

Лабораторная работа № 5

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: получить навык проведения вычислительного эксперимента, направленного на исследование свойств итерационных методов решения СЛАУ.

Индивидуальное задание включает в себя решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax=b$$

со случайным образом сгенерированными матрицей A и вектором решения x с использованием различных итерационных методов. Поскольку большинство классических итерационных методов решения СЛАУ применимы при достаточно жестких ограничениях на вид матрицы системы, первым заданием лабораторной работы является построение СЛАУ с заданными свойствами.

Задания на лабораторную работу

Задача 1. Генерация СЛАУ (1 балл, обязательная)

Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для генерации ленточной, симметричной, положительно определенной и обладающей диагональным преобладанием матрицы СЛАУ, а также векторов точного решения и правой части. Размерность ($N \times N$) матрицы системы и параметр l , определяющий ширину ленты, указаны в индивидуальном задании. Генерация включает несколько этапов.

1) Случайным образом генерируются внедиагональные элементы ленточной матрицы A : $a_{ij} \in [-1, 1]$ ($i \neq j, \max(0, i-l) \leq j \leq \min(i+l, N)$).

2) Генерируются диагональные элементы таким образом, чтобы обеспечить диагональное преобладание:

$$a_{ii} = q \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|, \quad q > 1.$$

Необходимо сгенерировать три различных ленточных матрицы A_1, A_2, A_3 , соответствующие $q = \{1.1, 2, 10\}$, и отличающиеся, таким образом, только диагональными элементами. В результате будут сгенерированы три ленточные (ширина ленты $2l+1$) матрицы с диагональным преобладанием, не являющиеся, в общем случае, ни симметричными, ни положительно определенными. Эти свойства будут им приданы на последнем этапе.

3) Сгенерировать случайный вектор x размерности N с элементами

$$x_i \in [-1, 1], \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Этот вектор будет представлять собой вектор точного решения СЛАУ.

4) По известным A_1, A_2, A_3 и x вычислить три различных вектора правой части системы:

$$b_k = A_k x.$$

5) Выполнить симметризацию системы путем умножения слева на транспонированную матрицу A^T :

$$A^T A x = A^T b.$$

Полученная в результате матрица новой системы $A^* = A^T A$ будет симметричной, положительно определенной, ленточной (с шириной ленты $4l+1$) и обладать диагональным преобладанием.

Таким образом, в лабораторной работе будут решаться СЛАУ

$$A^* x = b^*, \quad A^* = A^T A, \quad b^* = A^T b \quad (*)$$

с тремя различными матрицами A_1^*, A_2^*, A_3^* и тремя векторами правых частей b_1^*, b_2^*, b_3^* . При написании программ в памяти должны храниться только элементы ленточных матриц A^* , лежащие внутри ленты.

Задача 2. Метод Якоби (2 балла)

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ с указанной в индивидуальном задании точностью методом Якоби, являющегося частным случаем метода простых итераций.
- 2) С использованием написанной программы исследовать зависимость числа итераций метода Якоби, необходимых для достижения заданной точности, от величины параметра q , определяющего степень диагонального преобладания.

Задача 3. Метод SOR (3 балла)

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ с указанной в индивидуальном задании точностью методом последовательной верхней релаксации (SOR) с параметром релаксации $\omega \in (0, 2)$.
- 2) С использованием написанной программы исследовать зависимость числа итераций метода SOR от параметров q и ω . При сравнении предусмотреть частный случай $\omega=1$, соответствующий методу Гаусса-Зейделя.

Задача 4. Метод PCGM (4 балла)

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ с указанной в индивидуальном задании точностью методом сопряженных градиентов (CGM).
- 2) С использованием написанной программы исследовать зависимость числа итераций метода сопряженных градиентов от параметра q .

- 3) Выполнить модификацию написанной программы путем введения предобуславливателя в виде m -шагового метода Якоби.
- 4) Для системы с матрицей A_i , требующей наибольшего числа итераций метода сопряженных градиентов, с использованием написанной программы исследовать зависимость числа итераций метода сопряженных градиентов с предобуславливателем (PCGM) от количества шагов m метода Якоби, используемого в качестве предобуславливателя.

Теоретическая часть

<i>Номер задачи</i>	<i>Литература</i>
1	-
2	[1] (Глава 3, п. 3.1), [2] (Глава III, §3, п.2, п.5) [3] (Глава 6, §3, §2)
3	[1] (Глава 3, п. 3.2), [2] (Глава III, §3, пп.3-5) [3] (Глава 6, §7)
4	[1] (Глава 3, п. 3.3, п. 3.4), [2] (Глава III, §6, п.3), [3] (Глава 6, §7, §10)

1. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.

По каждой решенной задаче в обязательном порядке оформляется отчет. Лабораторная работа считается выполненной, если набрано 6 и более баллов.

Индивидуальные задания к лабораторной работе №5

Вариант	N	l	Абсолютная погрешность
1	1000	40	10^{-6}
2	950	14	10^{-4}
3	900	25	10^{-5}
4	850	12	10^{-6}
5	800	7	10^{-4}
6	750	34	10^{-5}
7	700	16	10^{-6}
8	650	26	10^{-7}
9	700	10	10^{-6}
10	750	18	10^{-6}
11	800	23	10^{-5}
12	850	11	10^{-6}
13	900	33	10^{-7}
14	950	17	10^{-6}
15	1000	13	10^{-5}