МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет» (ФГБОУ ВО «УГАТУ»)

УГАТУ

Приближение функций

Старший преподаватель кафедры ВВТиС
А.А. Гайнетдинова

Уфа, 2020

Цель

- изучить различные методы интерполирования и аппроксимации;
- получить навык проведения вычислительного эксперимента, направленного на решение задач интерполирования и аппроксимации функций

Задачи

- изучить теоретические основы различных методов интерполирования и аппроксимации;
- реализовать программно выбранные методы интерполирования и аппроксимации функций;
- для каждого реализованного метода провести серию вычислительных экспериментов;
- провести анализ полученных результатов.

1. В дискретные моменты времени $t_1, \dots, t_n$ наблюдаются значения функции $u(t)$; требуется восстановить ее значения при других t. Иногда из дополнительных соображений известно, что приближающую функцию целесообразно искать в виде

$$u(t) \approx v(t; a_1, \dots, a_n).$$

Если параметры a_i $(i = 1, \dots, n)$ определяются из условия совпадения $u(t)$ и приближающей функции в выбранных точках $t_1, \dots, t_n$, так называемых *узлах интерполяции*,

$$v(t_j; a_1, \dots, a_n) = u(t_j), \qquad j = 1, \dots, n,$$

то такой способ приближения называют *интерполяцией* или *интерполированием*.

2. Пусть s_1– наименьшее из чисел t_i, а s_2– наибольшее из них. Если точка t, в которой вычисляется значение $u(t)$, лежит вне отрезка $[s_1, s_2]$, то говорят об *экстраполяции*. Такие задачи возникают при составлении прогноза погоды, урожайности, медицины и т.д.

3. Требуется получить наилучшее в определенной норме приближение при минимальном числе измерений значений функции. В этом случае говорят об *аппроксимации* функции. Такие задачи появляются при планировании экспериментов в биологии, физике, химии, географии, медицине и других областях науки.

Среди способов интерполирования наиболее распространен случай линейного интерполирования: приближение ищется в виде

$$v(t; a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$ – фиксированные функции, значения коэффициентов a_i определяются из условия совпадения с приближаемой функцией в узлах интерполяции t_j:

$$u(t_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t_j), \qquad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Наиболее изучен случай интерполирования многочленами вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i t^{i-1}.$$

Тогда

$$\varphi_i(t) = t^{i-1}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

и система уравнений (1) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i t_j^{i-1} = u(t_j), \qquad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Далее мы предполагаем, что все t_j различные. Определитель этой системы $\det[t_j^{i-1}] \neq 0$. Следовательно, система (2) всегда имеет решение, и притом единственное.

Задача интерполирования будет решена, если удастся построить многочлены $\Phi_i(t)$ степени не выше $n-1$ такие, что $\Phi_i(t_j)=\delta_i^j$ при $i,j=1,\dots,n$. Многочлен

$$v_n(t)=\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\Phi_i(t)$$

будет искомым интерполяционным многочленом.

Так как $\Phi_i(t_j)=0$ при $j\neq i$, то $\Phi_i(t)$ делится на $t-t_j$ при $j\neq i$.

Другими словами, нам известны $n-1$ делителей многочлена степени $n-1$, поэтому

$$\Phi_i(t)=const\prod_{j\neq i}(t-t_j).$$

Из условия $\Phi_i(t_i)=1$ получаем

$$\Phi_i(t)=\prod_{j\neq i}\frac{t-t_j}{t_i-t_j}.$$

Полученный интерполяционный многочлен

$$v_n(t)\equiv L_n(t)=\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\prod_{j\neq i}\frac{t-t_j}{t_i-t_j}$$

называют *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Интерполирование функций

Разделённые разности

Интерполяционный многочлен можно рассматривать как обобщение отрезка ряда Тейлора.

