\frac{1}{2}$, а не 0.

3. Пусть $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$. Тогда повторных пределов f в точке $(0, 0)$ не существует, а двойной существует и равен 0, так как $|f(x, y)| \leqslant |x| + |y|$.

Если область значений отображения — пространство $\mathbb{R}^m$, вопрос о пределе решается покоординатно.

Замечание 4. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, a — предельная точка D,*

$$f = (f_1, \ldots, f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m, \qquad A = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$ *в том и только в том случае, когда* $f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A_k$ *при всех* $k \in [1 : m]$.

Это замечание вытекает из леммы 3 § 1 главы 2 о равносильности сходимости последовательности по норме и покоординатно.

§ 2. Непрерывные отображения

Определение непрерывности отображения в точке x_0 — формализация того свойства, что значения отображения в точках, близких к x_0, близки к $f(x_0)$.

Определение. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f: D \subset X \to Y$, $x_0 \in D$. Отображение f называется *непрерывным* в точке x_0, если выполняется одно из следующих утверждений.

1. Предел отображения f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$. Это определение применимо, если x_0 — предельная точка D.

2. Определение на ε-языке, или по Коши.

Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : \rho_X(x, x_0) < \delta \ \ \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

3. Определение на языке окрестностей.

Для любой окрестности $V_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что образ пересечения окрестности V_{x_0} с множеством D содержится в окрестности $V_{f(x_0)}$:

$$\forall V_{f(x_0)} \ \ \exists V_{x_0} \ \ f\bigl(V_{x_0} \cap D\bigr) \subset V_{f(x_0)}.$$

4. Определение на языке последовательностей, или по Гейне.

Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества D, стремящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0)$:

$$\forall \{x_n\} : \ x_n \in D, \, x_n \to x_0 \ \ f(x_n) \to f(x_0).$$

5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения:

$$\Delta y \underset{\Delta x \to \theta_X}{\longrightarrow} \theta_Y.$$

Здесь

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

— приращение аргумента и приращение отображения. Это определение применимо, если X и Y — нормированные пространства с нулями θ_X и θ_Y, x_0 — предельная точка D.

Замечание 1. Равносильность определений в случае, когда x_0 — предельная точка D, следует из равносильности различных определений предела. Под номерами 2, 3 и 4 записан на ε-языке, языке окрестностей и языке последовательностей тот факт, что точка $A = f(x_0)$ является пределом отображения f в точке x_0, с одним отличием в каждом случае. В определении на ε-языке опущено условие $x \neq x_0$. Это не меняет определения, так как неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ при $x = x_0$, очевидно, выполнено. В определении на языке окрестностей окрестность V_{x_0} не проколота. Это не меняет определения, так как при $x = x_0$, очевидно, $f(x) \in V_{f(x_0)}$. В определении на языке последовательностей опущено условие $x_n \neq x_0$. Это также не меняет определения, потому что если $x_n = x_0$ при некоторых n, то $f(x_n) = f(x_0)$ при таких n, и неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ из определения предела последовательности $\{f(x_n)\}$ для этих n выполняется. Наконец, определение 5 на любом из языков записывается так же, как и определение 1.

Замечание 2. Пусть x_0 — изолированная точка D. Тогда в окрестности $V_{x_0}(\delta)$ достаточно малого радиуса δ нет точек множества D, отличных от x_0, и, следовательно,

$$f\big(V_{x_0}(\delta) \cap D\big) = \{f(x_0)\} \subset V_{f(x_0)},$$

каковы бы ни были отображение f и окрестность $V_{f(x_0)}$. Если $x_n \in D$, $x_n \to x_0$, то, начиная с некоторого номера, $x_n \in V_{x_0}(\delta)$ и, значит, $x_n = x_0$, а тогда $f(x_n) \to f(x_0)$, каково бы ни было отображение f. Поэтому определения 2–4 равносильны и в случае изолированной точки x_0.

Согласно им, *в изолированной точке области определения всякое отображение непрерывно.*

Определение. Пусть $f: D \subset X \to Y$, $x_0 \in D$. Если отображение f не является непрерывным в точке x_0, то говорят, что f *разрывно* (терпит разрыв, испытывает разрыв) в точке x_0, а точку x_0 называют *точкой разрыва* отображения f.

Сформулируем отдельно определение непрерывности в частном случае функции вещественной переменной.

Определение. Пусть $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняется одно из следующих утверждений.

1. Предел функции f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$. Это определение применимо, если x_0 — предельная точка D.

2. Определение на ε-языке, или по Коши.

Для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек x множества D, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. Определение на языке окрестностей.

Для любой окрестности $V_{f(x_0)}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что образ пересечения окрестности V_{x_0} с множеством D содержится в окрестности $V_{f(x_0)}$:

$$\forall V_{f(x_0)} \ \ \exists V_{x_0} \ \ f\big(V_{x_0} \cap D\big) \subset V_{f(x_0)}.$$

4. Определение на языке последовательностей, или по Гейне.

Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества D, стремящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0)$:

$$\forall \{x_n\} : \ x_n \in D, \, x_n \to x_0 \ \ f(x_n) \to f(x_0).$$

5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\Delta y \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$(\Delta x = x - x_0, \ \Delta y = f(x) - f(x_0))$. Это определение применимо, если x_0 — предельная точка D.

Определение. Пусть Y — метрическое пространство, $f: D \subset \mathbb{R} \to Y$, $x_0 \in D$. Если сужение отображения f на множество $E_1 = D \cap (-\infty, x_0]$ ($E_2 = D \cap [x_0, +\infty)$) непрерывно в точке x_0, то говорят, что отображение f *непрерывно слева (справа)* в точке x_0.

Если x_0 — предельная точка множества E_1 (соответственно, E_2), то непрерывность отображения f в точке x_0 слева (справа) означает, что предел отображения f в точке x_0 слева (справа) существует и равен $f(x_0)$. Читателю предлагается самому записать определение односторонней непрерывности другими способами.

Пусть функция задана по крайней мере в окрестности точки x_0. Из замечания 1 к определению односторонних пределов следует, что непрерывность функции f в точке x_0 равносильна ее одновременной непрерывности слева и справа в точке x_0.

Если существуют конечные пределы $f(x_0-)$ и $f(x_0+)$, но не все три числа $f(x_0-)$, $f(x_0+)$, $f(x_0)$ равны между собой, то точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода* функции f. Разрыв первого рода еще называют *скачком.* Скачком также называют разность $f(x_0+) - f(x_0-)$, а разности $f(x_0) - f(x_0-)$ и $f(x_0+) - f(x_0)$ называют скачками функции f слева и справа в точке x_0. В противном случае, то есть если хотя бы один из односторонних пределов в точке разрыва x_0 бесконечен или вовсе не существует, точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода* функции f.

Часто встречается ситуация, когда функция f задана по крайней мере в проколотой окрестности точки x_0, но не задана в точке x_0. В этом случае x_0 также называют точкой разрыва функции f (первого рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ и второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 бесконечен или вовсе не существует), несмотря на то, что f не определена в точке x_0. Эти названия оправданы тем, что, как бы ни доопределить функцию в точке x_0, для новой функции x_0 будет точкой разрыва первого или второго рода соответственно.

Пусть $f(x_0-) = f(x_0+) = A \in \mathbb{R}$, но $f(x_0) \neq A$ или f не определена в точке x_0. Тогда точку x_0 называют *точкой устранимого разрыва* функции f. Если доопределить или переопределить функцию в точке x_0, как говорят, "по непрерывности", т.е положить $f(x_0) = A$, то новая функция (которую обычно обозначают той же буквой, "забывая" об исходной функции) будет непрерывна в точке x_0. Далее удобно считать, что функция, не определенная в точке устранимого разрыва, доопределяется в ней по непрерывности.

Если точка x_0 — один из концов промежутка, на котором определена функция (точнее, $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и существует такой интервал (a, b), что $(a, b) \cap D$ равно $(a, x_0]$ или $[x_0, b)$), то имеет смысл говорить лишь об одном из односторонних пределов в точке x_0. Если при этом x_0 — точка разрыва функции f, то ее также называют точкой разрыва первого или второго рода в зависимости от того, существует ли конечный односторонний предел f в этой точке. В случае существования конечного $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$ имеет смысл говорить о скачке f с одной стороны.

Примеры. Следующие примеры иллюстрируют разные возможности, возникающие в точках разрыва.

1. Функция сигнум (знак).

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f(0+) = 1$, $f(0-) = -1$, и 0 — точка разрыва первого рода (рисунок 11).

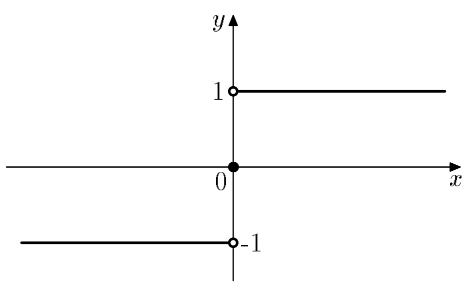

Рис. 11

2. $f(x) = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Тогда $f(0+) = f(0-) = 1$, и 0 — точка разрыва первого рода, притом устранимого разрыва (рисунок 12).

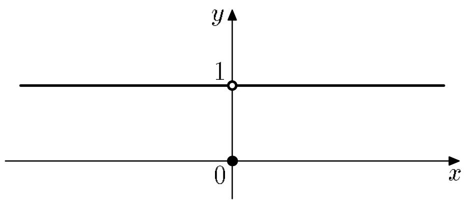

Рис. 12

3. $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $f(0+) = +\infty$, $f(0-) = -\infty$, и 0 — точка разрыва второго рода.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f(0+) = f(0-) = +\infty$, и 0 — точка разрыва второго рода.

5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Тогда f определена на $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, и на области определения $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Точка -1 — точка разрыва второго рода, 1 — точка устранимого разрыва. Положив $f(1) = \frac{1}{2}$, получим непрерывную в точке 1 функцию.

6. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Докажем, что 0 — точка разрыва второго рода.

Положим $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n, y_n > 0$, $x_n, y_n \to 0$, $f(x_n) = 0 \to 0$, $f(y_n) = 1 \to 1$. Отсюда следует, что правостороннего предела f в точке 0 не существует, так как определение этого предела на языке последовательностей не выполняется. Аналогично доказывается отсутствие левостороннего предела f в точке 0. $\square$

График этой функции изображен на рисунке 13.

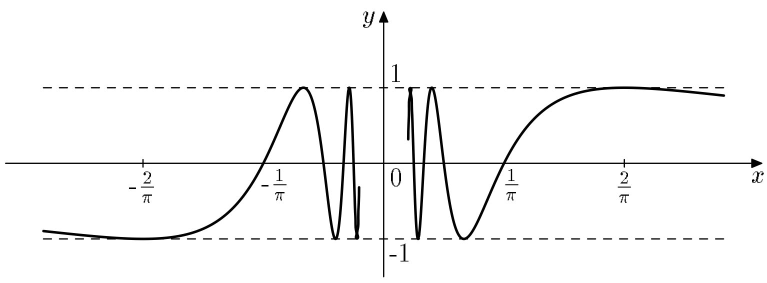

Рис. 13

7. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Здесь $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, потому что f есть произведение бесконечно малой на ограниченную. Поэтому 0 — точка устранимого разрыва (рисунок 14).

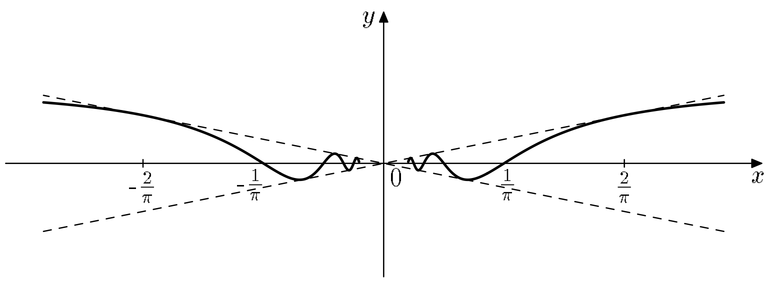

Рис. 14

8. $f(x) = 2^{1/x}$. Тогда $f(0+) = +\infty$, $f(0-) = 0$, и 0 — точка разрыва второго рода. (рисунок 15).

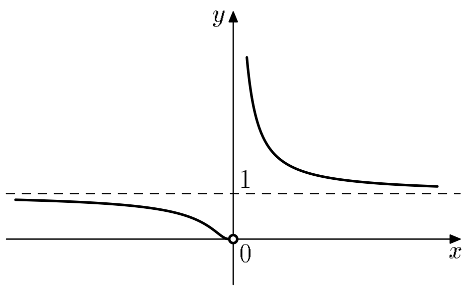

Рис. 15

Эти факты, а также непрерывность функций из примеров 3–8 в остальных точках, следуют из свойств элементарных функций, которые будут установлены в § 3.

9. Функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке, причем все разрывы второго рода.

Действительно, для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ можно подобрать две последовательности: рациональных чисел $\{x_n\}$ и иррациональных чисел $\{y_n\}$, такие что $x_n, y_n > x_0$, $x_n, y_n \to x_0$. Например, можно взять $x_n = \frac{[nx_0]+1}{n}$, $y_n = x_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Тогда $\chi(x_n) = 1 \to 1$, $\chi(y_n) = 0 \to 0$. Поэтому предела χ справа в точке x_0 не существует. Аналогично доказывается отсутствие левостороннего предела. $\square$

10. Функция Римана

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ дробь несократима}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна во всех иррациональных и имеет разрывы первого рода во всех рациональных точках.

Достаточно доказать, что предел ψ в любой точке x_0 равен 0. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такой номер N, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Количество рациональных чисел со знаменателями, меньшими N, в проколотой 2-окрестности точки x_0 конечно; обозначим через r расстояние от x_0 до ближайшего из них. Тогда в проколотой r-окрестности x_0 нет рациональных чисел со знаменателями, меньшими N, то есть все значения функции ψ в этой проколотой окрестности меньше ε. $\square$

Изобразить графики функций Дирихле и Римана не удается из-за хаотического поведения этих функций.

Определение. Отображение называется *непрерывным на множестве* D, если оно непрерывно в каждой точке множества D.

Множество отображений $f\colon D \subset X \to Y$, непрерывных на множестве D, обозначается $C(D \subset X \to Y)$ или $C(D \to Y)$. Множество функций, заданных и непрерывных на множестве D, обозначается $C(D)$. Если $D = \langle a, b\rangle$ — промежуток, то скобки обычно опускают и пишут $C\langle a, b\rangle$. Если быть точным, то через $C(D)$ обозначается два разных множества функций: вещественно- и комплекснозначных. Это обычно не приводит к путанице; при необходимости различать вещественный и комплексный случаи будет сделана оговорка.

Теорема 1. Арифметические действия над непрерывными отображениями. *Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, отображения $f, g\colon D \to Y$, $\lambda\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) непрерывны в точке x_0, Тогда отображения $f+g$, $f-g$, λf, $\|f\|$ непрерывны в точке x_0.*

Теорема 1$'$. Арифметические действия над непрерывными функциями. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $x_0 \in D$, функции $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f-g$, fg, $|f|$, непрерывны в точке x_0, а если $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка D, то утверждение тривиально. Если же x_0 — предельная точка D, то теоремы о непрерывности следуют из теорем 4 и 4$'$ § 1 о пределах. Если f и g непрерывны в точке x_0, то

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0), \qquad g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(x_0).$$

Тогда

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0),$$

что и означает непрерывность суммы в точке x_0. Рассуждение для других операций аналогично. $\square$

Замечание 1. О стабилизации знака непрерывной функции. *Если функция $g: D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, причем $g(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность V_{x_0}, что $\operatorname{sign} g(x) = \operatorname{sign} g(x_0)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда $g(x_0) > 0$. Допустим противное: пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in V_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) \leqslant 0$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к x_0. По определению непрерывности $g(x_n) \to g(x_0)$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $g(x_0) \leqslant 0$, что противоречит условию. $\square$

Примеры. Постоянная функция, очевидно, непрерывна на $\mathbb{R}$. Функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$ (в определении на ε-языке достаточно положить $\delta = \varepsilon$, а определение на языке последовательностей выполняется тривиально). Тогда по теореме $1'$ всякий многочлен, то есть функция вида

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

непрерывен на $\mathbb{R}$, а всякая рациональная дробь, то есть частное двух многочленов, непрерывна на своей области определения (то есть множестве точек, где знаменатель не обращается в нуль).

Аналогично, всякий многочлен от m вещественных или комплексных переменных

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{r_1, \ldots, r_m} c_{r_1 \ldots r_m} x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m}$$

(сумма берется по некоторому конечному набору целых неотрицательных индексов $r_1, \ldots, r_m$; вещественные или комплексные числа $c_{r_1 \ldots r_m}$ называются коэффициентами многочлена) непрерывен на $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m$), а всякая рациональная дробь от m переменных непрерывна на своей области определения.

Теорема 2. Непрерывность композиции. *Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $f\colon D\subset X\to Y$, $g\colon E\subset Y\to Z$, $f(D)\subset E$, f непрерывно в точке $x_0\in D$, g непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g\circ f$ непрерывно в точке x_0.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, такую что $x_n\in D$, $x_n\to x_0$. Обозначим $y_n=f(x_n)$, $y_0=f(x_0)$; тогда $y_n, y_0\in E$. По определению непрерывности f в точке x_0 на языке последовательностей $y_n\to y_0$. По определению непрерывности g в точке y_0 на языке последовательностей $g(y_n)\to g(y_0)$, то есть $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(x_0)$. Последнее в силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ и означает непрерывность $g\circ f$ в точке x_0. $\square$

Замечание 2. Пусть $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $g(y)=|\operatorname{sign}y|$. Тогда $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, $g(y)\underset{y\to0}{\longrightarrow}1$, но композиция $g\circ f$ не имеет предела в нуле, так как $(g\circ f)(\frac{1}{n\pi})=0\to0$, а $(g\circ f)(\frac{1}{(n+1/2)\pi})=1\to1$. Этот пример показывает, что утверждение: "если $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}A$, $g(x)\underset{x\to A}{\longrightarrow}B$, то $(g\circ f)(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}B$" может не выполняться. Если же запретить $f(x)$ принимать значение A, то утверждение становится верным.

Пусть X, Y и Z — метрические пространства, $f\colon D\subset X\to Y$, $g\colon E\subset Y\to Z$, $f(D)\subset E$ и выполнены условия:

1) *a — предельная точка D, $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}A$;*

2) *A — предельная точка E, $g(x)\underset{x\to A}{\longrightarrow}B$;*

3) *существует такая окрестность V_a точки a, что $f(x)\neq A$ для любого $x\in\dot V_a\cap D$.*

Тогда $(g\circ f)(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}B$.

Замечание 3. Как следует из замечания 4 в конце § 1, непрерывность отображения $f\colon D\subset X\to\mathbb{R}^m$ равносильна его покоординатной непрерывности, то есть непрерывности всех его координатных функций.

Перейдем к глобальным свойствам непрерывных отображений, то есть к свойствам, связанным с непрерывностью на всей области определения.

Так как подмножество D метрического пространства X само является метрическим пространством (подпространством X), а точки множества $X \setminus D$ не участвуют в определении непрерывности отображения, заданного на D, не уменьшая общности, можно рассматривать отображения одного метрического пространства в другое.

Теорема 3. Характеристика непрерывности с помощью прообразов. *Пусть X и Y — метрические пространства, $f: X \to Y$. Тогда для непрерывности f на X необходимо и достаточно, чтобы при отображении f прообраз любого открытого в Y множества был открыт в X.*

Доказательство. 1. Пусть f непрерывно и множество U открыто в Y. Докажем, что множество $f^{-1}(U)$ открыто в X. Для этого возьмем точку $a \in f^{-1}(U)$ и докажем, что a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$. Так как $f(a) \in U$, а U открыто, существует окрестность $V_{f(a)}$, содержащаяся в U. По определению непрерывности f в точке a найдется окрестность V_a такая, что $f(V_a) \subset V_{f(a)} \subset U$. Следовательно, $V_a \subset f^{-1}(U)$, то есть a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$.

2. Пусть прообраз любого открытого множества открыт, $a \in X$. Докажем, что f непрерывно в точке a; в силу произвольности a это и будет означать непрерывность f на всем X. Возьмем окрестность $V_{f(a)} \subset Y$. По условию ее прообраз $G = f^{-1}\left(V_{f(a)}\right)$ открыт в X, при этом $a \in G$. Значит, найдется окрестность V_a: $V_a \subset G$. Осталось проверить, что $f(V_a) \subset V_{f(a)}$; тогда определение непрерывности f в точке a на языке окрестностей будет выполнено. Действительно, если $y \in f(V_a)$, то по определению образа $y = f(x)$ для некоторого $x \in V_a$; тем более, $x \in G$. По определению прообраза $f(x) \in V_{f(a)}$, то есть $y \in V_f(a)$. $\square$

Замечание 1. Пусть $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Тогда

$$f^{-1}(1, +\infty) = (1, 2].$$

Противоречия с теоремой 3 здесь нет: полуинтервал $(1, 2]$, как и гарантирует теорема 3, открыт в $X = [0, 2]$, хотя и не является открытым в $\mathbb{R}$. По этому поводу уместно вспомнить теорему 4 § 2 главы 2 об открытости в пространстве и подпространстве.

Теорема 4 (К. Вейерштрасс). О непрерывных отображениях. *Пусть X и Y — метрические пространства, X компактно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ компактно.* Другими словами: *непрерывный образ компакта — компакт.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие множества $f(X)$: $f(X) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$. По теореме 3 при всех $\alpha \in A$ множества $f^{-1}(G_\alpha)$ открыты в X. Проверим, что

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(G_\alpha).$$

В самом деле, если $a \in X$, то $f(a) \in Y$ и, значит, $f(a) \in G_\alpha$ при некотором α, то есть $a \in f^{-1}(G_\alpha)$ при некотором α. Следовательно, X содержится в объединении $f^{-1}(G_\alpha)$. Обратное включение тривиально.

Пользуясь компактностью X, выделим из его открытого покрытия $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ конечное подпокрытие: найдется такой конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in A$, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Осталось проверить, что

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}; \tag{2}$$

это и будет означать, что из произвольного открытого покрытия $f(X)$ удается извлечь конечное подпокрытие. Действительно, если $y \in f(X)$, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in X$. Тогда найдется такой номер $i \in [1 : N]$, что $x \in f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Последнее означает, что $f(x) \in G_{\alpha_i}$, то есть $y \in G_{\alpha_i}$, и включение (2) доказано. □

Следствие 1. *Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.*

Для *доказательства* кроме теоремы Вейерштрасса надо применить теорему 1 § 3 главы 2.

Следствие 2. Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.*

Замечание 1. Оба условия: и непрерывность функции, и то, что ее область определения есть отрезок, — существенны. Так, функции $f(x) = x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ непрерывны, но не ограничены, соответственно, на $\mathbb{R}$ и $(0, 1]$. Функция

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

задана на $[0, 1]$, разрывна в одной точке 0, но не ограничена.

Следствие 3. *Пусть X компактно, $f \in C(X \to \mathbb{R})$. Тогда существуют $\max\limits_{x \in X} f(x)$ и $\min\limits_{x \in X} f(x)$.* Другими словами: *непрерывная на компакте функция принимает наибольшее и наименьшее значение.*

Доказательство. Остается доказать, что компактное подмножество E числовой прямой ($E = f(X)$) имеет наибольший и наименьший элемент. Существует $\sup E = b \in \mathbb{R}$. Докажем, что $b \in E$; это и будет означать, что $b = \max E$. По определению супремума для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in E$, что $b - \frac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к b. Следовательно, $b \in E$ в силу замкнутости E. Доказательство для минимума аналогично.

Следствие 4. Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. *Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значение.*

Замечание 2. И здесь оба условия существенны. Так, функции f, g и h из замечания 1 не имеют наибольшего значения. Наибольшего значения не имеет и ограниченная непрерывная функция $f_1(x) = x$ на $[0, 1)$.

Замечание 3. Исторически сложилось, что для функций формулируют две теоремы Вейерштрасса: первую и вторую; теорема 4 обобщает их обе для отображений. Заметим еще, что вторая теорема Вейерштрасса уточняет первую (если функция имеет наибольшее и наименьшее значение, то она ограничена). Вместе с тем, первая теорема Вейерштрасса верна для комплекснозначных функций, а вторая лишена для них смысла.

Обсудим подробнее определение непрерывности. Непрерывность функции $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на множестве D означает, что f непрерывна в каждой точке $\bar{x} \in D$. Запишем это на ε-языке:

$$\forall \bar{x} \in D \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \bar{\bar{x}} \in D : |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

В этой формуле число δ зависит и от ε, и от точки $\bar{x}$.

Возникает вопрос: можно ли в определении непрерывности подобрать число δ, зависящее только от ε и обслуживающее одновременно все точки $\bar{x}$ множества D?

Определение. Функция $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ множества D, удовлетворяющих неравенству $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta$, выполняется неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D : |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \ \ |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon.$$

Как видно, в определении равномерной непрерывности точка $\bar{x}$ с квантором общности написана после δ, то есть δ зависит только от ε. В определении требуется, чтобы неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$ выполнялось одновременно для всех пар точек, расстояние между которыми меньше δ. Из определений ясно, что всякая равномерно непрерывная функция непрерывна. Обратное неверно, что будет показано на примерах.

Запишем еще, что значит, что функция f не является равномерно непрерывной на множестве D:

$$\exists \varepsilon^* > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists \bar{x}_\delta, \bar{\bar{x}}_\delta \in D : |\bar{x}_\delta - \bar{\bar{x}}_\delta| < \delta, \ |f(\bar{x}_\delta) - f(\bar{\bar{x}}_\delta)| \geqslant \varepsilon^*.$$

Примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$: в определении можно взять $\delta = \varepsilon$.

