.12.2021 Контрольная работа №2

Зайнидинов Мирзофаридавс М 3237

Вариант 3

Задача 1) Найти второе приближение Пикара к решению задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = tx \\ \dot{y} = y^2 + t \end{cases} \quad x(0)=1; \quad y(0)=0 \quad t_0 = 0$$

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \varphi_{k+1} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))\,ds$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s \cdot 1 \\ 0 + s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}s^2 \\ 0 + \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{2} + 1 \\ \frac{s^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{vmatrix} \frac{s^3}{2} + s \\ \frac{s^4}{4} + s \end{vmatrix} ds = \begin{vmatrix} 1 + \frac{s^4}{8} + \frac{s^2}{2} \\ \frac{s^5}{20} + \frac{s^2}{2} \end{vmatrix}$$

Ответ

Задача 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x-y} \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x-y} \end{cases} \qquad x > y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad y > 0$$

$$\dot{x} - \dot{y} = \frac{x-y}{x-y} \qquad \dot{x} = \dot{y} \qquad x = cy \Rightarrow c > 1$$

$$\dot{y} = \frac{y}{cy - y} = \frac{1}{c-1} \Rightarrow y = \frac{t}{c-1} + c_1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{t \cdot c}{c-1} + c \cdot c_1 = \frac{tc}{c-1} + c_2$$

Задача 3

$$y''' - 5y'' + 6y' = x^2 - x$$

Можно составить характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \iff$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cdot e^{3x} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

что является общим решением.

$\exists \quad z_1(x) = C_1 \qquad z_2(x) = C_2 \;; \; z_3(x) = C_3$

Используя метод вариации:

$$\begin{cases} z_1' + z_2' e^{2x} + z_3 e^{3x} = 0 \\ 0 + 2z_2' e^{2x} + 3z_3 \cdot e^{3x} = 0 \\ 4z_2' e^{2x} + 9z_3' \cdot e^{3x} = x^2 - x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z_1' + z_2' e^{2x} + z_3' e^{3x} = 0 \\ 2z' e^{2x} + 3z_3' e^{3x} = 0 \\ 3z_3' e^{3x} = x^2 - x \Rightarrow z_3' = \dfrac{x^2 - x}{3e^{3x}} \end{cases}$$

$$z_2' = \frac{x - x^2}{2e^{2x}} \qquad z_1' = \frac{x^2 - x}{6}$$

$$C_1 = \int z_2' dx = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} + const \qquad C_3 = \int z_3' dx = \frac{-9x^2 + 3x + 1}{81 e^{3x}} + const_3$$

$$C_2 = \int z_2' dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{e^{2x}} + const'$$

$\Rightarrow$

$$y = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} + const + \frac{1}{4}x^2 + const' e^{2x} - \frac{9x^2+3x+1}{81} +$$

$$+ const'' e^{3x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $$y = \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x}{54} + const + \frac{128}{162} + const' e^{2x} +$$

$$+ const'' e^{3x}$$

Задача 4 Найдите решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y + 5\cos t \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

удовлетворяющие условию

$$r(0) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)^T$$

$$\ddot{x} = -3\dot{x} - \dot{y} - 5\sin t = -3\dot{x} - 2x - 5\sin t$$

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = -5\sin t$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -2,\ -1$$

$$\bar{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$$\hat{x} = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

$$\hat{x}' = -C_3 \sin t + C_4 \cos t$$

$$\hat{x}'' = -C_3 \cos t - C_4 \sin t$$

$$(-C_3 + 3C_4 + 2C_3)\cos t + (-C_4 - 3C_3 + 2C_4)\sin t = 0$$

$$\begin{cases} C_3 + 3C_4 = 0 \\ C_4 - 3C_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -3C_4 \\ C_4 + 9C_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = -\frac{1}{2} \\ C_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t \\ \dot{y} = 2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} + 3\cos t - \sin t \\ y = -2C_1 e^{-t} - C_2 e^{-2t} + 3\sin t + \cos t \end{cases}$$

подставляем $r(0)$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = C_1 + C_2 + \frac{3}{2} \\ 1 = -2C_1 - C_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$

$y = 3\sin t + \cos t$

5) Найдите коэффициент a_5 при разложении в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ решения задачи Коши

$y'' + (2 - x^2) y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1$

~~Можно составить~~

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} -a_{k-2} x^k = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 + 6a_3 x + 2a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + 2a_k x^k -$$

$$- a_{k-2} x^k = 0$$

$\Leftrightarrow a_0 = 0 \ ; \ a_1 = 1$

$2a_2 + 2a_0 = 0 \Leftrightarrow 2a_2 = -2a_0 \Leftrightarrow a_2 = -a_0$

$\Rightarrow a_2 = 0$

$6a_3 + 2a_1 = 0 \Leftrightarrow a_3 = -2a_1 = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}$

$a_4 = a_0 - 2a_2 = 0$

$20a_5 + 2a_3 - a_1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **Ответ**: $a_5 = a_1 - 2a_3 = \frac{5}{60}$