Обобщением понятия производной является понятие *разделенной разности*. Разделенные разности нулевого порядка $u(t_i)$ совпадают со значениями функции $u(t_i)$; разности первого порядка определяются равенством

$$u(t_i;t_j) = \frac{u(t_j) - u(t_i)}{t_j - t_i},$$

разности -го порядка – рекуррентными соотношениями вида

$$u(t_{i_1};\ldots;t_{i_{k+1}}) = \frac{u(t_{i_2};\ldots;t_{i_{k+1}}) - u(t_{i_1};\ldots;t_{i_k})}{t_{i_{k+1}} - t_{i_1}}.$$

В [1] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Справедливо равенство

$$u(t_{i_1};\ldots;t_{i_{k+1}}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{u\left(t_{i_j}\right)}{\prod_{l\neq j}\left(t_{i_j} - t_{i_l}\right)}$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа не удобен для вычисления тем, что при увеличении числа узлов интерполяции приходится перестраивать весь многочлен заново.

Перепишем многочлен Лагранжа (3) в другом виде:

$$L_n(t) = L_1(t) + \sum_{i=2}^{n} (L_i(t) - L_{i-1}(t)), \qquad (4)$$

где $L_i(t)$ – многочлены Лагранжа степени $i \leq n$.

Разность $L_i(t) - L_{i-1}(t)$ – многочлен степени $i-1$, обращающийся в нуль при $t = t_1, \dots, \; t = t_{i-1}$.

Поэтому он представим в виде:

$$L_i(t) - L_{i-1}(t) = A_{i-1}(t - t_0) \dots (t - t_{i-1}),$$

где A_{i-1} – коэффициент при t^{i-1}. Полагая $t = t_i$, получим

$$u(t_i) - L_{i-1}(t_i) = A_{i-1}(t_i - t_1) \dots (t_i - t_{i-1}).$$

С другой стороны, используя утверждение 1, получим

$$u(t_i) - L_{i-1}(t_i) = u(t_i; t_1; \dots; t_{i-1})(t_i - t_1) \dots (t_i - t_{i-1}).$$

Таким образом, $A_{i-1} = u(t_i; t_1; \dots; t_{i-1})$ и

$$L_i(t) - L_{i-1}(t) = u(t_i; t_1; \dots; t_{i-1})(t - t_0) \dots (t - t_{i-1}).$$

Подставляя эти величины в (4), получим

$$L_n(t) = u(t_0) + \cdots + u(t_i; t_1; \dots; t_{i-1})(t - t_0) \dots (t - t_{i-1}).$$

Интерполяционный многочлен, записанный в такой форме, называется *интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями*.

Многочлены Чебышёва

Многочлены Чебышёва $T_n(t)$, где $n \geq 0$, определяются соотношениями

$$T_0(t) = 1, \qquad T_1(t) = t, \qquad T_{n+1} = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t).$$

Также справедливы представления

$$T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos(t)); \quad T_n(t) = \frac{\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^n + \left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)^n}{2}.$$

Многочлены $\overline{T}_n(t) = 2^{1-n} T_n(t)$ со старшим коэффициентом 1 называют *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля на* $[-1;\ 1]$.

Линейной заменой переменных $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$ отрезок $[-1;\ 1]$ можно перевести в заданный отрезок $[a;\ b]$. Тогда многочлен

$$\overline{T}_n^{[a,b]}(t) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2t - (b+a)}{b-a}\right)$$

со старшим коэффициентом 1 является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a;\ b]$.

Многочлены $\widetilde{T_0}(t) = 1/\sqrt{2}$, $\widetilde{T_n}(t) = T_n(t)$ образуют на $[-1;\ 1]$ ортонормированную систему с весом $2/\left(\pi\sqrt{1-t^2}\right)$. Интерполяционный многочлен на $[-1;\ 1]$ с узлами в нулях многочленов Чебышёва записывается в виде

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \tilde{T}_j(t), \qquad a_j = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} u(t_j) \tilde{T}_j\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right).$$

При заданных $u(t_1), \dots, u(t_n)$ приближение к $u(t)$ ищется в виде

$$R(t) = \frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p}{b_0 + b_1 t + \dots + b_q t^q}, \qquad p + q + 1 = n.$$