2. Докажем, что функция $g(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Положим $\varepsilon^* = 1$ и возьмем $\delta > 0$. Пусть $\bar{x}_\delta = \frac{1}{\delta}$, $\bar{\bar{x}}_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$|\bar{x}_\delta - \bar{\bar{x}}_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

но

$$|\bar{x}_\delta^2 - \bar{\bar{x}}_\delta^2| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) > 1 = \varepsilon^*,$$

то есть для функции g выполнено отрицание определения равномерной непрерывности.

3. Читателю предлагается самому убедиться, что непрерывные функции $h(x) = \frac{1}{x}$ и $k(x) = \sin\frac{1}{x}$ (последняя к тому же ограничена) не являются равномерно непрерывными на $(0, 1]$.

Дадим теперь определение в общем случае — для отображений в метрических пространствах.

Определение. Пусть X и Y — метрические пространства, $f\colon X \to Y$. Отображение f называется *равномерно непрерывным* на X, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ пространства X, удовлетворяющих неравенству $\rho_X(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y\big(f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon$:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in X : \rho_X(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < \delta \quad \rho_Y\big(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})\big) < \varepsilon.$$

Ясно, что всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно.

Теорема 5 (Г. Кантор). *Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть X компактно, $f \in C(X \to Y)$. Предположим, что f не является равномерно непрерывным. Тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для числа $\delta = \frac{1}{n}$ найдутся точки $\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n \in X$:

$$\rho_X(\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n) < \frac{1}{n}, \qquad \rho_Y(\bar{y}_n, \bar{\bar{y}}_n) \geqslant \varepsilon^*,$$

где $\bar{y}_n = f(\bar{x}_n)$, $\bar{\bar{y}}_n = f(\bar{\bar{x}}_n)$.

Пользуясь секвенциальной компактностью X, выделим из последовательности $\{\bar{x}_n\}$ точек X подпоследовательность $\{\bar{x}_{n_k}\}$, имеющую предел в X: $\bar{x}_{n_k} \to c \in X$. Тогда и $\bar{\bar{x}}_{n_k} \to c$, так как

$$\rho_X\left(\bar{\bar{x}}_{n_k}, c\right) \leqslant \rho_X\left(\bar{\bar{x}}_{n_k}, \bar{x}_{n_k}\right) + \rho_X\left(\bar{x}_{n_k}, c\right) < \frac{1}{n_k} + \rho_X\left(\bar{x}_{n_k}, c\right) \to 0.$$

По непрерывности f в точке c

$$\bar{y}_{n_k} \to f(c), \qquad \bar{\bar{y}}_{n_k} \to f(c).$$

Следовательно, $\rho_Y\left(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}\right) \to 0$ и, начиная с некоторого номера, $\rho_Y\left(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}\right) < \varepsilon^*$, что противоречит построению. $\square$

Следствие 1. Теорема Кантора для функций. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Теорема 6 (Б. Больцано, О. Коши). О промежуточном значении непрерывной функции. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.*

Доказательство. 1. Пусть числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков: $f(a)f(b) < 0$; докажем, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(a) < 0 < f(b)$; второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$ — точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана — можно положить $c = \frac{a+b}{2}$. Иначе положим

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\frac{a+b}{2}, b], & \text{если } f(\frac{a+b}{2}) < 0, \\ [a, \frac{a+b}{2}], & \text{если } f(\frac{a+b}{2}) > 0. \end{cases}$$

В обоих случаях $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Продолжим этот процесс построения промежутков. Если на некотором шаге функция f обратится в 0 в середине отрезка, то доказательство на этом закончится. Иначе будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, таких что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. При этом отрезки стягивающиеся, так как $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, при этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, то есть $f(c) = 0$. Следовательно, $c \in (a, b)$, и точка c — требуемая.

2. Докажем теорему в общем случае. Пусть $\varphi = f - C$. Тогда $\varphi \in C[a, b]$ как разность непрерывных функций, $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. По доказанному существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi(c) = 0$, то есть $f(c) = C$. $\square$

Замечание 1. Теорему Больцано – Коши можно сформулировать и так: *если непрерывная на промежутке функция принимает какие-то два значения, то она принимает все значения, лежащие между ними.*

Здесь существенно и то, что функция непрерывна, и то, что она задана на промежутке. Функция sign, заданная на $\mathbb{R}$, разрывна в нуле. Она принимает значения -1 и 1, но из чисел между -1 и 1 только 0 является значением функции. Сужение функции sign на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ непрерывно, но не принимает значений, лежащих между -1 и 1.

Замечание 2. Иногда первую часть теоремы — утверждение о том, что непрерывная функция, принимающая на концах промежутка значения разных знаков, имеет на этом промежутке корень, называют первой теоремой Больцано – Коши, а теорему в общем случае — второй теоремой Больцано – Коши.

Замечание 3. Метод половинного деления, использованный при доказательстве первой части теоремы, позволяет приближенно находить корни уравнений.

Замечание 4. Другой способ доказательства теоремы Больцано – Коши — проверить, что если $f \in C[a, b]$, $f(a) < 0 < f(b)$, то точка

$$c = \sup\{x \in [a, b] : \ f(x) < 0\}$$

есть корень функции f.

Теоремы Вейерштрасса и Больцано – Коши позволяют делать выводы о множестве значений непрерывной функции.

Лемма 1. Характеристика промежутков. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *E — промежуток (возможно, вырожденный).*

2. *Для любых x, y, принадлежащих E ($x < y$), $[x, y] \subset E$.*

Доказательство. Второе утверждение следует из первого тривиально. Докажем обратный переход. Пусть $E \neq \varnothing$. Обозначим $m = \inf E$, $M = \sup E$. Ясно, что $E \subset [m, M]$. Докажем, что $(m, M) \subset E$. Пусть $m < z < M$. Тогда по определению граней существуют точки $x, y \in E$: $x < z < y$. По условию $z \in E$. $\square$

Замечание 1. Из курса геометрии известно понятие выпуклого множества. Множество (на прямой, на плоскости, в трехмерном пространстве) называется *выпуклым,* если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок, их соединяющий. Это определение переносится на множества в векторном пространстве (предварительно надо определить, что такое отрезок в векторном пространстве). Лемма 1 утверждает, что на прямой выпуклыми являются промежутки, и только они.

Теорема 7. О сохранении промежутка. *Множество значений непрерывной на промежутке функции есть промежуток.* Короче: *непрерывный образ промежутка — промежуток.*

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a, b\rangle$,

$$m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$$

($m, M \in \overline{\mathbb{R}}$). По теореме 6 множество $E = f(\langle a, b\rangle)$ выпукло, а по лемме 1 E — промежуток, то есть $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. $\square$

Замечание 2. Промежуток $\langle m, M\rangle$ может быть другого типа, нежели $\langle a, b\rangle$.

Так, функция синус отображает промежутки $\mathbb{R}$ и $[0, 2\pi)$ на отрезок $[-1, 1]$, а интервал $(0, \pi)$ — на полуинтервал $(0, 1]$.

Следствие 1. О сохранении отрезка. *Непрерывный образ отрезка — отрезок.*

Доказательство. Действительно, множество $f([a, b])$ — промежуток по теореме 7, а по теореме Вейерштрасса оно имеет наибольший и наименьший элемент. $\square$

Замечание 3. Наибольшее и наименьшее значения не обязательно достигаются на концах отрезка.

Обобщим теорему о промежуточном значении для отображений.

Определение. Пусть Y — метрическое пространство, $E \subset Y$. Непрерывное отображение отрезка в множество E:

$$\gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \to E)$$

называется *путем* в E. Точка $\gamma(a)$ называется *началом,* $\gamma(b)$ — *концом пути.*

Определение. Пусть Y — метрическое пространство, $E \subset Y$. Множество E называется *линейно связным,* если любые две его точки можно соединить путем в E:

$$\forall A, B \in E \;\; \exists \gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \to E) : \; \gamma(a) = A, \gamma(b) = B.$$

Это определение — формализация того наглядного свойства плоского множества, что любые две его точки можно соединить, не отрывая карандаша от бумаги и не выходя за пределы множества.

Теорема 8 (Б. Больцано, О. Коши). О непрерывных отображениях. *Пусть X и Y — метрические пространства, X линейно связно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ линейно связно.* Другими словами: *непрерывный образ линейно связного множества линейно связен.*

Доказательство. Пусть $A, B \in f(X)$. Тогда по определению образа существуют точки $\alpha, \beta \in X$: $A = f(\alpha)$, $B = f(\beta)$. Так как X линейно связно, точки α и β можно соединить путем в X, то есть существует путь $\gamma \in C([a, b] \to X)$: $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$. Но тогда, по теореме о непрерывности композиции, $f \circ \gamma$ — путь в $f(X)$; при этом $(f \circ \gamma)(a) = A$, $(f \circ \gamma)(b) = B$. $\square$

Замечание 4. Согласно лемме 1, на прямой линейно связными являются только промежутки.

Замечание 5. Теорема о сохранении промежутка, вообще говоря, не допускает обращения. Так, множество значений разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [\,0, 1], \\ 0, & x \in (1, 2], \end{cases}$$

есть отрезок $[\,0, 1]$. Однако, для монотонной функции обратное утверждение верно.

Теорема 9. О разрывах и непрерывности монотонной функции. *Пусть $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f монотонна. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *f не может иметь разрывов второго рода.*

2. *Непрерывность f равносильна тому, что ее множество значений — промежуток.*

Доказательство. Пусть для определенности f возрастает.

1. Пусть $x_0 \in (a, b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. Тогда $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_1, x_0)$, поэтому f возрастает и ограничена сверху на $\langle a, x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции существует конечный предел $f(x_0-)$, причем по теореме о предельном переходе в неравенстве $f(x_1) \leqslant f(x_0-) \leqslant f(x_0)$. Аналогично доказывается, что для любой точки $x_0 \in \langle a, b)$ существует конечный предел $f(x_0+)$, причем $f(x_0) \leqslant f(x_0+) \leqslant f(x_2)$ для всех $x_2 \in (x_0, b\rangle$.

2. Ввиду следствия о сохранении промежутка остается доказать достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток. Докажем непрерывность f слева в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ от противного. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$ (существование конечного левостороннего предела уже доказано). Возьмем $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Следовательно, $y \in f(\langle a, b\rangle)$, то есть y — значение функции. С другой стороны, для всех $x \in \langle a, x_0)$ будет $f(x) \leqslant f(x_0-) < y$, а для всех $x \in [x_0, b\rangle$ будет $f(x) \geqslant f(x_0) > y$, то есть функция не принимает значение y. Полученное противоречие доказывает, что $f(x_0-) = f(x_0)$. Аналогично f непрерывна справа в любой точке $x_0 \in \langle a, b)$. $\square$

Теорема 10. О существовании и непрерывности обратной функции. *Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R})$, f строго монотонна,*

$$m = \inf_{x \in \langle a, b\rangle} f(x), \qquad M = \sup_{x \in \langle a, b\rangle} f(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *f обратима, $f^{-1}: \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$ — биекция.*
2. *f^{-1} строго монотонна одноименно с f.*
3. *f^{-1} непрерывна.*

Доказательство. Пусть для определенности f строго возрастает.

Если $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; следовательно, f обратима. По теореме о сохранении промежутка $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. По общим свойствам обратного отображения f^{-1} — биекция $\langle m, M\rangle$ и $\langle a, b\rangle$.

Докажем, что f^{-1} строго возрастает. Если $y_1, y_2 \in \langle m, M\rangle$, $y_1 < y_2$, то $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. При этом $x_1 < x_2$, так как возможность $x_1 \geqslant x_2$ исключена в силу строгого возрастания f.

Возрастающая функция f^{-1} задана на промежутке $\langle m, M\rangle$, а ее множество значений — промежуток $\langle a, b\rangle$. По теореме 9 она непрерывна. $\square$

Замечание 1. Для обратимости строго монотонной функции и строгой монотонности обратной функции непрерывность не нужна.

Сформулируем еще несколько фактов без доказательства.

Замечание 2. 1. Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

2. Если функция задана на промежутке, непрерывна и обратима, то она строго монотонна и, следовательно, обратная функция непрерывна.

3. Отображение, обратное к непрерывному, может оказаться разрывным. Сопоставим каждой точке x полуинтервала $[0, 2\pi)$ точку $f(x)$ единичной окружности S, такую что длина дуги, отсчитываемой от точки $f(0) = (1, 0)$ до точки $f(x)$, равна x (или, что то же самое, $\arg f(x) = x$). Отображение f биективно и непрерывно, но f^{-1} терпит разрыв в точке $(1, 0)$: близким к ней точкам окружности с отрицательной ординатой соответствуют точки полуинтервала, близкие к 2π, а не к 0.

Но если отображение задано на компакте, непрерывно и обратимо, то обратное отображение непрерывно.

4. Существует обратимая функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке 0, но такая, что f^{-1} разрывна в точке $f(0)$.

§ 3. Элементарные функции

Основными элементарными называют следующие функции.

1. Постоянная: $x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Степенная: $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Показательная: $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Логарифм: $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5–8. Тригонометрические: синус, косинус, тангенс, котангенс — sin, cos, tg, ctg.

9–12. Обратные тригонометрические: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс — arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и операций композиции, называются *элементарными* (без добавления прилагательного "основные").

В школе изучались, как правило, элементарные функции (но не только: функции, заданные разными формулами на разных частях области определения, как, например, sign, могут не быть элементарными). Список основных элементарных функций можно без ущерба сократить, так как, например, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, а $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Мы не ставим цели минимизировать список основных элементарных функций.

Далее мы дадим четкие определения основных элементарных функций (что редко делают в школе) и исследуем их свойства.

1. Постоянная функция. Функция $x \mapsto c$, как уже отмечалось, непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Степенная функция. Мы определим степень x^α при различных x и α, последовательно усложняя вид α. Это позволит нам рассматривать две функции: степенную и показательную.

Степенную функцию с показателем α, которая x сопоставляет x^α, будем обозначать e_α: $e_\alpha(x) = x^\alpha$. Заранее отметим, что области определения степенных функций могут быть различны при различных показателях.

При $\alpha = 1$ функция $e_1 = \mathrm{id}_\mathbb{R}$, как уже отмечалось, непрерывна на $\mathbb{R}$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ по определению

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция e_n непрерывна на $\mathbb{R}$ как произведение непрерывных.

При $\alpha = -n$, где $n \in \mathbb{N}$, полагаем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Следовательно, функция e_{-n} непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных.

При $\alpha = 0$ по определению полагаем $x^0 = 1$ при всех $x \neq 0$; тогда можно в соответствии с общим соглашением доопределить по непрерывности $x^0 = 1$ и при $x = 0$.

Если $n \in \mathbb{N}$, n нечетно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = +\infty$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} e_n(x) = -\infty$; по теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $n \in \mathbb{N}$, n четно, то функция e_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = +\infty$, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} e_n(x) = 0$; по теореме о сохранении промежутка $e_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$e_{1/n} = \begin{cases} e_n^{-1}, & n \text{ нечетно}, \\ \left(e_n\big|_{\mathbb{R}_+}\right)^{-1}, & n \text{ четно}, \end{cases}$$

которая называется *корнем n-й степени* и обозначается еще $\sqrt[n]{(\cdot)}$: $e_{1/n}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Итак,

$$e_{1/n}\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}, \qquad n \text{ нечетно},$$
$$e_{1/n}\colon \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}_+, \quad n \text{ четно};$$

$e_{1/n}$ строго возрастает и непрерывна.

Теперь определим x^α при рациональном $\alpha = r$, то есть при $r = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Полагаем

$$x^r = (x^p)^{1/q},$$

для всех тех x, для которых правая часть имеет смысл. Другими словами, $e_r = e_{1/q} \circ e_p$. Таким образом, x^r определено в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &x > 0, \quad r \text{ любое}, \\ &x = 0, \quad r \geqslant 0, \\ &x < 0, \quad q \text{ нечетно}. \end{aligned}$$

Функция e_r непрерывна на своей области определения; она строго возрастает на $[0, +\infty)$ при $r > 0$, строго убывает на $(0, +\infty)$ при $r < 0$.

Графики степенных функций в первой четверти при различных α изображены на рисунке 16. На нем у каждого графика функции $y = x^\alpha$ подписано значение α.

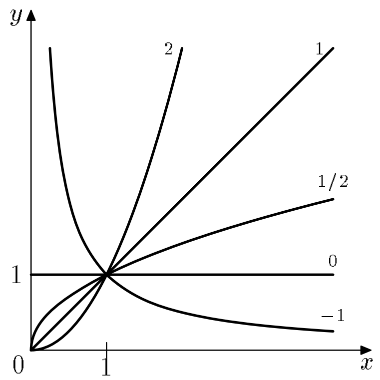

Рис. 16

3. Показательная функция. Следующий шаг — определение степени с иррациональным показателем.

Положим $0^x = 0$ для всех положительных x.

Пусть $a > 0$. Мы хотим определить a^x для всех $x \in \mathbb{R}$. Пока что a^x определено для $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим эту функцию $a^{(\cdot)}\big|_{\mathbb{Q}}$; при $a \ne 1$ назовем ее показательной функцией рационального аргумента. Перечислим без доказательства ее свойства, известные из школьного курса. Эти свойства легко проверяются по определению. В них $r, s \in \mathbb{Q}$.

1. Если $r < s$, то $a^r < a^s$ при $a > 1$ и $a^r > a^s$ при $0 < a < 1$.
2. $a^{r+s} = a^r a^s$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. $(ab)^r = a^r b^r$.

Определение. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r\big|_{\mathbb{Q}}.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$ функция $\exp_a$, действующая по формуле

$$\exp_a x = a^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

называется *показательной функцией с основанием a*.

Чтобы определение имело смысл, необходимо доказать, что предел существует и что для рациональных x новое определение a^x совпадает с уже имеющимся.

Лемма 1. *Пусть $a > 0$, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, $r_n \to 0$. Тогда $a^{r_n} \to 1$.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна, так как $a^{r_n} = 1$ при всех n.

Пусть $a > 1$. Докажем лемму сперва в частном случае $r_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $a^{1/n} > 1$, имеем $a^{1/n} = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$. Тогда по неравенству Бернулли

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n,$$

откуда $0 < \alpha_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Значит, $\alpha_n \to 0$, что равносильно $a^{1/n} \to 1$.

Далее, по доказанному

$$a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

Пусть теперь $\{r_n\}$ — произвольная последовательность из условия леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением предела, подберем такой номер N_0, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon. \tag{3}$$

Поскольку $r_n \to 0$, найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет $-\frac{1}{N_0} < r_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{r_n} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких n. Это и означает, что $a^{r_n} \to 1$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, $r_n \to x$. Тогда существует конечный предел последовательности $\{a^{r_n}\}$.*

Доказательство. При $a = 1$ лемма очевидна. Пусть $a > 1$.

Возьмем какую-либо возрастающую последовательность $\{s_n\}$ рациональных чисел, стремящуюся к x. Например, можно взять последовательность десятичных приближений к x с недостатком: $s_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$. Тогда $x - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant x$, поэтому $s_n \to x$. Докажем, что последовательность $\{s_n\}$ возрастает. Неравенство $s_n \leqslant s_{n+1}$ равносильно $10[A] \leqslant [10A]$, где $A = 10^n x$. Но $10[A]$ — целое число, не превосходящее $10A$, поэтому $10[A] \leqslant [10A]$.

Последовательность $\{a^{s_n}\}$ возрастает и ограничена сверху числом $a^{[x]+1}$. Следовательно, $\{a^{s_n}\}$ сходится к некоторому пределу L. Но тогда

$$a^{r_n} = a^{r_n - s_n} a^{s_n} \to L,$$

потому что $a^{r_n - s_n} \to 1$ по лемме 1.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$, и по доказанному $(\frac{1}{a})^{r_n} \to L$, причем $L > 0$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}} \to \frac{1}{L}. \quad \square$$

Из леммы 2 вытекает корректность определения a^x. В самом деле, согласно замечанию 6 к определению предела по Гейне, предел существует. Если же $x \in \mathbb{Q}$, то, беря в качестве $\{r_n\}$ стационарную последовательность: $r_n = x$ при всех n, получаем, что новое определение a^x совпадает со старым.

Отметим отдельно, что $1^x = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Установим несколько свойств показательной функции.

E1. *Функция* $\exp_a$ *строго возрастает на* $\mathbb{R}$ *при* $a > 1$ *и строго убывает на* $\mathbb{R}$ *при* $0 < a < 1$.

Доказательство. Пусть $a > 1$, $x < y$. Докажем, что $a^x < a^y$. Возьмем рациональные числа $\bar{r}$ и $\bar{\bar{r}}$, такие что

$$x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y,$$

и две последовательности рациональных чисел $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\bar{\bar{r}}_n\}$, такие что

$$\bar{r}_n < x < y < \bar{\bar{r}}_n, \quad \bar{r}_n \to x, \ \bar{\bar{r}}_n \to y.$$

Тогда в силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$a^x \leqslant a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leqslant a^y.$$

Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично или переходом к основанию $\frac{1}{a}$, как в лемме 2. $\square$

E2. $a^{x+y} = a^x a^y$. *В частности,* $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Для *доказательства* надо взять две последовательности рациональных чисел $\{\bar{r}_n\}$ и $\{\bar{\bar{r}}_n\}$, стремящиеся к x и y, и перейти к пределу в равенстве

$$a^{\bar{r}_n+\bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} a^{\bar{\bar{r}}_n},$$

которое для рациональных показателей известно.

Свойство E2 иногда называют основным свойством степени.

E3. *Показательная функция непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Непрерывность показательной функции в нуле доказывается на языке последовательностей, как лемма 1. Пусть $a > 1$, $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел, $x_n \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем номер N_0, для которого выполняется неравенство (3). Тогда найдется такой номер N, что для всех $n > N$ будет $-\frac{1}{N_0} < x_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции (свойства E1)

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{x_n} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких n. Это и означает, что $a^{x_n} \to 1$. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично или переходом к основанию $\frac{1}{a}$.

Непрерывность в произвольной точке x_0 следует из доказанной непрерывности в нуле:

$$a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \to 0. \quad \square$$

E4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. Возьмем две последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y$. По известному свойству степени с рациональным показателем $(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}$. Зафиксируем m и устремим n к ∞. Тогда по определению показательной функции $a^{x_n y_m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^{x y_m}$ и $a^{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^x$, а по непрерывности степенной функции с рациональным показателем $(a^{x_n})^{y_m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a^x)^{y_m}$. Поэтому $(a^x)^{y_m} = a^{x y_m}$. Осталось устремить m к ∞ и воспользоваться непрерывностью показательной функции. $\square$

E5. $(ab)^x = a^x b^x$.

Для *доказательства* надо сделать предельный переход в равенстве для степеней с рациональным показателем.

E6. $\exp_a\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция $\exp_a$ строго возрастает, поэтому существуют пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a^x$. По неравенству Бернулли ($a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$)

$$a^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \to +\infty, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \to 0.$$

Значит, по свойству сохранения промежутка $\exp_a(\mathbb{R}) = \langle 0, +\infty)$. Кроме того, значение 0 не принимается в силу строгой монотонности: если $a^{x_0} = 0$, то $a^x < 0$ при $x < x_0$, чего быть не может.

Доказательство при $0 < a < 1$ аналогично. $\square$

4. Логарифм. Мы доказали, что функция $\exp_a$ — биекция между $\mathbb{R}$ и $(0, +\infty)$.

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция, обратная к $\exp_a$, называется *логарифмом по основанию* a и обозначается $\log_a$.

Из теоремы о существовании и непрерывности обратной функции следует, что

$$\log_a\colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R},$$

функция $\log_a$ непрерывна, строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$;

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & 0 < a < 1, \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Графики показательной функции и логарифма при $a > 1$ изображены на рисунке 17a, а при $0 < a < 1$ — на рисунке 17b.

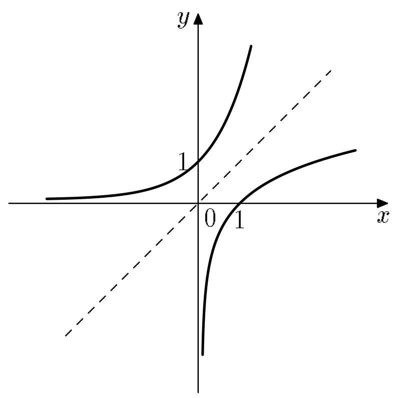

Рис. 17a

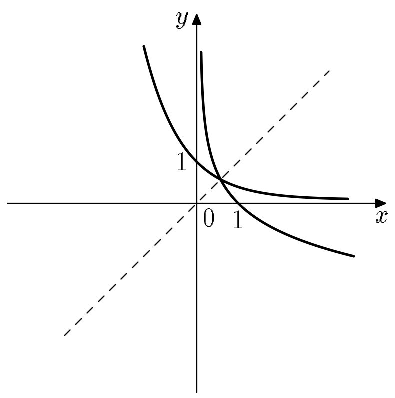

Рис. 17b

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. По определению обратной функции $\log_a x$ — это такое число y, что $a^y = x$. Другими словами, чтобы доказать равенство $\log_a x = y$, следует проверить, что $a^y = x$. Докажем этим приемом три свойства логарифма.

Далее мы не будем каждый раз упоминать условия $a > 0$, $a \neq 1$ ($b > 0$, $b \neq 1$), которым должно удовлетворять основание логарифма.

Л1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ при всех $x, y > 0$.

Доказательство. По основному свойству степени

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy. \quad \square$$

Л2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ *при всех* $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *В частности,* $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Доказательство. По свойству Е4

$$a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha. \quad \square$$

Л3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ *при всех* $x > 0$. *В частности,* $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Доказательство. По свойству Е4

$$b^{\log_a x \log_b a} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x,$$

то есть $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. $\square$

Наиболее удобны в использовании, и это будет видно далее, логарифмы по основанию e — *натуральные* логарифмы. Натуральный логарифм обозначается символом ln. Показательная функция с основанием e называется еще *экспонентой* и обозначается exp. Часто используются логарифмы по основаниям 10 и 2 — *десятичные* и *двоичные* логарифмы, что связано с использованием десятичной и двоичной систем счисления. Десятичный логарифм обозначается символом lg. Перечисленные обозначения логарифмов используются чаще всего, но некоторые авторы предпочитают другие обозначения (например, log для натурального или даже lg для двоичного логарифма).

