МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет» (ФГБОУ ВО «УГАТУ»)

УГАТУ

Решение нелинейных уравнений и их систем

Старший преподаватель кафедры ВВТиС
А.А. Гайнетдинова

Уфа, 2020

Цель

- получить навык численного решения нелинейных уравнений и систем таких уравнений

Задачи

- изучить теоретические основы различных методов решения нелинейных уравнений и их систем;
- реализовать программно выбранные методы решения нелинейных уравнений и их систем;
- применить программы для решения конкретных задач;
- провести анализ полученных результатов.

Постановка задачи и этапы решения

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые корни уравнения на интервале $[a, b]$

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Эта задача представляет собой совокупность нескольких задач:

- Исследование количества, характера и расположения корней.
- Нахождение приближенных значений корней.
- Выбор интересующих корней и их вычисление с требуемой точностью.

Первую и вторую задачи можно решить аналитическими и графическими методами. Причем, если ищутся только вещественные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений $f(x)$. Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между ними лежит нечетное число корней заданного уравнения. Если эти узлы близки, то, скорее всего, корень между ними только один. Также можно построить график функции $y = f(x)$ и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс.

Приближенные значения корней уточняются различными итерационными методами.

NB: Уравнение $y = f(x)$ является нелинейным, если между переменной x и функцией y отсутствует линейная связь.
Классы нелинейных уравнений:
- алгебраические (содержат только алгебраические функции: например, полиномы);
- трансцендентные (аналитические функции, не являющиеся алгебраическими: например, тригонометрические, показательная или логарифмическая).

Локализация корней

Если в уравнении (1) функция $f(x)$ непрерывна, то основой для локализации корня обычно служит следствие из теоремы Коши: если $f(a)f(b) < 0$, то на интервале $[a, b]$ имеется по крайней мере один корень указанного уравнения (точнее – нечётное число корней).

Для локализации корня на интервале $[a, b]$ можно применять, например, такие методы:

- графический метод;
- последовательный перебор;
- перебор с переменным шагом;
- использование мажорант.

Локализация корней: методы

Графический метод. Исходное уравнение (1) приводится к виду $g(x) = h(x)$, строятся графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$ и определяется интервал оси OX, которому принадлежит абсцисса точки пересечения графиков. Он и используется для уточнения корня.

Последовательный перебор. Интервал $[a, b]$ разбивается на N равных отрезков и вычисляются значения функции $f(\cdot)$ в точках $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, N$, где $h = (b - a)/N$. Если при этом найдётся интервал $[x_k, x_{k+1}]$, для которого $f(x_k)f(x_{k+1}) < 0$, то тем самым корень функции будет локализован с точностью $h/2$. Может оказаться, что функция $f(\cdot)$ не меняет знака на последовательности $\{x_k\}$. Если корень на $[a, b]$ существует, то последнее означает, что шаг h слишком велик и его следует заменить на меньший, полагая, например, $N = 2N$.

Перебор с переменным шагом. Если функция $f(x)$ является Липшицевой, т.е.

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|, \quad x', x'' \in [a, b],$$

то можно строить последовательность $\{x_k\}$ вида:

$$x_0 = a, \; x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{L} .$$

Основанием к этому может служить то, что при $f(x) = cx + d$, можно принять $L = |c|$ и в этом случае значение x_1, полученное указанным способом, удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$.

Если L неизвестна, то можно её заменить через

$$L_k = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|} .$$

Использование мажорант. Если известны оценки функции $f(\cdot)$ на $[a, b]$, т.е.

$$f^-(x) \leq f(x) \leq f^+(x),$$

и корни x^- и x^+ этих функций, то

$$\bar{x} \in [\min\{x^-, x^+\}, \; \max\{x^-, x^+\}].$$

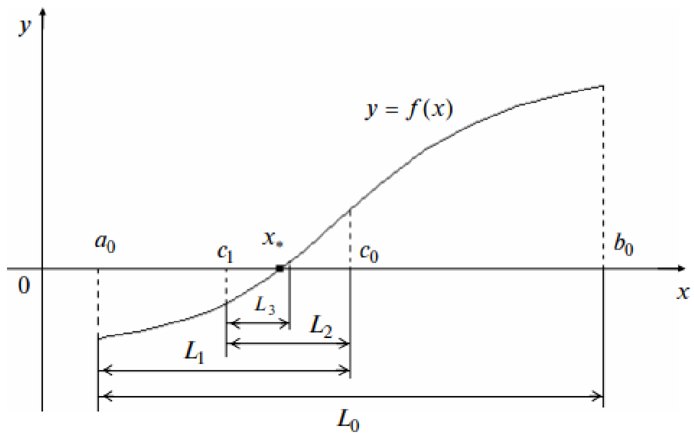
Метод бисекции (метод дихотомии, метод половинного деления)

