#### МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уфимский государственный авиационный технический университет» (ФГБОУ ВО «УГАТУ»)



# Прямые методы решения СЛАУ

Старший преподаватель кафедры ВВТиС А.А. Гайнетдинова

Уфа, 2020



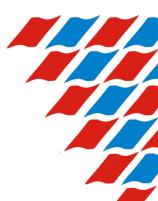
\*\*\*\*\*\*

# Цель

• получить навык численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием различных прямых методов

# Задачи

- изучить теоретические основы различных прямых методов решения СЛАУ;
- реализовать программно выбранные методы решения СЛАУ;
- применить программы для решения задач интерполяции и аппроксимации;
- провести анализ полученных результатов.





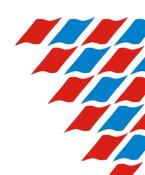




Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=d_1,\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=d_n \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{d}, A=\begin{pmatrix} a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_n \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что существует единственное решение системы, то есть  $\det A \neq 0$ .







На практике кроме существования и единственности решения важна еще устойчивость относительно погрешностей правой части и элементов матрицы. Формально перепишем линейную систему в виде

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{d}.$$

Варьируя это равенство и определяя вариацию обратной матрицы из соотношения

$$\delta E = \delta (AA^{-1}) = A\delta A^{-1} + \delta AA^{-1} = 0,$$

получим

$$\delta \vec{x} = A^{-1} (\delta \vec{d} - \delta A \vec{x}).$$

Формально устойчивость есть, ибо при  $\det A \neq 0$  обратная матрица существует. Но если матрица  $A^{-1}$  имеет большие элементы, то можно указать такой вид погрешности исходных данных, который сильно изменит решение. В этом случае систему называют плохо обусловленной. Очевидно, что в этом случае  $\det A \approx 0$ (необходимое, но не недостаточное условие).

Методы решения линейных систем делятся на *прямые* и *итерационные*. Прямые методы дают решение за конечное число действий, просты и наиболее универсальны.

Для систем небольшого порядка n≲200 почти всегда применяются только прямые методы.

Можно выделить следующие прямые методы решения СЛАУ

- метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных);
- использование LU-разложения;
- метод квадратного корня (метод Холецкого);
- метод прогонки (трёхдиагональной, пятидиагональной и т.п.)

Для контроля расчета полезно найти невязки:

$$r_k = d_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$$
,  $1 \le k \le n$ .

Если они велики, то это означает грубую ошибку в расчете. Если они малы, а система хорошо обусловлена, то решение найдено достаточно аккуратно.

5 Для плохо обусловленных систем малость невязок не гарантирует хорошей точности решения.





# Процесс решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

состоит из двух этапов: прямого и обратного ходов.





#### Прямой ход: система приводится к треугольному виду

1. Предполагаем, что  $a_{11} \neq 0$ . Тогда первое уравнение системы делим на коэффициент  $a_{11}$ , в результате получаем уравнение:

$$x_1 = \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{(1)} x_j = d_1^{(1)}.$$

Затем из каждого из оставшихся уравнений вычитается первое, умноженное на соответствующий коэффициент  $a_{i1}$ . В результате система преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ \vdots \\ d_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

- 2. В предположении, что  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , делим второе уравнение на коэффициент  $a_{22}^{(1)}$  и исключаем неизвестное  $x_2$  из всех последующих уравнений и т.д.
- 3. Получаем систему уравнений с верхнетреугольной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(2)} \\ \vdots \\ d_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$



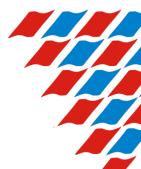


# Метод Гаусса

## Обратный ход: непосредственное определение неизвестных

- 1. Из n-го уравнения системы (2) определяем  $x_n$ :  $x_n = b_n^{(n)}$ .
- 2. Из k-го определяем  $x_k$ :

$$x_k = d_k^{(k)} - \sum_{l=k+1}^n a_{kl}^{(k)} x_l$$
,  $k = n-1, ..., 1$ .

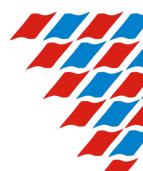




# Метод Гаусса Выбор главного элемента

Исключение по описанному алгоритму нельзя проводить, если в ходе расчета на главной диагонали оказался нулевой элемент или элемент, достаточно близкий к нулю. Чтобы избежать этого каждый цикл всегда начинают с перестановки строк.