Свойство Л3 позволяет выражать логарифмы по любому основанию через логарифмы по одному конкретному основанию. Например, можно выразить все логарифмы через натуральные:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Если известны натуральные логарифмы, то по формуле

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x$$

можно вычислять десятичные. Здесь $\lg e$ — коэффициент перехода, который вычисляется один раз:

$$\lg e = 0,43429\ldots$$

2. Степенная функция (продолжение). При всех $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ по свойству E4 верна формула

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Поэтому *степенная функция* e_α *непрерывна* на $(0, +\infty)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ (ранее это было установлено при рациональных α). Если α иррационально, то

$$e_\alpha \colon [\,0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} [\,0, +\infty), \quad \alpha > 0,$$
$$e_\alpha \colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{на}} (0, +\infty), \quad \alpha < 0.$$

Непрерывность e_α в нуле при $\alpha > 0$ также имеет место: если $x_n > 0$, $x_n \to 0$, то $y_n = \ln x_n \to -\infty$ и $e_\alpha(x_n) = e^{\alpha y_n} \to 0 = e_\alpha(0)$.

Замечание 1. Обозначения $\log_a$ для логарифма и exp для экспоненты являются общепринятыми, в отличие от обозначений e_α и $\exp_a$ для степенной и показательной функции. Мы ввели последние два обозначения, чтобы различать функции и их значения в точке x, обозначаемые x^α и a^x. Можно было обойтись и без новых символов, используя запись $(\cdot)^\alpha$ и $a^{(\cdot)}$, но эти обозначения имеют свои неудобства.

Замечание 2. Существуют разные соглашения, касающиеся определения степени. Некоторые авторы считают, что степенная функция $e_\alpha(x) = x^\alpha$ определена только при $x > 0$ (что не мешает им на соседней странице использовать запись $(-1)^n$); другие делают оговорку для целых α. Третьи различают, например, символы $\sqrt[3]{x}$ и $x^{1/3}$ и считают, что первый определен для всех x, а второй — только для положительных. Мы считаем степень определенной на самом широком множестве, на котором ее можно разумно определить (ограничиваясь вещественными числами), и не видим никаких математических оснований сужать область определения степени.

5–6. Синус и косинус. Мы будем пользоваться школьным определением косинуса и синуса как абсциссы и ординаты точки единичной окружности, а также всеми тригонометрическими формулами, выведенными на его основе. Полнота этого определения зависит от того, насколько строго определено соответствие между вещественными числами (точками числовой прямой) и точками единичной окружности (“углами”, “поворотами” и т.п.). Обратив внимание на имеющийся в школьном определении пробел, мы сейчас только скажем, что есть, и не одна, принципиальная возможность его ликвидировать (не опираясь, разумеется, на следствия этого определения, чтобы не попасть в порочный круг). Эти возможности обсуждаются при изучении интегралов и рядов.

Лемма 3. *Если* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *то*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Доказательство. Изобразим единичную окружность и угол в x радиан (рисунок 18).

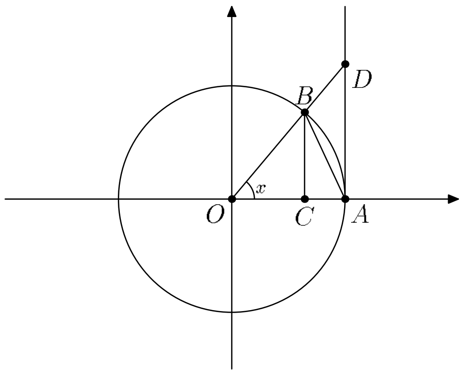

Рис. 18

На рисунке

$$\triangle OAB \subset \text{сект.}OAB \subset \triangle OAD.$$

Поэтому площади фигур связаны неравенством

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект.}OAB} < S_{\triangle OAD}.$$

Учитывая, что

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\,|OA|\,|BC|,$$
$$S_{\text{сект.}OAB} = \frac{1}{2}\,|OA|^2\,x, \quad S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}\,|OA|\,|AD|,$$
$$|OA| = 1, \quad |BC| = \sin x, \quad |AD| = \operatorname{tg} x,$$

получаем требуемое. $\square$

Следствие 1. *При всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|,$$

причем равенство имеет место только при $x = 0$.

Доказательство. При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ строгое неравенство доказано в лемме. Если $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x,$$

и неравенство доказано при всех $x > 0$. Если же $x < 0$, то $-x > 0$, и по доказанному

$$|\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = |x|.$$

Следствие 2. *Функции синус и косинус непрерывны на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Непрерывность косинуса доказывается аналогично или с помощью формулы приведения

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

уже доказанной непрерывности синуса и теоремы о непрерывности композиции.

Графики синуса и косинуса изображены на рисунках 19 и 20.

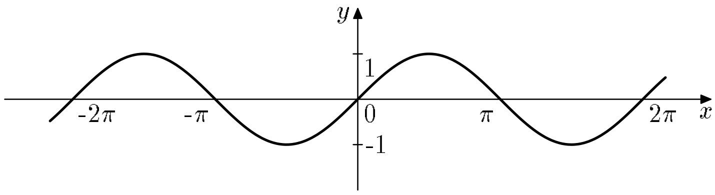

Рис. 19

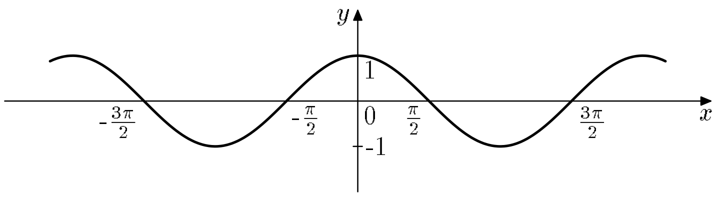

Рис. 20

7–8. Тангенс и котангенс. *Функции*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

непрерывны на своих областях определения по теореме о непрерывности частного.

Графики тангенса и котангенса изображены на рисунках 21 и 22.

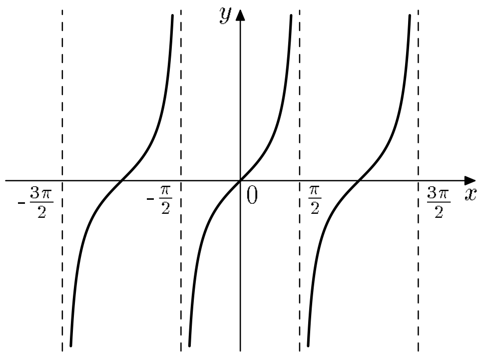

Рис. 21

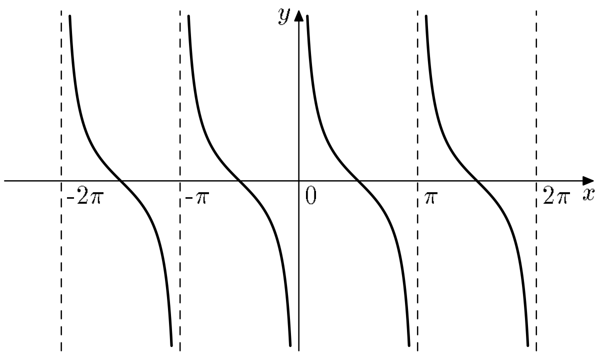

Рис. 22

9. Арксинус. Функция

$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

не является обратимой, так как принимает свои значения более одного раза (даже бесконечно много раз). Но сужение синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\text{на}} [-1, 1]$$

строго возрастает, и потому обратимо.

Определение. Функция, обратная к сужению синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом:*

$$\arcsin = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции

$$\arcsin\colon [-1,1] \xrightarrow{\text{на}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

функция арксинус строго возрастает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in [-1,1]$, то равенство $y = \arcsin x$ равносильно тому, что $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin y = x$.

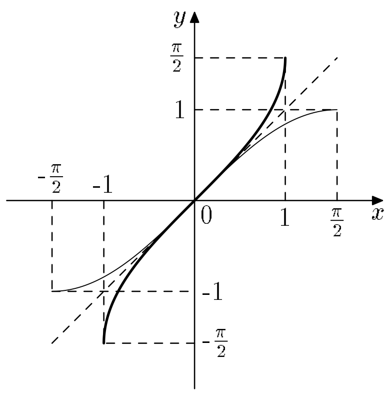

Рис. 23

10. Арккосинус. Функция

$$\cos\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} [-1,1]$$

не является обратимой. Но сужение косинуса на отрезок $[0,\pi]$:

$$\cos\big|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \xrightarrow{\text{на}} [-1,1]$$

строго убывает, и потому обратимо.

Определение. Функция, обратная к сужению косинуса на отрезок $[0,\pi]$, называется *арккосинусом:*

$$\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции

$$\arccos\colon [-1,1] \xrightarrow{\text{на}} [0,\pi],$$

функция арккосинус строго убывает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in [-1,1]$, то равенство $y = \arccos x$ равносильно тому, что $y \in [0,\pi]$ и $\cos y = x$.

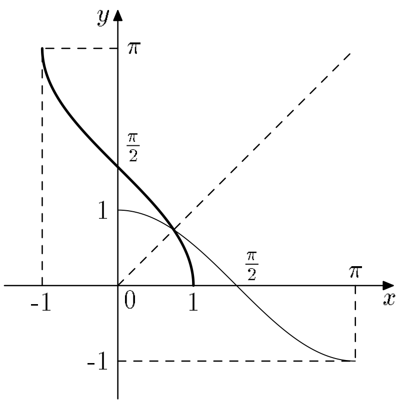

Рис. 24

Докажем тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in [-1,1].$$

Обозначим $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ и докажем, что $y = \arcsin x$. Действительно, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\arccos x \in [0,\pi]$. С другой стороны,

$$\sin y = \cos\arccos x = x. \quad \square$$

11. Арктангенс. Функция тангенс не является обратимой. Но сужение тангенса на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\operatorname{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$$

строго возрастает, и потому обратимо.

Определение. Функция, обратная к сужению тангенса на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, называется *арктангенсом:*

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции

$$\operatorname{arctg} \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

функция арктангенс строго возрастает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in \mathbb{R}$, то равенство $y = \operatorname{arctg} x$ равносильно тому, что $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} y = x$.

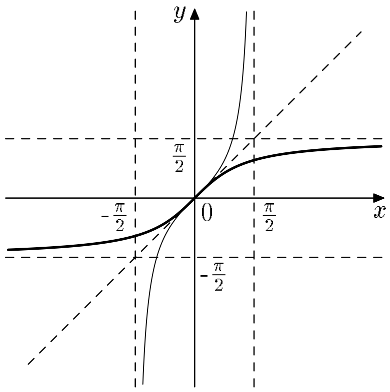

Рис. 25

12. Арккотангенс. Функция котангенс не является обратимой. Но сужение котангенса на интервал $(0, \pi)$:

$$\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)} \colon (0, \pi) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$$

строго убывает, и потому обратимо.

Определение. Функция, обратная к сужению котангенса на интервал $(0, \pi)$, называется *арккотангенсом:*

$$\operatorname{arcctg} = \left(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции

$$\operatorname{arcctg} \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} (0, \pi),$$

функция арккотангенс строго убывает и непрерывна. По определению обратной функции, если $x \in \mathbb{R}$, то равенство $y = \operatorname{arcctg} x$ равносильно тому, что $y \in (0, \pi)$ и $\operatorname{ctg} y = x$.

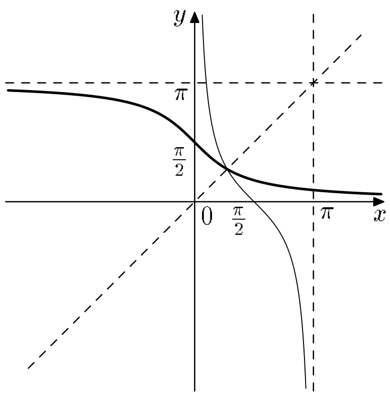

Рис. 26

Графики обратных тригонометрических функций изображены на рисунках 23–26.

Докажем тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$ и докажем, что $y = \operatorname{arctg} x$. Действительно, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, так как $\operatorname{arcctg} x \in (0, \pi)$. С другой стороны,

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} \operatorname{arcctg} x = x. \quad \Box$$

Итак, мы определили двенадцать основных элементарных функций и доказали их непрерывность. Ввиду того, что арифметические операции и композиция не выводят из класса непрерывных функций, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.*

§ 4. Замечательные пределы и сравнение функций

Замечательными пределами называют пять равенств, часто использующихся при раскрытии неопределенностей.

31.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. По лемме 3 § 3 при всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{4}$$

Так как все три части неравенства (4) — четные функции, неравенство верно и при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. При $x \to 0$ левая часть (4) стремится к 1 в силу непрерывности косинуса. По теореме о сжатой функции получаем требуемое. $\Box$

Полученный результат можно сформулировать и так: если доопределить функцию $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ в нуле единицей, то получившаяся функция будет непрерывна на $\mathbb{R}$. Здесь и далее удобно пользоваться этим соглашением и доопределять функции по непрерывности.

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Доказательство. Пользуясь замечательным пределом для синуса, а также непрерывностью косинуса и теоремой об арифметических действиях над функциями, имеющими предел, находим:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2},$$
$$\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1.$$

Для вычисления третьего предела сделаем замену $x=\sin y$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Замену можно обосновать, например, так. Функция $f(x)=\arcsin x$ непрерывна в точке 0, $f(0)=0$, а функция $g(y)=\frac{y}{\sin y}$ непрерывна в точке 0, $g(0)=1$. По теореме о непрерывности композиции функция $g(f(x))=\frac{\arcsin x}{x}$ непрерывна в точке 0, и $g(f(0))=1$.

Последний предел вычисляется аналогично. $\square$

При обосновании замены переменной вместо теоремы о непрерывности композиции можно было воспользоваться замечанием к ней или языком последовательностей, как сделано далее при вычислении пределов 4 и 5.

З2.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Доказательство. Напомним, что число e определялось как предел последовательности:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разница между этим равенством и доказываемым в том, что теперь речь идет о пределе не последовательности, а функции $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, заданной на $\mathbb{R} \setminus [-1,0]$: аргумент x не обязан принимать натуральные и даже положительные значения.

Для доказательства воспользуемся языком последовательностей. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \to \infty$ и докажем, что

$$f(x_n) \to e. \tag{5}$$

1. Пусть сначала $x_n \in \mathbb{N}$ для всех n. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению числа e подберем такой номер K, что для всех номеров (то есть натуральных чисел) $k > K$ будет $|f(k) - e| < \varepsilon$. Но, начиная с некоторого номера, $x_n > K$, а тогда $|f(x_n) - e| < \varepsilon$, что и означает выполнение (5).

2. Пусть $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant 1$, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что все $x_n \geqslant 1$. Уменьшая или увеличивая основание и показатель степени, получим неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которые перепишем в виде

$$\frac{f\bigl([x_n]+1\bigr)}{1+\frac{1}{[x_n]+1}} \leqslant f(x_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right) f\bigl([x_n]\bigr). \tag{6}$$

Так как $\bigl\{[x_n]\bigr\}$ и $\bigl\{[x_n]+1\bigr\}$ — последовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, то по доказанному $f\bigl([x_n]\bigr) \to e$ и $f\bigl([x_n]+1\bigr) \to e$. Следовательно, крайние части в (6) стремятся к e, а тогда по теореме о сжатой последовательности и $f(x_n)$ стремится к e.

3. Пусть $x_n \to -\infty$; тогда $y_n = -x_n \to +\infty$ и $y_n - 1 \to +\infty$. По доказанному

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right) f(y_n-1) \to e.$$

4. Пусть, наконец, $x_n \notin [-1, 0]$, $x_n \to \infty$, а в остальном $\{x_n\}$ произвольна. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности $\{x_n\}$ конечно, то $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$, и соотношение $f(x_n) \to e$ уже доказано. Если же в последовательности бесконечно много и положительных, и отрицательных членов, то разобьем натуральный ряд на две подпоследовательности $\{n_k\}$ и $\{m_l\}$: $x_{n_k} > 0$, $x_{m_l} < -1$. По доказанному $f(x_{n_k}) \to e$ и $f(x_{m_l}) \to e$. По лемме 5 § 3 главы 2 о подпоследовательностях $f(x_n) \to e$. $\square$

Замечание 1. Заменяя x на $\frac{1}{x}$, второй замечательный предел можно записать и так:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

33. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доказательство. Так как $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$, достаточно доказать равенство для натурального логарифма. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Во втором равенстве мы воспользовались непрерывностью логарифма в точке e и теоремой о непрерывности композиции (для ее применения мы доопределяем $(1+x)^{1/x} = e$ при $x = 0$). $\square$

34. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При $\alpha = 0$ доказываемое равенство тривиально; пусть $\alpha \neq 0$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \to 0$,

$x_n \neq 0$; не уменьшая общности, можно считать, что $|x_n| < 1$. Тогда в силу непрерывности и строгой монотонности степенной функции $y_n = (1 + x_n)^\alpha - 1 \to 0$, $y_n \neq 0$. При этом

$$\alpha \ln(1 + x_n) = \ln(1 + y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма, находим

$$\frac{(1 + x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)}\, \alpha\, \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} \to \alpha. \quad \Box$$

35. $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad a > 0.$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Доказательство. При $a = 1$ доказываемое равенство тривиально; пусть $a \neq 1$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Тогда в силу непрерывности и строгой монотонности показательной функции $y_n = a^{x_n} - 1 \to 0$, $y_n \neq 0$. При этом

$$x_n \ln a = \ln(1 + y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма, находим:

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln a \to \ln a. \quad \Box$$

Цель следующей серии определений — придать четкий смысл высказываниям типа “одна функция стремится к нулю (бесконечности) быстрее другой”, “две функции стремятся к нулю (бесконечности) с одинаковой скоростью” и т.п.

Определение. Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, x_0 — предельная точка D. Если существуют функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие что

$$f(x) = \varphi(x) g(x) \text{ для всех } x \in \dot{V}_{x_0} \cap D \tag{7}$$

и

1) φ ограничена на $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то говорят, что функция f *ограничена по сравнению* с g при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \to x_0; \tag{8}$$

2) $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, то говорят, что функция f — *бесконечно малая по сравнению* с g при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \qquad x \to x_0; \tag{9}$$

3) $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$, то говорят, что функции f и g *эквивалентны* или *асимптотически равны* при $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) \sim g(x), \qquad x \to x_0. \tag{10}$$

Определение. Пусть D — произвольное множество, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если существует число $C > 0$, такое что $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ для всех $x \in D$, то говорят, что функция f *ограничена по сравнению* с g на множестве D, и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \qquad x \in D. \tag{11}$$

Определение. Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ (при $x \to x_0$ или $x \in D$), то говорят, что функции f и g *сравнимы* (при $x \to x_0$ или $x \in D$ соответственно), и пишут $f \asymp g$.

Читают формулы (8), (9) и (11), соответственно, так: “$f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0”, “$f(x)$ есть o-малое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0”, “$f(x)$ есть O-большое от $g(x)$ при x, принадлежащем D”. O-символы были введены в математику Э. Ландау. Соотношения с O-символами и символами

$\sim$ и $\asymp$ называют асимптотическими. Если ясно, о какой точке x_0 идет речь, то запись $x \to x_0$, а иногда и обозначение аргумента x опускают и пишут, например, $f = o(g)$.

Обсудим подробнее свойства асимптотических соотношений.

Замечание 1. 1. Соотношение (8) равносильно следующему: существуют число $C > 0$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|, \qquad x \in \dot{V}_{x_0} \cap D. \tag{12}$$

2. Соотношение (9) равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_{x_0} точки x_0, такая что

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|, \qquad x \in \dot{U}_{x_0} \cap D. \tag{13}$$

Доказательство. Эти утверждения сразу следуют из определений; тем не менее, приведем подробное доказательство.

1. Если выполнено соотношение (8), то существуют окрестность V_{x_0} и функция φ из определения. В силу ограниченности φ существует такая постоянная $C > 0$, что $|\varphi(x)| \leqslant C$ для всех $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$. Из равенства (7) следует (12).

Обратно, пусть существуют такие число $C > 0$ и окрестность V_{x_0}, что выполнено (12). Заметим, что для всех $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$, если $g(x) = 0$, то и $f(x) = 0$. Положим при $x \in D$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0, \\ 0, & g(x) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда на $\dot{V}_{x_0} \cap D$ будет $f = \varphi g$ и $|\varphi| \leqslant C$, то есть выполнено (8).

2. Пусть выполнено (9), то есть существуют окрестность V_{x_0} и функция φ из определения. Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, найдется такая окрестность U_{x_0}, содержащаяся в V_{x_0}, что $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ на $\dot{U}_{x_0} \cap D$. Значит, верно соотношение (13).

Обратно, если V_{x_0} — окрестность, подобранная по числу $\varepsilon = 1$, а функция φ при $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$ определяется равенством (14), то $f = \varphi g$ на $\dot{V}_{x_0} \cap D$, и по условию $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Значит, верно соотношение (9). $\square$

Замечание 2. Пусть существует такая окрестность U_{x_0} точки x_0, что g не обращается в нуль в $\dot{U}_{x_0} \cap D$. Тогда определение можно упростить.

1. Соотношение (8) равносильно следующему: существует окрестность V_{x_0} точки x_0, такая что функция $\frac{f}{g}$ ограничена в $\dot{V}_{x_0} \cap D$.

2. Соотношение (9) равносильно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

3. Соотношение (10) равносильно тому, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1.$$

Для *доказательства* следует обозначить частное $\frac{f}{g}$ через φ.

Замечание 2 удобно при проверке асимптотических соотношений на практике, поскольку для элементарных функций дополнительное условие из замечания обычно выполняется.

Замечание 3. 1. *Асимптотическое равенство функций является отношением эквивалентности (в смысле § 4 введения).*

2. *Соотношения $f \sim g$, $f = g + o(g)$ и $f = g + o(f)$ равносильны.*

3. *Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$.*

4. *Если $\alpha \neq 0$, $f \sim \alpha g$, то $f \asymp g$.*

Читатель легко докажет эти факты сам. Утверждения, обратные к третьему и четвертому, неверны (см. далее формулу (15)).

Замечание 4. Иногда символы O и o применяют к отображениям со значениями в нормированных пространствах (не обязательно в одном и том же): пишут $f = o(g)$, если $\|f\| = o(\|g\|)$, и аналогично для O.

Замечание 5. Найденные замечательные пределы можно записать в виде асимптотических равенств: при $x \to 0$

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

или (см. замечание 3)

$$\sin x = x + o(x), \qquad \operatorname{tg} x = x + o(x),$$
$$\arcsin x = x + o(x), \qquad \operatorname{arctg} x = x + o(x),$$
$$\ln(1+x) = x + o(x), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$a^x = 1 + x\ln a + o(x), \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x).$$

Вот еще несколько примеров использования новых символов:

$$x = o(x^2), \quad x \to \infty, \qquad x^2 = o(x), \quad x \to 0,$$
$$\sin x = O(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = O(x), \quad x \to 0,$$
$$x = O(\sin x), \quad x \to 0, \qquad x \neq O(\sin x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$x \asymp x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0. \tag{15}$$

Привычно, что всякое равенство может быть прочитано как слева направо, так и справа налево: если “a равно b”, то и “b равно a”. Равенства с O-символами выглядят странным исключением. Например, равенство $\sin x = O(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ верно, а равенство $O(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ не допускает однозначного истолкования: не всякая функция, являющаяся $O(x)$, есть $\sin x$. Кроме того, из $a = c$, $b = c$ следует, что $a = b$, но из равенств $\sin x = O(x)$, $x = O(x)$ нелепо выводить, что $\sin x = x$.

Этот кажущийся парадокс вызван только выбором обозначений. На самом деле, $O(g)$ и $o(g)$ — это множества функций f, удовлетворяющих определению, а равенства $f = O(g)$ и $f = o(g)$ означают включения $f \in O(g)$ и $f \in o(g)$. Так, $O(1)$ означает класс ограниченных функций (на множестве D или $\dot{V}_{x_0} \cap D$), а $o(1)$ — класс бесконечно малых в точке x_0 функций. Равенства вида $o(g) = O(g)$ означают включение левой части в правую. Однако, по традиции в соотношениях с O-символами используют знак равенства, что бывает удобно, так как, например, позволяет переносить O-члены из одной части равенства в другую.

Для асимптотических соотношений справедливы формулы:

$$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(g) - o(g) = o(g) \ (\text{а не } 0),$$
$$2O(g) = O(g), \qquad O(g)O(h) = O(gh)$$

и т.п. Например, второе равенство следует понимать так: если $f_1 = o(g)$ и $f_2 = o(g)$, то и $f_1 - f_2 = o(g)$ (ясно, что функции f_1 и f_2 не обязаны уничтожаться). Читатель сам при необходимости разберется с подобными равенствами.

Следующая теорема описывает схему применения асимптотических равенств для вычисления пределов.

Теорема 1. Замена на эквивалентную при вычислении пределов. *Пусть X — метрическое пространство, $f, \widetilde{f}, g, \widetilde{g}\colon D \subset X \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, x_0 — предельная точка D,*

$$f(x) \sim \widetilde{f}(x), \ g(x) \sim \widetilde{g}(x), \qquad x \to x_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$.

2. *Если x_0 — предельная точка области определения $\frac{f}{g}$, то* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\widetilde{f}(x)}{\widetilde{g}(x)}$.

(В обоих утверждениях пределы одновременно существуют или нет и, если существуют, то равны.)

Замечание 1. Если $g(x) \not\equiv 0$ в $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то и $\widetilde{g}(x) \not\equiv 0$ в $\dot{\widetilde{V}}_{x_0} \cap D$, и обратно. Поэтому точка x_0 одновременно является или не является предельной для областей определения $\frac{f}{g}$ и $\frac{\widetilde{f}}{\widetilde{g}}$.

Доказательство. По определению эквивалентных функций существуют окрестности U_{x_0}, V_{x_0} и функции φ, ψ, стремящиеся к 1 при $x \to x_0$, такие что

$$f = \varphi\widetilde{f} \quad \text{на } \dot{U}_{x_0} \cap D, \qquad\qquad g = \psi\widetilde{g} \quad \text{на } \dot{V}_{x_0} \cap D.$$

Тогда на множестве $\dot{W}_{x_0} \cap D$, где $W_{x_0} = U_{x_0} \cap V_{x_0}$, верны оба равенства. Значит, на $\dot{W}_{x_0} \cap D$

$$fg = (\varphi\psi)(\widetilde{f}\widetilde{g}).$$

Следовательно, если $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$ существует и равен A, то по теореме о пределе произведения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ существует и равен A;

верно и обратное. Аналогично доказательство для предела частного (с той разницей, что может понадобиться еще сузить окрестность, чтобы φ и ψ не обращались в ней в нуль). $\square$

Замечание 2. Из условий теоремы не следует, что

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}(\widetilde{f}(x)\pm\widetilde{g}(x)).$$

Например, если $x_0=+\infty$, $f(x)=x+1$, $\widetilde{f}(x)=g(x)=\widetilde{g}(x)=x$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=1,\qquad \lim_{x\to x_0}(\widetilde{f}(x)-\widetilde{g}(x))=0.$$

Другими словами, при отыскании предела множители в произведении и частном заменять на эквивалентные можно, а слагаемые в сумме и разности, вообще говоря, нельзя.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x}$.
Учитывая, что при $x\to 0$

$$\begin{gathered}\ln(1+x+x^2)=x+x^2+o(x+x^2)=x+o(x),\\ \arcsin 3x=3x+o(x),\qquad 5x^3=o(x),\\ \sin 2x=2x+o(x),\qquad \operatorname{tg}^2 x=o(x),\end{gathered}$$

находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}=2.$$

Замечание 3. Для нахождения пределов функций вида f^g $(f>0)$ бывает удобно преобразование

$$(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)=A$. Тогда по свойствам экспоненты

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\begin{cases}e^A, & A\in\mathbb{R},\\ +\infty, & A=+\infty,\\ 0, & A=-\infty.\end{cases}$$

Этим приемом задача сводится к нахождению предела произведения.

Рассмотрим два асимптотических равенства:

$$\cos x \sim 1, \qquad x \to 0,$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad x \to 0,$$

очевидно, верных (предел отношения левой и правой части равен 1). Однако, второе из них содержит в каком-то смысле больше информации о функции косинус. Дело в том, что погрешность второго равенства бесконечно мала по сравнению с погрешностью первого:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - \cos x}{1 - \cos x} = 1 - \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{1 - \cos x} = 0.$$

Поэтому разумно ввести следующее понятие.

Пусть $f \sim g$, $f \sim h$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что *асимптотическое равенство* $f \sim h$ *точнее,* чем $f \sim g$.

Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $f\colon D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и задана конечная или счетная система функций $\{g_k\}_{k=0}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) или $\{g_k\}_{k=0}^\infty$, $g_k\colon D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, каждая из которых бесконечно мала по сравнению с предыдущей: при всех $k \in [\,0 : N-1]$ или $k \in \mathbb{Z}_+$

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), \qquad x \to x_0.$$

Большую роль в анализе играют асимптотические формулы вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0.$$

Эти равенства тем точнее, чем больше n. Особенно часто встречаются случаи, когда $g_k(x) = (x - x_0)^k$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) или $g_k(x) = x^{-k}$ ($x_0 = \infty$).

Не всякая функция f допускает асимптотическое разложение по заданной системе функций, но если такое асимптотическое разложение есть, то оно единственно.

Теорема 2. Единственность асимптотического разложения. *Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f, g_k : D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ ($k \in [0:n]$), при всех $k \in [0:n-1]$*

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(x)), \quad x \to x_0,$$

и для любой окрестности V_{x_0} существует точка $t \in \dot{V}_{x_0} \cap D$, в которой $g_n(t) \neq 0$. Тогда, если асимптотическое разложение функции f по системе $\{g_k\}$ существует, то оно единственно: из равенств

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0, \tag{16}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0 \tag{17}$$

следует, что $c_k = d_k$ при всех $k \in [0:n]$.

Доказательство. По индукции заключаем, что

$$g_k(x) = o(g_l(x)), \qquad x \to x_0, \ l < k.$$

Обозначим

$$E_k = \{x \in D : g_k(x) \neq 0\}, \qquad k \in [0:n].$$

Если бы функция g_k тождественно обращалась в нуль на множестве вида $\dot{U}_{x_0} \cap D$, то и функция $g_n = \varphi_k g_k$, где φ_k — функция из определения символа o, обращалась бы тождественно в нуль на множестве $\dot{V}_{x_0} \cap D$, что противоречит условию. Следовательно, x_0 — предельная точка каждого E_k.

Допустим противное: пусть $c_k = d_k$ не при всех $k \in [0:n]$. Положим

$$m = \min\{k \in [0:n] : c_k \neq d_k\}.$$

Из разложений (16) и (17) следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k g_k(x) + o(g_m(x)), \quad x \to x_0, \tag{18}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k g_k(x) + o(g_m(x)), \quad x \to x_0. \tag{19}$$

Вычтя (19) из (18), найдем

$$0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x)), \qquad x \to x_0.$$

Поделив на $g_m(x)$ при $x \in E_m$ и перейдя к пределу по множеству E_m, получим $c_m = d_m$, что противоречит определению m. $\square$

Замечание 1. Если асимптотическое разложение функции f по системе $\{g_k\}$ существует, а g_l при некотором $l \in [0 : n]$ — тождественный нуль на множестве вида $\dot{V}_{x_0} \cap D$, то все функции g_k при $k \in [l : n]$ и разность $f - \sum\limits_{k=0}^{l-1} c_k g_k$ обладают тем же свойством. Поэтому при $k \in [l : n]$ коэффициенты c_k в асимптотическом разложении произвольны.

Один частный случай асимптотического разложения — известное из школьного курса понятие наклонной асимптоты функции (графика функции). Напомним определения асимптот.

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f задана по крайней мере на $\langle a, x_0)$ или $(x_0, b\rangle$ и действует в $\mathbb{R}$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* функции f, если $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$ равны $-\infty$ или $+\infty$.

Определение. Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется *наклонной асимптотой* функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = \alpha x + \beta + o(1), \qquad x \to +\infty. \tag{20}$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$ функции, заданной по крайней мере на $(-\infty, b\rangle$.

Горизонтальная асимптота — частный случай наклонной при $\alpha = 0$. Прямая $y = \beta$ — горизонтальная асимптота функции f при $x \to \pm\infty$ тогда и только тогда, когда $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \beta$.

Теорема 3. О наклонной асимптоте.
Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Прямая* $y = \alpha x + \beta$ — *асимптота* f *при* $x \to +\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x). \tag{21}$$

Доказательство. Если прямая $y = \alpha x + \beta$ — асимптота f, то

$$f(x) = \alpha x + \beta + \varphi(x), \qquad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{22}$$

Поэтому

$$\frac{f(x)}{x} - \alpha = \frac{\beta + \varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$f(x) - \alpha x = \beta + \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \beta.$$

Обратно, если выполнены равенства (21), то, обозначив

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x - \beta,$$

мы получим (22), что равносильно (20). $\square$

Второй частный случай асимптотических разложений — равенства вида

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

изучение которых составляет дифференциальное исчисление.

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная и ее вычисление

Дифференциальное исчисление было создано в 17 веке Г. Лейбницем и И. Ньютоном. Вкратце основную идею дифференциального исчисления можно сформулировать так: всякая "достаточно хорошая" функция "в малом" линейна. (Здесь, как и в школе, *линейной* названа функция вида $g(x) = \alpha x + \beta$, то есть функция, график которой — прямая. Это, хотя и привычное, но не очень удобное словоупотребление, так как при $\beta \neq 0$ эта функция не обладает свойством линейности в том смысле, что $g(\lambda x + \mu y) \neq \lambda g(x) + \mu g(y)$. Поэтому часто линейными называют лишь функции вида $g(x) = \alpha x$, а функции, линейные в "школьном" смысле, называют *аффинными*.) Линейные функции устроены очень просто, и, зная свойства линейных функций, близких к данной, можно делать выводы о свойствах самой функции.

Перейдем к определениям. В этой главе, если из контекста не следует противное, $\langle a, b\rangle$ означает невырожденный промежуток.

Определение 1. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0. При этом число A называется *производной* функции f в точке x_0.

Определение 2. Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

равный числу $A \in \mathbb{R}$, то функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, а число A — ее *производной* в точке x_0.

Теорема 1. *Определения 1 и 2 дифференцируемости и производной равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть функция f дифференцируема, а A — ее производная в точке x_0 в смысле определения 1. Определение 1 говорит, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \varphi(x)(x-x_0), \tag{1}$$

где $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. Перенося $f(x_0)$ в левую часть и деля на $x-x_0$, находим, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \varphi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A,$$

то есть функция f дифференцируема, а A — ее производная в смысле определения 2.

2. Обратно, пусть функция f дифференцируема, а A — ее производная в точке x_0 в смысле определения 2. Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A.$$

Тогда $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ и выполнено равенство (1), то есть функция f дифференцируема, а A — ее производная в смысле определения 1. $\square$

Из доказанной теоремы и единственности предела следует единственность производной в смысле определения 1 (она также вытекает из теоремы 2 § 4 главы 3 о единственности асимптотического разложения).

Производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (это обозначение Ж. Лагранжа). Также употребляются обозначения

Лейбница $\frac{df(x_0)}{dx}$ (читается: “дэ-эф от x_0 по дэ-икс”) и Коши $Df(x_0)$. Громоздкое обозначение $\frac{df(x_0)}{dx}$ пока следует рассматривать как единый символ.

Дробь $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ называется *разностным отношением.* Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Замечание 1. Пусть, как обычно, $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0 \in \langle a - x_0, b - x_0 \rangle$ — приращение аргумента, $\Delta y = y - y_0$ — приращение функции. Обозначим $\alpha(\Delta x) = \varphi(x) = \varphi(x_0 + \Delta x)$ (зависимость A, α и φ от заранее фиксированной точки x_0 в обозначениях не отражать не будем). Тогда равенство (1) перепишется так:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{2}$$

где $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Значение $\alpha(0)$ не определяется равенством (2). Договоримся считать, что $\alpha(0) = 0$; тогда функция α будет непрерывна в нуле.

Таким образом, определение 1 дифференцируемости можно переформулировать так: если существуют такое число $A \in \mathbb{R}$ и такая функция $\alpha \colon \langle a - x_0, b - x_0 \rangle \to \mathbb{R}$, в нуле непрерывная и равная нулю, что выполнено равенство (2), то функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0. При этом число A называется *производной* функции f в точке x_0.

Иногда, если ясно, о какой точке x_0 идет речь, то производную обозначают y', $\frac{dy}{dx}$ или Dy, а равенство из определения 2 записывают короче:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Другими словами, производная есть предел отношения приращения функции к вызвавшему его бесконечно малому приращению аргумента.

Определение. Величина $f'(x_0)\Delta x$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается $df(x_0, \Delta x)$. Также используются сокращенные обозначения $df(x_0)$, df_{x_0} или даже dy.

Для тождественной функции $y = x$ дифференциал в любой точке совпадает с приращением: $dy = dx = \Delta x$, поэтому приращение независимой переменной x обозначают dx наравне с Δx и пишут $df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$. Это соглашение позволяет трактовать обозначение производной $\frac{df(x_0)}{dx}$ и как дробь.

Согласно равенству (2) дифференциал $df(x_0, \Delta x)$ есть линейная часть приращения функции. Дифференциалом функции f в точке x_0 также называют линейную функцию $df(x_0, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующую по формуле $df(x_0, h) = f'(x_0)h$ (здесь h — произвольное вещественное число, не обязательно такое, что $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$).

Замечание 2. Определения дифференцируемости и производной без изменений распространяются на следующую ситуацию: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и существует такое $\delta > 0$, что $Q = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ — невырожденный промежуток. В силу локальности предела дифференцируемость в точке x_0 функций f и $f\big|_Q$ равносильна, поэтому в дальнейшем при изучении дифференцируемости в точке мы будем для простоты рассматривать функции, заданные на промежутке.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D_1 — множество дифференцируемости f, то есть множество всех тех точек D, в которых f дифференцируема. Функция $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}$, которая каждому $x \in D_1$ сопоставляет число $f'(x)$, называется *производной* (подробнее, *производной функцией*) функции f.

Говорят, что функция f дифференцируема на множестве E, если она дифференцируема в каждой точке E.

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x_0 \in \langle a, b), $$
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x_0 \in (a, b\rangle$$

называются, если существуют, соответственно *правосторонней* и *левосторонней* (или *правой* и *левой*) *производной* функции f в точке x_0.

В концевой точке промежутка, на котором задана функция, определения односторонней и обычной производной совпадают.

Замечание 3. Если предел разностного отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ равен $(\pm)\infty$, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 бесконечную производную, и пишут $f'(x_0) = (\pm)\infty$. Аналогично определяются бесконечные односторонние производные. Подчеркнем, что определение дифференцируемой функции не меняется: функция, имеющая в точке бесконечную производную, не дифференцируема в этой точке.

Замечание 4. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Тогда для существования производной f в точке x_0 (конечной или бесконечной) необходимо и достаточно, чтобы односторонние производные f в точке x_0 существовали и были равны друг другу.

Это замечание вытекает из аналогичного замечания 1 к определению односторонних пределов из § 1 главы 3.

Замечание 5. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Действительно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0). \quad \square$$

Как показывают примеры ниже, обратное утверждение неверно: из непрерывности функции в точке не следует дифференцируемость.

Пример 1. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \pm 1,$$

поэтому f не дифференцируема в нуле.

Пример 2. Пусть $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда f непрерывна, но разностное отношение

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела при $x \to 0$ ни справа, ни слева, поэтому f не имеет в нуле даже односторонних производных.

Долгое время математики думали, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду, кроме отдельных исключительных точек, как в приведенных примерах. Но это оказалось неверным: в 1860 году Вейерштрасс построил пример функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной всюду, но не дифференцируемой ни в одной точке.

Пример 3. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет в нуле производную, равную $+\infty$, так как

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = x^{-2/3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Пример 4. Если $f(x) = \sqrt{|x|}$, то $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$, $f'(0) = \infty$.

Графики этих функций изображены далее, на рисунках 28а и 28с.

Пример 5. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ имеет в нуле производную, равную $+\infty$, так как

$$\frac{\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} 0}{x - 0} = \frac{1}{|x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Этот пример показывает, что наличие у функции в точке бесконечной производной не влечет непрерывности в этой точке.

Прежде чем устанавливать дальнейшие свойства производных, рассмотрим две задачи, которые в свое время привели к возникновению понятия производной.

Геометрический смысл производной (задача Лейбница о касательной). Из школьного курса геометрии известно определение касательной к окружности на плоскости: прямая называется касательной к окружности, если она имеет с окружностью ровно одну общую точку. Это свойство не удается принять за определение касательной к кривой в общем случае. Так, обе координатные оси имеют с параболой $y = x^2$ единственную общую точку $(0, 0)$, но ясно, что касательной к параболе в этой точке следует называть лишь ось абсцисс. С другой стороны, касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $(0, 1)$ хочется назвать прямую $y = 1$, хотя она имеет с графиком косинуса бесконечно много общих точек. Попытка дать определение касательной к графику функции естественным образом приводит к понятию производной.

Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $y_0 = f(x_0)$, f непрерывна в точке x_0, точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0) (рисунок 27).

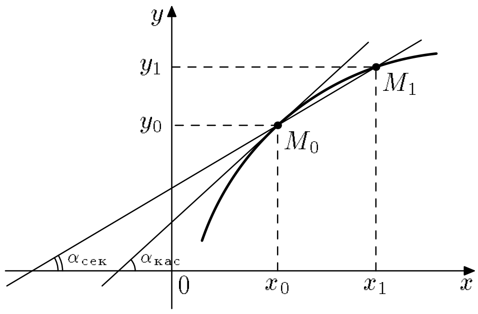

Рис. 27

Возьмем на графике функции f еще точку M_1 с координатами (x_1, y_1): $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_0$, $y_1 = f(x_1)$. Проведем прямую M_0M_1, которую будем называть *секущей.* Уравнение секущей M_0M_1 имеет вид

$$y = y_0 + k_{\text{сек}}(x - x_0),$$

где $k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\alpha_{\text{сек}}$ — угловой коэффициент (тангенс угла наклона) секущей. Ясно, что

$$k_{\text{сек}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

При приближении точки M_1 к M_0 секущая поворачивается вокруг точки M_0. Касательной называют предельное положение секущей при $M_1 \to M_0$ (или, что то же самое, при $x_1 \to x_0$). Подробнее, определение выглядит так.

Определение. Если существует конечный предел

$$k_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} k_{\text{сек}},$$

то прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую угловой коэффициент $k_{\text{кас}}$, называют *касательной* к графику функции f в точке M_0.

Если f непрерывна в точке x_0 и предел $k_{\text{кас}}$ равен $\pm\infty$, то касательной к графику функции f в точке M_0 называют прямую $x = x_0$ (рисунок 28a).

Аналогично определяются односторонние касательные.

Вместо "касательная в точке M_0" говорят также "касательная в точке x_0", называя лишь абсциссу.

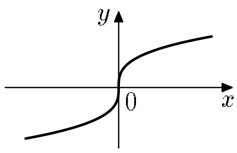

Рис. 28a

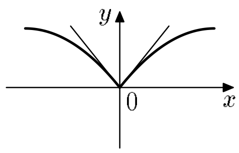

Рис. 28b

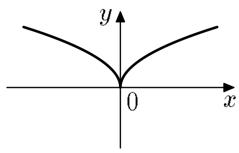

Рис. 28c

По определению существование не вертикальной касательной к графику функции f в точке M_0, то есть существование конечного предела $k_{\text{кас}}$, равносильно дифференцируемости f в точке x_0; при этом

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{кас}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Другими словами, производная есть угловой коэффициент касательной. Поэтому уравнение не вертикальной касательной к графику функции f в точке M_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Таким образом, если функция непрерывна в точке x_0, то наличие касательной у ее графика в точке x_0 равносильно существованию $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Если $x_0 \in (a, b)$, а $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ и различны, то различны и односторонние касательные, а график функции в точке x_0 имеет излом (рисунок 28b). Исключение составляет случай, когда одна из односторонних производных равна $+\infty$, в другая равна $-\infty$; тогда обе односторонние касательные вертикальны, но излом на графике все равно есть, поэтому мы считаем, что график не имеет касательной в точке x_0

(рисунок 28c). Если же хотя бы одной из односторонних производных не существует, то секущая не стремится ни к какому положению при $x \to x_0$ слева или справа, поэтому соответствующей касательной нет.

Замечание 1. Если $\ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то

$$f(x) - \ell(x) = o(x - x_0), \qquad x \to x_0. \tag{3}$$

В то же время, никакая другая прямая не обладает свойством (3). Поэтому свойство (3) иногда принимают за определение касательной (не вертикальной) к графику функции.

Рисунок 29 поясняет понятия приращения и дифференциала функции.

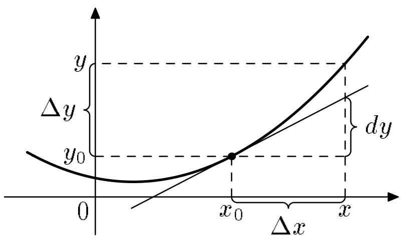

Рис. 29

Физический смысл производной (задача Ньютона о скорости). Ньютон пришел к понятию производной из физических соображений.

Пусть материальная точка движется по прямой. Обозначим через $s(t)$ путь, пройденный точкой за время от начального момента t_0 до t. Тогда путь, пройденный точкой за время от некоторого момента t_1 до $t_1 + \Delta t$, равен $\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)$.

Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ точки на отрезке времени между t_1 и $t_1 + \Delta t$ выражается формулой $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, верной как при $\Delta t > 0$, так и при $\Delta t < 0$. Предел

$$v_{\text{мгн}}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$$

называют *мгновенной* или *истинной скоростью* точки в момент t_1. По определению производной

$$v_{\text{мгн}}(t_1) = s'(t_1).$$

Итак, скорость есть производная пути по времени.

Подобным образом понятие производной возникает и в других ситуациях, когда речь идет о скорости изменения одной величины относительно другой.

Дифференцированием называют нахождение производных и, что равносильно, дифференциалов.

Правила дифференцирования. В этом пункте мы выведем правила дифференцирования результатов различных операций над функциями. Для краткости будем обозначать точку, в которой производится дифференцирование, буквой без индекса (например, x), а приращение аргумента одной буквой (например, h).

1. Производные суммы и разности. *Если функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a, b\rangle$, то функции $f + g$ и $f - g$ дифференцируемы в точке x и*

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x). \tag{4}$$

Доказательство. По определению производной как предела и теореме о пределе суммы

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \\ = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x) + g'(x).$$

Это и означает, что функция $f + g$ дифференцируема в точке x и для производной суммы верно равенство (4).

Доказательство утверждения для разности аналогично. $\square$

Замечание 1. Методом математической индукции правило дифференцирования суммы распространяется на несколько слагаемых:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x).$$

2. Производная произведения. *Если функции* $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in \langle a, b\rangle$, *то функция* fg *дифференцируема в точке* x *и*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{5}$$

Доказательство. Найдем предел разностного отношения:

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h) + \\ + f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

При переходе к пределу мы воспользовались определением производной и тем, что функция g, будучи дифференцируемой в точке x, непрерывна в этой точке. По определению функция fg дифференцируема в точке x и верно равенство (5). $\square$

Следствие 1. *Если функция* $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x \in \langle a, b\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *то функция* αf *дифференцируема в точке* x *и*

$$(\alpha f)'(x) = \alpha\, f'(x).$$

Для доказательства следует в качестве g взять функцию, тождественно равную α, и учесть, что производная постоянной функции равна нулю, так как разностное отношение тождественно равно нулю. Можно доказать следствие и непосредственно переходом к пределу.

Следствие 2. Линейность дифференцирования. *Если функции* $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in \langle a, b\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то функция* $\alpha f + \beta g$ *дифференцируема в точке* x *и*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x).$$

Замечание 2. Для произведения нескольких функций правило выглядит так:

$$(f_1 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_n'$$

(все значения функций и их производных берутся в точке x).

Предлагаем читателю провести подробное доказательство по индукции.

3. Производная частного. *Если функции* $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x \in \langle a, b\rangle$ *и* $g(x) \neq 0$, *то функция* $\frac{f}{g}$ *дифференцируема в точке* x *и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия $g(x) \neq 0$ и непрерывности функции g в точке x существует такое $\delta > 0$, что g не обращается в нуль на промежутке $(x-\delta, x+\delta)\cap\langle a, b\rangle$. Поэтому частное $\frac{f}{g}$ определено на таком промежутке, и можно ставить вопрос о дифференцируемости частного в точке x. Найдем предел разностного отношения:

$$\frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x) - \right.$$
$$\left. - f(x)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Это и означает, что функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x и верно равенство (6). $\square$

Замечание 3. Правила дифференцирования арифметических операций можно переписать для дифференциалов:

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha\, df + \beta\, dg,$$
$$d(fg) = g\, df + f\, dg, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}.$$

4. Производная композиции. *Если функция* $f\colon \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ *дифференцируема в точке* $x \in \langle a, b\rangle$, *а функция* $g\colon \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $f(x)$, *то функция* $g\circ f$ *дифференцируема в точке* x *и*

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим $y = f(x)$. Воспользуемся определением 1 дифференцируемости (в форме замечания 1) и запишем

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h,$$
$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k,$$

где функции α и β в нуле непрерывны и равны нулю. Подставляя во второе равенство $k = f'(x)h + \alpha(h)h = \varkappa(h)$, получаем

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x)) + g'(f(x))\big(f'(x)h + \alpha(h)h\big) + \beta(\varkappa(h))\varkappa(h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \gamma(h)h, \end{aligned}$$

где

$$\gamma(h) = g'(y)\alpha(h) + \beta(\varkappa(h))\big(f'(x) + \alpha(h)\big).$$

Ясно, что $\gamma(0) = 0$ и функция γ непрерывна в нуле по теоремам о непрерывности композиции и результатов арифметических операций. Поэтому выполнено определение дифференцируемости композиции $g \circ f$ в точке x, и верно равенство (7). $\square$

Замечание 1. По индукции правило дифференцирования композиции распространяется на несколько функций: производная композиции равна произведению производных в соответствующих точках. Например,

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'\big((g \circ f)(x)\big) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Поэтому правило дифференцирования композиции еще называют *правилом цепочки.*

Замечание 2. Для дифференциалов это правило звучит совсем просто: *дифференциал композиции равен композиции дифференциалов* (взятых в соответствующих точках).

Действительно, композиция двух линейных функций $u(h) = Ah$ и $v(k) = Bk$ есть линейная функция $w(h) = BAh$; в данном случае $A = f'(x)$, $B = g'(f(x))$.

5. Производная обратной функции. *Пусть $f \in C\langle a, b\rangle$, f строго монотонна, дифференцируема в точке $x \in \langle a, b\rangle$, $f'(x) \neq 0$. Тогда обратная к f функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8}$$

Доказательство. Напомним, что f^{-1} существует, определена на промежутке P (множестве значений f), строго монотонна и непрерывна по теореме 10 § 2 главы 3. Обозначим $y = f(x)$, возьмем приращение $k \neq 0$, такое что $y + k \in P$, и положим $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$. Тогда $h \neq 0$, $x = f^{-1}(y)$, $x + h = f^{-1}(y+k)$ и $f(x+h) - f(x) = k$. Составим разностное отношение

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)}$$

и найдем его предел при $k \to 0$. По условию

$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x)}.$$

Но $\tau(k) \underset{k \to 0}{\longrightarrow} 0$ по непрерывности f^{-1} в точке y. Следовательно,

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} \underset{k \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x)}$$

по теореме о непрерывности (или о пределе) композиции. □

Замечание 1. Равенство (8) можно переписать так:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Разумеется, аргумент обратной функции можно обозначить любой буквой, и часто его изначально обозначают буквой x:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Замечание 2. Дифференциал обратной функции в точке $f(x)$ есть функция, обратная к дифференциалу исходной в точке x.