Метод бисекции – простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида (1). Предполагается только непрерывность функции $f(x)$, поэтому метод является *безусловным*.

Будем считать, что корень t уравнения (1) отделён на отрезке $[a, b]$. Задача заключается в том, чтобы найти и уточнить этот корень. Другими словами, требуется найти приближённое значение корня с заданной точностью ε.

Поделим отрезок $[a, b]$ пополам. Получим точку $c = \frac{a+b}{2}, a < c < b$ и два отрезка $[a, c]$, $[c, b]$. Если $f(c) = 0$, то корень t найден ($t = c$). Если нет, то из двух полученных отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ надо выбрать один $[a_1, b_1]$ такой, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, то есть $[a_1; b_1] = [a, c]$, если $f(a) \cdot f(c) < 0$ или $[a_1; b_1] = [c, b]$, если $f(c) \cdot f(b) < 0$. Новый отрезок $[a_1; b_1]$ делим пополам. Получаем середину этого отрезка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и так далее.

Для того, чтобы найти приближённое значение корня с точностью до $\varepsilon > 0$, необходимо остановить процесс половинного деления на таком шаге n, на котором $|b_n - c_n| < \varepsilon$ и вычислить $x = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда можно взять $t \approx x$.



Метод хорд

Метод хорд предлагает делить отрезок в точке, отстоящей от краев отрезка пропорционально абсолютному значению функции на краях (название "метод хорд" происходит от того, что точка деления является пересечением отрезка $\left[\left(x_{left},\ f\left(x_{left}\right)\right),\ \left(x_{right},\ f\left(x_{right}\right)\right)\right]$ – хорды – с осью абсцисс). Данный метод также является безусловным.

Метод основан на замене функции $f(x)$ на каждом шаге поиска хордой, пересечение которой с осью Ox дает приближение корня.

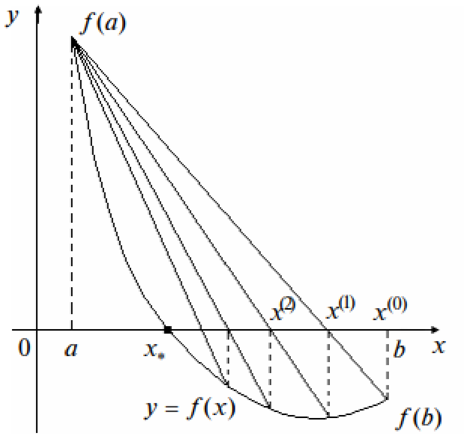
При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться:

- при фиксированном левом конце хорд, т.е. $z = a$, тогда начальная точка $x_0 = b$
- при фиксированном правом конце хорд, т.е. $z = b$, тогда начальная точка $x_0 = a$

В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой:

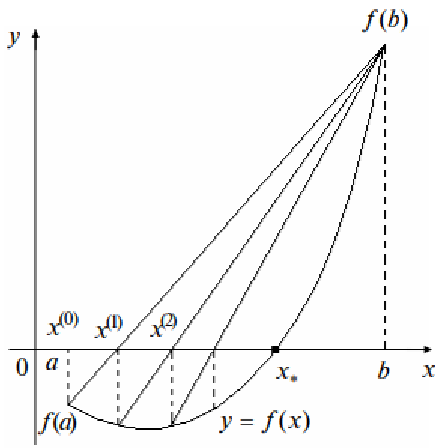
для первого случая:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a);$$



для второго случая:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}(x_n - b);$$



Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$.

