ИДЗ:
Задача 1 (Вариант 1)

$y^{IV} + 4y'' = 8e^{2x} + 8x^2$

$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+4) = 0$

$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$ кратность 2 $y = C_1 x + C$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm 2i$ кратность 1 $y = C_3 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) + xe^{\alpha x}(C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x)$

$+ \ldots + x^{k-1} e^{\alpha x}(C_{2k-1} \cos\beta x + C_{2k} \sin\beta x)$

(общая формула) $\lambda = \alpha \pm \beta i$

$\bar{y} = C_3 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_1 x + C$

Найдем частное решение для x^2;

$y_i = x^s e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ - не корень, $s = k$, где k = кратность корня $\alpha + \beta i$ - корень

$x^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ и $\beta = 0$ и $k = 2$

$y_0 = x^2 \cdot 1 (Ax^2 + Bx + C)$

$y_0' = 2x(Ax^2 + Bx + C) + x^2(2Ax + B)$

$y_0'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

$y_0''' = 24A$

Подставим в исходное уравнение

$48Ax^2 + 24Bx + 8C + 24A = x^2$

$$\begin{cases} 48A = 1 \\ 24B = 0 \\ 8C + 24A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{48} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{48} \end{cases}$$

Подставим в y_0:

$$y_0 = x^2\left(\frac{x^2}{48} - \frac{1}{16}\right)$$

Найдем частное решение для $8e^{2x}$

$\alpha + \beta i = 2 \Rightarrow S = 0$

$y_1 = e^{2x} \cdot A$

$y_1'' = 4Ae^{2x}$ $\qquad y^{IV} = 16Ae^{2x}$

Подставим в локальное уравнение

$32Ae^{2x} = 8e^{2x}$ $\qquad 32A = 8 \Rightarrow A = 1/4$

Подставим в y_1:

$y_1 = e^{2x}/4$

Решение всего уравнения $y = \bar{y_0} +$ частные

$$y = C_3\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{e^{2x}}{4} + x^2\left(\frac{x^2}{48} - \frac{1}{16}\right) + C_4x + C$$

Задача 2 (Вариант 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 3y + z \\ \dot{z} = 2x - 4y + 4z \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 4,\ \lambda_{2;3} = 3 \pm 2i)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (3-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda) - 1\cdot(-4)) - (-2)(0(4-\lambda) - 2\cdot 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 37\lambda - 52 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i) = 0$$

найдём собственные вектора

$$\lambda = 4:\ \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y,\ -x/2 + z = 0 \Rightarrow x = 2z \Rightarrow e_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = 3 + 2i:\ \begin{cases} -2ix + 2y = 0 \\ -2iy + z = 0 \\ 2x - 4y + 1z - 2iz = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ix \Rightarrow -2(-x) + z = 0 \Rightarrow z = -2x \Rightarrow e_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\lambda = 3 - 2i:\ \begin{cases} 2ix + 2y = 0 \\ 2iy + z = 0 \\ 2x - 4y + 1z + 2iz = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ix \Rightarrow 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x \Rightarrow e_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{vmatrix}$$

По методу Эйлера

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} e_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} =$$

$$= C_1 e^{4t} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + C_2 e^{(3+2i)t} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{vmatrix} + C_3 e^{(3-2i)t} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t) + C_3 e^{3t}(\cos 2t - i\sin 2t) \\ y = C_1 e^{4t} + iC_2 e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t) - iC_3 e^{3t}(\cos 2t - i\sin 2t) \\ x = C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t) - 2C_3 e^{3t}(\cos 2t - i\sin 2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{4t} + e^{3t}(C_2\cos 2t + C_2 i\sin 2t + C_3\cos 2t - iC_3\sin 2t) \\ y = C_1 e^{4t} + e^{3t}(iC_2\cos 2t - C_2\sin 2t - iC_3\cos 2t - C_3\sin 2t) \\ x = C_1 e^{4t} - e^{3t}(2C_2\cos 2t + 2C_2 i\sin 2t + 2C_3\cos 2t - 2C_3 i\sin 2t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{C_2} = C_2 + C_3, \quad \overline{C_3} = C_2 - C_3$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{4t} + e^{3t}(\overline{C_2}\cos 2t + \overline{C_3} i\sin 2t) \\ y = C_1 e^{4t} + e^{3t}(i\overline{C_3}\cos 2t - \overline{C_2}\sin 2t) \\ x = C_1 e^{4t} - e^{3t}(2\overline{C_2}\cos 2t + 2\overline{C_3} i\sin 2t) \end{cases}$$

