

文章编号: 1673-6338(2014) 01-0097-05

六角格网坐标系统中的空间关系及算法

李伟杰, 游 雄, 武志强, 张 欣

(信息工程大学, 河南 郑州 450001)

摘要: 空间关系是空间数据组织、查询、分析、推理的基础。六角格网单元由顶点、边、面 3 种基本图元组成, 由于通常采用六角格来量化战场环境信息, 兵棋棋盘上战场环境实体的空间关系表现为六角格基本图元间的空间关系。本文概述了常见的六角格网坐标系统, 根据六角格网中基本图元的平均计数, 设计了坐标编码, 为六角格数据存储冗余问题的解决、空间关系算法的实现奠定了数学基础。从拓扑关系、方位关系和度量关系 3 个方面, 介绍了类直角六角格网坐标系统下基本图元间空间关系及其算法。

关 键 词: 兵棋棋盘; 六角格; 空间关系; 数据冗余; 拓扑; 方位; 度量

中图分类号: P208; E992

文献标识码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1673-6338.2014.01.021

Spatial Relationship and its Algorithm in Hexagonal Grid Coordinate System

LI Weijie, YOU Xiong, WU Zhiqiang, ZHANG Xin

(Information and Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Spatial relationship is the basis of spatial data's organization, query, analysis and reasoning. Hexagon is composed of three basic primitive types: vertex, edge and face. Since wargame map used hexagon to implement the quantization of battlefield environment information, battlefield environment entity's spatial relationship is shown as basic primitives' spatial relationship. Common hexagonal grid coordinate systems was summarized. In terms of basic primitives' average count, the coordinate encode was designed which made the mathematical foundation for the resolution of data redundancy and the implementation of spatial relationship algorithm. The spatial relationship between primitives and its algorithm was described in three aspects which included topological relationship, orientation relationship, and measure relationship.

Key words: wargame map; hexagon; spatial relationship; data redundancy; topology; orientation; measure

兵棋棋盘, 又称兵棋地图(Wargame Map), 是兵棋推演中的战场环境。兵棋推演通常采用六角格网棋盘, 它以六角格元为基本单元来存储数据、计算并渲染六角格网。由于兵棋规则的约束, 兵棋棋盘对战场环境实体的水平位置进行了调整。例如: 河流、边界线被移位到格网单元的边上, 以便确定兵棋算子在格网单元间的移动是否跨越了河流或边界; 道路被处理成格网单元中心的连线, 因为兵棋算子是放在格网单元中央的, 当算子在两个公路或铁路格网单元之间移动时, 即被认为是沿公路或乘火车开进^[1]。

六角格网棋盘将战场环境信息按照一定分辨率量化成以六角格网存储的数据, 所形成的格网及其属性即为基于六角格网的环境表达模型。环境表达模型既包含格网属性(坡度、植

被、道路、地质和障碍等), 也包括边属性(如河流、沟壑等)^{[2][3]18}。

空间关系是空间数据组织、查询、分析、推理的基础^[4-5], 然而目前兵棋领域对空间关系的研究较少。六角格网单元由顶点、边、面 3 种基本图元组成, 由于格网中六角格网单元的顶点、边存在共享, 所以格网构建过程中, 会重复计算顶点坐标, 重复渲染点、边图元。另外, 顶点、边上属性信息的存储也会有冗余。针对上述问题, 本文介绍了几种常见的六角格网坐标系统, 并根据六角格网中基本图元的平均计数设计了坐标编码, 为数据存储冗余问题的解决、空间关系算法的实现奠定了数学基础; 然后从拓扑关系、方位关系和度量关系 3 个方面分析图元间的空间关系, 并介绍其算法实现。

