**Министерство науки и высшего образования РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Уфимский университет науки и технологии»**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Математическое моделирование

Лабораторная работа №1

**Тема:** “Моделирование двумерных диффузионных процессов методом непрерывных случайных блужданий.”

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа ПМ-457 | ФИО | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Акмурзин М.Э. |  |  |  |
| Преподаватель | Лукащук С.Ю. |  |  |  |

Уфа 2025

**Цель работы:** получить навык статистического моделирования диффузионных процессов методом случайных блужданий.

**Задание:**

Рассматривается случайный процесс движения диффундирующей частицы на плоскости. В начальный момент времени частица находится в начале координат. Затем частица осуществляет «прыжок» на случайную величину , подчиняющуюся заданному закону распределения с плотностью вероятности Направление прыжка выбирается произвольно из четырех возможных: влево, вправо, вверх или вниз. На следующем шаге процесс повторяется с новым случайным значением Частица должна выполнить «прыжков». Весь процесс необходимо повторить для частиц.

Вычислить функции распределения частиц по двум координатным направлениям, и рассчитать значения где – координата -й частицы после прыжков. Также как функции .

Найти средний квадрат полного смещения частиц

Для больших значений выполнить аппроксимацию этой величины степенной зависимостью

**Практическая часть (Вариант 2):**

Функция плотности распределения вероятности длины прыжка:

(1)

Ее интеграл:

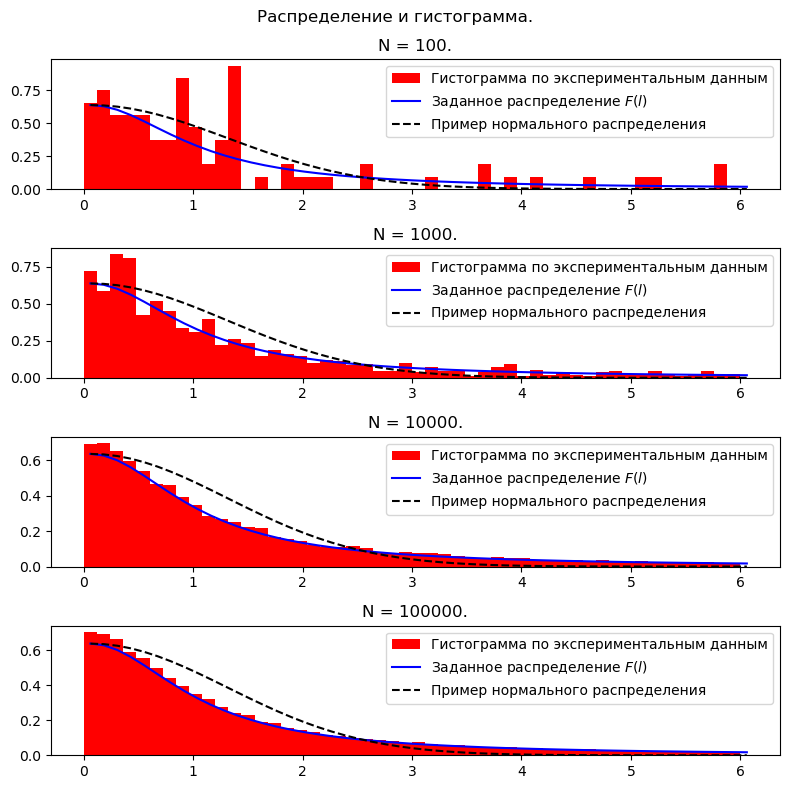
Из условия нормировки :

Тогда:

(2)

Обратная функция:

На рисунке 1 показано распределение

Рисунок 1. Плотность распределения (1) СВ и гистограмма при разных N.

Изображение выглядит как текст, График, диаграмма, линия

Автоматически созданное описание

Рисунок 2. Гистограмма распределения СВ скачков частиц вдоль осей при M=10000 N=10000

По рисунку 2 можно предположить, что распределение похоже на нормальное, но крестообразное распределение частиц на плоскости (рисунок 3) говорит об обратном. В случае нормального распределения на плоскости выглядит как на рисунке 4. Также на графике (рисунок 1) заметен “тяжёлый хвост”, значение которого превышает значение плотности распределения близкой нормальной величины при .

Изображение выглядит как снимок экрана, диаграмма, График, линия

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, линия, диаграмма, График

Автоматически созданное описаниеРисунок 3. Распределение (1) частиц при разных N.

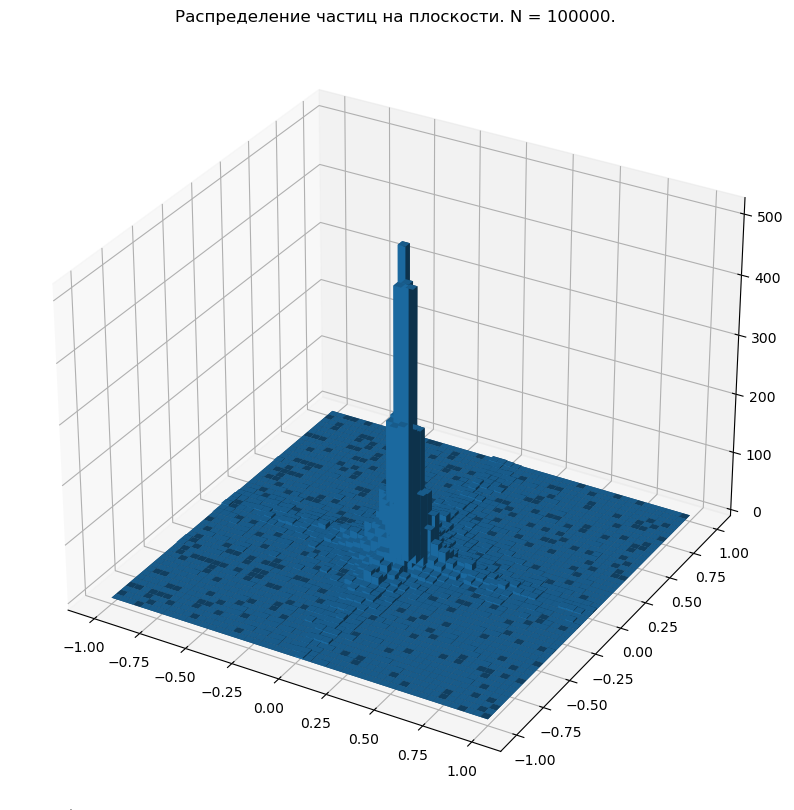
Рисунок 4. Нормальное распределение частиц при разных N.