Среди элементов столбца  $a_{mk}^{(k)}, m \geq k$ , находят *главный*, т.е. наибольший по модулю в текущем столбце, и перестановкой строк переводят его на главную диагональ, после чего делают исключения.





 ${
m LU}$ -разложение – это представление матрицы  ${
m A}$  в виде произведения двух матриц,  ${
m A}=$ LU, где L – нижняя треугольная матрица, а U – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Пусть дана СЛАУ и главные миноры матрицы A ненулевые. Тогда система может быть представлена в виде двух СЛАУ с треугольными матрицами:

$$Ax = d \Rightarrow LUx = d \Rightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = d \end{cases}$$

На первом шаге решается система Ly = d. Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, y_k = \frac{1}{l_{kk}} \left( d_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} y_j \right), \qquad j = 2, 3, ..., n.$$

На втором шаге решается система Ux=y. Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой

$$x_n = y_n, \ x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j, \qquad k = n-1, ..., 1.$$



# Элементы $l_{ij}$ , $u_{ij}$ определяются из условия

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} = a_{ij}, i, j = 1, ..., n.$$

### по следующим формулам:

$$l_{i1} = a_{i1}, \qquad l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{J-1} l_{ik} u_{kj}, \qquad i \ge j > 1,$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \qquad u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), 1 < i < j.$$





## Метод квадратного корня (метод Холецкого)

ЛР 3

При решении систем линейных алгебраических уравнений с симметрическими матрицами можно сократить объем вычислений почти вдвое.

Метод основан на представлении матрицы А системы в виде произведения трех матриц:

$$A = S^T B S$$

где B — диагональная матрица с элементами  $b_{ii}=\pm 1$ , S — верхняя треугольная матрица.

Решение исходной линейной системы сводится к последовательному решению трех систем, двух треугольных и одной диагональной:

$$S^T z = b$$
,  $By = z$ ,  $Sx = y$ ,

что делается обычным обратным ходом.





#### Нахождение элементов матриц

Перепишем соотношение  $A = S^T B S$  в координатном виде:

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^{n} s_{ik} b_{ii} s_{il} = \sum_{i=1}^{\min(k,l)} b_{ii} s_{ik} s_{il}.$$

Это равенство можно переписать в следующей форме:

$$a_{kk} = \sum_{i=1}^{k} b_{ii} |s_{ik}|^2; \quad a_{kl} = \sum_{i=1}^{k} b_{ii} s_{ik} s_{il}, k < l$$

Или, окончательно:

$$b_{kk} = \operatorname{sgn}\left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ii} |s_{ik}|^2\right)$$

$$s_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ii} |s_{ik}|^2}$$

$$s_{kl} = \frac{1}{s_{kk} d_{kk}} \left(a_{kl} - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ii} s_{ik} s_{il}\right), \qquad k+1 \le l \le n.$$

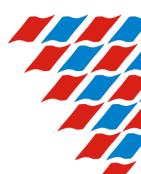




Пусть матрица А содержит много нулевых элементов, расположенных в матрице не беспорядочно, а плотными массивами на заранее известных местах. Тогда расчет по методу Гаусса можно организовать таким образом, чтобы не включать нулевые элементы матрицы. Этим самым экономится требуемая память и уменьшается объем вычислений.

Выбор наибольшего элемента в таких расчетах делать нельзя, ибо перестановка разрушает специальную структуру матрицы.

Наиболее важным частным случаем метода Гаусса является метод прогонки, применяемый к системам с трех- или пятидиагональной матрицей. Такие системы часто встречаются при численном решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, при моделировании некоторых инженерных задач.





Если матрица A является трехдиагональной, то система Ax = d записывается в каноническом виде

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$
,  $1 \le i \le n$ ,  $a_1 = c_n = 0$ .