收稿日期: 2013-06-13; 修回日期: 2013-10-13。

作者简介: 李伟杰(1988-) 男, 河南新郑人, 硕士生, 主要研究方向为虚拟现实与战场环境仿真。E-mail: holylight12@sina.com

1 六角格网坐标系

能将一个平面进行无缝不重叠剖分的正多边形只有正三角形、正四边形和正六边形。正六边形在同分辨率下采样精度最高,有最多的等距方向,具有最好的角分辨率^{[2][3][19]}。六角格网迄今为止还未被广泛应用于实践中,主要是因为还没有合适的六角格网坐标系^{[6][1-4][7]}。常见的六角格网坐标系有 60° 或 120° 极坐标系、类直角坐标系、对称六角坐标系。

在笛卡尔坐标系中,任何一点都可表示成 $(xu + yv)$,其中 x 和 y 为点在这个坐标系中的坐标值, u 和 v 为坐标系的基向量。在 120° 极坐标系下,如图 1 所示 $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $v = (0, 1)$ 。

六角格网下的图形图像算法多采用 60° 或 120° 极坐标系^[8]。

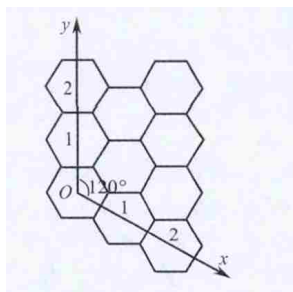


图 1 120° 坐标系

类直角坐标系,如图 2 所示,其中 x 轴和 y 轴的形式类似于直角坐标系,不同的是 x 轴坐标每逢偶数列就向下缩进半个单位。类直角坐标系不属于笛卡尔坐标系,但它与笛卡尔坐标系之间可以进行坐标转换,并且人们更习惯于直角坐标系,为了便于理解及使用,在应用六角格网的系统中通常提供给用户类直角坐标系下的坐标^[9]。

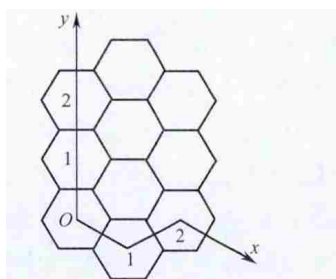


图 2 类直角坐标系

根据六角格网排列的对称性,有学者也提出了对称六角坐标系^{[6][14-15][10]},如图 3 所示。在此坐标系中定义了 3 个坐标轴,网格中的任意一点可以用 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标定义为 (x, y, z) ,而这 3 个坐标轴可看成笛卡尔三维坐标轴,且有 $x + y + z = 0$ 。在该坐标系下研究平移、对称和缩放等图

形变换算法有很大的优势,但是其中任意一维的坐标可以由其他两个维度坐标的组合来表示,因此,严格意义上讲该坐标系存在坐标冗余^{[6][15]}。

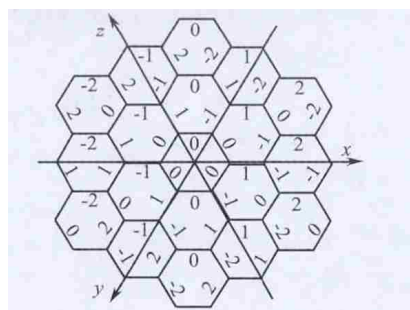


图 3 对称六角坐标系

120° 极坐标系和类直角坐标系之间可以进行坐标转换。兵棋中涉及到六角格网下复杂图形图像处理的情况不多,而对称六角坐标系又存在坐标冗余,故兵棋中一般不采用该坐标系。因此,为了方便理解,本文采用类直角坐标系。

2 六角格网坐标编码

2.1 基本图元的计数

六角格网单元由顶点 (V)、边 (E)、面 (F) 3 种基本图元组成,可以根据共享情况来计算六角格网中一个六角格网单元平均有多少顶点、边和面。每个面有 6 条边,但是每个边被 2 个面共享,所以认为每个面有 3 条边。每个面有 6 个顶点,每个顶点被 3 个面共享,所以认为每个面有 2 个顶点。因此,六角格网单元的 V 、 E 和 F 平均计数分别为 2、3 和 1。当设计六角格网下的坐标编码时,这些计数是很重要的。