Замечание 3. Правило дифференцирования обратной функции имеет наглядное геометрическое истолкование (рисунок 30a). Поскольку графики f и f^{-1} симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четверти, касательные к ним соответственно в точках x и y тоже симметричны. Следовательно, угловые коэффициенты касательных связаны равенством $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, то есть $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$.

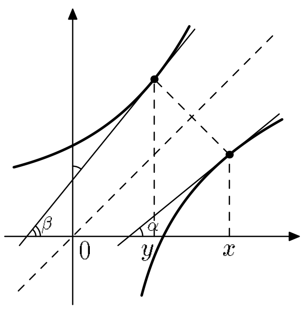

Рис. 30a

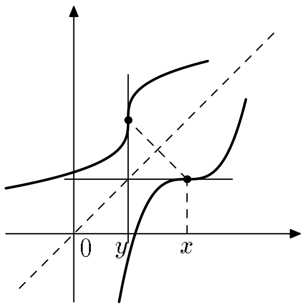

Рис. 30b

Рисунок 30b позволяет высказать предположение, что если при выполнении остальных условий правила $f'(x) = 0$, то $\left(f^{-1}\right)'(y) = \pm\infty$. Доказать это предположение остается читателю.

Пусть T — множество, $\varphi, \psi \colon T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\gamma = (\varphi, \psi) \colon T \to \mathbb{R}^2$. Определяет ли система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in T \tag{9}$$

y как функцию f от x? Другими словами, является ли множество $\gamma(T)$ графиком функции y от x? Если это так, то говорят, что система (9) задает функцию f *параметрически.* Переменную t в системе (9) называют *параметром.*

Ясно, что ответ на этот вопрос может быть отрицательным: окружность $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(t \in [0, 2\pi))$ не является графиком функции. Но если φ обратима, то ответ положительный: из первого уравнения системы находим $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда

$$y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big), \qquad x \in \varphi(T),$$

то есть $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Обычно для встречающихся на практике систем (9) множество параметров T можно разбить на несколько частей, на каждой из которых функция φ обратима.

Пусть теперь $T = \langle a, b\rangle$, $t \in \langle a, b\rangle$, $\varphi \in C\langle a, b\rangle$, φ строго монотонна, φ и ψ дифференцируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ — параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{10}$$

В самом деле, по правилам дифференцирования композиции и обратной функции

$$f'(x) = \big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)'(x) = \psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\big(\varphi^{-1}\big)'(x) = \frac{\psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Часто равенство (10) записывают в сокращенном виде:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

указывая переменную, по которой производится дифференцирование, в виде индекса. В этой записи не различаются функции и их значения, буква y в левой и правой части означает разные функции, а буква x в левой части означает независимую переменную, а в правой — функцию. Чтобы избежать недоразумений, при использовании кратких и старомодных обозначений не следует забывать, о каких именно объектах идет речь.

Формулы дифференцирования. В этом пункте мы выведем формулы для производных основных элементарных функций (таблицу производных). Эти равенства верны при всех тех значениях x, при которых обе части имеют смысл. По традиции, если это не приводит к недоразумениям, штрих, обозначающий производную, ставят не у символа, обозначающего функцию, а у всей формулы: например, вместо более точного обозначения $\sin' x$ пишут $(\sin x)'$.

1. $c' = 0$: *производная постоянной функции равна нулю.*

Этот факт уже отмечался.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
В частности, $x' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$. Считая, что $0 < |h| < |x|$, и пользуясь замечательным пределом 34 для степенной функции, находим

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x}\, x^{\alpha-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \alpha x^{\alpha-1}.$$

Если $\alpha \geqslant 1$, то формула верна и при $x = 0$:

$$\frac{(0+h)^\alpha - 0^\alpha}{h} = h^{\alpha-1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \left.\begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \end{cases}\right\} = \alpha \cdot 0^{\alpha-1}. \quad \square$$

Области определения степенных функций с различными показателями указаны в § 3 главы 3.

Замечание 1. При $\alpha \in (0,1)$ производная x^α в нуле (правосторонняя или двусторонняя, в зависимости от α) равна $+\infty$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1$.
В частности, $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. По замечательному пределу 35 для показательной функции

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\, \frac{a^h - 1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} a^x \ln a. \quad \square$$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. По замечательному пределу 33 для логарифма

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x}\, \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x \ln a}. \quad \square$$

5. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. По замечательному пределу 31 для синуса и непрерывности косинуса

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos x. \quad \square$$

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. По формуле для производной синуса и правилу дифференцирования композиции

$$(\cos x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x. \quad \square$$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. По формулам для производных синуса и косинуса и правилу дифференцирования частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \square$$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство. По формуле для производной тангенса и правилу дифференцирования композиции

$$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \frac{-1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \square$$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

Доказательство. Если $x \in (-1,1)$, то $y = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $(\sin y)' = \cos y > 0$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

Доказательство. Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$,

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

Замечание 2. В точках 1 и -1 производная арксинуса равна $+\infty$, а арккосинуса — $-\infty$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Доказательство. Если $x \in \mathbb{R}$, то $y = \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \square$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Доказательство. Так как $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad \square$$

Поскольку элементарные функции получаются из двенадцати основных с помощью арифметических операций и композиции, доказанные правила и формулы позволяют продифференцировать любую элементарную функцию во всех точках, где производная существует. Из них также видно, что производная элементарной функции является элементарной.

В заключение рассмотрим еще один прием. Будем считать функции дифференцируемыми и опускать в обозначениях точку, в которой берется производная. Ясно, что $|x|' = \operatorname{sign} x$ при всех $x \neq 0$. По правилу дифференцирования композиции, если $f \neq 0$, то

$$(\ln |f|)' = \frac{1}{|f|} \cdot \operatorname{sign} f \cdot f' = \frac{f'}{f}.$$

Частное $\frac{f'}{f}$ называется *логарифмической производной* функции f.

Иногда удобно находить производную f по формуле

$$f' = f \cdot (\ln |f|)'.$$

Найдем этим приемом производную функции f^g, где $f > 0$. Имеем:

$$(\ln f^g)' = (g \ln f)' = g' \ln f + g\, \frac{f'}{f},$$

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \ln f + g\, \frac{f'}{f}\right).$$

§ 2. Теоремы о среднем дифференциального исчисления

Теорема 1 (П. Ферма). *Пусть* $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ *или* $f(x_0) = \min\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, f *дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности значение в точке x_0 наибольшее, то есть $f(x) \leqslant f(x_0)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ при всех $x \in (x_0, b\rangle$. По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

Аналогично $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ при всех $x \in \langle a, x_0)$, и поэтому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

Следовательно, $f'(x_0) = 0$. $\square$

Замечание 1. Геометрический смысл теоремы Ферма таков: если во внутренней точке максимума (минимума) существует касательная к графику функции, то эта касательная горизонтальна (рисунки 31a и 31b).

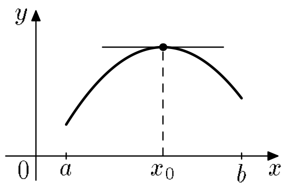

Рис. 31a

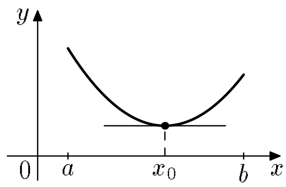

Рис. 31b

Замечание 2. Пример функции $f_1(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ показывает, что производной (касательной) в точке минимума может не существовать.

Замечание 3. Условие, что x_0 — внутренняя точка промежутка $\langle a, b \rangle$, существенно. Так, функция $f_2(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$ принимает наименьшее значение в точке 0, а наибольшее — в точке 1; при этом $f'(0) = 0$, а $f'(1) = 2$.

Теорема 2 (М. Ролль). *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Если x_1 и x_2 — концевые точки $[a, b]$, то по условию $f(x_1) = f(x_2)$, то есть наибольшее и наименьшее значения f совпадают. Поэтому f постоянна на $[a, b]$, и в качестве c можно взять любую точку (a, b). Если же x_1 или x_2 лежит в (a, b), то по теореме Ферма $f'(x_1) = 0$ или $f'(x_2) = 0$; поэтому можно положить $c = x_1$ или $c = x_2$. $\square$

Замечание 1. Геометрический смысл теоремы Ролля следующий: в условиях теоремы найдется точка, касательная в которой горизонтальна (рисунок 32a).

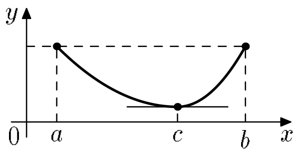

Рис. 32a

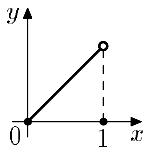

Рис. 32b

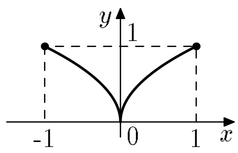

Рис. 32c

Замечание 2. Все условия теоремы Ролля существенны. Действительно, функция $f_1(x) = x$ $(x \in [0,1))$, $f_1(1) = 0$ разрывна в точке 1 (рисунок 32b), функция $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ $(x \in [-1,1])$ не имеет производной в точке 0 (рисунок 32c), функция $f_3(x) = x$ $(x \in [-1,1])$ принимает разные значения на концах отрезка. Остальным условиям теоремы эти функции удовлетворяют, но заключение для них не выполняется.

Замечание 3. Из дифференцируемости f следует ее непрерывность, поэтому заключение теоремы выполняется для дифференцируемых на $[a,b]$ функций. В теореме Ролля функции разрешается не иметь производной на концах отрезка. Так, функция $f_4(x) = \sqrt{1-x^2}$ не дифференцируема на концах отрезка $[-1,1]$, но условиям теоремы удовлетворяет.

Замечание 4. Из теоремы Ролля следует, что *между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит нуль ее производной.*

Теорема 3 (Ж. Лагранж). *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{11}$$

Теорема 4 (О. Коши). *Пусть функции f и g непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$.*

Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{12}$$

Замечание 1. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, соответствующий функции $g(x) = x$. Поэтому достаточно доказать теорему Коши. Однако, теорема Лагранжа применяется гораздо чаще, чем более общая теорема Коши, поэтому сформулирована отдельно.

Замечание 2. Если f выражает зависимость пути от времени, то разностное отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть средняя скорость точки на отрезке $[a, b]$. Теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a, b)$, в которой мгновенная скорость равна средней. Поэтому теорема Лагранжа также называется **теоремой о среднем**, а теорема Коши — **обобщенной теоремой о среднем** дифференциального исчисления. Равенство (11), которое еще записывают в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

выражает приращение функции через приращение аргумента. Оно называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений,* а равенство (12) — *формулой Коши.* Саму теорему Лагранжа еще называют **теоремой о конечных приращениях**.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как иначе по теореме Ролля нашлась бы точка $t \in (a, b)$, в которой $g'(t) = 0$. Положим $\varphi = f - Kg$, где константу K подберем из условия $\varphi(a) = \varphi(b)$, то есть $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Тогда φ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = Kg'(c)$, что равносильно (12). $\square$

Замечание 3. Дробь $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой c. Поэтому геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции найдется точка, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей концы графика (рисунок 33).

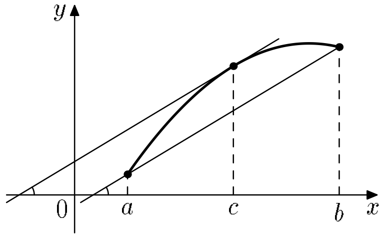

Рис. 33

Геометрический смысл теоремы Коши такой же, если рассмотреть параметрически заданную функцию: $x = g(t)$, $y = f(t)$ $(t \in [a, b])$. Можно доказать, что в условиях теоремы эти уравнения действительно определяют y как функцию x.

Замечание 4. Хотя теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа и, тем более, теоремы Коши, она использовалась при доказательстве последней. Поэтому, чтобы не попасть в порочный круг, теорема Ролля предварительно была доказана отдельно.

Замечание 5. Если проанализировать доказательство теоремы Ферма, то можно увидеть, что ее заключение сохраняет силу при более слабом условии на функцию f. Достаточно потребовать, чтобы в точке x_0 существовала производная функции в $\overline{\mathbb{R}}$; тогда она все равно обязана равняться нулю. Поэтому и опирающиеся в конечном счете на теорему Ферма теоремы Ролля, Лагранжа и Коши остаются верными, если вместо дифференцируемости f на (a, b) потребовать существование у f на (a, b) производной в $\overline{\mathbb{R}}$. Пример функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ показывает, что разрешать функции иметь бесконечную производную неопределенного знака нельзя.

Замечание 6. Левые части формул Лагранжа и Коши не меняются при перемене a и b местами. Поэтому теоремы остаются верными, если предполагать, что $b < a$, а функции заданы на отрезке $[b, a]$, и заключать о существовании точки $c \in (b, a)$.

Замечание 7. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда для любых различных точек x и $x + \Delta x$*

из $\langle a, b\rangle$ *найдется такое* $\theta \in (0,1)$, *что*

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x.$$

Для доказательства надо применить теорему Лагранжа к отрезку с концами x и $x+\Delta x$ и учесть, что если c лежит между x и $x+\Delta x$, то $\theta = \frac{c-x}{\Delta x} \in (0,1)$.

Замечание верно и при $\Delta x = 0$, но для $x \in \{a, b\}$ надо дополнительно потребовать дифференцируемость f в точке x. В этом случае подходит любое θ.

Аналогичную переформулировку допускает и теорема Коши.

Следствие 1. Оценка приращения функции. *Пусть функция* f *непрерывна на* $\langle a, b\rangle$, *дифференцируема на* (a, b), *а число* $M > 0$ *таково, что* $|f'(t)| \leqslant M$ *для всех* $t \in (a, b)$. *Тогда для любых точек* x *и* $x + \Delta x$ *из* $\langle a, b\rangle$

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leqslant M|\Delta x|.$$

Другими словами, если производная ограничена числом M, то по модулю приращение функции не более чем в M раз превзойдет приращение аргумента.

Следствие 1 очевидным образом вытекает из теоремы Лагранжа в форме замечания 7.

Следствие 2. *Функция, имеющая на* $\langle a, b\rangle$ *ограниченную производную, равномерно непрерывна на* $\langle a, b\rangle$.

Доказательство. Пусть $M > 0$ таково, что $|f'(t)| \leqslant M$ для всех $t \in \langle a, b\rangle$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда, если $x, y \in \langle a, b\rangle$, $|x - y| < \delta$, то по следствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| < M\delta = \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную непрерывность f. $\square$

Следующие две теоремы носят общее название **"правило Лопиталя"** (или правило И. Бернулли – Г. Лопиталя) раскрытия неопределенностей.

Теорема 5. Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *функции* f *и* g *дифференцируемы на* (a, b), $g'(t) \neq 0$ *для любого* $t \in (a, b)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *также существует и равен* A.

Доказательство. 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Доопределим функции в точке a нулем: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда доопределенные функции f и g будут непрерывны на $[a, b)$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$: $x_n \in (a, b)$, $x_n \to a$, и докажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A$. Функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши на каждом отрезке $[a, x_n]$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $c_n \in (a, x_n)$, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

По теореме о сжатой последовательности $c_n \to a$. По определению правостороннего предела на языке последовательностей $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to A$, а тогда в силу произвольности $\{x_n\}$ и $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} A$.

2. Пусть $a = -\infty$. В силу локальности предела можно считать, что $b < 0$. Положим $\varphi(t) = f(-\frac{1}{t})$, $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})$ $(t \in (0, -\frac{1}{b}))$. Тогда

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} f'\left(-\frac{1}{t}\right), \qquad \psi'(t) = \frac{1}{t^2} g'\left(-\frac{1}{t}\right) \neq 0,$$
$$\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \psi(t) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0,$$
$$\lim_{t\to 0+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

По доказанному

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = A. \quad \square$$

Теорема 6. Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функции f и g дифференцируемы на (a,b), $g'(t) \neq 0$ для любого $t \in (a,b)$, $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ и существует предел*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен A.

Доказательство. 1. Пусть $A = 0$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in (a,b)$, $x_n \to a$, и докажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to 0$. Зафиксируем число $\sigma > 0$. По условию найдется такое $y \in (a,b)$, что для любого $c \in (a,y)$ будет $g(c) \neq 0$ и $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| < \sigma$. Начиная с некоторого номера $x_n \in (a,y)$, поэтому можно считать, что $x_n \in (a,y)$ для всех n. По теореме Коши для любого n найдется такое $c_n \in (x_n, y)$, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(y)}{g(x_n)-g(y)}\,\frac{g(x_n)-g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} =$$
$$= \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(y)}{g(x_n)}.$$

Учитывая еще, что $g(x_n) \to \infty$, находим

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| \leqslant \sigma\left(1 + \left|\frac{g(y)}{g(x_n)}\right|\right) + \left|\frac{f(y)}{g(x_n)}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma.$$

Поэтому $\overline{\lim}\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| \leqslant \sigma$. Но, так как σ произвольно, $\overline{\lim}\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right| = 0$, а значит, и $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}$ произвольно. Положим $h = f - Ag$. Тогда

$$\lim_{x\to a+} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right) = 0.$$

По доказанному $\frac{h(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} 0$, то есть $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a+}{\longrightarrow} A$.

3. Случаи $A = +\infty$ рассматривается аналогично случаю $A = 0$. При этом вместо $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| < \sigma$ используется неравенство $\frac{f'(c)}{g'(c)} > M$ и доказывается, что $\varliminf \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geqslant M$. Случай $A = -\infty$ разбирается аналогично или сводится к случаю $A = +\infty$ переходом к функции $-f$. $\square$

Замечание 1. Утверждения, аналогичные теоремам 5 и 6, справедливы и для левостороннего, а следовательно, и для двустороннего предела.

Замечание 2. В теореме 6 функция f не предполагается бесконечно большой, хотя на практике правило Лопиталя обычно применяют при наличии неопределенности.

Замечание 3. В условиях правила Лопиталя существование предела отношения функций выводится из существования предела отношения их производных. Обратное неверно. Если $g(x) = x$, $f(x) = x + \sin x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$ не имеет предела на $+\infty$.

Поэтому при применении правила Лопиталя запись вида

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

оправдывается в конце, когда выясняется, что предел отношения производных существует.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ *при всех* $\alpha > 0$.

Действительно, по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0. \quad \square$$

Заменяя x на $\frac{1}{x}$, этот предел можно переписать еще в таком виде:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \text{при всех} \quad \alpha > 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$ *при всех* $a>1$.
В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\ln a}=0.\quad\Box$$

Этот результат можно обобщить:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0\quad \textit{при всех}\quad a>1,\ k\in\mathbb{R}.$$

Если $k\leqslant 0$, то равенство очевидно. Если $k>0$, то по предыдущему равенству и непрерывности степенной функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\left(a^{1/k}\right)^x}\right)^k=0.\quad\Box$$

Итак, *степенная функция растет на* $+\infty$ *быстрее логарифма, но медленнее показательной функции.*

В частности, из доказанного следует, что при $a>1$, $k\in\mathbb{R}$ последовательность $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая. В § 4 главы 2 этот результат предлагалось вывести другим способом, с помощью теоремы о пределе монотонной последовательности.

3. $\lim\limits_{x\to0+}x^x=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.
По первому примеру

$$x^x=e^{x\ln x}\underset{x\to0+}{\longrightarrow}e^0=1,\qquad \sqrt[n]{n}=e^{\frac{\ln n}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^0=1.\quad\Box$$

4. Конечно,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1,$$

но, пытаясь установить таким способом замечательный предел для синуса, мы попадаем в порочный круг: ведь при выводе формулы $(\sin x)'=\cos x$ использовался этот предел.

В заключение параграфа установим свойство производной принимать все промежуточные значения.

Теорема 7 (Г. Дарбу). *Если функция f дифференцируема на $[a, b]$, то для любого числа C, лежащего между $f'(a)$ и $f'(b)$, найдется такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = C$.*

Доказательство. 1. Пусть сначала $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков; докажем, что существует такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$. Для определенности будем считать, что $f'(a) < 0 < f'(b)$. Поскольку f непрерывна на $[a, b]$, по теореме Вейерштрасса найдется точка $c \in [a, b]$, для которой $f(c) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Если $c \in (a, b)$, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $c \neq a$ и $c \neq b$. Если $c = a$, то есть функция принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b]$, а потому и $f'(a) \geqslant 0$, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что $c \neq b$.

2. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть для определенности $f'(a) < C < f'(b)$. Положим $\varphi(x) = f(x) - Cx$. Тогда

$$\varphi'(a) = f'(a) - C < 0 < f'(b) - C = \varphi'(b).$$

По доказанному найдется такое $c \in (a, b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = C$. $\square$

Замечание 1. Теорема Дарбу похожа на теорему Больцано – Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, но не выводится из последней, так как производная может быть разрывной. Для примера рассмотрим функцию $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

а при всех $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Поэтому f дифференцируема на $\mathbb{R}$, но f' не имеет предела в нуле и, значит, разрывна.

Следствие 1. *Если функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $f'(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.*

Для доказательства надо сослаться на лемму 1 § 2 главы 3 о характеристике промежутков.

Следствие 2. *Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов первого рода.*

Следствие 2 доказывается аналогично второй части теоремы 9 § 2 главы 3 о разрывах и непрерывности монотонной функции, и мы рекомендуем читателю самому повторить доказательство.

Замечание 2. В теореме Дарбу и ее следствиях существенно, что область определения функции и ее производной — промежуток. Так, $(|x|)' = \operatorname{sign} x$ при всех $x \neq 0$, но, например, на множестве $[-1,1] \setminus \{0\}$ эта производная не обладает свойством принимать все промежуточные значения.

§ 3. Производные высших порядков и формула Тейлора

Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D_1 — множество дифференцируемости f, $f'\colon D_1 \to \mathbb{R}$. Напомним, что каждая точка $x_0 \in D_1$ удовлетворяет условию: существует такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ — невырожденный промежуток.

Далее следует назвать f'' — производную f' — второй производной f, производную f'' — третьей производной f и т.д. Дадим подробное определение.

Производная порядка n функции f обозначается $f^{(n)}$; $f^{(1)}$ означает то же, что f'. Производные высших порядков определяются по индукции.

Определение. Пусть $n-1 \in \mathbb{N}$, множество D_{n-1} и функция $f^{(n-1)}\colon D_{n-1} \to \mathbb{R}$ уже определены. Обозначим через D_n множество всех точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует такое $\delta > 0$, что

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D, \tag{14}$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0. Если $x_0 \in D_n$, то функция f называется *дифференцируемой n раз* в точке x_0. Функция

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'\Big|_{D_n}\colon D_n \to \mathbb{R}$$

называется *производной порядка n*, или короче, *n-й производной* функции f.

Другими словами,

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in D_n.$$

Под нулевой производной понимают саму функцию: $f^{(0)} = f$.

Односторонние производные высших порядков определяются равенствами

$$f_+^{(n)}(x_0) = \left(f\big|_{D\cap[x_0,+\infty)}\right)^{(n)}(x_0), \quad f_-^{(n)}(x_0) = \left(f\big|_{D\cap(-\infty,x_0]}\right)^{(n)}(x_0).$$

Другими словами,

$$f_\pm^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0\pm} \frac{f^{(n-1)}(x) - f_\pm^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Следующий пример показывает роль условия (14) в определении n-й производной. Пусть $D = (-\infty, 1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0,1]$ и при $x < 0$, $x \in \mathbb{Q}$; $f(x) = x^2$ при $x < 0$, $x \notin \mathbb{Q}$. Тогда $D_1 = [0,1]$ и $f' = 0$ на D_1. Действительно, равенство $f'(x) = 0$ при $x \in (0,1]$ очевидно, а

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leqslant |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

поэтому и $f'(0) = 0$. В точках же $x < 0$ функция f разрывна и тем более не имеет производной. Функция f' дифференцируема на D_1, и ее производная равна нулю. Ясно, что $f''(x) = 0$ при всех $x \in (0,1]$. Но $f''(0)$ не существует, так как точка 0 не удовлетворяет условию (14); существует лишь $f''_+(0) = 0$. Таким образом, $D_2 = (0,1]$, и $f'' = 0$ на D_2.

Этот эффект исчезает, если определять производную только во внутренних точках области задания функции; тогда можно просто определить $f^{(n)}$ равенством $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Наряду с $f^{(n)}$ используются также обозначения $\frac{d^n f}{dx^n}$ (читается: "дэ-эн эф по дэ-икс эн раз") и $D^n f$. Как обычно, запись $f^{(n)}(x_0)$, $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$ и $D^n f(x_0)$ выражает значение n-й производной f в точке x_0. Для производных невысокого порядка чаще пишут f'' и f''', а потом трактуют штрихи как римские цифры: f^{IV}, f^{V} и т.д.

Сделаем небольшое замечание о принципе построения обозначений. Пусть отображение A действует из одного множества функций (или даже отображений) в другое. Как обычно, значение A на функции f обозначается $A(f)$. Тогда значение функции $A(f)$ в точке x следует обозначать $A(f)(x)$. Для большей наглядности скобки вокруг f часто (особенно если A линейно) опускают и пишут Af и, соответственно, $Af(x)$ или $(Af)(x)$ (чтобы подчеркнуть, что символ Af применяется к x, а не символ A к $f(x)$). Иногда употребляется и обозначение $A(f,x)$. Через A^n обозначается n-кратная композиция A с самим собой (если она имеет смысл).

В обозначении Коши D есть (с некоторыми оговорками, касающимися области определения) отображение, которое каждой функции сопоставляет ее производную. В обозначении Лейбница ту же роль играет символ $\frac{d}{dx}$.

Функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E, если она n раз дифференцируема в каждой точке E. Если при этом $f^{(n)}$ непрерывна на E, то f называется *n раз непрерывно дифференцируемой* на E.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество функций, заданных и n раз непрерывно дифференцируемых на E, обозначается $C^{(n)}(E)$ или $C^n(E)$. Кроме того, по определению $C^{(0)}(E) = C(E)$ — класс непрерывных на E функций. Через $C^{(\infty)}(E)$ обозначается класс *бесконечно дифференцируемых* на E функций, то есть функций, заданных на E и имеющих на E производные всех порядков: $C^{(\infty)}(E) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^{(n)}(E)$. Ясно, что классы $C^{(n)}(E)$ уменьшаются с ростом n: при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{(n)}(E) \supset C^{(n+1)}(E) \quad \text{и} \quad C^{(n)}(E) \supset C^{(\infty)}(E).$$

При этом все включения строгие. Для примера рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f_n' = f_{n-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Функция f_0 непрерывна на $\mathbb{R}$, но не имеет производной в нуле. Поэтому f_n принадлежит $C^{(n)}(\mathbb{R})$, но не имеет $(n+1)$-й производной в нуле и тем более не принадлежит $C^{(n+1)}(\mathbb{R})$ и $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Пример всюду дифференцируемой функции с разрывной производной был приведен в § 2. Модифицируя его, можно показать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ класс n раз дифференцируемых на E функций строго шире класса $C^{(n)}(E)$.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in D$. Величина

$$d^n f(x_0, dx) = f^{(n)}(x_0)\, dx^n$$

называется *n-м дифференциалом* функции f в точке x_0, соответствующим приращению dx.

Кроме того, полагают $d^0 f(x_0, dx) = f(x_0)$.

Из определения ясно, что

$$d^n f(x_0, dx) = d\big(d^{n-1} f(\cdot, dx)\big)(x_0, dx). \tag{15}$$

Действительно, если обозначить $g(x) = d^{n-1} f(x, dx)$, то

$$\begin{aligned} dg(x_0, dx) = g'(x_0)\, dx = \big(f^{(n-1)}\big)'(x_0)\, dx^{n-1}\, dx = \\ = f^{(n)}(x_0)\, dx^n = d^n f(x_0, dx). \end{aligned}$$

Поэтому формулу (15) можно принять за определение n-го дифференциала.

Условие (14) позволяет и при рассмотрении старших производных ограничиваться функциями, заданными на невырожденном промежутке.

Теорема 1. Арифметические действия над старшими производными. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы n раз в точке $x \in \langle a, b\rangle$. Тогда*

1) *при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема n раз в точке x и*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x);$$

2) *функция fg дифференцируема n раз в точке x и*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Второе утверждение называется **правилом Лейбница** дифференцирования произведения. Эта формула очень похожа на бином Ньютона, только вместо показателей степени стоят номера производных. Ее доказательство, как будет видно, также аналогично выводу бинома Ньютона.

Доказательство. Первое утверждение очевидно выводится по индукции. Докажем правило Лейбница также по индукции. При $n = 1$ (база индукции) равенство известно. Пусть утверждение верно для номера n; докажем, что оно верно и для $n+1$. Опуская обозначение аргумента x, имеем

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

что завершает индукционный переход. □

Приведем несколько примеров вычисления старших производных. Доказательство этих формул легко проводится по индукции. В них, если не оговорено противное, $n \in \mathbb{Z}_+$. Напомним соглашение, что произведение, в котором нет сомножителей, считается равным 1.

Примеры. 1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

При $n = 1$ равенство известно. Индукционный переход делается с помощью равенства $(x^{\alpha-n})' = (\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$.

В частности, при $\alpha = m \in \mathbb{Z}_+$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m, \end{cases}$$

а при $\alpha = -1$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

2. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$.

Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, этот пример вытекает из предыдущего.

3. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $a > 0$. В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4. Последовательно дифференцируя, находим $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{\mathrm{IV}} = \sin x$, а далее последовательность производных повторяется с периодом 4. По формулам приведения этот результат можно записать в виде одного равенства:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5. Аналогично предыдущему примеру

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Перейдем к важнейшей формуле дифференциального исчисления — формуле Тейлора.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, T — многочлен степени n, $x_0 \in \mathbb{R}$. Из курса алгебры известно, что всякий многочлен раскладывается по степеням $x - x_0$:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Дифференцируя его m раз ($m \in [\,0 : n]$), получаем

$$T^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k\, k(k-1)\ldots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}.$$

При подстановке $x = x_0$ слагаемые с номерами $k > m$ обнуляются, поэтому $T^{(m)}(x_0) = a_m m!$ или, что равносильно,

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

Таким образом коэффициенты разложения многочлена по степеням $x - x_0$ выражаются через значения самого многочлена и его производных в точке x_0. Равенство

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{16}$$

называется формулой Тейлора для многочлена.

Пусть теперь T — произвольная функция. Для того, чтобы правая часть равенства (16) имела смысл, необходима n-кратная дифференцируемость T в точке x_0. Если функция T не является многочленом, то равенство (16), вообще говоря, неверно. Однако, оказывается, что для многих функций в (16) имеет место приближенное равенство, погрешность которого в том или ином смысле мала.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а функция f дифференцируема n раз в точке x_0, или $n = 0$, а функция f непрерывна в точке x_0. Многочлен

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется *многочленом Тейлора* порядка n функции f с центром в точке x_0. Разность

$$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$$

называется *остаточным членом* или *остатком* формулы Тейлора, а равенство

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x) \tag{17}$$

— формулой Тейлора.

Пока что равенство (17) тривиально, так как представляет собой переписанное определение $R_{n,x_0}f(x)$. Содержательные утверждения получатся, если сказать что-нибудь о свойствах остатка. Остаток формулы Тейлора можно, при тех или иных условиях на функцию, записать в различных формах. Эти формы записи остаточного члена тоже носят имена разных математиков: например, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, или короче, формула Тейлора – Пеано.

Теорема 2. Формула Тейлора – Пеано. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0.$$

Доказательство. Для краткости будем писать $T = T_{n,x_0}f$, $R = R_{n,x_0}f$. Требуется доказать, что $R(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$. Поскольку $R = f - T$, а $T^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$ при всех $m \in [\,0:n]$, имеем $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [\,0:n]$.

Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: *если $n \in \mathbb{N}$, функция R дифференцируема n раз в точке x_0 и $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [\,0:n]$, то $R(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$.* Докажем его индукцией по n.

База индукции — случай $n = 1$. Так как $R(x_0) = R'(x_0) = 0$, по определению дифференцируемости получаем

$$R(x) = R(x_0) + R'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0), \qquad x \to x_0.$$

Индукционный переход. Предположим, что для номера n утверждение верно; докажем его для номера $n+1$. Пусть $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [\,0:n+1]$; докажем, что

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство будем вести на языке последовательностей. Возьмем последовательность $\{x_\nu\}$ со свойствами: $x_\nu \in \langle a, b\rangle$, $x_\nu \neq x_0$, $x_\nu \to x_0$. Тогда для каждого ν по формуле Лагранжа найдется такая точка c_ν, лежащая между x_ν и x_0, что

$$\frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_\nu) - R(x_0)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R'(c_\nu)}{(x_\nu - x_0)^n}.$$

Из неравенства $|c_\nu - x_0| \leqslant |x_\nu - x_0|$ следует, что $c_\nu \to x_0$. По индукционному предположению, примененному к функции R', у которой все производные до n-й включительно в точке x_0 равны нулю,

$$\left|\frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}}\right| \leqslant \left|\frac{R'(c_\nu)}{(c_\nu - x_0)^n}\right| \longrightarrow 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. Формула Тейлора с центром в нуле называется еще *формулой Маклорена.* Запишем ее с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Замечание 2. Если потребовать непрерывность f в точке x_0, то теорема 2 становится верной и при $n = 0$.

Замечание 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *или замечания* 2. *Если многочлен P степени не выше n таков, что*

$$f(x) = P(x) + o\big((x - x_0)^n\big), \qquad x \to x_0, \tag{18}$$

то $P = T_{n,x_0} f$.

Это сразу следует из теоремы 2 § 4 главы 3 о единственности асимптотического разложения.

Свойство (18) часто принимают за определение многочлена Тейлора. Точнее, многочлен P степени не выше n называют многочленом Тейлора порядка n функции f с центром в точке x_0, если $P(x_0) = f(x_0)$ и выполнено равенство (18).

Из определений видно, что при $n = 0, 1$ новое определение совпадает со старым. Существование многочлена Тейлора нулевого порядка равносильно непрерывности, первого порядка — дифференцируемости f в точке x_0. Если же $n-1 \in \mathbb{N}$, то определения равносильны лишь для функций, n раз дифференцируемых в точке x_0. Многочлен $P \equiv 0$ является многочленом Тейлора порядка n функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^{n+1}, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

в точке 0 в смысле нового определения. В то же время, f дифференцируема в точке 0, а в остальных точках даже разрывна, поэтому не имеет второй производной ни в одной точке. Этот пример показывает, что многочлен Тейлора в смысле второго определения существует у более широкого класса функций.

Замечание 4. Формула Тейлора – Пеано говорит о свойствах остатка при $x \to x_0$, но ничего не утверждает о значении остатка ни при каком фиксированном x. Поэтому формулу Тейлора – Пеано называют *локальным вариантом* формулы Тейлора. Следующая формула Тейлора – Лагранжа позволяет оценивать остаток при фиксированном x и представляет собой один из *глобальных вариантов* формулы Тейлора.

Теорема 3. Формула Тейлора – Лагранжа.
Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{(n)}\langle a, b\rangle$, f дифференцируема $n+1$ раз на (a, b), $x_0, x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$. Тогда существует такая точка c, лежащая между x и x_0, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим через Δ интервал с концами x_0 и x, тогда $\overline{\Delta}$ обозначает отрезок с теми же концами. Положим $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad t \in \overline{\Delta}$$

(для удобства дальнейших вычислений начальное слагаемое записано отдельно). Функции φ и ψ непрерывны на $\overline{\Delta}$ и дифференцируемы на Δ, причем

$$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n \neq 0$$

для любого $t \in \Delta$. Найдем производную φ:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} \right) = \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n
\end{aligned}$$

(после сдвига индекса $j = k-1$ все слагаемые, кроме одного, уничтожаются). Кроме того, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = R_{n,x_0}f(x)$, $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$.

По теореме Коши о среднем (теорема 4 § 2) найдется такая точка $c \in \Delta$, что

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Подставляя значения функций и их производных, получаем

$$\frac{0 - R_{n,x_0}f(x)}{0 - (x-x_0)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-n!\,(n+1)(x-c)^n},$$

что равносильно

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \square$$

Замечание 1. Заключение теоремы можно записать и в таком виде: *существует такое* $\theta \in (0,1)$, *что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства следует положить $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0}$.

Если существует $f^{(n+1)}(x_0)$ (это условие является новым лишь при $x_0 = a$ или $x_0 = b$), то в такой формулировке не нужно накладывать условие $x \neq x_0$, так как при $x = x_0$ подходит любое θ.

Замечание 2. Формула конечных приращений Лагранжа — частный случай формулы Тейлора – Лагранжа при $n = 0$.

Замечание 3. Значения функции в точках вне отрезка $\overline{\Delta}$ не играют роли в теореме, поэтому в формулировке можно было, зафиксировав точки x_0 и x, задавать функцию на отрезке $\langle a, b\rangle = \overline{\Delta}$.

Замечание 4. Формулу Тейлора – Лагранжа можно записать в дифференциалах ($dx = x - x_0$):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f(x_0, dx) + \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} f(x_0 + \theta\, dx, dx).$$

Замечание 5. Остаточный член в формуле Тейлора – Лагранжа похож на слагаемое с номером $n+1$ в многочлене Тейлора, но производная берется не в точке x_0, а в некоторой промежуточной точке c. Подчеркнем, что точка c зависит от x.

Замечание 6. Если T — многочлен степени не выше n, то $T^{(n+1)} \equiv 0$, поэтому остаток формулы Тейлора для T равен нулю:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Этот результат — формула Тейлора для многочлена — уже был получен в предположении существования разложения T по степеням $x - x_0$; теперь заодно доказано и существование.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $M > 0$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ *для всех* t, *лежащих между* x *и* x_0. *Тогда*

$$|R_{n,x_0} f(x)| \leqslant \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Доказательство немедленно получается из формы Лагранжа остаточного члена.

Замечание 7. Из следствия 1 вытекает, что если существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $f^{(n+1)}$ ограничена на множестве $\dot{V}_{x_0} \cap \langle a, b\rangle$, то $R_{n,x_0}f(x) = O\big((x - x_0)^{n+1}\big)$ при $x \to x_0$. Это заключение сильнее, чем в теореме Тейлора – Пеано, но и на функцию наложены более ограничительные условия.

Следствие 2. *Пусть $f \in C^{(\infty)}\langle a, b\rangle$ и существует такое $M > 0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \langle a, b\rangle$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$. Тогда для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$*

$$T_{n,x_0}f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x). \tag{19}$$

Доказательство. Как было отмечено в замечании 3 к теореме 3 § 4 главы 2 о пределе монотонной последовательности, $\frac{K^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при любом $K \in \mathbb{R}$. Учитывая еще, что неравенство из следствия 1 выполняется для всех n одновременно, находим $R_{n,x_0}f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, что равносильно (19). $\square$

Таким образом, в условиях следствия 2 функция f приближается с любой точностью своими многочленами Тейлора. Этот факт может использоваться для приближенных вычислений.

Замечание 8. Если в доказательстве теоремы 3 в качестве ψ взять произвольную функцию, непрерывную на $\overline{\Delta}$, дифференцируемую на Δ и такую, что $\psi'(t) \neq 0$ для любого $t \in \Delta$, то можно получить следующую форму записи остаточного члена:

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \, \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \, (x - c)^n$$

или, если положить $\theta = \frac{c - x_0}{x - x_0} \in (0, 1)$,

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(x_0 + \theta(x - x_0))} \, \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1-\theta)^n (x - x_0)^n.$$

Выбирая функцию ψ, можно вывести различные формы записи остатка. В частности, если взять $p > 0$, $\psi(t) = |x - t|^p$, то

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!\,p} \, (1 - \theta)^{n+1-p} (x - x_0)^{n+1}, \tag{20}$$

а если взять $\psi(t) = x - t$, то

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}\,(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}. \tag{21}$$

Равенство (20) называется *формой О. Шлёмильха и Э. Роша,* а равенство (21) — *формой Коши* остаточного члена.

Подробные выкладки остаются читателю.

Выведем тейлоровские разложения некоторых элементарных функций. При этом мы используем уже найденные производные высших порядков. Замечательные пределы из § 4 главы 3 являются начальными случаями этих разложений при $n = 0$ или $n = 1$. Во всех нижеследующих асимптотических равенствах $x \to 0$. Отметим, что по замечанию 7 остатки в этих равенствах можно записывать как в виде $o(x^n)$, так и в виде $O(x^{n+1})$.

Пример 1. Так как $(e^x)^{(k)} = e^x$; $(e^x)^{(k)}\big|_{x=0} = 1$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1). \end{aligned}$$

В частности, при $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1). \tag{22}$$

Отсюда получаются оценки

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

и, в частности,

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

причем погрешность такого приближения числа e очень быстро стремится к нулю. Поэтому формула (22) легко позволяет приближенно вычислить число e с любой степенью точности.

Теорема 4. *Число e иррационально.*

Доказательство. Допустим противное: пусть $e = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. В § 2 главы 2 было доказано, что $2 < e < 3$. Поэтому $n \geqslant 2$, так как $e \notin \mathbb{Z}$. Умножим равенство (22) на $n!$:

$$(n-1)! \cdot m = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

Отсюда $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что абсурдно, так как $n+1 \geqslant 3$, а $e^\theta < e < 3$. $\square$

Пример 2. Из формулы

$$(\sin x)^{(m)} = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

при $k \in \mathbb{Z}_+$ находим

$$(\sin x)^{(2k)}\big|_{x=0} = 0, \qquad (\sin x)^{(2k+1)}\big|_{x=0} = (-1)^k.$$

Поэтому

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + \frac{\sin\alpha}{(2n+3)!} x^{2n+3},$$

где $\alpha = \theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}$, $\theta \in (0,1)$. При записи остатка мы учли, что сумма представляет собой многочлен Тейлора функции синус не только порядка $2n+1$ (какова его степень), но и порядка $2n+2$, так как следующая, $(2n+2)$-я, производная синуса в нуле равна нулю.

Отсюда получаем оценку остатка

$$|R_{2n+2,0}(\sin, x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Поэтому при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

Пример 3. Аналогично получается тейлоровское разложение косинуса:

$$(\cos x)^{(m)} = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)^{(2k)}\big|_{x=0} = (-1)^k, \qquad (\cos x)^{(2k+1)}\big|_{x=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + o(x^{2n+1}), \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + \frac{\cos\beta}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \end{aligned}$$

где $\beta = \theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}$, $\theta \in (0,1)$. Отсюда получаем оценку остатка

$$|R_{2n+1,0}(\cos, x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Поэтому при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}.$$

Полученные формулы могут использоваться для приближенного вычисления значений синуса и косинуса с любой степенью точности, причем погрешность тем меньше, чем меньше $|x|$.

В следующих двух разложениях ограничимся записью остатка в форме Пеано.

Пример 4. Поскольку при всех $k \in \mathbb{N}$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad (\ln(1+x))^{(k)}\big|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

а $\ln 1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Пример 5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + o(x^n). \end{aligned} \tag{23}$$

При $\alpha = n$ числа C_α^k суть биномиальные коэффициенты, остаток в силу замечания 6 равен нулю, и, таким образом, формула (23) представляет собой бином Ньютона. Поэтому числа C_α^k называют *обобщенными биномиальными коэффициентами,* а формулу (23) — *биномиальным разложением.*

Теорема 5. Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей. *Пусть* $f, g\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, *функции* f *и* g *дифференцируемы* n *раз в точке* x_0,

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$g^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора – Пеано при $x \to x_0$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big),$$
$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big).$$

Поскольку $g^{(n)}(x_0) \neq 0$, существует такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $g(x) \neq 0$ для любого $x \in \dot{V}_{x_0} \cap \langle a,b\rangle$. Значит, частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено при всех таких x. Сокращая дробь на $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)+o(1)}{g^{(n)}(x_0)+o(1)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \quad \square$$

На практике при отыскании пределов не вычисляют старшие производные явно, а подставляют тейлоровские разложения функций. Основную трудность представляет определение порядка n, до которого следует вести разложение.

Пример. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$. По известным разложениям экспоненты и косинуса при $x \to 0$

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Подставляя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{12}.$$

Ясно, что в этом примере разложение до $o(x^2)$ не раскрывало неопределенность, а нахождение коэффициентов при степенях выше четвертой лишь усложняло вычисления.

§ 4. Монотонность и экстремумы функций

Теорема 1. Критерий монотонности функции. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда f возрастает (убывает) на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$) для всех $x\in(a,b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f возрастает. Возьмем $x\in(a,b)$. Тогда $f(y)\geqslant f(x)$ для всех $y\in(x,b\rangle$, поэтому

$$f'(x)=f'_+(x)=\lim_{y\to x+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geqslant 0.$$

2. Достаточность. Пусть $f'(x)\geqslant 0$ для всех $x\in\langle a,b\rangle$. Возьмем $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$: $x_1<x_2$, и докажем, что $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. По теореме Лагранжа существует такое $c\in(x_1,x_2)$, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geqslant 0. \tag{24}$$

Случай убывающей функции сводится к рассмотренному переходом к функции $-f$. $\square$

Следствие 1. Критерий постоянства функции. *Пусть $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$. Тогда f постоянна на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда $f\in C\langle a,b\rangle$ и $f'(x)=0$ для всех $x\in(a,b)$.*

Доказательство. То, что производная постоянной функции равна нулю, известно. Обратно, если $f\in C\langle a,b\rangle$ и $f'(x)=0$ для всех $x\in(a,b)$, то по теореме 1 функция f одновременно возрастает и убывает, то есть постоянна, на $\langle a,b\rangle$. $\square$

Замечание 1. Если f в условиях теоремы 1 дифференцируема еще и в точке a или b, то из возрастания (убывания) f следует неотрицательность (неположительность) f' и в этой точке.

Доказательство аналогично.

Далее мы, как правило, будем формулировать утверждения только для возрастающих функций, оставляя второй случай читателю.

Замечание 2. *Пусть f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Если $f'(x)>0$ для всех $x\in(a,b)$, то f строго возрастает на $\langle a,b\rangle$.*

Действительно, в этом случае неравенство (24) строгое.

Обратное утверждение неверно: из строгого возрастания f не следует положительность f'. Например, функция $f(x)=x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0)=0$.

Следствие 2. Критерий строгой монотонности функции. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда f строго возрастает на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда:*

1) $f'(x)\geqslant 0$ для всех $x\in(a,b)$;

2) f' не обращается в нуль тождественно ни на каком интервале.

Доказательство. По следствию 1 условие 2) означает, что f не постоянна ни на каком интервале. Поэтому из строгого возрастания f вытекает утверждение 2), а утверждение 1) верно по теореме 1.

Пусть теперь выполнены утверждения 1) и 2). Из неотрицательности производной следует возрастание f. Если возрастание нестрогое, то найдутся такие точки $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$, что $x_1<x_2$, а $f(x_1)=f(x_2)$. Тогда f постоянна на $[x_1,x_2]$, что противоречит условию 2). $\square$

Замечание 3. Теорема 1 и следствия 1 и 2 обобщаются на ситуацию, когда f непрерывна на $\langle a,b\rangle$, а дифференцируема на (a,b) за исключением конечного множества точек.

Доказательство проведем для обобщения теоремы 1. Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — все те точки интервала (a,b), в которых f не дифференцируема; $a_1<\ldots<a_n$. Если f возрастает на $\langle a,b\rangle$, то f

возрастает на каждом промежутке $\langle a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_n, b\rangle$. Тогда $f' \geqslant 0$ на (a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_n, b) по теореме 1.

Обратно, если $f \in C\langle a, b\rangle$ и $f' \geqslant 0$ на (a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_n, b), то f возрастает на каждом промежутке $\langle a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_n, b\rangle$ и, следовательно, на $\langle a, b\rangle$. $\square$

Теорема 2. Доказательство неравенств с помощью производной. *Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b\rangle$ и дифференцируемы на (a, b), $f(a) \leqslant g(a)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b\rangle$.*

Доказательство. Положим $h = g - f$. Тогда $h' = g' - f' \geqslant 0$ на (a, b). По теореме 1 функция h возрастает на $[a, b\rangle$. Следовательно, для всех $x \in [a, b\rangle$

$$h(x) \geqslant h(a) = g(a) - f(a) \geqslant 0,$$

то есть $g(x) \geqslant f(x)$. $\square$

Замечание 1. Аналогичное утверждение справедливо вместе с доказательством и в случае, когда исходно значения функций сравниваются на правом конце промежутка.

Пусть функции f и g непрерывны на $\langle a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), $f(b) \geqslant g(b)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in \langle a, b]$.

Замечание 2. *Если в условиях теоремы 2 будет $f'(x) < g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) < g(x)$ для всех $x \in (a, b\rangle$.*

Действительно, в этом случае функция h строго возрастает, и поэтому неравенство строгое.

Аналогичное замечание верно и для правого конца промежутка.

Пример 1. Докажем, что $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при всех $x \neq 0$.

В силу четности обеих частей достаточно доказать неравенство при $x > 0$. Положим $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \cos x$. Тогда $f(0) = g(0) = 1$ и

$$g'(x) = -\sin x > -x = f'(x) \text{ при всех } x > 0.$$

По замечанию 2 к теореме 2 и $f(x) < g(x)$ при всех $x > 0$.

Пример 2. Докажем, что $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ при всех $x > 0$.

Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$ и по предыдущему примеру

$$g'(x) = \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} = f'(x) \text{ при всех } x > 0.$$

Поэтому и $f(x) < g(x)$ при всех $x > 0$.

Методом математической индукции можно доказать, что при всех $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \left(\sin x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \right) > 0,$$

$$(-1)^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \right) > 0.$$

Пример 3. Докажем, что $\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$ при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Тогда по лемме 3 § 3 главы 3 при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0.$$

Следовательно, f строго убывает на $[0, \frac{\pi}{2}]$, и поэтому $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$ при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, что равносильно доказываемому неравенству.

Примеры 2 и 3 дополняют оценку $\sin x < x$ $(x > 0)$.

В следующем параграфе будет ясно, что результат примера 3 еще проще следует из строгой вогнутости синуса на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Определение. Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Если существует такое $\delta > 0$, что:

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то x_0 называется *точкой максимума* функции f;

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \big(D \setminus \{x_0\}\big)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется *точкой строгого максимума* функции f.

Если выполняются противоположные неравенства, то x_0 называется соответственно *точкой минимума* и *точкой строгого минимума* f.

Если x_0 является точкой (строгого) максимума или минимума функции f, то x_0 называется *точкой (строгого) экстремума* f.

Замечание 1. Если $x_0 \in \operatorname{Int} D$, то некоторая окрестность точки x_0 содержится в D, и в определении можно не писать пересечение с D.

Замечание 2. В точке экстремума функция не обязана принимать наибольшее или наименьшее значение на всей области определения: оно будет таким лишь по сравнению со значениями в достаточно близких точках. На рисунке 34 изображен график функции, заданной на отрезке $[a, b]$. Ее точки максимума: a, x_2 и все точки полуинтервала $(x_3, b]$; точки строгого максимума: a и x_2; точки минимума: x_1 и все точки отрезка $[x_3, b]$; точка строгого минимума: x_1.

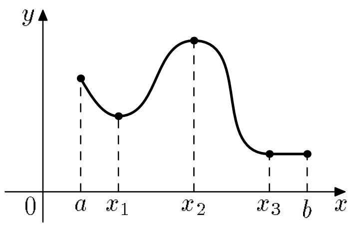

Рис. 34

Поэтому точки из определения называют точками *локального* экстремума, в противовес точкам *глобального* экстремума, то есть тем, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение. Слово "локальный" при обсуждении точек экстремума будет опускаться.

