**Миянов М.Р. ПМ-453**

**Построение регрессионных моделей с использованием планов экспериментов.**

Из теории конвективного теплообмена известно, что при внешнем обтекании горизонтального цилиндра произвольного поперечного сечения критериальная зависимость для определения коэффициента теплоотдачи на внешней поверхности цилиндра имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – число Нуссельта, – число Рейнольдса, – число Прандтля, – характерный (эквивалентный) диаметр цилиндра, – коэффициент теплоотдачи, – коэффициент теплопроводности омывающей цилиндр среды (жидкости или газа), – плотность омывающей среды, – скорость среды, – вязкость среды, – удельная массовая теплоемкость среды при постоянном давлении. Зависимость (1) позволяет находить значения по известным геометрическим параметрам цилиндра и параметрам омывающей среды.

В таблице ниже приведены результаты трех экспериментов по определению значений числа Нуссельта в 9 различных точках, полученных различными сочетаниями трех значений числа Рейнольдса и трех значений числа Прандтля.

*Таблица 1 – Результаты экспериментов (вариант №7)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Pr/Re | 2500 | 8750 | 15000 |
| 0.75 | 27.3 | 58.3 | 79.8 |
| 28.4 | 57.4 | 84.1 |
| 28.2 | 59.3 | 80.7 |
| 1 | 29.9 | 62.9 | 87.2 |
| 29.9 | 65.1 | 88.9 |
| 29.7 | 64.1 | 92 |
| 1.25 | 33 | 67.9 | 96.9 |
| 33.1 | 70.6 | 94.4 |
| 31.5 | 67.5 | 93.6 |

**Задача I. Полный факторный эксперимент и линейное уравнение регрессии.**

Приведем уравнение (1) к виду линейного уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Введем новые переменные:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

а также сделаем замены: .

Получим уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Выполним кодирование переменных следующим образом:

где – основной фактор, – интервал варьирования. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Подставим (5) в (4), получим:

Произведем замену переменных:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Получим уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Полный факторный эксперимент

Матрица планирования полного факторного эксперимента имеет вид:

*Таблица 2 – Матрица планирования эксперимента*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта |  |  |  |  |
| 1 | 1 | -1 | -1 | 3.315366 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | 3.468697 |
| 3 | 1 | -1 | 1 | 4.395466 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 4.548878 |

где – фиктивный фактор, – среднее значение в n опытах.

Коэффициенты регрессионной модели (7) могут быть рассчитаны по формуле:

Учитывая, что , получим:

Проверка адекватности регрессионной модели

Дисперсия воспроизводимости может быть найдена по формуле:

В данном случае:

Проверка значимости коэффициентов регрессионной модели проводится по критерию Стьюдента. В качестве основной (нулевой) гипотезы выдвигают гипотезу о незначимом отличии от нуля параметра. Найденное по данным наблюдений значение t-критерия сравнивается с табличным (критическим) значением: если фактическое значение t-критерия больше табличного (по модулю), то основную гипотезу отвергают и считают, что с вероятностью (1-p) параметр значимо отличается от нуля.

Для уровня значимости : .

Таким образом, все коэффициенты уравнения линейной регрессии (7) являются значимыми c вероятностью 95%.

Дисперсия адекватности:

где , – значение, рассчитанное по регрессионной модели, – число степеней свободы модели.

*Таблица 3 – Значения , полученные экспериментально, средние, а также рассчитанные по регрессионной модели (7)*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта |  |  |  |  |  |
| 1 | 3.291010 | 3.331133 | 3.323956 | 3.315366 | 3.315346 |
| 2 | 3.483392 | 3.486457 | 3.436243 | 3.468697 | 3.468718 |
| 3 | 4.374120 | 4.426880 | 4.385396 | 4.395466 | 4.395486 |
| 4 | 4.569232 | 4.542976 | 4.534426 | 4.548878 | 4.548857 |

где – значение, полученное в -ом опыте.

Тогда дисперсия адекватности:

Адекватность регрессионной модели можно оценить по критерию Фишера: если , то модель адекватна.

