Вариант 3

1) Пусть несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда

что а) $\int_{k}^{k+1} f(x)dx \to 0$ при $k \to +\infty$ и

б) $f(x) \to 0$ при $k \to +\infty$?

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{+\infty} f$ причем $\int_{0}^{+\infty} f$ сходится

по линейности $\int_{0}^{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} f$ - сходится

по необходимому условию

сходимости рядов $\underbrace{a_k}_{\text{общий член}} = \int_{k}^{k+1} f \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

б)

2) Вычислить вариацию на промежутке $[0; 2]$ функции $f(x) = \{x^2\}$ (где $\{\cdot\}$ - дробная часть "вниз")

Разобьем промежуток на 4 промежутка потом вычисляем вариацию через формулу

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{T} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

так как x^2 - монотонна и непрерывна

$$(\overset{\sqrt{1}}{1} - \overset{0}{0}) + (\overset{\sqrt{2}}{2} - \overset{\sqrt{1}}{1}) + (\overset{\sqrt{3}}{3} - \overset{\sqrt{2}}{2}) + (\overset{\sqrt{4}}{4} - \overset{\sqrt{3}}{3}) = 4$$

3) 3-4) Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
Верно ли, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ сходится

для $a_k \geq 0$ первый ряд сходится
мы можем ограничить второй
ряд первым => второй ряд тоже
сходится

при $a_k < 0$ так как в ряду
появляются отрицательные числа
Используем признак Абеля
(Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность $\{b_k\}$ монотонна и
ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится)
=> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ сходится так как задача
удовлетворяет признаку Абеля