2.2 设计坐标编码

为解决数据存储冗余问题,六角格网中每个基本图元必须有且仅有一个坐标编码。由于六角格网的 V 、 E 和 F 平均计数分别为 2、3 和 1,因此一个六角格网单元对应 2 个顶点编码、3 个边编码和 1 个面编码。采用二维数组来标识六角格网单元的面、2 个顶点的编码分别为“面编码 + L ”、“面编码 + R ”,其中 L 和 R 分别表示“左”和“右”;3 个边的编码分别为“面编码 + W ”、“面编码 + N ”、“面编码 + E ”,其中 W 、 N 和 E 分别表示西、北和东方向。由于本文采用的六角格网坐标系为类直角坐标系,因此基本图元的坐标编码如图 4 所示。图 4 中,起始格元中心点的坐标为 $(\frac{edge}{2}, \frac{\sqrt{3}edge}{2})$, $edge$ 为六角格元的边长。

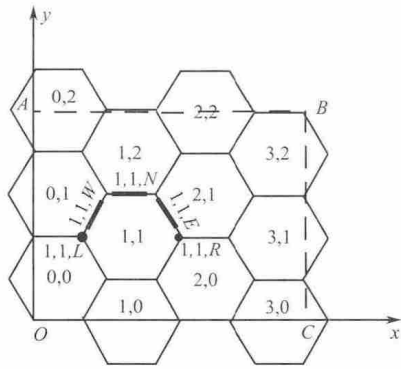


图4 矩形区域OABC内构建六角格网

六角格网的形状、位置由左下角的起始格元决定。六角格网单元有平头向上和尖头向上两种基本朝向,如图5所示,对调 x 轴和 y 轴就可实现其朝向的相互转换,因此其对六角格网下的数值计算没有影响,但在兵棋推演过程中会影响算子的正面、侧翼、后方。本文选择的六角格网单元朝向为平头向上。起始格网单元的位置选择对计算没有太大的影响,只要一个平移运算就可实现相互转换。

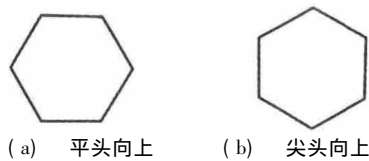


图5 六角格网单元朝向

在构建由 N 个正六边形组成的六角格网时(忽略格网边缘上的特殊情况),采用传统的算法需计算 N 个中心点和 $6N$ 个顶点,需绘制 $12N$ 条边。参考本文的坐标编码,只需计算 N 个中心点和 $2N$ 个顶点,绘制 $6N$ 条边,这就解决了渲染过程中重复计算、渲染的问题。

3 空间关系及算法实现

在兵棋棋盘上战场环境实体的地理空间信息都被存储到六角格网的顶点、边、面上,因此,战场环境实体之间的空间关系表现为六角格网基本图元间的空间关系。空间关系包括拓扑关系、方位关系和度量关系。文中采用的六角格网坐标参考系如图2所示,约定下文中“/”为整除运算、“%”为求余运算。

3.1 拓扑关系

拓扑关系是指图形在保持连续状态下的变形(缩放、旋转和拉伸等)但图形关系不变的性质。以兵棋为研究背景,本文主要研究基本图元间的邻接关系和关联关系。

3.1.1 邻接关系

指同类基本图元之间的拓扑关系,本文定义了邻接顶点、邻接边、邻接面3种关系,其定义及算法如下所述。

1) 邻接顶点。与顶点 A 同为某边端点的顶点称为 A 的邻接顶点。如图6(a),已知顶点 A ,则 A 的邻接顶点为 A_1 、 A_2 和 A_3 ,坐标编码见表1。

表1 顶点 A 的邻接顶点坐标编码

邻接顶点	顶点 $A(i, j, L)$	顶点 $A(i, j, R)$
A_1	$(i-1, j+(i+1)\%2, R)$	$(i+1, j+(i+1)\%2, L)$
A_2	$(i-2, j, R)$	$(i+2, j, L)$
A_3	$(i-1, j-i\%2, R)$	$(i+1, j-i\%2, L)$

