24.11.2021 Зайнидинов Музаффарудави

Контрольная работа №1 М3237

Задача #1

$x^2+y^2+xy-x^2y'=0 \,|:x^2 \quad y(e)=0$

$1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}-y'=0 \qquad \frac{y}{x}=z \qquad y'=z'x+z$

$1+z^2+\cancel{z}+z'x\cancel{+z}=0 \qquad 1+z^2=z'x$

~~$1+2z+z^2+z'x=0$~~

$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\operatorname{arctg}(z)=\ln|x|+C \iff$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C \qquad y(e)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}(0)=\ln|e|+C \Rightarrow C=-1$

$\Rightarrow$ Ответ: $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|-1$

задача #2

$y' - y + y^2 \cos x = 0 \quad | : y^2 \qquad y(-\frac{\pi}{4}) = -2e^{-3\pi/4}$

$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} + \cos x = 0 \qquad z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$

$-z' - z + \cos x = 0 \Leftrightarrow z' + z - \cos x = 0$

$z = U(x) \cdot V(x) \Leftrightarrow u = e^{-\int dx} = \frac{1}{e^x}$

$V' = e^x \cos(x) \Leftrightarrow V = \frac{e^x \sin x}{2} + \frac{e^x \cos x}{2} + C \Rightarrow$

$z = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{C}{e^x}$ обратная

замена $\Rightarrow$

$\frac{1}{y} = \frac{\sin x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{C}{e^x} \Leftrightarrow$

$y = \frac{2e^x}{e^x \sin x + e^x \cos x + C}$ Подставляем $y(-\frac{\pi}{4})$

Находим $C = \frac{e^{\pi/2}}{2} \Rightarrow$

Ответ: $y = \frac{2e^x}{e^x \sin x + e^x \cos x + \frac{e^{\pi/2}}{2}}$

Задача #3

$(yxe^{x^2y} + \cos 2x + x^2)\,dx + \left(\frac{x^2}{2}e^{x^2y} + y\right)dy = 0 \mid \cdot 2$

$2\left(\frac{x^2e^{x^2y}}{2} + y\right)dy + 2(xye^{x^2y} + \cos(2x) + x^2)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow (x^2e^{x^2y} + 2y)\,dy + (2xye^{x^2y} + 2\cos(2x) + 2x^2)\,dx = 0$

Уравнение в полных дифференциалах.

$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0$; $M(x,y) = x^2e^{x^2y} + 2y$

$N(x,y) = 2xye^{x^2y} + 2\cos(2x) + 2x^2$

Проверяем на полный дифференциал:

$M(x,y)'_x = N(x,y)'_y = 2x^3ye^{x^2y} + 2xe^{x^2y}$

Находим: $F(x,y)$: $dF(x,y) = F'_y\,dy + F'_x\,dx$

$F(x,y) = \int N(x,y)\,dx = \int 2xye^{x^2y} + 2\cos(2x) + 2x^2\,dx$

$= \sin(2x) + e^{yx^2} + \frac{2x^3}{3} + C_y$

$\left(\sin 2x + e^{yx^2} + \frac{2x^3}{3}\right)' = x^2e^{yx^2}$

$C_y = \int M(x,y) - \left(\sin(2x) + e^{yx^2} + \frac{2x^3}{3}\right)'dy =$

$= \int x^2e^{x^2y} - x^2e^{yx^2} + 2y\,dy = y^2 \quad \Rightarrow$

Ответ: $F(x,y) = \sin(2x) + e^{yx^2} + \frac{2x^3}{3} + C_y = \sin 2x + e^{yx^2} + y^2 + \frac{2x^3}{3}$

Задача # 4

$tgx \cdot y'' = 2y'$ $\quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{13}{2}$ $\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 1$

Ур. вида $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, где $k=1$, $n=2$ $\Rightarrow$ метод понижение порядка

$y' = t \Leftrightarrow t'(tg(x)) = 2t \Leftrightarrow t' = \frac{2t}{tg(x)}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{2t}{tg(x)}$ $\quad \frac{dt}{t} = \frac{2dx}{tg(x)} \Leftrightarrow \int \frac{1}{t} dt = \int \frac{2}{tgx} dx$

$\Leftrightarrow \ln(t) = 2\ln(\sin(x)) + C_1 \Leftrightarrow t = e^{C_1}\sin^2(x) = C_1\sin^2(x)$

Обратная замена:

(1) $(y' = C_1\sin^2(x)) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1\sin^2(x) \Leftrightarrow$

$dy = C_1\sin^2(x)dx \Leftrightarrow \int dy = \int C_1\sin^2(x)dx$

(2) $y = -\frac{C_1\sin(2x)}{4} + \frac{C_1 x}{2} + C_2 = C_1\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$

$y'(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow C_1 = 2 \,|\, y' = (1) = 2\sin^2(x)$

$y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + \frac{13}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{15}{2} \,|\, = (2) = x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{15}{2}$

Ответ: $y = x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{15}{2}$

Задача #5

$2(y')^2 = y''(y-1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$

$t = y'$ $\quad$ $\cancel{tt'} = y''$

$2t^2 = tt'(y-1) \Leftrightarrow 2t = t'(y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dt}{t}$

$\Leftrightarrow 2\ln|y-1| = \ln|t| + \ln C_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = C_1(y^2 - 2y + 1) \Leftrightarrow y' = C_1(y^2 - 2y + 1)$

$y' = -1 \quad y = 2 \Leftrightarrow \quad -1 = C_1(2-1)^2$

$\Rightarrow -1 = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$

$\Rightarrow y' = -(y-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -(y-1)^2$

$\Rightarrow \int dx = \int \frac{dy}{-(y-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y-1} + C_2$

$y(1) = 2 \Leftrightarrow \quad 1 = 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$\Rightarrow$ Ответ: $x - \frac{1}{y-1} = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{x} - (y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} + 1$