№ 2077

$\int x^2 e^x \cos dx$

$$I = \int x^2 e^x \cos x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dV = e^x \cos x\,dx\ ; & V = \int e^x \cos x\,dx \end{matrix}\right] =$$

$$= \left[\text{Рассчитаем } V = \int e^x \cos x\,dx = \left[\begin{matrix} f = e^x & df = e^x dx \\ dg = \cos x\,dx & g = \sin x \end{matrix}\right]\right.$$

$$= e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx \Rightarrow \left[\text{Рассчитаем } \int \sin x \cdot e^x dx = \right.$$

$$\left[\begin{matrix} t = e^x & ; dt = e^x dx \\ dr = \sin x\,dx, & r = -\cos x \end{matrix}\right] = (-\cos x) e^x - \int (-\cos x) e^x dx =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x \cos x + V \Big] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow V = e^x \sin x - (-e^x \cos x) - V \\ 2V = e^x(\sin x + \cos x) \\ V = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \end{matrix}\right] = \left[\int u\,dV = u \cdot V - \int V du \right] =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) - \int \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \cdot 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^x (\sin x + \cos x) - \int x e^x \sin x\,dx - \int x e^x \cos x\,dx = I$$

Теперь нужно посчитать!

$I_1 = \int x e^x \sin x \, dx$ и $I_2 = \int x e^x \cos x \, dx$;

$$I_1 = \int x e^x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} y = x; \; dy = dx \\ dz = e^x \sin x \, dx; \; z = \int e^x \sin x \, dx \end{bmatrix} =$$

$= \Big[$ Рассмотрим интеграл $z = \int e^x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} u = e^x; \; du = e^x dx \\ dv = \sin x \, dx; \; v = -\cos x \end{bmatrix}$

$$= e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e^x \, dx = e^x \cdot (-\cos x) + V = -e^x \cos x +$$

$$+ \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) = e^x \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x - \cos x \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) = z \Big] =$$

$$= I_1 = \int x e^x \sin x \, dx = x \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) - \int \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x \sin x \, dx + \frac{1}{2} \int e^x \cos x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^x (\sin x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{4} e^x (\cancel{\sin x} + \cos x - \cancel{\sin x} + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x \cos x = I_1$$

$$I_2=\int x e^x \cos x\,dx = \left[\begin{array}{l} U=x;\ dU=dx \\ dh=e^x\cos x\,dx;\ h=\int e^x \cos x\,dx = \\ = V=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x \end{array}\right] = x\cdot\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x - \int \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)dx$$

$$= x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}\int e^x \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}\cdot Z - \frac{1}{2}V =$$

$$= \frac{1}{2}x e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

$$= \frac{1}{2}x e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{4}e^x(\sin x-\cos x+\sin x+\cos x) =$$

$$= \frac{1}{2}x e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}e^x \sin x = I_2$$

$$I=\int x^2 e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^x(\sin x+\cos x) - I_1 - I_2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x(\sin x+\cos x) - \left(\frac{1}{2}x e^x(\sin x-\cos x) + \frac{1}{2}e^x\cos x\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}x e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}e^x \sin x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x(\sin x+\cos x) - \frac{1}{2}x e^x \sin x + \frac{1}{2}x e^x\cos x - \frac{1}{2}e^x\cos x$$

$$-\frac{1}{2}x e^x \sin x - \frac{1}{2}x e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x(\sin x+\cos x) - 2\cdot\frac{1}{2}x e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x +$$

$$+\frac{1}{2}e^x\sin x + C = \frac{1}{2}x^2e^x(\sin x + \cos x) - xe^x\sin x$$

$$+\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C =$$

$$= \frac{e^x}{2}\left(x^2(\sin x - \cos x) - 2x\sin x + (\sin x - \cos x)\right) + C$$

N 2063

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

Заменим через тангенс половинного угла

$$\int \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon(1-tg^2(\frac{x}{2}))}{tg^2(\frac{x}{2})+1}+1\right)^2}dx \quad \left[\begin{matrix} u = tg(\frac{x}{2}) & \frac{du}{dx} = \frac{sec^2(\frac{x}{2})}{2} \\ dx = \frac{2}{sec^2(\frac{x}{2})} & du = \frac{2}{u^2+1}du \end{matrix}\right]$$

$$= 2\cdot\int \frac{u^2+1}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}du = \left[u^2+1 = \frac{1}{1-\varepsilon}((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)+1-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right] = \int\left(\frac{\frac{1}{1-\varepsilon}((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2} + \frac{1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}\right)du$$

$$= \int\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)} + \frac{1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}\right)du =$$

$$= \left[\text{Применим линейность}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\int \frac{1}{(1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1}\,du + \left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\int \frac{1}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}\,du$$

Вычислим:

$$\int \frac{1}{(1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1}\,du = \left[v = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}} \quad \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon+1}} \right.$$

$$\left. du = \frac{\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\,dv \right] = \int \frac{\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{1-\varepsilon}((\varepsilon+1)v^2+\varepsilon+1)}\,dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon+1}}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \quad \left[\int\frac{1}{v^2+1}\,dv = \operatorname{arctg} v\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(v)}{\sqrt{1-\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon+1}} = [\text{Подставим } v] =$$

$$= \frac{\operatorname{artg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)}{\sqrt{1-\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon+1}}$$

Вычислим:

$$\int \frac{1}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}du = \left[\int \frac{1}{(au^2+b)^n}du = \frac{2n-3}{2b(n-1)} \cdot \int \frac{1}{(au^2+b)^{n-1}}du + \frac{u}{2b(n-1)(au^2+b)^{n-1}}\right] =$$

$$a = 1-\varepsilon \quad b = \varepsilon+1 \quad n = 2$$

$$= \frac{u}{2(\varepsilon+1)((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)} + \frac{1}{2(\varepsilon+1)}\int \frac{1}{(1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1}du =$$

