МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет» (ФГБОУ ВО «УГАТУ»)

УГАТУ

Итерационные методы решения СЛАУ

Старший преподаватель кафедры ВВТиС
А.А. Гайнетдинова

Уфа, 2020

Цель

- получить навык проведения вычислительного эксперимента, направленного на исследование свойств итерационных методов решения СЛАУ

Задачи

- изучить теоретические основы различных итерационных методов решения СЛАУ;
- реализовать программно выбранные методы решения СЛАУ;
- провести серию вычислительных экспериментов;
- провести анализ полученных результатов.

Постановка задачи решения СЛАУ

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = d_n \end{cases} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{d}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что существует единственное решение системы, то есть $\det A \neq 0$.

Итерационными методами называются методы, в которых строится последовательность векторов, которая при определённых условиях сходится к решению исходной СЛАУ.

Способы хранения и операции с матрицами разреженных систем

Общая схема итерационного метода

Пусть задана СЛАУ $Ax = b$. Пусть x^k – значение вектора x на -й итерации, x^0 – начальное приближение.

Если общая формула итерационного метода имеет вид

$$x^{k+1} = f(x^k),$$

то итерационный метода называется **одношаговым**.

Если общая формула итерационного метода имеет вид

$$x^{k+1} = f(x^k, x^{k-1}),$$

то итерационный метод называется **двушаговым**.

Любой итерационный метод может быть записан в *канонической* форме:

$$B\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b, k = 0,1, \ldots$$

где $\tau_k > 0$ – итерационный параметр, B – матрица. В общем случае, $B = B_k$ зависит от k.

Если $\tau_k = \tau = const$, то итерационный метод называется **стационарным**.

Если итерационный метод позволяет выразить явно x^{k+1} через x^k (и x^{k-1}), то итерационный метод называется **явным**. Например, если $B = E$, то

$$x^{k+1} = x^k - \tau_{k+1}(Ax^k - b)$$

В общем случае, при $B \neq E$, x^{k+1} находится из решения СЛАУ

$$Bx^{k+1} = Bx^k - \tau_{k+1}(Ax^k - b)$$

Такой метод называется **неявным**.

Общая схема итерационного метода: критерий остановки

Точность итерационного метода характеризуется величиной погрешности

$$z^k = x^k - x,$$

где x – точное решение.

Выражая x^k и подставляя в каноническое уравнение итерационного процесса, получим итерационный процесс погрешности:

$$B\frac{z^{k+1} - z^k}{\tau_{k+1}} + Az^k = 0$$

Критерий остановки итерационного процесса:

$$\|x^k - x\|_D \le \varepsilon \|x^0 - x\|_D,$$

где $\varepsilon > 0$, $\|z\|_D = \sqrt{(Dz, z)}, D = D^T > 0.$

Метод простых итераций

СЛАУ $Ax = b$ представляется в виде $x = Hx + c$.

Схема итерационного процесса следующая:

$$x^{k+1} = Hx^k + c, H = E - \tau A, c = \tau b$$

Каноническая форма:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = b$$

Координатная форма:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \tau\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k - b_i\right), i = 1..n$$

Метод Якоби

Пусть $A = A^T >= 0, a_{ij} \neq 0$. Представим A в виде $A = D - B$, где D – матрица с диагональными элементами A, а B – недиагональные элементы A.

Тогда $Ax = b \;\Rightarrow\; Dx = Bx + b, \Rightarrow x = Hx + c, H = D^{-1}B, c = D^{-1}b$.

Таким образом, метод Якоби – модификация метода простых итераций.

Координатная форма:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i\right), i = 1..n$$

Модификация метода Якоби – *метод Гаусса – Зейделя*:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i\right), i = 1..n$$

Метод последовательной верхней релаксации (SOR)

Представим матрицу A в виде $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{+} + D + A^{-}$, где A^{+} - нижний треугольник A, D – диагональ A, A^{-} - верхний треугольник A.

Каноническая форма:

$$(D + \omega A^{+})\frac{x^{k+1} - x^{k}}{\omega} + Ax^{k} = b, k = 0,1, \dots$$

Координатная форма:

$$x_i^{k+1} = x_i^{k} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{k} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1}\right), i = 1..n$$

Таким образом, на текущей итерации используются значения не только с предыдущей итерации, но и уже найденные значения с текущей итерации.

При $\omega = 1$ мы получим *метод Гаусса-Зейделя.*

Метод сопряжённых градиентов (CGM)

Обозначим $r^k = b - Ax^k$ – невязка. x^0- начальное приближение, -точность.

Тогда алгоритм метода сопряженных градиентов следующий:

- (Инициализация): выбираем $\varepsilon, x^0,\ p^0 = r^0$
- $q^k = Ap^k, \alpha_k = -\frac{(r^k, r^k)}{(p^k, q^k)}$
- $x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k, r^{k+1} = r^k + \alpha_k q^k$
- Если $\|r^{k+1}\| < \varepsilon$, то выходим из цикла.
- Иначе $\beta_k = \frac{(r^{k+1}, r^{k+1})}{(r^k, r^k)}, p^{k+1} = r^{k+1} + \beta_k p^k$

Предобусловливание

Если матрица системы плохо обусловлена, то итерационные методы могут не сходиться, или для сходимости требуется большое количество итераций. Для улучшения сходимости применяют предобуславливание системы:

$$Ax = b \Leftrightarrow \hat{A}x = \hat{b},$$

где A – плохо обусловленная матрица, а $\widehat{\mathrm{A}}$ – хорошо обусловленная матрица, причем

$$\widehat{\mathrm{A}} = M^{-1}A, b = M^{-1}b,$$

где M – матрица предобуславливания (предобуславливатель).

Подробнее о предобусловливании

Алгоритм PCGM – Якоби

В качестве предобуславливателя применяется матрица A системы.

- (Инициализация): выбираем $\varepsilon, x^0,\ r^0 = b - Ax^0, p^0 = \widetilde{r^0}$, где $\widetilde{r^0}$ находится из системы $A\widetilde{r^0} = r^0$ путем проведения m итераций метода Якоби.

- $q^k = Ap^k, \alpha_k = -\frac{(\widetilde{r^k}, r^k)}{(p^k, q^k)}$
- $x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k, r^{k+1} = r^k + \alpha_k q^k$
- Если $\left\|r^{k+1}\right\| < \varepsilon$, то выходим из цикла.
- Иначе, $\beta_k = \frac{(\widetilde{r^{k+1}}, r^{k+1})}{(\widetilde{r^k}, r^k)}$, $p^{k+1} = \widetilde{r^{k+1}} + \beta_k p^k$, где $\widetilde{r^{k+1}}$ находится из системы $A\widetilde{r^{k+1}} = r^{k+1}$ путем проведения m итераций метода Якоби.

Контрольные вопросы

1. Какие методы называются итерационными?
2. Какие итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений вы знаете, каковы их особенности?
3. Как строится решение систем линейных алгебраических уравнений методом Якоби (Гаусса-Зейделя/ SOR)?
4. Чем отличается невязка от погрешности решения?
5. Каковы достаточные условия сходимости метода Якоби (Гаусса-Зейделя/ SOR)?
6. Что такое обусловленность системы?
7. Что такое предобуславливатель?
8. Какие методы называются вариационными?
9. В чем суть метода сопряженных градиентов?

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы (глава 6, § 2-3, 7, 10)
2. Калиткин Н.Н. Численные методы (глава III, §3, пп. 2-5)
3. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем (глава 3, §1-4)
4. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems (главы 3-4, глава 9, п. 9.2, глава 10, п. 10.7.1)