Коэффициенты a_i, b_i находятся из совокупности соотношений $R(t_j) = u(t_j)$, $j = 1, \dots, n$, которые можно записать в виде системы n линейных алгебраических уравнений относительно $n+1$ неизвестных

$$\sum_{j=1}^{p} a_j t_i^j - u(t_i) \sum_{j=1}^{q} b_j t_i^j = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Функция $R(t)$ может быть записана в явном виде, если n нечетное и $p = q$, или n четное и $p - q = 1$. Для этого следует вычислить так называемые обратные разделенные разности, определяемые условиями

$$u^-(t_i; t_j) = \frac{t_i - t_j}{u(t_i) - u(t_j)}$$

и рекуррентным соотношением

$$u^-(t_i; \dots; t_j) = \frac{t_i - t_j}{u^-(t_{i+1}; \dots; t_j) - u^-(t_i; \dots; t_{j-1})}.$$

Интерполирующая рациональная функция записывается в виде цепной дроби

$$u(t) = u(t_1) + \cfrac{t - t_1}{u^-(t_1; t_2) + \cfrac{t - t_2}{u^-(t_1; t_2; t_3) + \dots + \cfrac{t - t_{n-1}}{u^-(t_1; \dots; t_n)}}}.$$

Пусть функция $u(t)$ задана на отрезке $[0; 2\pi]$ таблицей значений $u(t_i)$ в равностоящих узлах $t_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, $i = 1, \dots, 2N+1$. Тригонометрическим многочленом степени m называют многочлен

$$P_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Задача тригонометрической интерполяции состоит в построении тригонометрического интерполяционного многочлена наименьшей степени, удовлетворяющего условиям $P_m(t_i) = u(t_i)$, $i = 1, \dots, 2N+1$. Можно показать, что решением этой задачи является тригонометрический многочлен

$$P_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

коэффициенты которого вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=1}^{2N+1} u(t_j), \qquad a_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=1}^{2N+1} u(t_j) \cos\left(\frac{2\pi kj}{2N+1}\right),$$

$$b_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=1}^{2N+1} u(t_j) \sin\left(\frac{2\pi kj}{2N+1}\right).$$

Сплайн – кусочно-полиномиальная функция, определенная на отрезке [*a*, *b*] и имеющая на этом отрезке некоторое количество непрерывных производных.

Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная функция $u(t)$. Введем разбиение отрезка:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \tag{5}$$

и обозначим $y_i = u(t_i),\ i = 0, 1, \dots, n$.

Кубическим сплайном, соответствующим данной функции $u(t)$ и узлам интерполяции (5) называется функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \dots, n\ \ \varphi(t)$ – кубический многочлен;

2) $\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t) \in C[a, b]$;

3) выполняется условие интерполирования: $\varphi(t_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n$.

На каждом из отрезков $[t_{i-1},\ t_i],\ i = 1, \dots, n$ будем искать сплайн-функцию $\varphi(t) = \varphi_i(t)$ в виде

$$\varphi_i(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3,\ t_{i-1} \le t \le t_i, i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - искомые коэффициенты.

Из третьего условия получаем: $a_i = u(t_i),\ \ i = 1, \dots, n.$

Система уравнений для определения коэффициентов c_i:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), i = 1, \dots, n-1, c_0 = c_n = 0.$$

Найдя коэффициенты c_i, остальные коэффициенты определим по явным формулам:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}, \qquad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_i + 2c_{i-1}), \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию $u(t)$. Однако точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. В работе же желательно иметь единую приближенную формулу $u \approx \varphi(t)$, пригодную для большого отрезка $a \leq t \leq b$. Кроме того, при интерполяции приравниваются значения $u(t)$ и $\varphi(t)$ в узлах. Если $u(t_i)$ определены неточно – например, из эксперимента, – то точное приравнивание неразумно. Поэтому нередко целесообразнее приближать функцию не по точкам, а в среднем.

Пусть заданы функция $u(t)$ и множество функций $\varphi(t)$, принадлежащие линейному нормированному пространству L_p функций. Нас интересует задача нахождения *наилучшего приближения*, т.е. функции $\bar{\varphi}(t)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|u(t) - \bar{\varphi}(t)\| = \inf\|u(t) - \varphi(t)\| = \min.$$

Если L_p – гильбертово пространство $L_2(\rho)$ действительных функций со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t) \mathrm{d}x$.