Вычислим:

$$\left[\int \frac{1}{(1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1}du = [\text{используем предыдущий рез.}] = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{\sqrt{1-\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon+1}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{2\sqrt{1-\varepsilon}\,(\varepsilon+1)^{3/2}} + \frac{u}{2(\varepsilon+1)((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)}$$

Подставим вычисления на исходную функцию:

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\int\frac{1}{(1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1}\,du+\left(1+\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\int\frac{1}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}\,du =$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{(1-\varepsilon)^{3/2}\sqrt{\varepsilon+1}}+\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{2\sqrt{1-\varepsilon}\,(\varepsilon+1)^{3/2}}+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)u}{2(\varepsilon+1)((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)}$$

И так:

$$2\int\frac{u^2+1}{((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)^2}\,du=$$

$$=\frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{(1-\varepsilon)^{3/2}\sqrt{\varepsilon+1}}+\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,u}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{\sqrt{1-\varepsilon}\,(\varepsilon+1)^{3/2}}+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)u}{(\varepsilon+1)((1-\varepsilon)u^2+\varepsilon+1)}=\left[\text{Подставим } u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{(\varepsilon+1)((1-\varepsilon)\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\varepsilon+1)}+\frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{(1-\varepsilon)^{3/2}\sqrt{\varepsilon+1}}+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{\sqrt{1-\varepsilon}\,(\varepsilon+1)^{3/2}}=$$

$$= \frac{\varepsilon \sin x}{(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)(\varepsilon\cos x+1)} + \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\sqrt{\varepsilon+1}}\right)}{(\varepsilon-1)^2(\varepsilon+1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon \sin x}{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

№ 2042

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\,dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C$$

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)$$

Приравняем коэф. при $\sin x$ и $\cos x$, получим

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb \\ b_1 = Ab + Ba \end{cases}$$

Решаем относительно A и B:

$$\begin{cases} A = \dfrac{aa_1 + bb_1}{a^2+b^2} \\ B = \dfrac{ab_1 - a_1 b}{a^2+b^2} \end{cases}, \quad a^2+b^2 \neq 0$$

Преобразуем исходный интеграл:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\sin x}\,dx = A\int \frac{a\sin x + b\cos x}{a\sin x + b\sin x}\,dx + B\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\sin x}\,dx =$$
$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\sin x| + C$$

N 2059

Доказать, что $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} +$

$+ B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$ $(|a| \neq |b|)$

и определить коэффициенты A, B и C, если n - натуральное число, больше единицы.

$$\left(\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}\right)' = \left(\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\right)' + \left(B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}\right)'$$

$$+\left(C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}\right)'$$

$$\frac{1}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\cos x\,(a+b\cos x)^{n-1} + A\sin x\,(n-1)(a+b\cos x)^{n-2}\,b\sin x}{(a+b\cos x)^n}$$

$$+\frac{B}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{C}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$$\frac{1}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A(a\cos x + b\cos^2 x + bn\sin^2 x - b\sin^2 x)}{(a+b\cos x)^n} +$$

$$+\frac{B(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^n} + \frac{C(a+b\cos x)^2}{(a+b\cos x)^n} \quad \Big/ \cdot (a+b\cos x)^n$$

$$1 = A(a\cos x + b\cos^2 x + bn\sin^2 x - b\sin^2 x) +$$
$$+ B(a + b\cos x) + C(a + b\cos)^2$$

$$1 = \cos^2 x(Ab + Ab - Abn + CB^2) + \cos x\,(Aa + Bb + 2Cab) +$$
$$+ Ba + a^2C + Ab(n-1)$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 2Ab - Abn + Cb^2 = 0 \\ Aa + Bb + 2Cab = 0 \\ Ba + a^2C + Abn - Ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{n-2}{(n-1)(b^2-a^2)} \\ B = \dfrac{a(3-2n)}{(n-1)(b^2-a^2)} \\ A = \dfrac{b}{(n-1)(b^2-a^2)} \end{cases}$$

N 2091

Доказать, что интеграл

$$\int R(x) e^{ax} dx$$

где R – рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию $\int \frac{e^{ax}}{x} dx = li(e^{ax}) + C$ $\quad li\,x = \int \frac{dx}{\ln x}$

По условию задачи имеем что R имеет только действительные корни из этого вывод, ~~значит~~ R содержит только множители $(i = 1, 2, \ldots, k)$

Разложим $R(x)$ на частичные дроби:

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{A_j^i}{(x-a_i)^j}$$

$P(x)$ - многочлен от x, A_{ij} - const.

$$\Rightarrow \int R(x) e^{ax} dx = \overset{1)}{\int P(x) e^{ax} dx} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{c_i} A_{ij} \overset{2)}{\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx}$$

1) является элементарной функцией.

2) может быть выражен при помощи элементарной и трансцендентной функцией

что мы и сейчас попытаемся сделать.

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx = [t = x - a_i] = \int \frac{e^{a(t+a_i)}}{t^j}dx$$

$$= e^{aa_i}\int \frac{e^{at}}{t^j}dx$$

Теперь используем формулу интегрирования по частям!

будем заменять $\frac{1}{t^j}$ на $\left(-\frac{1}{(j-1)t^{j-1}}\right)'$

и выносить константы за интеграл!

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx = G(x) + a\cdot\int \frac{e^{at}}{t}dx = G(x) + a\cdot li(e^{at})$$

$G(x)$ – элементарная функция $\Rightarrow$

$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$ представимо в виде элементарной и трансцендентной функции

$\Rightarrow \int R(x)e^{ax}dx$ тоже представима.