Метод простых итераций: идея

Идея метода простой итерации состоит в том, чтобы уравнение (1) привести к эквивалентному уравнению

$$x = \varphi(x)$$

Функцию $\varphi(x)$ можно искать в виде

$$\varphi(x) = x + S(x)f(x),$$

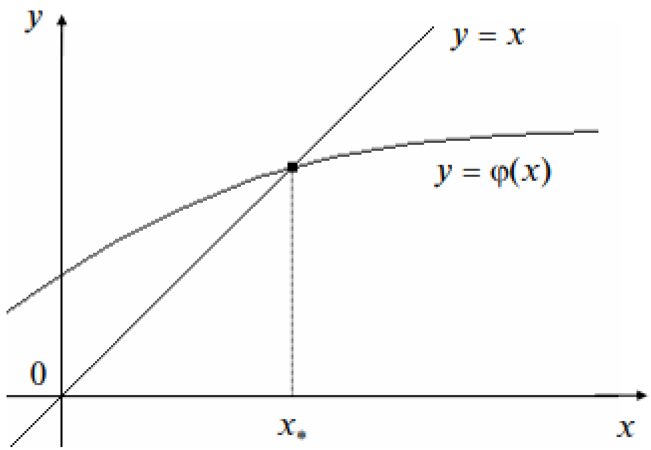
если функция $S(x)$ – произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Тогда итерации строятся по правилу

$$x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon.$

Таким образом, метод простых итераций – одношаговый итерационный процесс.



Метод простых итераций: условия

Теорема 1. [1] пусть x_0 – начальное приближение, x^*– точное решение:

$$\Delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta), \delta: x^* \epsilon \Delta$$

Предположим, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \le q|x'' - x'| \ \forall\ x', x'' \in \Delta, q \in (0{,}1)$$

Пусть $|x_0 - \ \varphi(x_0)| \le (1-q)\delta$ – невязка уравнения.

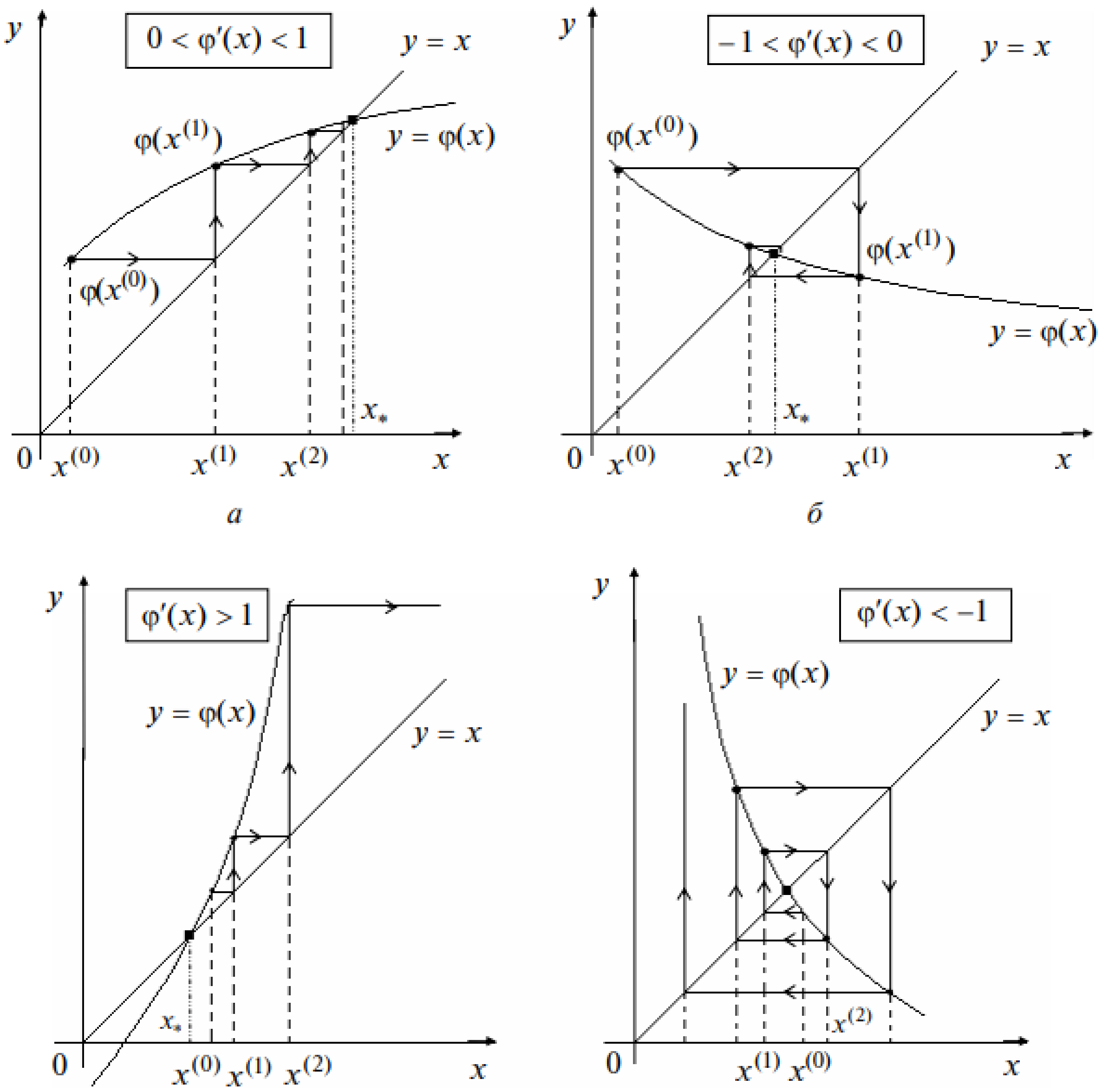
Тогда нелинейное уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень $x^* \epsilon \Delta$, причем все $x_n \in \Delta$, и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^* при $k \to \infty$.