2) 邻接边。与边 A 相交的边称为 A 的邻接边。如图6(b)所示,已知边 A ,则 A 的邻接边为 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 ,其坐标编码如表2所示。

表2 边 A 的邻接边坐标编码

邻接边	边 $A(i, j, W)$	边 $A(i, j, N)$	边 $A(i, j, E)$
A_1	$(i-1, j-i\%2, N)$	$(i-1, j+(i+1)\%2, E)$	$(i+1, j+(i+1)\%2, W)$
A_2	$(i-1, j-i\%2, E)$	(i, j, W)	(i, j, N)
A_3	$(i-1, j+(i+1)\%2, E)$	$(i+1, j+(i+1)\%2, W)$	$(i+1, j-i\%2, N)$
A_4	(i, j, N)	(i, j, E)	$(i+1, j-i\%2, W)$

3) 邻接面。与面 A 有共享边的面称为 A 的邻接面。如图6(c),已知面 $A(i, j)$,则 A 的邻接面为 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 和 A_6 ,其坐标编码见表3。

表3 面 A 的邻接面编码

邻接面	面 $A(i, j)$	邻接面	面 $A(i, j)$
A_1	$(i-1, j+(i+1)\%2)$	A_4	$(i+1, j-i\%2)$
A_2	$(i, j+1)$	A_5	$(i, j-1)$
A_3	$(i+1, j+(i+1)\%2)$	A_6	$(i-1, j-i\%2)$

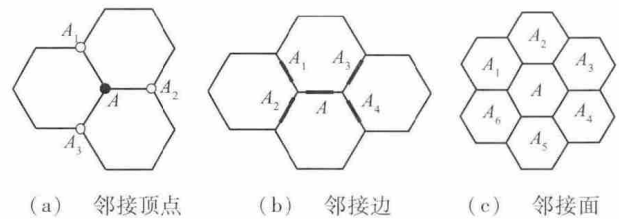


图6 邻接关系

3.1.2 关联关系

指不同类型基本图元之间的拓扑关系,本文共定义了6种关系,其定义及算法如下所述。

1) 点关联边。若顶点 A 为某边的端点,则该边为 A 的点关联边。如图7(a)所示,已知顶点 A ,则 A 的点关联边为 A_1 、 A_2 和 A_3 ,其坐标编码如表4所示。

表 4 顶点 A 的邻接顶点坐标编码

点关联边	顶点 $A(i, j, L)$	顶点 $A(i, j, R)$
A_1	(i, j, W)	(i, j, E)
A_2	$(i-1, j-i\%2, E)$	$(i+1, j-i\%2, N)$
A_3	$(i-1, j-i\%2, N)$	$(i+1, j-i\%2, W)$

2) 点关联面。若顶点 A 为某个面的顶点, 则该面为 A 的点关联面。如图 7(b) 所示, 已知顶点 A , 则 A 的点关联面 A_1 、 A_2 和 A_3 , 其坐标编码如表 5 所示。

表 5 顶点 A 的点关联面坐标编码

点关联面	顶点 $A(i, j, L)$	顶点 $A(i, j, R)$
A_1	$(i-1, j+(i+1)\%2)$	(i, j)
A_2	(i, j)	$(i+1, j+(i+1)\%2)$
A_3	$(i-1, j-i\%2)$	$(i+1, j-i\%2)$

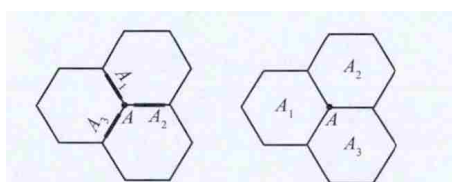


图 7 点关联关系

3) 边关联点。边 A 的端点称为 A 的边关联点。如图 8(a) 所示, 已知边 A , 则 A 的边关联点为 A_1 和 A_2 , 其坐标编码如表 6 所示。