Эта запись называется разностным уравнением второго порядка, или трехточечным уравнением. В этом случае прямой ход сводится к исключению элементов  $a_i$ . Получается треугольная система, содержащая в каждом уравнении только два неизвестных –  $x_i$  и  $x_{i+1}$ . Поэтому формулы обратного хода имеют вид

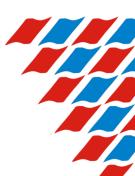
$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}, \qquad i = n, n-1, ..., 1.$$

Уменьшим в последней формуле индекс на единицу и подставим в исходные уравнения

$$a_i(\xi_i x_i + \eta_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i.$$

Выражая отсюда  $x_i$  через  $x_{i+1}$ , получим

$$x_{i} = \frac{c_{i}}{b_{i} - a_{i}\xi_{i}} x_{i+1} + \frac{a_{i}\eta_{i} - d_{i}}{b_{i} - a_{i}\xi_{i}}.$$







Чтобы это выражение совпало с формулами обратного хода, надо, чтобы стоящие в правой части этого равенства дроби были равны соответственно  $\xi_{i+1}$  и  $\eta_{i+1}$ . Отсюда получим удобную запись формул прямого хода

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i}, \qquad \eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}, i = 1, 2, ..., n.$$

Для начала вычислений по формулам прямого и обратного хода формально требуется задать неизвестные величины  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $x_{n+1}$ . Однако перед этими величинами в формулах стоят множители  $a_1$  или  $\xi_{n+1}{\sim}c_n$ , равные нулю. Поэтому можно положить  $\xi_1 = \eta_1 = x_{n+1} = 0.$ 

Заметим, что достаточным условием устойчивости прогонки является условие преобладания диагональных элементов

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i|.$$



#### Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$a_i x_{i-2} - b_i x_{i-1} + c_i x_i - d_i x_{i+1} + e_i x_{i+2} = f_i, i = 0, ..., N,$$

$$a_0 = b_0 = a_1 = e_{N-1} = d_{N-1} = e_N = 0.$$

Для решения этой системы применим метод исключения Гаусса. Учитывая структуру системы, легко получить, что обратный ход метода Гаусса должен осуществляться по формулам:

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} - \beta_{i+1}x_{i+2} + \gamma_{i+1}, \qquad i = N, N-1, ..., 0.$$

Используя это представление, выразим  $x_{i-1}$  и  $x_{i-2}$ . Получим:

$$\begin{split} x_{i-1} &= \alpha_i x_i - \beta_i x_{i+1} + \gamma_i, & 1 \leq i \leq N, \\ x_{i-2} &= (\alpha_{i-1} \alpha_i - \beta_{i-1}) x_i - \alpha_{i-1} \beta_i x_{i+1} + \alpha_{i-1} \gamma_i + \gamma_{i-1}, & 2 \leq i \leq N. \end{split}$$







#### Подставляя эти выражения в представление решения, получим

$$[(\alpha_{i-1}\alpha_i - \beta_{i-1})a_i - \alpha_i b_i + c_i]x_i =$$

$$= [\alpha_{i-1}\beta_i a_i - \beta_i b_i + d_i]x_{i+1} - e_i x_{i+2} + [f_i - (\alpha_{i-1}\gamma_i + \gamma_{i-1})a_i + \gamma_i b_i].$$

Сравнивая это выражение с исходным представлением, видим, что если положить

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_{i-1}\beta_{i}a_{i} - \beta_{i}b_{i} + d_{i}}{(\alpha_{i-1}\alpha_{i} - \beta_{i-1})a_{i} - \alpha_{i}b_{i} + c_{i}},$$

$$\beta_{i+1} = \frac{e_i}{(\alpha_{i-1}\alpha_i - \beta_{i-1})a_i - \alpha_i b_i + c_i},$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{f_i - (\alpha_{i-1}\gamma_i + \gamma_{i-1})a_i + \gamma_i b_i}{(\alpha_{i-1}\alpha_i - \beta_{i-1})a_i - \alpha_i b_i + c_i},$$

то уравнения исходной системы для  $i=0,\ldots,N$  будут удовлетворены.

При этом, как и в случае трехдиагональной прогонки, для начала вычислений по формулам прямого и обратного хода можно формально задать недостающие величины равными нулю.





#### Контрольные вопросы

- 1. Какие методы решения СЛАУ называются прямыми?
- 2. Какие прямые численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений вы знаете, каковы их характерные особенности?
- 3. Как можно проверить правильность решения системы линейных алгебраических уравнений?
- 4. Всегда ли можно получить решение системы линейных алгебраических уравнений?

#### Литература

- 1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы (глава 6, § 1)
- 2. Калиткин Н.Н. Численные методы (глава V, §1, пп. 2, 6)
- 3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов (глава 2, §2.1 2.5)
- 4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций (добавления, § 3)