Следствие. Если $\varphi(x) \in \mathrm{C}^1(\Delta)$, то условие Липшица выполнено, если $|\varphi'(x)| < 1$.

Таким образом, метод простых итераций и все производные методы являются условными.

УГАТУ
Уфимский государственный авиационный технический университет

Метод простых итераций: сходимость



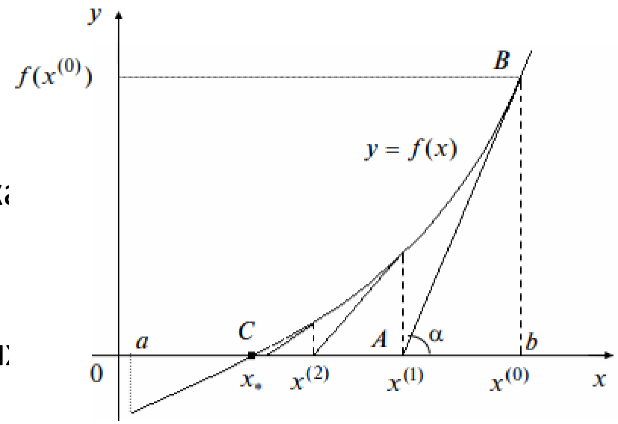
Метод касательных (метод Ньютона, метод линеаризации)

Если x_n – некоторое приближение к корню x^*, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (1) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(x^*) = f\big(x_n + (x^* - x_n)\big) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(\xi).$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение производной в известной точке x_n, получим такой итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика исходной функции касательной к нему.

Метод Ньютона также можно рассматривать как частный случай метода простых итераций с функцией $S(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, то итерационный процесс сходится.

При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду $|ff''| < |(f')^2|$; в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