表 6 边 A 的边关联点坐标编码

边关联点	边 $A(i, j, W)$	边 $A(i, j, N)$	边 $A(i, j, E)$
A_1	(i, j, L)	$(i-1, j+(i+1)\%2, R)$	$(i+1, j+(i+1)\%2, L)$
A_2	$(i-1, j+(i+1)\%2, R)$	$(i+1, j+(i+1)\%2, L)$	(i, j, R)

4) 边关联面。若边 A 为某个面的一条边, 则该面为 A 的边关联面。如图 8(b), 已知边 A , 则 A 的边关联面为 A_1 和 A_2 , 其坐标编码如表 7 所示。

表 7 边 A 的边关联面坐标编码

边关联面	边 $A(i, j, W)$	边 $A(i, j, N)$	边 $A(i, j, E)$
A_1	$(i-1, j+(i+1)\%2)$	$(i, j+1)$	$(i+1, j+(i+1)\%2)$
A_2	(i, j)	(i, j)	

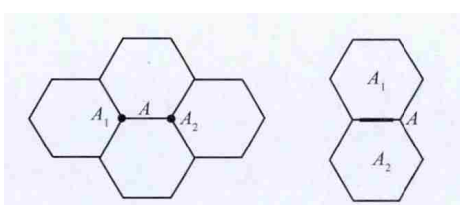


图 8 边关联关系

5) 面关联边。面 A 的边即为 A 的面关联边。如图 9(a) 所示, 已知面 $A(i, j)$, 则 A 的面关联边分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 和 A_6 , 其坐标编码如表 8 所示。

表 8 面 A 的面关联边坐标编码

面关联边	面 $A(i, j)$	面关联边	面 $A(i, j)$
A_1	(i, j, W)	A_4	$(i+1, j-i\%2, W)$
A_2	(i, j, N)	A_5	$(i, j-1, N)$
A_3	(i, j, E)	A_6	$(i-1, j-i\%2, E)$

6) 面关联点。面 A 的顶点即为 A 的面关联点。如图 9(b) 所示, 已知面 $A(i, j)$, 则 A 的面关联点为 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 和 A_6 , 其坐标编码如表 9 所示。

表 9 面 A 的面关联点坐标编码

面关联点	面 $A(i, j)$	面关联点	面 $A(i, j)$
A_1	(i, j, L)	A_4	(i, j, R)
A_2	$(i-1, j+(i+1)\%2, R)$	A_5	$(i+1, j-i\%2, L)$
A_3	$(i+1, j+(i+1)\%2, L)$	A_6	$(i-1, j-i\%2, R)$

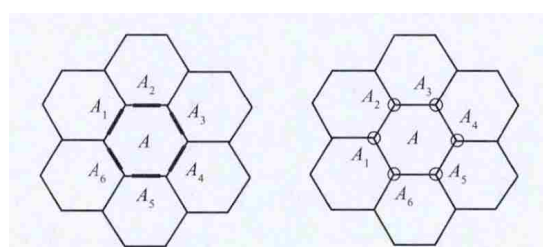


图 9 面关联关系

3.2 方位关系

文中方位关系主要指六角格网单元在网格空间上的空间位置关系。例如, 在兵棋推演过程中, 需要明确敌我双方的正面、侧翼和后方, 如图 10 所示。通常的方法是将格网单元简化至中心点, 将其视为顶点, 然后计算两点连线与基准线之间的夹角, 根据夹角来判断正面、侧翼和后方。