Если вещественные функции заданы таблично, т.е. на конечном множестве точек, то их скалярное произведение определяется формулой $(f,g) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i f(t_i) g(t_i)$, $\rho_i > 0$, где N – полное число узлов таблиц. Тогда условие наилучшего среднеквадратичного приближения примет вид

$$\delta_\varphi^2 \sum_{i=1}^{N} \rho_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \rho_i \big(u(t_i) - \varphi(t_i)\big)^2 = \min.$$

Выберем линейную аппроксимацию

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(t)$$

с числом членов $n \le N$. Тогда коэффициенты аппроксимации находятся из системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_m = (u, \varphi_k), \qquad 0 \le k \le n,$$

получаемой приравниванием нулю производных по коэффициентам. Описанный способ нахождения аппроксимации называется *методом наименьших квадратов* (МНК).

Метод наименьших квадратов: оптимальное число коэффициентов

Оптимальное число коэффициентов n определяют следующим образом.

- выбирают некоторое n, находят из условия наилучшего среднеквадратичного приближения соответствующие коэффициенты $a_k^{(n)}, 1 \leq k \leq n$,
- вычисляют полученное при этом среднеквадратичное отклонение δ_n
- сравнивают его с известной погрешностью эксперимента. Если $\delta_n \gg \varepsilon$, т.е. математическая погрешность аппроксимации много больше физической погрешности исходных данных, то число коэффициентов недостаточно для описания $u(t)$, и надо увеличить n. Если $\delta_n \ll \varepsilon$, то старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны и надо уменьшить n. Если $\delta_n \approx \varepsilon$, то число коэффициентов оптимально.

Если при этом $n \ll N$, то вид аппроксимирующей функции выбран удачно. Если же $n \sim N$, то следует поискать более подходящий вид аппроксимирующей функции.

Наилучшие равномерные приближения определяются условием

$$\Delta(u,\varphi) \equiv \max_{\mathrm{a\le t\le b}} |u(t)-\varphi(t)| = \min_{\{\varphi(t)\}} \varphi(t)\,.$$

Будем рассматривать задачу нахождения наилучшего приближения вида $Q_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$.

Рассмотрим задачу нахождения многочлена наилучшего приближения степени n в случае, когда

$$u(t) = P_{n+1}(t) = a_0 + \cdots + a_{n+1}t^{n+1}, \qquad a_{n+1} \neq 0.$$

В этом случае многочленом наилучшего приближения является $Q_n(t)$ с узлами интерполяции, являющимися нулями многочлена Чебышева

$$t_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\right), \qquad k = 1, \dots, n+1.$$

Пусть известно разложение функции $u(t)$ в ряд Тейлора $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$.

Тогда применяют следующий метод (называемый иногда *телескопическим*):

Выбирают некоторое n такое, что погрешность формулы

$$u(t) \approx P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

является достаточно малой. Затем приближают многочлен $P_n(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения $P_{n-1}(x)$. Далее приближают многочлен $P_{n-1}(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения $P_{n-2}(x)$ и так далее. Понижение продолжается до тех пор, пока погрешность от таких последовательных аппроксимаций остается малой.

Контрольные вопросы

1. Как ставится задача интерполирования?
2. Какие интерполяционные многочлены вы знаете?
3. Как определяются разделенные разности различных порядков?
4. Как строится интерполяционный многочлен Лагранжа (Ньютона)?
5. Какова погрешность (остаточный член) интерполяционного многочлена Лагранжа (Ньютона)?
6. Как строится тригонометрическая интерполяция?
7. Что такое сплайн? Как строится интерполяция сплайнами?
8. Как можно практически оценить погрешность интерполирования?
9. Как ставится задача аппроксимирования функций?
10. Что такое среднеквадратичное аппроксимирование?
11. Что такое равномерное аппроксимирование?
12. Как строится метод наименьших квадратов?
13. Чему равна погрешность (остаточный член) аппроксимирования степенными функциями?
14. Каковы условия полноты системы функций?

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы.