**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**"Уфимский университет науки и технологий"**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Численные методы

**Отчет по лабораторной работе № 3**

**Тема:** «Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа МКН-315 | Фамилия И.О. | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Акмурзин М.Э. |  |  |  |
| Принял | Гайнетдинова А.А. |  |  |  |

**Уфа 2023**

**Цель:** получить навык численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием различных прямых методов.

**Теоретический материал**

***Задача 1.***

**Метод Гаусса с выбором главного элемента.**

Наиболее известным из точных методов решения систем линейных уравнений является метод исключения Гаусса. В предположении, что , первое уравнение системы

делим на коэффициент , в результате получаем уравнение

Затем из каждого из остальных уравнений вычитается первое уравнение, умноженное на соответствующий коэффициент . В результате эти уравнения преобразуются к виду

Первое неизвестное оказалось исключенным из всех уравнений, кроме первого. Далее в предположении, что , делим второе уравнение на коэффициент и исключаем неизвестное из всех уравнений, начиная со второго и т.д. В результате последовательного исключения неизвестных система уравнений преобразуется в систему уравнений с треугольной матрицей

Совокупность проведенных вычислений называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Из -го уравнения системы определяем , из -го – и т.д. до . Совокупность таких вычислений называют *обратным ходом метода Гаусса*.

Чтобы избежать катастрофического влияния вычислительной погрешности, применяют *метод Гаусса с выбором главного элемента*. Его отличие от описанной выше схемы метода Гаусса состоит в следующем. Пусть по ходу исключения неизвестных получена система уравнений

Найдем такое, что и переобозначим и ; далее произведем исключение неизвестной из всех уравнений, начиная с -го. Такое переобозначение приводит к изменению порядка исключения неизвестных и во многих случаях существенно уменьшает чувствительность решения к погрешностям округления при вычислениях.

**Рациональная интерполяция.**

При заданных приближение к ищется в виде

Коэффициенты находятся из совокупности соотношений , которые можно записать в виде

Уравнения (1) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных.

***Задача 2.***

Пусть – данная матрица, а и – соответственно нижняя (левая) и верхняя (правая) треугольные матрицы. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема**. Если все главные миноры квадратной матрицы отличны от нуля, то существуют такие нижняя и верхняя треугольные матрицы, что . Если элементы диагонали одной из матриц или фиксированы (ненулевые), то такое разложение единственно.

Формулы в случае фиксирования диагонали нижней треугольной матрицы :

***Задача 3.***

**Метод квадратного корня.**

Пусть – данная симметричная матрица, т.е. . Будем строить её представление в виде .

Матрица может быть определена совокупностью формул

**Метод наименьших квадратов.**

Если вещественные функции заданы таблично, т.е. на конечном множестве точек, то их скалярное произведение определяется формулой

где – полное число узлов таблицы. Тогда условие наилучшего среднеквадратичного приближения примет вид

Выберем линейную аппроксимацию

с числом членов . Тогда коэффициенты аппроксимации находятся из уравнений, которые получаются, подставляя обобщённый многочлен в условие наилучшего среднеквадратичного приближения и приравнивая нулю производные по коэффициентам. Описанный способ нахождения аппроксимации называется *методом наименьших квадратов*.

***Задача 4.***

Дана система пятиточечных уравнений:

Text, letter

Description automatically generated

Запишем алгоритм правой прогонки для системы (1)-(5) в следующем виде:

Text, letter

Description automatically generated

Получили решение СЛАУ с пятидиагональной матрицей.

**Индивидуальное задание**

***Задача 1. (2 балла)***

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента.
2. С использованием написанной программы решить задачу о рациональной интерполяции: выполнить приближение функции , заданной таблично, рациональной функцией вида

где и – многочлены степени и , соответственно. При этом требуется также определить значения и .

1. Построить график интерполирующей функции и исходных данных.

***Задача 2. (3 балла)***

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ методом LU-разложения. Задачи 1 для квадратурной формулы Симпсона.
2. Выполнить п. 2), 3) Задачи 1.

***Задача 3. (3 балла)***

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ с симметричной матрицей методом квадратного корня.
2. С использованием написанной программы решить задачу об аппроксимации функции из первой лабораторной работы, заданной на равномерной сетке из узлов, многочленами степени с использованием метода наименьших квадратов.
3. Построить графики аппроксимирующих многочленов и исходных данных.
4. Определить степень многочлена, обеспечивающего наилучшее приближение (соответствующее наименьшему значению суммы квадратов отклонений значений многочлена в узлах сетки от исходных данных).

***Задача 4. (2 балла)***

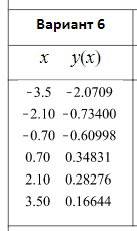
1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения методом прогонки СЛАУ с 5-диагональной матрицей следующего вида:

Scatter chart

Description automatically generated with medium confidence

1. Для отладки программы написать генератор случайных вещественных матриц данного вида с диагональным преобладанием.

Вариант:



**Практическая часть**

***Задача 1.***

Была написана программа на языке для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента. С использованием написанной программы была решена задача о рациональной интерполяции.

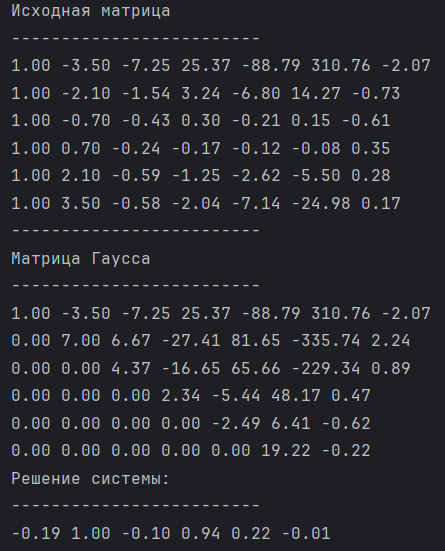


Рисунок 1. Результаты решения СЛАУ для рациональной интерполяции методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

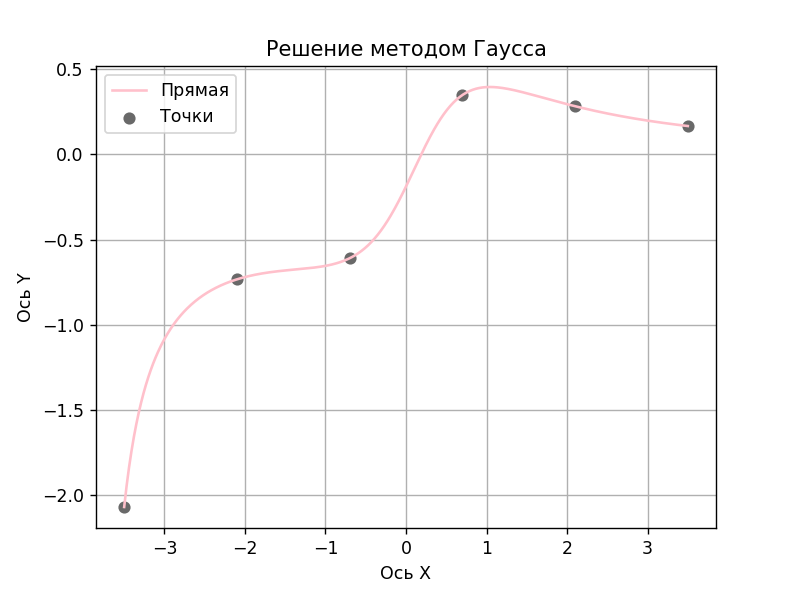


Рисунок 2. График интерполирующей функции и исходных данных для задачи №1.

***Задача 2.***

Была написана программа для решения СЛАУ методом LU-разложения. С использованием написанной программы была решена задача о рациональной интерполяции.