Задание 3 (Вариант)

$yy'' = (y')^2 (y^2 y' + 1)$, $y(0) = 1$ $y'(0) = -3$

$\exists y' = u$ $y'' = uu'$

$uu'y = u^2(y^2 \cdot u + 1)$ $\cdot u = 0$ $y' = 0$ $y'' = 0$

$y \cdot 0 = 0 \cdot (y^2 y' + 1)$

$u'y = u(y^2 u + 1)$

$0 = 0$ $y = 0$ — решение

$\frac{du}{dy} y = u(uy^2 + 1)$

Сведем к однородному

) $\exists u = z^\lambda$, $y = z$

1) $\lambda z^\lambda = z^\lambda (z^{\lambda+2} + 1)$

степени $\lambda = \lambda = 2\lambda + 2 \Rightarrow \lambda = -2$

$u = \frac{1}{z^2}$ $du = \frac{-2dz}{z^3}$

) $-\frac{2y\,dz}{z^3 dy} = \frac{1}{z^2} + \frac{y^2}{z^4}$ $/ \cdot dy$ $\frac{-2y\,dz}{z^3} = dy\left(\frac{1}{z^2} + \frac{y^2}{z^4}\right)$

проверка на однородность $M(kz, ky) = k^m M(z, y)$

$-\frac{2y}{z^3} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{y^2}{z^4}\right)$ $m = -2$

$\exists v = \frac{z}{y}$ $z = vy$ $dz = v\,dy + y\,dv$

$-\frac{2(v\,dy + y\,dv)}{v^3 y^2} = \frac{\left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^4}\right)dy}{y^2}$ $/ \cdot v^4 y^2$

$$-2\vartheta(\vartheta\,dy + y\,d\vartheta) = \left(\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta^4}\right)\vartheta^4 dy$$

$$-2\vartheta y\,d\vartheta = (3\vartheta^2 + 1)\,dy$$

$$\frac{\vartheta\,d\vartheta}{3\vartheta+1} = -\frac{dy}{2y} \qquad 3\vartheta^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \vartheta = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u y}} - \frac{i}{\sqrt{3}} = 0 \qquad u = -\frac{3}{y^2}$$

$$\int \frac{\vartheta}{3\vartheta^2+1}\,dy = \int \frac{1}{6y}\,dy = \frac{1}{6}\ln y = \frac{\ln(3\vartheta^2+1)}{6}$$

$$\frac{\ln(3\vartheta^2+1)}{6} = C - \frac{\ln y}{2} \qquad \sqrt[6]{3\vartheta^2+1} = \frac{e^C}{\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{3\cdot 2}{y^2}+1} = \frac{C}{\sqrt{y}} \qquad \sqrt[6]{\frac{3}{uy^2}+1} = \frac{C}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{3}{uy^2} = \frac{C}{y^3} - 1 = \frac{C-y^3}{y^3} \qquad \frac{uy^2}{3} = \frac{y^3}{C-y^3}$$

$$u = \frac{3y}{C-y^3} = \frac{3}{\left(\frac{C}{y^3}-1\right)y^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\left(\frac{C}{y^3}-1\right)y^2}$$

$$y' = \frac{3}{\left(\frac{C}{y^3}-1\right)y^2} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -3$$

$$-3 = \frac{3}{\left(\frac{C}{1}-1\right)1} \quad \Rightarrow C = 0$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{-y^2}$ $\quad \int 3\,dx = \int -y^2 dy \quad 3x + C = -\frac{y^3}{3}$

$y = \sqrt[3]{-9x + C'}$ $\quad y(0) = \sqrt[3]{C'} = 0 \quad \Rightarrow C' = 1$

$\Rightarrow$ ответ: $y = \sqrt[3]{9x+1}$, $y = 0$

Задача 4 (Вариант 4)

$(y')^2 - y + \frac{4}{x} \cdot y' = 2\ln x - \frac{4}{x^2}$

Уравнение, не разрешенное относительно производной: $y = f(x, y')$, $p = y'$ (параметр)

