Дз #6

6.1) $y''' - 3y' + 2y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda^2 - 2) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$

$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = -2$

$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x}$

6.2) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -2$

$Y_{общ. одн.} = (C_1 + x \cdot C_2) \cdot e^{-2x}$

Рассмотрим правую часть

$x \cdot e^{2x}$ $\qquad n = 1$

$\alpha = 2$

$s = 0$ (как кр-ть корня $\lambda = L = 2$)

$Y_{част. неодн} = e^{2x} \cdot (ax + b)$

$y' = 2e^{2x}(ax+b) + ae^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}(ax+b) + 4ae^{2x}$

$4e^{2x}(ax+b) + 4ae^{2x} + 8e^{2x}(ax+b) + 4ae^{2x} + 4e^{2x}(ax+b) = xe^{2x}$

$16(ax+b) + 8a = x$

$a = \frac{1}{16} \qquad 16b + 8a = 0 \qquad b = -\frac{1}{32}$

$\Rightarrow y = (C_1 + xC_2)e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)$

6.9) $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}$

$\lambda(\lambda-1)-2=0 \qquad \lambda^2-\lambda-2=0$

$y''-y'-2y = \frac{3e^{2t}}{e^t+e} \qquad (\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

$$\begin{cases} C_1' e^{2t} + C_2' e^{-t} = 0 \\ 2C_1' e^{2t} - C_2' e^{-t} = \frac{3e^{2t}}{e^t+e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{1}{e^t+1} \\ C_2' = \frac{-e^{2t}}{e^t(e^t+1)} \end{cases}$$

$C_1 = -\ln(e^t+1) + t + C_3$

$C_2 = -\ln(e^t+1) - (e^{2t}/2) + e^t + C_4$

$y = (-\ln(x+1) + \ln(x) + C_3)x^2 + (-\ln(x+1) -$

$- \frac{x^2}{2} + x + C_4) \cdot \frac{1}{x}$

6.8) $y'' + 2y' + y = \cos(ix)$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Поскольку $\cos ix = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ и корень характеристического уравнения $\lambda = -1$ двукратный, то, согласно ~~[illegible]~~ частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = a e^{x} + b x^2 e^{-x}$$

Подставив $\tilde{y}$ в данное уравнение, получаем тождество относительно x, из которого следует, что

$a = \frac{1}{8}$ $b = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{x} + \frac{x^2}{4}e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

6

6.7) $x^3 y'' - 2xy = \ln x$

$$x^2 y'' - 2y = \frac{\ln x}{x}$$

Одн: $\lambda(\lambda-1)-2 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \quad \lambda = 2; -1$

$y'' - y' - 2y = \frac{t}{e^t} = f(e^t)$ $\qquad f(t) = \frac{t}{e^t} = P_m(t) e^{\gamma t} \Rightarrow$

$y_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ \gamma=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad y_1 = t^s Q_m(t) e^{\gamma t} = t(C_1 t + C_2) e^{-t}$

$y' = (2C_1 t + C_2 - C_1 t^2 - C_2 t) e^{-t} = (-C_1 t^2 + 2C_1 - 2t + C_2) e^{-t}$

$y'' = (-2C_1 t + 2C_1 - C_2 + C_1 t^2 + (C_2 - 2C_1) t - C_2) e^{-t} =$
$= C_1 t^2 + (C_2 + C_1) t + 2C_1 - 2C_2) e^{-t}$

$y_1 = (-\frac{1}{6} t^2 - \frac{1}{9} t) e^{-t}$

$\Rightarrow y = y_0 + y_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + (-\frac{1}{6} t^2 - \frac{1}{9} t) e^{-t}$

6.6) $x^2 y''' = 2y' \iff x^3 y''' - 2xy' = 0$

$x = e^t$

$y'_x = \frac{y'_t}{e^t}$ $\quad y''_{xx} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}}$

$y'''_{xxx} = \frac{(y'''_{ttt} - y''_{tt})e^{2t} - 2e^{2t}(y''_{tt} - y'_t)}{e^{3t}} = \frac{y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t}{e^{3t}}$

$y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t - 2y'_t = 0$

$y'''_{ttt} - 3y''_{tt} = 0$ $\quad \lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ $\quad \lambda = 0; 3$

$y = (C_1 + C_2 \cdot t) + C_3 e^{3t}$ $\quad y = C_1 + C_3 x^3 + C_2 \ln x$

6.5) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$y'_x = \frac{y'_t}{e^t}$

$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{e^t}\right)'_t}{e^t} = \frac{y''_{tt}e^t - e^t \cdot y'_t}{e^{3t}}$

$e^{2t} \cdot \frac{y''_{tt}e^t - e^t \cdot y'_t}{e^{3t}} - 4e^t \cdot \frac{y'_t}{e^t} + 6y = 0$

$y''_{tt} - y'_t - 4y'_t + 6y = 0$

$y''_{tt} - 5y'_t + 6y = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda = 2; 3$

$y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} = C_1x^2 + C_2x^3$

6.4) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1; -2$

$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - 2C_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

$-C_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$ $\qquad C_2'(x) = -\frac{e^x e^x}{e^x+1}$

$dC_2 = -\frac{e^x de^x}{e^x+1} = -\frac{t\,dt}{t+1} = -\frac{(t+1-1)\,dt}{t+1} = -dt + \frac{dt}{t+1}$

$C_2(x) = -t + \ln|t+1| = e^x + \ln|e^x+1| + K_2$

$C_1'(x) e^{-x} - C_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$

$C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ $\qquad \int dC_1(x) = \int \frac{de^x}{e^x+1}$

$C_1(x) = \ln(e^x+1) + k$

$y = (\ln|e^x+1| + k_1) e^x + (\ln|e^x+1| - e^x + k_2) e^{-2x}$

6.3) $y^{(4)} + y'' = 7x - 3\cos x$

$y^{(4)} + y'' = 0$ $\quad \lambda^4 + \lambda^2 = 0$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\quad \lambda_{3,4} = \pm i$

$y^{(4)} + y'' = 7x$ $\qquad y^{(4)} + y'' = -3\cos x$

$y_{r n_1} = x^3 Q_m(x)$ $\quad m = 1$ $\quad Q_m(x) = ax + b$

$y_{r n_1} = x^2(ax + b)$

$P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta = 3\cos x$ $\quad n=0 \quad m=0 \quad \beta=1$

$y_{rn2} = x^3(Q_e(x)\cos x + D_e(x)\sin x)$ $\quad s=1 \quad l=0 \quad Q_e(x) = c$

$D_e(x) = d$

$y_{rn2} = x(c\cos x + d\sin x)$

$y_{r.n} = y_{rn_1} + y_{rn2}$ $\qquad = x^2(ax + b) + x(c\cos x \cdot d\sin x)$