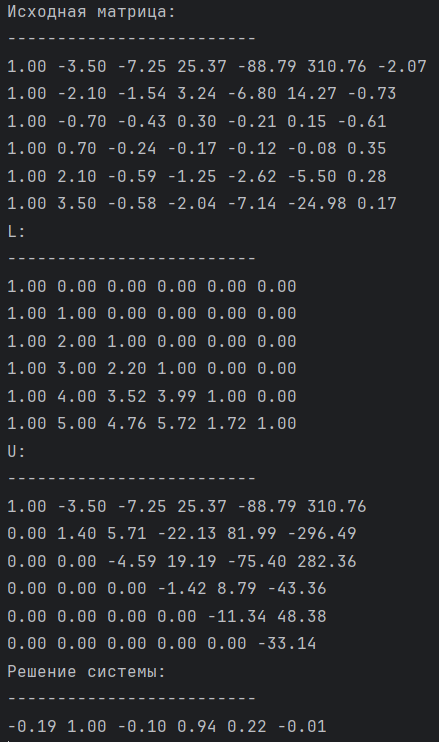
******

Рисунок 3. Результаты решения СЛАУ для рациональной интерполяции методом LU-разложения.

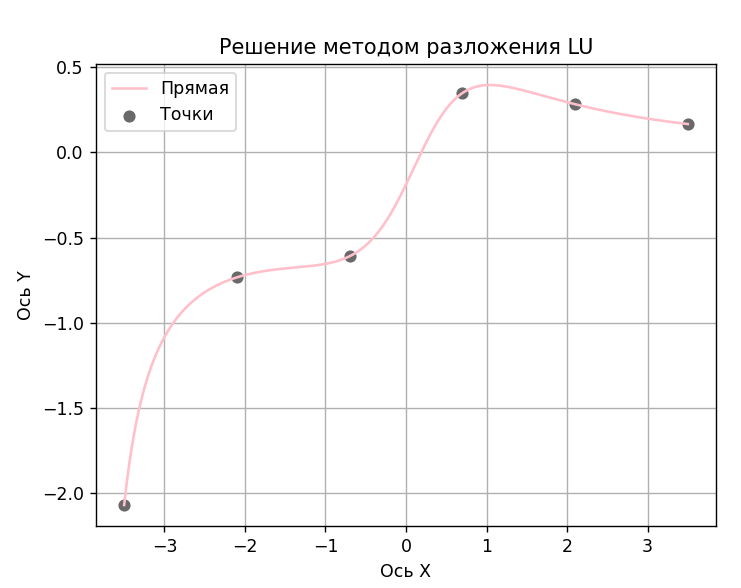


Рисунок 4. График интерполирующей функции и исходных данных для задачи №2.

***Задача 3.***

Была написать программа для решения СЛАУ с симметричной матрицей методом квадратного корня.

С использованием написанной программы решить задачу об аппроксимации функции из первой лабораторной работы, заданной на равномерной сетке из узлов, многочленами степени с использованием метода наименьших квадратов.

Была определена степень многочлена , обеспечивающего наилучшее приближение (соответствующее наименьшему значению суммы квадратов отклонений значений многочлена в узлах сетки от исходных данных).

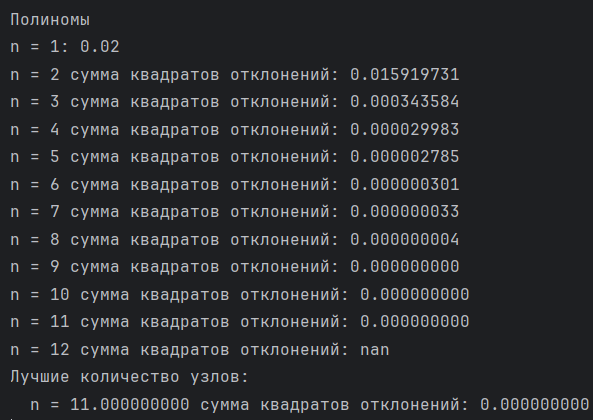


Рисунок 5. Значения суммы квадратов отклонений значений многочлена в узлах сетки от исходных данных для .