Замечание 3. Определение легко распространяется на функции, заданные на подмножестве D метрического пространства, только интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ надо заменить окрестностью точки x_0.

Теорема 3. Необходимое условие экстремума. *Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ — точка экстремума f, f дифференцируема в точке x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. По определению точки экстремума существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x_0) = \max_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x) \quad \text{или} \quad f(x_0) = \min_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x).$$

Остается применить теорему Ферма к функции $f\big|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)}$. $\square$

Замечание 1. Как и в теореме Ферма, существенно, что x_0 — внутренняя точка промежутка $\langle a,b\rangle$.

Замечание 2. Условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным для того, чтобы в точке x_0 был экстремум. Так, функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в нуле, но $f'(0) = 0$.

Замечание 3. Функция может не быть дифференцируемой в точке экстремума.

Определение. Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Если $f'(x_0) = 0$, то x_0 называется *стационарной* точкой функции f. Если $f'(x_0) = 0$ или f не дифференцируема в точке x_0, то x_0 называется *критической* точкой функции f.

Таким образом, критические точки — это точки, "подозрительные" на экстремум. Теорема 3 утверждает, что все внутренние точки экстремума функции лежат в множестве ее критических точек.

Теорема 3 указывает способ нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке функции (они существуют по теореме Вейерштрасса). Пусть $f \in C[a,b]$. Надо найти критические точки f и сравнить значения f в критических точках и в точках a и b: наибольшее из них и будет искомым наибольшим, а наименьшее — искомым наименьшим значением. Действительно, если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке отрезка, то эта точка критическая.

Если же требуется найти все точки экстремума или построить график функции, то необходимо исследовать найденные критические точки и выяснить, являются ли они точками экстремума и, если являются, то какого именно.

Для более полного описания ситуации дадим еще серию определений.

Определение. Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для любого $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$ для любого $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то x_0 называется *точкой возрастания* функции f.

Если оба неравенства строгие, то x_0 называется *точкой строгого возрастания*, а если выполняются противоположные неравенства, то соответственно *точкой убывания* и *точкой строгого убывания* f.

Теорема 4. Первое правило исследования критических точек. *Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, функция f непрерывна в точке x_0, дифференцируема на $(a,b) \setminus \{x_0\}$ и существует такое $\delta > 0$, что f' сохраняет знак на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$.*

1. *Если $f' < 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $f' > 0$ на $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого минимума f.*

2. *Если $f' > 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $f' < 0$ на $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого максимума f.*

3. *Если $f' > 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого возрастания f.*

4. *Если $f' < 0$ на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка строгого убывания f.*

В случаях 3 и 4 в точке x_0 экстремума нет.

Доказательство. Для определенности докажем утверждения 1 и 3.

1. По следствию 2 к теореме 1 функция f строго убывает на $(x_0-\delta, x_0]$ и строго возрастает на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) > f(x_0)$ как при всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$, так и при всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Значит, x_0 — точка строгого минимума f.

3. По следствию 2 к теореме 1 функция f строго возрастает на $(x_0-\delta, x_0]$ и на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$, то есть x_0 — точка строгого возрастания f. Из этих же неравенств вытекает, что x_0 не является ни точкой максимума, ни точкой минимума f. $\square$

Замечание 1. Несмотря на название теоремы, в ее условиях не сказано, что x_0 — критическая точка f. В случаях 3 и 4 этого может и не быть.

Замечание 2. Теорема 4 применима не ко всем, даже дифференцируемым, функциям. Дело в том, что производная может менять знак на любом промежутке вида $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$.

Замечание 3. Точка x_0 может не быть ни точкой максимума, ни точкой минимума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания f.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$. Тогда при $x\neq 0$

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{5\cdot 2}{3}x^{-1/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2).$$

Видно, что f' меняет знак с "+" на "−" в точке 0 и с "−" на "+" в точке 2; 0 — точка строгого максимума, а 2 — точка строгого минимума f. Заметим еще, что в стационарной точке 2 касательная к графику горизонтальна, а в точке 0 имеет место так называемый "острый" максимум, так как $f'_{\pm}(0)=\mp\infty$. Учитывая, что $f(0)=0$, $f(2)=-3\sqrt[3]{4}$, можно (пока не обращая внимания на выпуклость) нарисовать график функции. (На рисунке 35 для большей наглядности масштаб на осях различен).

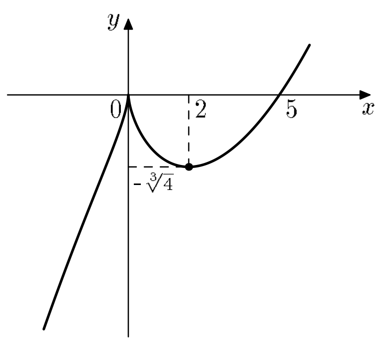

Рис. 35

Пример 2. Для функции $f(x) = x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$ точка 0, очевидно, является точкой строгого минимума, и

$$f'(x) = 2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Так как $2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, а $\cos\frac{1}{x}$ принимает значения ± 1 сколь угодно близко к 0, f' меняет знак в любой левой или правой окрестности нуля.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Так как f меняет знак в любой левой или правой окрестности нуля, а $f(0) = 0$, точка 0 не является ни точкой максимума, ни точкой минимума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания f.

Теорема 5. Второе правило исследования критических точек. *Пусть $f\colon\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, функция f дифференцируема n раз в точке x_0,*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. *Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого минимума f.*
2. *Если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума f.*
3. *Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого возрастания f.*
4. *Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого убывания f.*

Доказательство. Запишем формулу Тейлора – Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big).$$

Учитывая определение символа o и обнуление производных f, перепишем это равенство в виде

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varphi(x)\right),$$

где $\varphi(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Как обычно, доопределим $\varphi(x_0) = 0$. По замечанию 1 к теореме 1 § 2 главы 3 о стабилизации знака непрерывной функции существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}\left((x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)\right).$$

Осталось сравнить знаки сомножителей. □

Замечание 1. Чаще всего теорема 5 применяется при $n = 2$.

Замечание 2. Теорема 5 применима не ко всем, даже бесконечно дифференцируемым, функциям. Возможна ситуация, когда все производные функции в точке x_0 равны 0. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в теории степенных рядов.

§ 5. Выпуклые функции

Определение. Функция $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ называется:
выпуклой вниз на $\langle a, b \rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ и $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2); \tag{25}$$

строго выпуклой вниз на $\langle a, b \rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ ($x_1 \neq x_2$) и $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{26}$$

Если выполняются противоположные неравенства, то функция f называется соответственно *выпуклой вверх* или *строго выпуклой вверх* на $\langle a, b \rangle$.

Часто функции, которые только что были названы выпуклыми вниз, называют просто *выпуклыми*, а те, что были названы выпуклыми вверх, — *вогнутыми.*

Замечание 1. Если $x_1 = x_2$ или $t \in \{0, 1\}$, то неравенство (25) обращается в равенство. Кроме того, неравенства (25) и (26) не меняются при перемене x_1 и x_2 местами, поэтому в определении можно считать, что $x_1 < x_2$.

Поясним геометрический смысл выпуклости функции. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$. Положим $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Тогда

$$t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad 1 - t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

При этом, если $x \in (x_1, x_2)$, то $t \in (0,1)$, и обратно. Неравенство (25) переписывается в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x \in (x_1, x_2). \tag{27}$$

Правая часть этого неравенства при $x \in [x_1, x_2]$ задает уравнение хорды, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$ на графике f. Таким образом, выпуклость функции вниз означает, что график функции лежит не выше любой хорды, соединяющей две его точки. Строгая выпуклость означает, что график лежит ниже любой хорды, за исключением концевых точек. Выпуклость функции вверх, напротив, означает, что график функции лежит не ниже любой хорды (рисунки 36a и 36b).

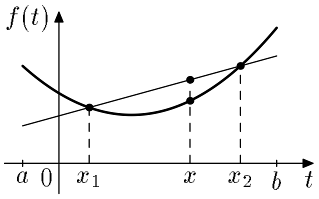

Рис. 36a

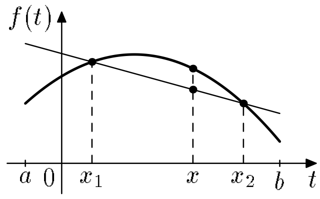

Рис. 36b

Примеры. 1. Функция $f(x) = \alpha x + \beta$ нестрого выпукла и вверх, и вниз на $\mathbb{R}$.

2. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

Действительно, при любых $x_1 \neq x_2$ и $t \in (0,1)$

$$\big(tx_1 + (1-t)x_2\big)^2 = tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - t(1-t)(x_1 - x_2)^2 < tx_1^2 + (1-t)x_2^2.$$

Далее мы, как правило, ограничимся формулировкой утверждений для функций, выпуклых вниз, оставляя второй случай читателю.

Замечание 2. *Пусть функции f и g (строго) выпуклы вниз на $\langle a, b\rangle$, $\alpha > 0$. Тогда*

1) *функция $f + g$ (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$;*

2) *функция αf (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$;*

3) *функция $-f$ (строго) выпукла вверх на $\langle a, b\rangle$.*

Это вытекает из элементарных свойств неравенств.

Замечание 3. *Если функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$, x_1, $x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$, то для любого $x \in \langle a, b\rangle \setminus [x_1, x_2]$*

$$f(x) \geqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Геометрически это означает, что график выпуклой вниз функции лежит не ниже продолжения хорды (рисунок 36а).

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < x$. Запишем для этих точек неравенство (27), поменяв ролями точки x и x_2:

$$f(x_2) \leqslant \frac{x - x_2}{x - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} f(x),$$

что равносильно доказываемому. Аналогично рассматривается случай $x < x_1 < x_2$. $\square$

Лемма 1. О трех хордах. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$, $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \qquad (28)$$

Замечание 1. Название леммы поясняется рисунком 37: угловые коэффициенты хорд A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 связаны неравенством (28): $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\beta \leqslant \operatorname{tg}\gamma$.

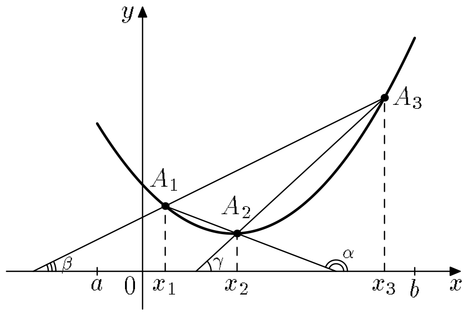

Рис. 37

Доказательство. По определению выпуклости

$$f(x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_3),$$

где $t = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $1 - t = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + (1-t)\big(f(x_3) - f(x_1)\big) = f(x_1) + (x_2 - x_1)\,\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно левому неравенству в (28). С другой стороны,

$$f(x_2) \leqslant f(x_3) - t\big(f(x_3) - f(x_1)\big) = f(x_3) - (x_3 - x_2)\,\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно правому неравенству в (28). $\square$

Замечание 2. Для строго выпуклой функции неравенство в лемме о трех хордах строгое.

Теорема 1. Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in (a, b)$ существуют конечные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, причем $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.*

Доказательство. Возьмем $x \in (a, b)$ и положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \qquad \xi \in \langle a, b\rangle \setminus \{x\}.$$

По лемме о трех хордах g возрастает на $\langle a,b\rangle \setminus \{x\}$. Поэтому, если $a<\xi<x<\eta<b$, то $g(\xi) \leqslant g(\eta)$, то есть

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \leqslant \frac{f(\eta)-f(x)}{\eta-x}.$$

Следовательно, g ограничена на $\langle a,x)$ сверху, а на $(x,b\rangle$ — снизу. По теореме о пределе монотонной функции существуют конечные пределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые по определению являются односторонними производными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η — справа, получаем, что $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. $\square$

Следствие 1. *Если функция f выпукла на $\langle a,b\rangle$, то она непрерывна на (a,b).*

Доказательство. Из существования конечных односторонних производных вытекает непрерывность f слева и справа в каждой точке $x \in (a,b)$, что равносильно непрерывности. $\square$

Замечание 3. Как показывает пример функции

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} \text{ при } x \in (-1,1), \qquad f(-1)=f(1)=1$$

(рисунок 38; график f на $(-1,1)$ — полуокружность), на концах промежутка выпуклая функция может испытывать разрыв.

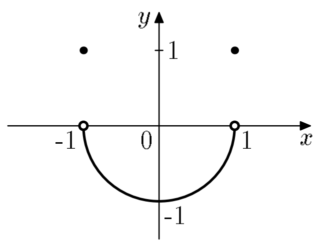

Рис. 38

Но из доказательства теоремы 1 следует, что *для выпуклой вниз на $[a,b\rangle$ функции f существует $f'_+(a) \in [-\infty,+\infty)$, а для выпуклой вниз на $\langle a,b]$ функции f существует $f'_-(b) \in (-\infty,+\infty]$.*

Теорема 2. Выпуклость и касательные. *Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{29}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f выпукла вниз, $x_0, x \in \langle a, b\rangle$.

Если $x > x_0$, то по лемме о трех хордах для любого $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя η к x_0 справа, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное (29).

Если $x < x_0$, то по лемме о трех хордах для любого $\xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя ξ к x_0 слева, получаем неравенство

$$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное (29).

2. Достаточность. Пусть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство (29). Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$: $x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя неравенство (29) дважды: сначала к точкам x_1 и x, а затем — к x_2 и x, получаем

$$f(x_1) \geqslant f(x) + f'(x)(x_1 - x), \qquad f(x_2) \geqslant f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

что равносильно

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{30}$$

Крайние части и составляют неравенство, равносильное неравенству (27) из определения выпуклости. $\square$

Замечание 1. Для строго выпуклой функции при $x \neq x_0$ неравенство (29) строгое. Обратно, если при всех $x \neq x_0$ неравенство (29) строгое, то строгими будут и оба неравенства в (30), что влечет строгую выпуклость f.

Таким образом, график дифференцируемой выпуклой вниз функции можно представить как верхнюю огибающую семейства касательных (рисунок 39a). График строго выпуклой вниз функции пересекается с каждой касательной только в точке касания (рисунок 39b).

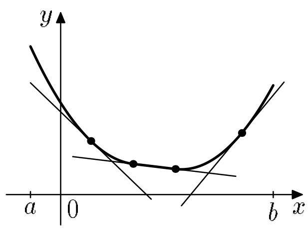

Рис. 39a

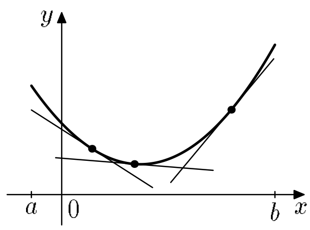

Рис. 39b

Следствие 1. *График выпуклой вниз функции лежит не ниже любой своей односторонней касательной (исключая возможно существующие вертикальные касательные на концах промежутка).*

Доказательство. Пусть f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$, $x_0 \in (a,b)$ (если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то утверждение сводится к теореме 2). Существование конечных односторонних производных в точке x_0 вытекает из теоремы 1. Применяя теорему 2 к функциям $f\big|_{\langle a,x_0]}$ и $f\big|_{[x_0,b\rangle}$, находим, что

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0) \quad \text{при всех} \quad x \in \langle a, x_0],$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0) \quad \text{при всех} \quad x \in [x_0, b\rangle.$$

Учитывая, что $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$, получаем неравенства на оставшихся промежутках. $\square$

Замечание 2. Аналогично доказывается, что график строго выпуклой вниз функции лежит выше любой своей односторонней касательной, за исключением точки касания.

Теорема 2 и следствие 1 подсказывают следующее определение.

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Прямая, задаваемая уравнением $y = \ell(x)$, называется *опорной* для функции f в точке x_0, если

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) \geqslant \ell(x) \ \text{ для всех } \ x \in \langle a, b\rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = \ell(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) > \ell(x) \ \text{ для всех } \ x \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_0\},$$

то прямая называется *строго опорной* для функции f в точке x_0.

Другими словами, прямая называется опорной к f в точке x_0, если она проходит через точку $\bigl(x_0, f(x_0)\bigr)$ и лежит не выше графика функции. Строго опорная прямая лежит ниже графика функции во всех точках, кроме $\bigl(x_0, f(x_0)\bigr)$.

Следствие 2. *Пусть функция f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x_0 \in (a, b)$ существует (строго) опорная прямая функции f в точке x_0.*

Доказательство. По теореме 1 в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет односторонние касательные, а по следствию 1 к теореме 2 односторонняя касательная является (строго) опорной прямой. $\square$

Замечание 1. Если выпуклая вниз на $\langle a, b\rangle$ функция дифференцируема на конце промежутка, то опорная (и даже строго опорная) прямая существует и в концевой точке.

Замечание 2. Несложно доказать, что если функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$, $x_0 \in (a, b)$, то прямая $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ будет опорной к f в том и только том случае, когда $k \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

(рисунок 40). В частности, если f дифференцируема в точке x_0, то опорная прямая в точке x_0 единственна и совпадает с касательной.

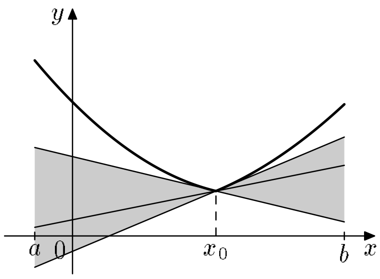

Рис. 40

Теорема 3. Дифференциальные критерии выпуклости. 1. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда f (строго) выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на (a,b).*

2. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дважды дифференцируема на (a,b). Тогда f выпукла вниз на $\langle a,b\rangle$ в том и только том случае, когда $f''(x)\geqslant 0$ для всех $x\in(a,b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Возьмем $x_1,x_2\in(a,b)$: $x_1<x_2$. По теореме 2

$$f'(x_1)\leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_2), \tag{31}$$

что и означает возрастание f'.

Достаточность. Возьмем $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$: $x_1<x_2$, и $x\in(x_1,x_2)$. По теореме Лагранжа существуют такие $c_1\in(x_1,x)$ и $c_2\in(x,x_2)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(c_2).$$

Тогда $x_1<c_1<x<c_2<x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1)\leqslant f'(c_2)$, то есть

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \tag{32}$$

что равносильно неравенству (27) из определения выпуклости.

Если f строго выпукла вниз, то оба неравенства в (31) строгие. Обратно, если f' строго возрастает, то неравенство (32) строгое, что влечет строгую выпуклость f.

2. По пункту 1 выпуклость f равносильна возрастанию f', которое по критерию монотонности равносильно неотрицательности f''. $\square$

Замечание 1. Если f в условиях теоремы 3 дифференцируема (дважды дифференцируема) еще и в точке a или b, то из выпуклости f следует возрастание f' на промежутке, содержащем эту точку (соответственно неотрицательность f'' и в этой точке).

Доказательство аналогично.

Замечание 2. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b). Если $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f строго выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. По критерию строгой монотонности, если f'' положительна, то f' строго возрастает, а тогда по первому утверждению теоремы f строго выпукла вниз. $\square$

Обратное утверждение неверно: из строгой выпуклости f не следует положительность f''. Примером служит функция $f(x) = x^4$. Она строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$, так как $f'(x) = 4x^3$ строго возрастает. В то же время, $f''(0) = 0$.

Замечание 3. Аналогично или рассмотрением функции $-f$ доказывается, что выпуклость f вверх в условиях теоремы 3 равносильна убыванию f' и неположительности f''.

Самый удобный способ исследования выпуклости — выяснение знака второй производной.

Примеры. 1. Поскольку $\left(a^x\right)'' = a^x \ln^2 a > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$), *показательная функция* $\exp_a$ *строго выпукла вниз на* $\mathbb{R}$ *при всех* $a > 0$, $a \neq 1$.

2. Поскольку при всех $x > 0$

$$(\log_a x)'' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \begin{cases} < 0, & a > 1, \\ > 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$$

логарифмическая функция $\log_a$ *строго выпукла вверх на* $(0, +\infty)$ *при* $a > 1$ *и строго выпукла вниз на* $(0, +\infty)$ *при* $0 < a < 1$.

3. Поскольку при всех $x > 0$

$$(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \begin{cases} > 0, & a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ < 0, & a \in (0, 1), \end{cases}$$

степенная функция e_α *строго выпукла вниз на* $[0, +\infty)$ *при* $\alpha > 1$, *строго выпукла вверх на* $[0, +\infty)$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и строго выпукла вниз на* $(0, +\infty)$ *при* $\alpha < 0$.

При тех α, при которых $e_\alpha(x)$ определено для $x < 0$, эти результаты можно дополнить. Так, e_α строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$ при $\alpha = \frac{p}{q}$, если $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, p четно, q нечетно.

Определяя знак второй производной, можно исследовать выпуклость и других основных элементарных функций и убедиться, что их графики выглядят именно так, как они изображены в § 3 главы 3.

Выпуклость функций служит источником многочисленных неравенств. Приведем несколько примеров.

Примеры. 1. $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ при всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Это неравенство нам уже известно; докажем его другим способом. Так как $(\sin x)'' = -\sin x < 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, функция синус строго выпукла вверх на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому ее график на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ лежит выше хорды, соединяющей точки $(0, 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. $\square$

2. $\ln(1 + x) < x$ при всех $x > -1$, $x \neq 0$.

Прямая $y = x$ является касательной в точке 0 к графику строго выпуклой вверх на $(-1, +\infty)$ функции $y = \ln(1 + x)$, поэтому по теореме 2 график лежит ниже касательной. $\square$

3. Если $\alpha > 1$, то $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$ при всех $x \geqslant -1$, $x \neq 0$.

Прямая $y = 1 + \alpha x$ является касательной в точке 0 к графику строго выпуклой вниз на $[-1, +\infty)$ функции $y = (1 + x)^\alpha$, поэтому по теореме 2 график лежит выше касательной. $\square$

Это неравенство обобщает неравенство Я. Бернулли на случай нецелых $\alpha > 1$.

Приведем еще несколько полезных сведений о выпуклых функциях без доказательства, как упражнение.

Замечание 1. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Назовем множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle, y \geqslant f(x)\}$$

надграфиком функции f.

Функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда ее надграфик — выпуклое множество, то есть вместе с любыми своими двумя точками оно содержит отрезок, их соединяющий.

Замечание 2. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, +\infty)$, $y = \alpha x + \beta$ — асимптота f при $x \to +\infty$. Тогда*

$$f(x) \geqslant \alpha x + \beta \quad \textit{при всех} \quad x \in \langle a, +\infty).$$

Это утверждение бывает полезным при построении графиков. Оно показывает, что наклонную асимптоту выпуклой функции можно рассматривать как своего рода “опорную прямую в бесконечно удаленной точке”. Аналогичное утверждение справедливо и для асимптоты при $x \to -\infty$, а также для выпуклой вверх функции. Возможные случаи изображены на рисунках 41a и 41b.

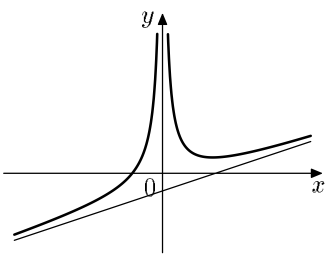

Рис. 41a

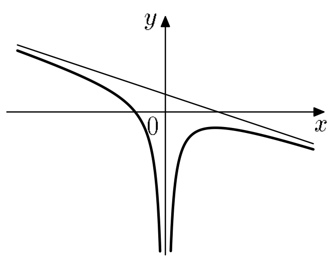

Рис. 41b

Определение. Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Если

1) существует такое $\delta > 0$, что f имеет разный характер выпуклости на $(x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta)$;

2) f непрерывна в точке x_0;

3) существует $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$;
то x_0 называется *точкой перегиба* f.

Определение называет точкой перегиба то, что хочется так назвать из наглядных соображений. Условия 2) и 3) означают, что в точке перегиба график имеет касательную (возможно, вертикальную), а из условия 1) следует, что слева и справа от точки перегиба график расположен по разные стороны от касательной (рисунки 42a и 42b).

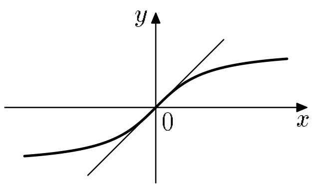

Рис. 42a

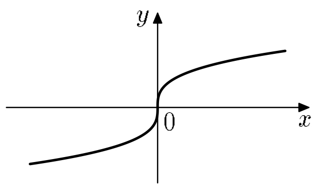

Рис. 42b

Точки, в которых функция меняет направление выпуклости, но график не имеет касательной (как в случае разрыва на рисунке 43a или излома на рисунке 43b), к точкам перегиба не относятся.

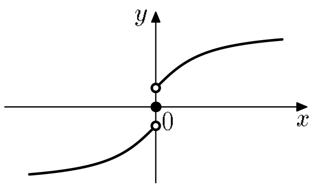

Рис. 43a

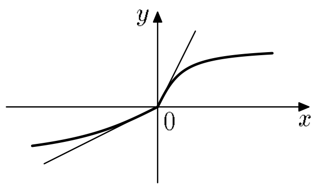

Рис. 43b

Замечание 3. *Если x_0 — точка перегиба f, а f дважды дифференцируема в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.*

Для доказательства надо воспользоваться замечанием 1 к теореме 3.

Теорема 4. Неравенство Иенсена. *Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и*

$p_1, \ldots, p_n > 0$

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Замечание 1. Числа p_k называются *весами,* а отношение $\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$ — *взвешенным средним* (арифметическим) чисел $x_1, \ldots, x_n$. Если все $p_k = 1$, то взвешенное среднее есть обычное среднее арифметическое $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Неравенство Иенсена можно сформулировать так: значение выпуклой вниз функции от взвешенного среднего не превосходит взвешенного среднего значений функции.

Замечание 2. Не уменьшая общности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. При этом условии неравенство Иенсена принимает вид

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k).$$

Действительно, для произвольных положительных p_k положим $q_k = \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$. Тогда неравенство Иенсена для весов p_k и q_k выглядит одинаково, а $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Положим

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Сразу отметим, что если $x_1 = \ldots = x_n$, то x^* с ними совпадает, а неравенство Иенсена обращается в равенство.