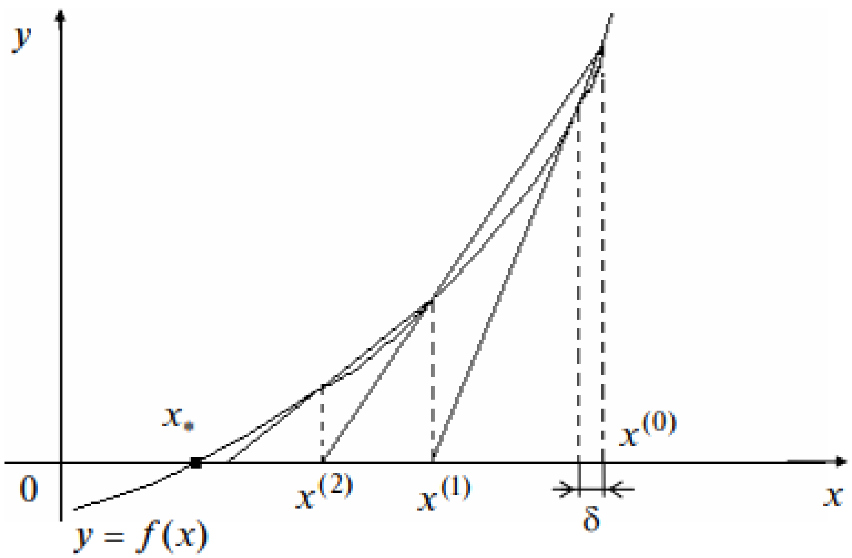
Метод секущих

Если в методе Ньютона заменить точное вычисление производной приближенным вычислением производной, то получим метод секущих.

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Как видно из формулы, необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1. Следовательно, метод секущих – двухшаговый итерационный процесс.



Постановка для системы нелинейных уравнений

Введем обозначения:

$$x = (x_1, \dots x_n) \in R^n$$

$$f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_n(x)\right)^T$$

Решается векторное уравнение

$$f(x) = 0 \implies f_i(x_1, \dots x_n) = 0, \qquad i = 1 \dots n.$$

МПИ для систем нелинейных уравнений

Как и в одномерном случае, уравнение $f(x) = 0$ приводится к виду

$$x = \varphi(x) \Longrightarrow x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n).$$

Итерации строятся по правилу

$$x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right) \Longrightarrow x_i^{(k+1)} = \varphi\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right).$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon.$$

Теорема 2 [1]. Пусть функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$, $i = 1..n$ непрерывны в области G, причем выполнено неравенство (где q – некоторая постоянная)

$$\max_{x \in G} \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}\right| < 1$$

Если последовательные приближения $x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right)$ не выходят из области G, то процесс последовательных приближений сходится:

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$$

и вектор x^* является в области G единственным решением системы.

NB: Модификация МПИ – метод Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \varphi\left(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

Метод Ньютона для систем

Основная идея метода Ньютона состоит в выделении из уравнений системы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности линейных систем.

В методе Ньютона итерации строятся по правилу

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}\left(x^{(k)}\right)f\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2 \dots , \qquad (2)$$

где $J(x)$ – матрица Якоби:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Метод Ньютона – Рафсона

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем выражение (2) следующим образом:

$$\Delta x^{(k)} = -J^{-1}\left(x^{(k)}\right)f\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2 \ldots$$

где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ – поправка к текущему приближению $x^{(k)}$.

Умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби:

$$J\left(x^{(k)}\right)\Delta x^{(k)} = -f\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2 \ldots$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$. После ее определения вычисляется следующее приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие $\left|\Delta x^{(k)}\right| \leq \varepsilon$.

Метод Бройдена (метод секущих для систем)

Идея метода заключается в аппроксимации матрицы Якоби с использованием уже вычисленных значений функций, образующих систему.

$$J_k = J_{k-1} + \frac{\Delta f_k - J_{k-1}\Delta x_k}{\left|\left|\Delta x_k\right|\right|^2}\Delta x_k^T, \qquad \Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

Формула Шермана – Моррисона для обновления обратной матрицы Якоби:

$$J_k^{-1} = J_{k-1}^{-1} + \frac{\Delta x_k - J_{k-1}^{-1}\Delta f_k}{\Delta x_k^T J_{k-1}^{-1}\Delta f_k}\Delta x_k^T J_{k-1}^{-1}$$

Контрольные вопросы

1. Какие методы решения нелинейных уравнений называются условными (безусловными)?
2. Как строится решение нелинейных уравнений методом касательных (простых итераций / секущих / хорд / бисекции), каковы его характеристики?
3. Получите условие сходимости метода касательных (простых итераций / секущих / хорд).
4. Получите оценку скорости (порядка) сходимости метода касательных (простых итераций / секущих / хорд / бисекции).
5. Сравните методы решения нелинейных уравнений по скорости сходимости на примере полученных вами результатов.
6. Что меняется при решении системы нелинейных уравнений?

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы (глава 7, § 1-2)
2. Калиткин Н.Н. Численные методы (глава V, §2-3)