Для уровня значимости : .

модель является адекватной с вероятностью 95%.

Выполним обратный переход от модели (7) к модели к модели (2). Из (6) следует:

Следовательно, согласно (3):

Тогда, возвращаясь к уравнению (1), получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Проверим правильность полученной модели непосредственной подстановкой. Результаты подстановки приведены в таблице 4.

*Таблица 4 – Проверка правильности регрессионной модели*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Pr/Re | 2500 | 8750 | 15000 |
| 0.75 | 27.961920 | 59.019684 | 81.514027 |
| 1 | 30.445695 | 64.305315 | 88.828970 |
| 1.25 | 32.525555 | 68.731390 | 94.954349 |

**Задача II. Ортогональный центральный композиционный план и нелинейное (квадратичное) уравнение регрессии.**

Нелинейное уравнение регрессии имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Матрица планирования ортогонального центрально-композиционного плана (ОЦКП) для двух факторов с использованием дополнительного нулевого фактора:

*Таблица 5 – Матрица планирования ОЦКП*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 2 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |  |  |
| 3 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |  |  |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 5 | 1 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |  |
| 6 | 1 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |  |
| 7 | 1 | 0 |  | 0 | 0 |  |  |  |
| 8 | 1 | 0 |  | 0 | 0 |  |  |  |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |

где – длина «звездного» плеча, – формальный сдвиг квадратичных факторов.

Значения и могут быть найдены по формулам:

В данном случае Подставим эти значения в таблицу 5, получим:

*Таблица 6 – Дополненная матрица планирования ОЦКП*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0.333333 | 0.333333 | 3.315366 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0.333333 | 0.333333 | 3.468697 |
| 3 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0.333333 | 0.333333 | 4.395466 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.333333 | 0.333333 | 4.548878 |
| 5 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.333333 | -0.66667 | 4.058685 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.333333 | -0.66667 | 4.222780 |
| 7 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | -0.66667 | 0.333333 | 3.381103 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -0.66667 | 0.333333 | 4.487676 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.66667 | -0.66667 | 4.152566 |

Коэффициенты регрессионной модели (9) могут быть рассчитаны по формулам:

Получим:

Проверка адекватности регрессионной модели

Дисперсия воспроизводимости:

В данном случае:

Проверка значимости коэффициентов регрессионной модели проводится по критерию Стьюдента.

Для уровня значимости : .

Таким образом, коэффициенты и являются незначимыми, а остальные – значимыми с вероятностью 95%.

*Таблица 7 – Значения , полученные экспериментально, средние, а также рассчитанные по регрессионной модели (9)*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта |  |  |  |  |  |
| 1 | 3.291010 | 3.331133 | 3.323956 | 3.315366 | 3.168707 |
| 2 | 3.483392 | 3.486457 | 3.436243 | 3.468697 | 3.325653 |
| 3 | 4.374120 | 4.426880 | 4.385396 | 4.395466 | 4.257658 |
| 4 | 4.569232 | 4.542976 | 4.534426 | 4.548878 | 4.414604 |
| 5 | 4.058199 | 4.042525 | 4.075332 | 4.058685 | 3.924996 |
| 6 | 4.211683 | 4.250921 | 4.205737 | 4.222780 | 4.081942 |
| 7 | 3.383373 | 3.383373 | 3.376563 | 3.381103 | 3.247180 |
| 8 | 4.463261 | 4.482664 | 4.517104 | 4.487676 | 4.336131 |
| 9 | 4.134686 | 4.169297 | 4.153713 | 4.152566 | 4.003469 |

Дисперсия адекватности:

где , – значение, рассчитанное по регрессионной модели, – число степеней свободы модели.

Тогда дисперсия адекватности:

Для уровня значимости : .

модель является неадекватной с вероятностью 95%.

Таким образом, сравнивания коэффициенты, полученные для моделей (7) и (9), можно заметить, что коэффициенты при линейный членах являются примерно равными, однако модель (9), в отличие от (7), является неадекватной по критерию Фишера.