Рисунок 5. Гистограмма распределение скачков N=10000.

Таблица 1. Расчётные значения при M=10000

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **<x>** | **<y>** | **<R>** | **<x^2>** | **<y^2>** | **<Δx^2>** | **<Δy^2>** | **<ΔR^2>** |
| 100 | -5,18E+01 | 5,45E+01 | 7,52E+01 | 2,12E+07 | 1,60E+07 | 2,12E+07 | 1,60E+07 | 3,72E+07 |
| 215 | -1,36E+02 | 1,23E+02 | 1,83E+02 | 6,01E+07 | 1,14E+08 | 6,01E+07 | 1,14E+08 | 1,74E+08 |
| 464 | 1,53E+02 | 3,06E+02 | 3,42E+02 | 1,67E+08 | 4,51E+09 | 1,67E+08 | 4,51E+09 | 4,68E+09 |
| 1000 | -4,07E+02 | -1,02E+03 | 1,10E+03 | 2,41E+09 | 1,64E+10 | 2,41E+09 | 1,64E+10 | 1,88E+10 |
| 2154 | -1,89E+02 | 1,24E+04 | 1,24E+04 | 7,55E+09 | 1,93E+12 | 7,55E+09 | 1,93E+12 | 1,94E+12 |
| 4641 | 1,45E+03 | 1,62E+03 | 2,18E+03 | 6,31E+10 | 1,05E+11 | 6,31E+10 | 1,05E+11 | 1,68E+11 |
| 10000 | -2,18E+03 | -6,17E+02 | 2,26E+03 | 6,19E+10 | 8,20E+10 | 6,19E+10 | 8,20E+10 | 1,44E+11 |
| 21544 | 2,56E+04 | 2,02E+03 | 2,57E+04 | 3,83E+12 | 5,39E+11 | 3,82E+12 | 5,39E+11 | 4,36E+12 |
| 46415 | -2,00E+05 | 2,41E+04 | 2,01E+05 | 5,13E+14 | 3,09E+13 | 5,13E+14 | 3,09E+13 | 5,44E+14 |
| 100000 | 1,29E+05 | -3,52E+04 | 1,34E+05 | 8,09E+13 | 2,74E+13 | 8,09E+13 | 2,74E+13 | 1,08E+14 |

Изображение выглядит как текст, диаграмма, Параллельный, План

Автоматически созданное описаниеРассмотрим траекторию движения одной из частиц при разных N

Рисунок 6. Траектория движения частицы по плоскости.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, Шрифт

Автоматически созданное описание

Рисунок 7. Траектория частицы вдоль оси X.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, Параллельный

Автоматически созданное описание

Рисунок 8. Траектория частицы вдоль оси Y.

Аппроксимируем степенной зависимостью:

Приводим к линейному виду:

С помощью метода наименьших квадратов (МНК) находим значения:

Изображение выглядит как линия, текст, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рисунок 9. Аппроксимация зависимости от N.

Изображение выглядит как текст, линия, диаграмма, График

Автоматически созданное описаниеРисунок 10. Зависимость от N в случае . Процесс нормальной диффузии, зависимость от линейная.

По значению и свойствам случайной величины можно судить о характере диффузии.

Пусть характеризирует распределение частиц в момент времени  
, – номер шага.

1. При *существовании конечного матожидания* и *конечного второго центрального момента* (дисперсии) распределение близко к нормальному виду с дисперсией равной  
   , – коэффициент диффузии. Получается процесс нормальной диффузии. Таким образом, линейная зависимость от (т.е. ) свидетельствует о близости распределения частиц к нормальному, о прохождении процесса *нормальной диффузии* (Рисунок 10).
2. Если *существует конечное матожидания* , но *не существует конечного второго центрального момента* (дисперсии) . Пусть . В таком случае распределение является решением дробно-дифференциального уравнения:

Плотность распределения убывает на бесконечности степенным образом . В таком случае . Частичка совершает скачки, характеризующиеся расходящейся дисперсией. Миграция частиц со временем ускоряется и может стать бесконечно большой. Таким образом, значение свидетельствует о прохождении процесса *супердиффузии*.

1. Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, линия

   Автоматически созданное описание Если *не существует* *конечного матожидания* . Пусть  
   . Распределение приращений координат блуждающей частицы характеризуется не только бесконечной дисперсией, но и бесконечно большой средней величиной. В таком случае   
   . В таком случае наблюдается *баллистический режим*.

Рисунок 10. Анализ случайной величины .

В исследуемом случае не существует конечного матожидания (см. Рисунок 10). Поэтому в данном эксперименте наблюдается *баллистический режим*. Об этом свидетельствуют результаты численных расчётов зависимости , .

**Вывод:** в ходе лабораторной работы была реализована программа, моделирующая диффузионные процессы методом случайных блужданий. Из экспериментов установили, что распределения не подчиняются нормальному закону, а блуждание частиц является процессом баллистического режима.