$\Rightarrow p = y' \Rightarrow dx\,p = dy$; $(y')^2 - y + \frac{4}{x} \cdot y' = 2\ln x - \frac{4}{x^2}$

$\Rightarrow f(x, y') = (y')^2 + \frac{4}{x} y' - 2\ln x + \frac{4}{x^2}$

$dy = -\left(\frac{4}{x^2} \cdot p + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3}\right) dx + \left(2p + \frac{4}{x}\right) dp \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = -\left(\frac{4px + 2x^2 + 8}{x^3}\right) dx + \frac{2px + 4}{x} dp \Rightarrow p\,dx =$

$= -\left(\frac{4px + 2x^2 + 8}{x^3}\right) dx + \frac{2px + 4}{x} \cdot dp \Rightarrow$

$\left(\frac{4px + 2x^2 + 2 + px^3}{x^3}\right) dx = \frac{2px + 4}{x} dp \Rightarrow \frac{(4px + 2x^2 + 8 + px^3)}{dx}$

$(2px+4)\cdot x^2dp \Rightarrow \quad (x^2\cdot(px+2)+4\cdot(px+2))\cdot dx$

$=(px+2)\,2x^2dp \Rightarrow (x^2+4)\,dx = 2x^2dp \Rightarrow \frac{x^2+4}{x^2}dx$

$=2dp \Rightarrow \quad \int dx + 4\int\frac{dx}{x^2} = 2\int dp \Rightarrow x-\frac{4}{x}=2p-2C$

$\Rightarrow p=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+C\ ,\quad p=\frac{x^2-4+2xC}{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+C\ ,\quad x=x\ ,\quad y=(y')^2+\frac{4}{x}\cdot y'-2\ln x+$

$+\frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{(x^2-4+2xC)^2}{4x^2}+\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2-4+2xC}{2x}-$

$-2\ln x+\frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{(x^2-4+2xC)^2}{4x^2}+\frac{8x^2-32+16xC}{4x^2}$

$-\frac{8x^2\ln x}{4x^2}+\frac{16}{4x^2} \quad \Rightarrow \quad y=$

$y=\frac{x^4+2xC-4)^2+4x^3-8x^2+8x^2-32+16xC-8x^2\ln x+16}{4x^2}$

$\Rightarrow \quad y=\frac{x^4 4x^2C^2+4x^3-8x^2\ln x}{4x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ : $y=\frac{x^2}{4}+C^2+x-2\ln x$

Задача 6 (Вариант 14)

$xy'' + (2+3x)y' + 3y = -3e^{-3x}, \quad x>0$

$xy'' + (2+3x)y' + (3x+2)'_x y = -3e^{-3x}$

$\underbrace{xy'' + (x')y'}_{(xy')'_x} - (x')y' + \underbrace{(2+3x)y' + (3x+2)'_x y}_{((3x+2)y)'_x} = -3e^{-3x}$

$(xy')'_x + ((3x+2)y)'_x - y'_x = -3e^{-3x}$

$(xy' + (3x+2)y - y)'_x = -3e^{-3x}$

$xy' + (3x+2)y - y = e^{-3x} + C_1$

$xy' + (3x+1)y = e^{-3x} + C_1$ (Лагранж)

I) $xy' + (3x+1)y = 0$

$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} - 3 dx$

$\ln y = -\ln x - 3x + C_2$

$y = \frac{C_2}{xe^{3x}}$

II) $y = \frac{u(x)}{xe^{3x}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{xe^{3x}} - \frac{3u}{xe^{3x}} - \frac{u}{x^2e^{3x}}$

$\frac{u'}{e^{3x}} - \frac{3u}{e^{3x}} - \frac{u}{xe^{3x}} + (3x+1)\frac{u}{xe^{3x}} = \frac{1}{e^{3x}} + C_1$

$\frac{u'}{e^{3x}} = \frac{1}{e^{3x}} + C_1 \qquad u' = C_1e^{3x} + 1 \qquad \int 1\,du = \int C_1e^{3x} + 1\,dx$

$u = \frac{C_1e^{3x}}{3} + x + C_2$

Ответ: $y = \frac{C_1e^{3x} + 3x + 3C_2}{3xe^{3x}}$