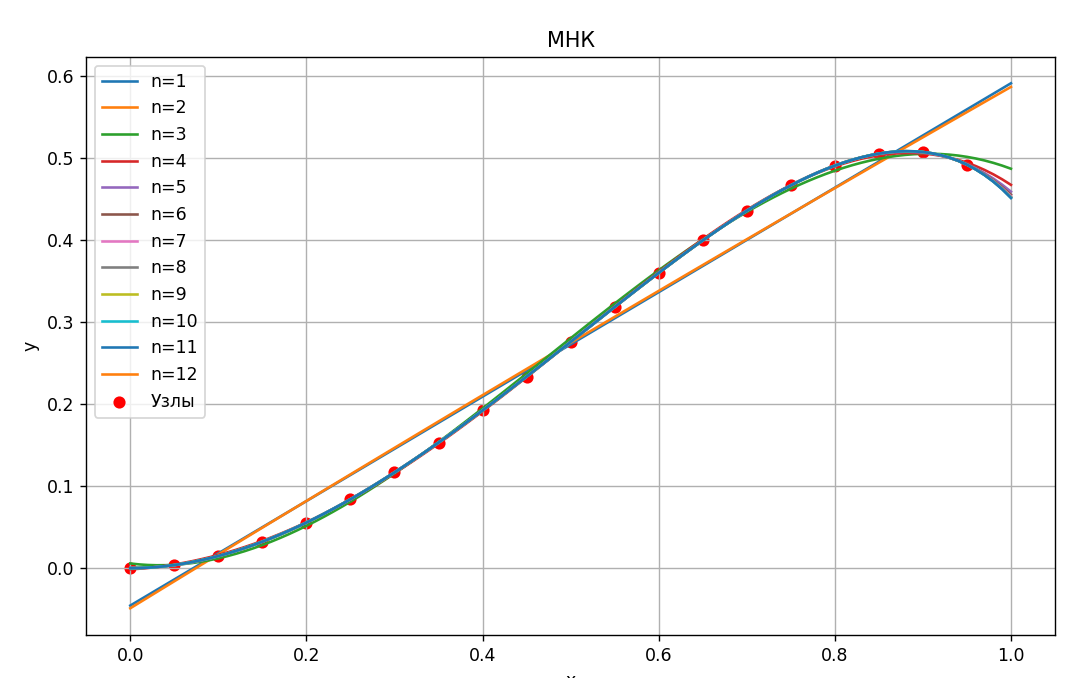
******

Рисунок 6. Графики аппроксимирующих многочленов и исходных данных.

***Задача 4.***

1. Была написана программа для решения методом прогонки СЛАУ с 5-диагональной матрицей. Кроме того, для отладки программы был написан генератор случайных вещественных матриц данного вида с диагональным преобладанием.

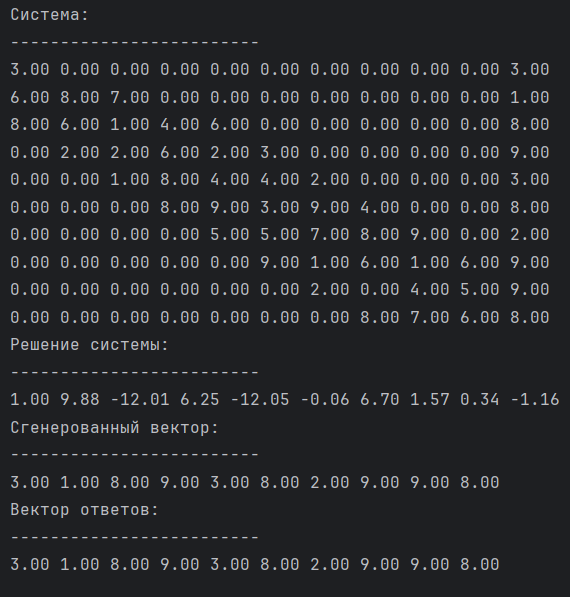


Рисунок 7. Результаты работы метода пяти диагональной прогонки.

Как можно видеть из рисунка 7, программа верно находит решение СЛАУ с пяти диагональной матрицей.

**Вывод**

В ходе проделанной лабораторной работы был изучен теоретический материал необходимый для решения поставленных задач по численному решению систем линейных алгебраических уравнений с использованием различных прямых методов и получен навык проведения вычислительного эксперимента, направленного на их решение.

Для каждой поставленной задачи написана вычислительная программа на языке программирования С++, выполняющая необходимые построения и расчеты по нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений.

**Список использованной литературы**

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 6-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с.: ил.

2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. / В. М. Вержбицкий. — М.: Высш. шк., 2002. — 840 с.: ил.

3. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М: «Наука», 1978. — 512 с.

4. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений. / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М.: «Наука», 1978. — 592 с.: ил.

**Приложение**