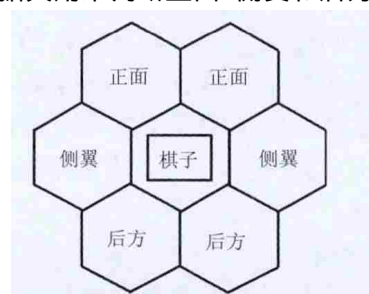


图 10 兵棋应用中的方位关系

3.3 度量关系

文中度量关系主要指六角格网单元间的距离关系。定义两个六角格网单元之间的距离为从一

个格网单元中心到另一个格网单元中心所需经过的最少格网单元数。两个格网单元间的距离通常并不是一条直线,如图11所示。

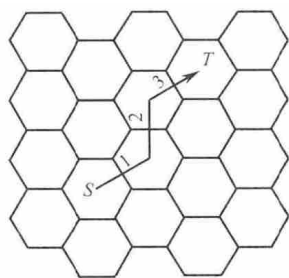


图11 面S到面T的距离为3

计算两个六角格网单元之间的距离,传统的方法是采用最短路径算法^[11],当两个格网单元之间距离很远时,会涉及大量的遍历和判断,因此要消耗大量的时间。

在图1中的120°极坐标系下,北、东北、东南方向邻接格网单元的坐标增量分别为(0,1)、(1,1)、(1,0),无论奇数列还是偶数列,这个增量表达式恒成立。结合这个特点,类直角坐标系下的距离量算算法如下所述。

1) 从类直角坐标系到120°极坐标系的坐标编码转换。假设 (i, j) 为格网单元在类直角坐标系下的坐标编码 (u, v) 为该格网单元在120°极坐标系下的坐标编码,则转换公式为

$$\begin{cases} u = i, \\ v = j + (i + 1) / 2 - i \% 2. \end{cases} \quad (1)$$

2) 120°极坐标系下量算距离。假设 (u_1, v_1) 、 (u_2, v_2) 分别为格元S与T在120°极坐标下的坐标编码,则S与T的距离为

$$\max(|u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|, |v_2 - v_1| - |u_2 - u_1|). \quad (2)$$

4 结论

本文以兵棋棋盘为背景,对六角格网坐标系中空间关系及算法进行了研究,具有以下5点实践应用价值。

1) 充实了兵棋领域中对六角格网基本图元

间空间关系的研究,为兵棋中环境数据的组织、查询、分析、推理提供了理论和算法基础。

2) 有效地解决了构建六角格网时顶点和边被重复计算、渲染等问题,可以显著提高格网构建效率。

3) 根据设计的坐标编码,以六角格网中基本图元为基础单元来组织数据,可以解决传统兵棋棋盘中以六角格网单元为基础单元组织数据时数据存储冗余的问题。

4) 类直角坐标系下距离量算算法,相对于传统的利用最短路径算法来量算距离,明显更加简单高效。

5) 本文的研究成果可以为构建适用于计算机兵棋的环境数据模型提供有益的参考。

参考文献:

- [1] 杨南征. 虚拟演兵: 兵棋、作战模拟与仿真[M]. 北京: 解放军出版社, 2007: 46-47.
- [2] 周成军, 张锦明, 范嘉宾, 等. 训练模拟系统中地形量化模型的探讨[J]. 测绘科学技术学报, 2010, 27(2): 149-152.
- [3] 张欣. 兵棋推演系统全球地理环境建模方法研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2011: 18; 19.
- [4] 陈军, 赵仁亮. GIS空间关系的基本问题与研究进展[J]. 测绘学报, 1999, 28(2): 95-102.
- [5] 顾卫杰, 刘永山. 方向与拓扑关系相结合的3维推理模型研究[J]. 测绘科学技术学报, 2011, 28(5): 319-328.
- [6] 邹黎黎. 基于六角网格的图形图像算法研究[D]. 大连: 辽宁师范大学, 2007: 1-4; 14; 15.
- [7] CAMILLO MELZI. Potentials on the Hexagonal Grid[J]. Circuits Systems, and Signal Processing, 1997, 16(4): 405-414.
- [8] 刘勇奎, 石教英. 六角网格上的图形显示[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(3): 331-336.
- [9] 付文超. 基于类直角坐标的六角网格系统下图形绘制及裁剪算法改进[D]. 广州: 暨南大学, 2011: 6-7.
- [10] INNCHYN HER. Geometric Transformations on the Hexagonal Grid[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(9): 1213-1222.
- [11] 谢树春, 尹洁, 刘绍焕, 等. 基于正六边形格网的最短路径算法[J]. 测绘科学, 2008, 33(1): 106-108.

责任编辑 安敏