Пусть среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть различные.

Проверим, что $x^* \in (a, b)$. Действительно, хоть одно из чисел x_k меньше b, поэтому

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k < \sum_{k=1}^{n} p_k b = b.$$

Аналогично доказывается, что $x^* > a$.

В точке x^* у функции f существует опорная прямая; пусть она задается уравнением $\ell(x) = \alpha x + \beta$. По определению опорной прямой $\ell(x^*) = f(x^*)$ и $\ell(x_k) \leqslant f(x_k)$ при всех k. Поэтому

$$f(x^*) = \ell(x^*) = \alpha \sum_{k=1}^{n} p_k x_k + \beta =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_k(\alpha x_k + \beta) = \sum_{k=1}^{n} p_k \ell(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k). \quad \square$$

Замечание 3. *Если f строго выпукла вниз, а среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть различные, то неравенство Иенсена строгое.*

Для доказательства следует воспользоваться существованием строго опорной прямой.

Замечание 4. Для выпуклой вверх функции неравенство Иенсена выполняется с противоположным знаком.

Замечание 5. Удаляя из сумм равные нулю слагаемые, неравенство Иенсена можно тривиально обобщить на ситуацию, в которой p_k — неотрицательные числа, не все равные нулю.

Замечание 6. При $n = 2$ неравенство Иенсена совпадает с неравенством из определения выпуклости.

Определение. Числа p и q из $(1, +\infty)$, связанные соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются *сопряженными показателями.*

Ясно, что для сопряженных показателей $q = \frac{p}{p-1}$ и $p = \frac{q}{q-1}$.

Напомним, что если a — вектор из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, то через a_k обозначаются его координаты, то есть $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Теорема 5. Неравенство Гёльдера. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{C}^n$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|, \tag{33}$$

достаточно доказать неравенство Гёльдера для чисел $|a_k|$, $|b_k|$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$. Более того, можно считать, что все $b_k > 0$. Действительно, если неравенство Гёльдера доказано для положительных чисел b_k, то

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k: b_k \neq 0} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k: b_k \neq 0} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k: b_k \neq 0} b_k^q\right)^{1/q} \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.\end{gathered} \tag{34}$$

Итак, пусть $a_k \geqslant 0$, $b_k > 0$ при всех k. Функция $f(x) = x^p$ строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Положим $p_k = b_k^q$, $x_k = a_k b_k^{1-q}$ и применим неравенство Иенсена:

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right)^p \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Учитывая, что

$$p_k x_k = a_k b_k, \qquad p_k x_k^p = b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)} = a_k^p,$$

получаем:

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}\right)^p \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}, \tag{35}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{p-1}.$$

Остается возвести обе части неравенства в степень $\frac{1}{p}$ и воспользоваться тем, что $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$. $\square$

Выясним, когда неравенство Гёльдера обращается в равенство. Предварительно введем несколько соглашений. Будем говорить, что вещественные или комплексные числа одного знака, если они лежат на одном луче с вершиной в нуле. Для вещественных чисел это попросту означает, что либо все они неотрицательны, либо все они неположительны (как видно, слово “знак” понимается в нестрогом смысле: нуль допускается). Из неравенства треугольника ясно, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

тогда и только тогда, когда числа a_k одного знака.

Замечание 1. Неравенство Гёльдера обращается в равенство в том и только том случае, когда выполняются два условия:

1) вектора $\left(|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\right)$ и $\left(|b_1|^q, \ldots, |b_n|^q\right)$ сонаправлены;

2) все произведения $a_k b_k$ одного знака.

Доказательство. Условие 2) — это условие равенства в (33). Остается доказать, что для $a_k, b_k \geqslant 0$ равенство в (34) равносильно сонаправленности векторов $\left(a_1^p, \ldots, a_n^p\right)$ и $\left(b_1^q, \ldots, b_n^q\right)$.

Если вектор a или b нулевой, то равенство очевидно. Пусть $a, b \neq \mathbb{O}$.

Если $b_k > 0$ при всех k, то неравенство Иенсена (35) для строго выпуклой функции обращается в равенство если и только если $x_1 = \ldots = x_n$, то есть

$$a_1 b_1^{1-q} = \ldots = a_n b_n^{1-q}. \tag{36}$$

Обозначим это общее значение через $\lambda^{1/p}$. Тогда равенство (36) равносильно тому, что $a_k^p = \lambda b_k^q$ при всех k.

Таким образом, условием равенства в первом неравенстве в (34) будет: $a_k^p = \lambda b_k^q$ при всех k, для которых $b_k \neq 0$. Условие равенства во втором неравенстве в (34) такое: если $b_k = 0$, то и $a_k = 0$. Поэтому условием равенства в (34) будет: $a_k^p = \lambda b_k^q$ при всех k. $\square$

Следствие 1. Неравенство Коши – Буняковского. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}.$$

Для доказательства надо положить в неравенстве Гёльдера $p = q = 2$.

Замечание 2. Неравенство Коши – Буняковского было доказано другим способом в § 1 главы 2. Там же было получено условие равенства, состоящее в том, что вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n)$ коллинеарны (черта означает комплексное сопряжение, и в вещественном случае ее можно опустить). Это же условие можно вывести и из замечания 1 при $p = 2$.

Теорема 6. Неравенство Минковского. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, $p \geqslant 1$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. При $p = 1$ неравенство Минковского сводится к неравенству треугольника для модуля. Пусть $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Обозначим $C = \sum\limits_{k=1}^n |a_k + b_k|^p$. Применим неравенство треугольника, а затем неравенство Гёльдера:

$$
\begin{aligned}
C = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \\
+ \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \\
+ \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \\
= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \right\} C^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Если $C = 0$, то неравенство Минковского очевидно, а если $C > 0$, то, сокращая на $C^{1/q}$, получаем требуемое. $\square$

Замечание 3. Если $p > 1$, то неравенство Минковского обращается в равенство в том и только том случае, когда вектора a и b сонаправлены.

Доказательство. Если a и b сонаправлены, то равенство очевидно. Докажем обратное утверждение. Пусть неравенство Минковского обращается в равенство, $a, b \neq \mathbb{O}$. При $a + b = \mathbb{O}$ неравенство строгое, поэтому $a + b \neq \mathbb{O}$.

Оба неравенства из доказательства неравенства Минковского обращаются в равенства. Во-первых, при каждом k верно равенство

$$|a_k + b_k||a_k + b_k|^{p-1} = \big(|a_k| + |b_k|\big)|a_k + b_k|^{p-1},$$

поэтому при каждом k или a_k и b_k одного знака, или $a_k = -b_k$. Во-вторых, по замечанию 1 о равенстве в неравенстве Гёльдера ненулевой вектор $\big(|a_1+b_1|^p, \ldots, |a_n+b_n|^p\big)$ сонаправлен и с вектором $\big(|a_1|^p, \ldots, |a_n|^p\big)$, и с вектором $\big(|b_1|^p, \ldots, |b_n|^p\big)$. Поэтому вектора $\big(|a_1|, \ldots, |a_n|\big)$ и $\big(|b_1|, \ldots, |b_n|\big)$ тоже сонаправлены. Следовательно, если $a_k = -b_k$ при некотором k, то $a_k = b_k = 0$, так что и в этом случае a_k и b_k одного знака. Итак, существует такое $\lambda > 0$, что $|a_k| = \lambda |b_k|$ при всех k. Но поскольку a_k и b_k одного знака, и $a_k = \lambda b_k$ при всех k. $\square$

Следствие 2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{C}^n$. *Тогда*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}.$$

Для доказательства надо положить в неравенстве Минковского $p = 2$.

Замечание 4. Следствие 2 вместе с условием равенства было доказано другим способом в § 1 главы 2.

Следствие 3. *Если* $p \geqslant 1$, *то функция*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

является нормой в $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{C}^n$.

В самом деле, выполнение первых двух аксиом нормы очевидно, а третья совпадает с неравенством Минковского.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ или $r < 0$, $a_1, \ldots, a_n > 0$. Величина

$$M_r(a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{1/r}$$

называется *средним степенным* порядка r чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Некоторые средние имеют специальные названия:

$$M_1(a) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \text{ — среднее арифметическое,}$$

$$M_2(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \text{ — среднее квадратическое,}$$

$$M_{-1}(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \text{ — среднее гармоническое.}$$

Замечание 1. Задающая $M_r(a)$ формула может иметь смысл не только для неотрицательных a_k. В частности, среднее арифметическое определено для произвольных чисел. Тем не менее, даже если $M_r(a)$ определено, эту величину не всегда логично называть средним произвольных чисел, так как для нее может не выполняться свойство M2 ниже. Поэтому при рассмотрении средних мы ограничиваемся неотрицательными числами.

Докажем несколько свойств средних. Обозначим

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right), \quad a^r = (a_1^r, \dots, a_n^r).$$

M1. *Если* $a_1, \dots, a_n > 0$, *то* $M_r(a) = \dfrac{1}{M_{-r}\left(\frac{1}{a}\right)}$.

M2. $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant M_r(a) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$.

Эти свойства очевидны.

M3. $\lim\limits_{r \to +\infty} M_r(a) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$, $\lim\limits_{r \to -\infty} M_r(a) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$.

Доказательство. Пусть $r > 0$, $A = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$. Если $A = 0$, то все $a_k = 0$, и первое утверждение тривиально. Если $A > 0$, то $M_r(a) = A\mu^{1/r}(r)$, где $\mu(r) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{A}\right)^r \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. По теореме о сжатой функции $M_r(a) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} A$.

По доказанному и свойству M1 при $a_1, \dots, a_n > 0$

$$M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}\left(\frac{1}{a}\right)} \underset{r \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{a_k}} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k. \quad \square$$

M4. $\lim\limits_{r \to 0} M_r(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n > 0$. По формуле Тейлора для показательной функции и логарифма

$$M_r(a) = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r\right)} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+r\ln a_k+O\left(r^2\right)\right)\right)} =$$
$$= e^{\frac{1}{r}\ln\left(1+\frac{r}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k+O\left(r^2\right)\right)} = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k+O(r)} \underset{r\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{r\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k} = \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Если же существует нулевое a_k, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^r \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} \alpha \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$, поэтому $M_r(a) \underset{r\to 0+}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Свойство М4 подсказывает доопределить среднее для $r = 0$.

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$. Величина

$$M_0(a) = \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

называется *средним геометрическим* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Теорема 7. Монотонность средних степенных. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$, $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ при $r \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ при $r < 0$. Тогда*

$$M_r(a) \leqslant M_s(a),$$

причем равенство имеет место лишь при $a_1 = \ldots = a_n$. В частности,

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}. \tag{37}$$

Неравенство (37) называется **неравенством Коши** между средним геометрическим и средним арифметическим.

Доказательство разобьем на несколько случаев.

1. Пусть $0 < r < s$. Поскольку $\frac{s}{r} > 1$, функция $f(x) = x^{s/r}$ строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Применим к ней неравенство Иенсена, взяв $p_k = 1$, $x_k = a_k^r$. Получим

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{s/r} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^s,$$

причем в силу строгой выпуклости равенство достигается лишь при $a_1 = \ldots = a_n$. Остается возвести обе части в степень $\frac{1}{s}$.

2. Пусть $r = 0$, $s = 1$, то есть докажем неравенство Коши. Если среди a_k есть нуль, то неравенство (37) очевидно выполняется и обращается в равенство лишь если все a_k суть нули. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. Применим неравенство Иенсена к строго выпуклой вверх функции $\ln$, взяв $p_k = 1$, $x_k = a_k$. Получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

что равносильно (37), причем в силу строгой выпуклости равенство достигается лишь при $a_1 = \ldots = a_n$.

Остальные случаи сводятся к уже рассмотренным элементарными преобразованиями.

3. Если $r = 0 < s$, то по доказанному неравенству Коши

$$M_0(a) = M_0^{1/s}(a^s) \leqslant M_1^{1/s}(a^s) = M_s(a).$$

4. Если $r < s \leqslant 0$, то $0 \leqslant -s < -r$, и по доказанному

$$M_r(a) = \frac{1}{M_{-r}\left(\frac{1}{a}\right)} \leqslant \frac{1}{M_{-s}\left(\frac{1}{a}\right)} = M_s(a).$$

5. Если $r < 0 < s$, то $M_r(a) \leqslant M_0(a) \leqslant M_s(a)$. $\square$

Замечание 2. Средние степенные построены по формуле $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(a_k)\right)$, где φ — строго монотонная функция: $\varphi(x) = x^r$ при $r \ne 0$, $\varphi(x) = \ln x$ при $r = 0$.

Замечание 3. Свойство монотонности вместе с доказательством сохраняется для взвешенных средних $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^r \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)^{1/r}$ $(p_1, \ldots, p_n > 0)$.

ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Пусть $f, F: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Функция F называется *первообразной* функции f на $\langle a, b \rangle$, если

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \qquad F'(x) = f(x).$$

Если задана функция $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, то возникают три вопроса.

1. Существует ли первообразная f на $\langle a, b \rangle$?

2. Если первообразная существует, то как описать все первообразные?

3. Как найти первообразную?

Задача описания класса функций, имеющих первообразную, очень сложна. Ограничимся двумя утверждениями на эту тему.

Не всякая заданная на промежутке функция имеет на нем первообразную. Из теоремы Дарбу вытекает, что производная не может иметь разрывов первого рода (следствие 2 теоремы 7 § 2 главы 4). Поэтому, например, функция sign не является производной никакой функции и, таким образом, не имеет первообразной на $\mathbb{R}$.

Однако, для непрерывных функций ответ утвердительный.

Теорема 1. *Всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нем первообразную.*

Доказательство этой теоремы опирается на понятие определенного интеграла и будет дано позже.

Поскольку элементарные функции непрерывны, из теоремы 1 следует, что всякая элементарная функция имеет первообразную на каждом промежутке из своей области определения.

В отличие от первого, ответ на второй вопрос очень прост: если первообразная существует, то она единственна с точностью до постоянного слагаемого. Мы не будем различать в обозначениях число C и функцию, тождественно равную C.

Теорема 2. *Пусть* $f, F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F *— первообразная* f *на* $\langle a, b\rangle$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого* $C \in \mathbb{R}$ *функция* $F + C$ *является первообразной* f *на* $\langle a, b\rangle$.

2. *Первообразных другого вида у* f *на* $\langle a, b\rangle$ *нет: если* Φ *— первообразная* f *на* $\langle a, b\rangle$, *то существует такое* $C \in \mathbb{R}$, *что* $\Phi = F + C$.

Доказательство. 1. Для любого $x \in \langle a, b\rangle$

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Поскольку для любого $x \in \langle a, b\rangle$

$$(\Phi - F)'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

по признаку постоянства функции (следствие 1 теоремы 1 § 4 главы 4) $\Phi - F$ постоянна на $\langle a, b\rangle$. Положим $C = \Phi - F$, тогда $\Phi = F + C$. $\square$

Хотя определение первообразной имеет смысл не только для функций, заданных на промежутке, в теореме 2 существенно, что область определения — промежуток.

Определение. Пусть функция $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеет первообразную. Совокупность всех первообразных f на $\langle a, b\rangle$ называется *неопределенным интегралом* f на $\langle a, b\rangle$ и обозначается $\int f(x)\,dx$ или $\int f$.

Промежуток $\langle a, b\rangle$ обычно в обозначениях не указывается. Знак интеграла $\int$ происходит от буквы S, первой буквы слова “сумма”. Интегрирование тесно связано с суммированием, что станет ясно при изучении определенного интеграла. Запись $\int f$ не содержит лишних обозначений. В записи же $\int f(x)\,dx$ переменная интегрирования x немая, а символ dx не имеет самостоятельного значения. Можно считать, что $\int$ — это открывающая скобка, а dx — закрывающая. Тем не менее, обозначение $\int f(x)\,dx$ бывает удобно, так как позволяет явно указать переменную интегрирования, если подынтегральная функция зависит еще и от параметров. Кроме того, как будет видно далее, иногда символу dx можно придать смысл обычного дифференциала.

Если F — первообразная f, то по теореме 2

$$\int f = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

По традиции фигурные скобки в этой записи опускают и пишут

$$\int f = F + C \quad \text{или} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Надо только помнить, что левая и правая части обозначают множества функций, а не одну функцию.

Для того, чтобы убедиться в справедливости равенства

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

достаточно проверить, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$. Так как $dF(x) = f'(x)\,dx$, пишут

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Пишут также

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Эти равенства следует понимать так: дифференциал (производная) любой функции из множества $\int f(x)\,dx$ равен (равна) правой части. В этом смысле знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются.

Перейдем к вопросу нахождения или, как говорят, взятия первообразных и неопределенных интегралов.

Таблица интегралов. Формулы интегрирования получаются, если прочитать формулы дифференцирования справа налево. Эти формулы верны на каждом промежутке из области определения подынтегральной функции.

1. $\int 0\,dx = C.$

2. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

3. При $\alpha = -1$ первообразная другая:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x > 0$$

("закрывающую скобку" dx пишут и в числителе дроби). Подынтегральная функция определена и при $x < 0$; легко видеть, что

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad x < 0.$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{1}$$

Подчеркнем, что равенство (1), в котором C означает произвольную постоянную, верно на каждом из промежутков $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$. Однако, оно не дает общего вида первообразной на их объединении $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, так как постоянную можно выбирать независимо на каждом промежутке:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Это пояснение относится и к другим формулам такого типа, причем число промежутков может быть больше двух, или даже речь может идти о счетном множестве промежутков.

4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

Было бы ошибкой сократить последнее равенство на C и вывести, что $\arcsin x = -\arccos x$. Здесь записано равенство не индивидуальных функций, а множеств функций:

$$\{\arcsin + C : C \in \mathbb{R}\} = \{-\arccos + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Его можно доказать и без использования интеграла, с помощью формулы $\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}$. Это замечание относится и к следующему равенству.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$

Добавим в таблицу еще два интеграла.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

Если выбран знак “+” или $x > 1$, то модуль можно заменить скобками.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Функции в правых частях формул 11 и 12 называются соответственно *длинным* и *высоким логарифмом.* Как обычно, эти формулы доказываются дифференцированием.

Для множеств, состоящих из функций (в частности, для неопределенных интегралов), как и для числовых множеств, полагаем

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$
$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}, \quad x + B = \{x + y : y \in B\}.$$

Кроме того, будем применять к множествам функций операцию подстановки: $\{F(x)\}\big|_{x=y} = \{F(y)\}$.

Теорема 3. Арифметические действия над неопределенными интегралами. *Пусть функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) *функция $f + g$ имеет первообразную и*

$$\int (f + g) = \int f + \int g,$$

2) *функция αf имеет первообразную и при $\alpha \neq 0$*

$$\int \alpha f = \alpha \int f.$$

Доказательство. Пусть F — первообразная f, G — первообразная g. Тогда по правилам дифференцирования $F + G$ — первообразная $f + g$, αF — первообразная αf. Докажем равенства.

1. Поскольку

$$\int (f + g) = \{F + G + C : C \in \mathbb{R}\},$$
$$\int f = \{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\}, \quad \int g = \{G + C_2 : C_2 \in \mathbb{R}\},$$

требуется доказать, что

$$\{F + G + C : C \in \mathbb{R}\} = \{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\} + \{G + C_2 : C_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (2)$$

Обозначим через Λ и Π левую и правую часть равенства (2). Если $H \in \Lambda$, то $H = F + G + C$ при некотором C. Положим $C_1 = C$,

$C_2 = 0$; тогда $H = (F + C_1) + (G + C_2) \in \Pi$. Обратно, если $H \in \Pi$, то $H = (F + C_1) + (G + C_2)$ при некоторых C_1 и C_2. Полагая $C = C_1 + C_2$, находим, что $H \in \Lambda$.

2. Требуется доказать, что

$$\{\alpha F + C : C \in \mathbb{R}\} = \alpha\{F + C_1 : C_1 \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

Обозначим через Λ и Π левую и правую часть равенства (3). Если $H \in \Lambda$, то $H = \alpha F + C$ при некотором C. Положим $C_1 = C/\alpha$; тогда $H = \alpha(F + C_1) \in \Pi$. Обратно, если $H \in \Pi$, то $H = \alpha(F + C_1)$ при некотором C_1. Полагая $C = \alpha C_1$, находим, что $H \in \Lambda$. $\square$

Замечание 1. При $\alpha = 0$ равенство (3) нарушается, так как Λ есть множество всех констант, а Π содержит только тождественный нуль.

Замечание 2. Справедливо равенство

$$\int f + \int g = F + \int g.$$

В самом деле, обе части равны $\{F + G + C : C \in \mathbb{R}\}$. Таким образом, при вычислении суммы нескольких интегралов произвольную постоянную можно опускать, пока не взят самый последний интеграл.

Следствие 1. Линейность неопределенного интеграла. *Пусть функции $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют первообразные, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Тогда*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Теорема 4. Замена переменной в неопределенном интеграле. *Пусть $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, f имеет первообразную, φ дифференцируема. Тогда*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Доказательство. Пусть F — первообразная f. Тогда по правилу дифференцирования композиции $F \circ \varphi$ — первообразная $(f \circ \varphi)\varphi'$. Поэтому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C,$$

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = F(x) + C\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \quad \square$$

Пример 1. Найдем $\int e^{\sin t}\cos t\,dt$:

$$\int e^{\sin t}\cos t\,dt = \int e^x\,dx\Big|_{x=\sin t} = e^x + C\Big|_{x=\sin t} = e^{\sin t} + C.$$

Обычно при оформлении вычислений черту подстановки каждый раз не пишут, а держат “в уме”.

Правило замены переменной может применяться как слева направо, так и справа налево. Пусть в дополнение к условиям теоремы 4 функция φ обратима. Тогда по теореме 4

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

На практике правило подстановки обычно применяют так. Требуется найти интеграл $I = \int f(x)\,dx$. Полагают $x = \varphi(t)$. Тогда $I = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Преобразованный интеграл вычисляют: $I = G(t) + C$, после чего возвращаются к исходной переменной: $I = G(\varphi^{-1}(x)) + C$.

Как видно, при подстановке $x = \varphi(t)$ символ dx преобразуется как настоящий дифференциал: $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Пример 2. Линейная замена переменной. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, F — первообразная f, то

$$\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C.$$

Эту формулу можно получить заменой $y = \alpha x + \beta$, но еще проще прямо проверить ее дифференцированием. Например,

$$\int \cos(5x+1)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x+1) + C.$$

Линейной заменой $x = at$ сводятся к табличным интегралы

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

Пример 3. Найдем $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Сделаем замену $x = t^2$, где $t \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{x} = t$, $dx = 2t\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$
$$= 2\big(t - \ln(1+t)\big) + C = 2\big(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\big) + C.$$

Пример 4. Найдем $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Так как по условию задачи $x \in [-1,1]$, можно применить *тригонометрическую подстановку* $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $t = \arcsin x$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\,dt$ и

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной и упрощая с помощью равенства

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2},$$

получаем ответ:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.$$

Теорема 5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. *Пусть функции f и g дифференцируемы на $\langle a,b\rangle$, $f'g$ имеет первообразную. Тогда fg' имеет первообразную и*

$$\int fg' = fg - \int f'g. \tag{4}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения $(fg)' = f'g + fg'$. По теореме 3 функция $f'g = (fg)' - fg'$ имеет первообразную и

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g = fg - \int f'g.$$

В последнем равенстве мы опустили константу по замечанию 2 к теореме 3. $\square$

Равенство (4) называется формулой интегрирования по частям. Эту формулу также записывают в виде

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df,$$

трактуя $g'(x)\,dx$ и $f'(x)\,dx$ как дифференциалы.

Замечание 3. Условия теоремы 5 заведомо выполнены, если $f, g \in C^{(1)}\langle a,b\rangle$.

Замечание 4. Если известна g', то g определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое при интегрировании по частям можно выбирать по своему усмотрению.

Пример 5. Найдем $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Положим $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^\alpha$; тогда $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Если $\alpha \ne -1$, то $g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, и по формуле интегрирования по частям

$$\int x^\alpha \ln x\,dx = \ln x\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя последний табличный интеграл, находим

$$\int x^{\alpha} \ln x \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

Если $\alpha = -1$, то $g(x) = \ln x$, и формула интегрирования по частям дает

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Получившееся равенство можно рассматривать как уравнение относительно неизвестного интеграла. Решая уравнение, находим

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

Этот прием называется *приведением интеграла к самому себе.*

Последний интеграл можно было взять и с помощью замены $\ln x = t$.

В § 1 главы 4 было установлено, что производная любой элементарной функции является элементарной. Для первообразной аналогичное утверждение неверно: существуют элементарные функции, первообразные которых не являются элементарными. Если первообразная функции f элементарна, то интеграл $\int f$ называют *берущимся*, а если неэлементарна, то *неберущимся.*

Известны классы элементарных функций, интегралы от которых берутся. Самый важный из них — класс рациональных дробей. Многие другие берущиеся интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подходящих подстановок. Таковы, например, интегралы от функций вида $R(\sin x, \cos x)$ и $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, где R — рациональная функция своих аргументов. На методах интегрирования мы останавливаться не будем.

Некоторые неберущиеся интегралы имеют специальные названия:

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} \, dx$ — *интегральный синус*,

$\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} \, dx$ — *интегральный косинус*,

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \text{ — } \textit{интегральная показательная функция},$$
$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ — } \textit{интегральный логарифм},$$
$$\int \sin x^2\,dx \text{ и } \int \cos x^2\,dx \text{ — } \textit{интегралы Френеля},$$
$$\int e^{-x^2}\,dx \text{ — } \textit{интеграл вероятности} \text{ или } \textit{функция ошибок}.$$

(Точнее, так называются некоторые конкретные первообразные подынтегральных функций, а иногда еще умноженные на константу, но мы не будем давать здесь пояснения.) Доказательство того, что эти и некоторые другие интегралы не берутся, проводится средствами дифференциальной алгебры и выходит за рамки курса анализа.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