Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Цель работы: получить навык численного решения линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнений параболического типа с использованием различных конечно-разностных схем на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности с источником.

Задания на лабораторную работу

Начально-краевая задача

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(t,x,u), \quad x \in (0,1), t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{2}$$

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \tag{3}$$

$$\alpha_1 u(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) = \psi_1(t), \qquad t > 0. \tag{4}$$

I. Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности (1):

$$k(u) = k_0 = const, \; f(t,x,u) = f(t,x). \tag{5}$$

Параметры задачи выбираются в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 1).

Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.

Задача 1 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(5) с использованием явной разностной схемы на равномерной пространственно-временной сетке.
2) Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
3) Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики зависимости

погрешности, оцениваемой в равномерной норме по пространственной переменной, от времени и шагов сетки.

Задача 2 (4 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(5) по полностью неявной схеме и схеме Кранка-Николсона на равномерной сетке.
2) Выполнить сравнение точности получаемого решения по двум схемам с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.
3) Сравнить время решения задач по трем схемам (явной, полностью неявной и Кранка-Николсона), обеспечивающих получение решения с одинаковым уровнем погрешности.

Индивидуальные задания к задачам 1 и 2

Таблица 1

№ в-та	k_0	$f(t,x)$	α_0	β_0	α_1	β_1	$\varphi(x)$	$\psi_0(x)$	$\psi_1(x)$
1	π^{-2}	x	1	0	1	0	$\sin(\pi x)$	0	t
2	1	$(\pi^2 t+1)\cos(\pi x)$	0	1	1	0	x	1	$1-t$
3	0.5	$-x^2\cos t$	1	0	0	1	1	$\cos t$	$-2\sin t$
4	π^{-1}	$(\pi t+1)\cos(\pi x)+\dfrac{x}{2}$	0	1	0	1	$\sin(\pi x)$	t	$-\pi e^{-\pi t}$
5	π^{-2}	$\cos(\pi x)-xe^{-t}$	1	1	1	0	x	1	$2e^{-t}-1$
6	1	x^2-2t	1	1	0	1	x	1	$2t+1$
7	1	0	1	1	1	1	shx	e^t	e^{t+1}
8	$(4\pi^2)^{-1}$	$\sin(2\pi x)-\dfrac{1}{2\pi^2}$	1	0	1	1	x^2	$2\pi(1-e^{-t})$	1
9	1	tx^2-t^2	0	1	1	1	x	1	$\dfrac{3}{2}t^2+2$
10	1	$e^{-t}x$	1	-1	1	0	$\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin\ 1}-x$	e^{-t}	$e^{-t}ctg1$
11	1	$x-x^2+2t$	1	-1	0	1	$\dfrac{\sin\pi x}{\pi}$	$-e^{-\pi^2 t}-t$	$-e^{-\pi^2 t}-t$
12	$\dfrac{1}{2}$	$(x^2+t)\cos t$	1	-1	1	1	x	$t\sin t-1$	$(3+t)\sin t+2$
13	1	$(1-x)^2-x\sin t-2t$	1	0	-1	-1	x	t	$-2\cos t$
14	$(18\pi^2)^{-1}$	$\dfrac{\sin(3\pi x)}{6\pi}$	0	1	-1	-1	1	$e^{-\frac{t}{2}}-1$	$-e^{-\frac{t}{2}}$
15	1	$x^3-6tx+2$	1	-1	1	-1	$x(1-x)$	-1	$1-2t$

II. Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1)-(4) с дополнительными исходными данными $k(u)$ и $F(u)$ из таблицы 2, где

$$f(t,x,u) = F(u)f(t,x),$$

а функция $f(t,x)$ и остальные данные берутся из таблицы 1.

Задача 3 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования С++ решения задачи (1)-(4) с использованием консервативной схемы на равномерной сетке.
2) Убедиться в корректности программы на примере задачи 1.
3) Исследовать зависимость получаемого решения от величины шага сетки по пространственной и временной переменным. Построить графики решений для различных значений шага.

Задача 4 (2 балла).

1) Выполнить модификацию программы из задачи 3 путем организации внутренних итераций на каждом временном шаге для повышения точности вычисления нелинейных слагаемых. Условием остановки итерационного процесса является достижение заданного преподавателем уровня погрешности вычислений нелинейных функций.
2) Выполнить сравнение получаемых решений по исходной и модифицированной программам.
3) Сравнить время работы двух программ для построения решений с одинаковым уровнем погрешности.

***Индивидуальные задания к задаче* 2**

Таблица 2

В-т	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$k(u)$	u^2	u	u^2	u	u^3	u^2+u	u^2+1	u
$F(u)$	$\sin u$	u^2	u^3	$\cos u$	u	u^2	u^3	u^3

В-т	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$k(u)$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$
$F(u)$	u	u	u^2	u^2	u^3	u^3	$\cos u$

Теоретическая часть

Номер задачи	*Литература*
1,2	[1] (Глава XI, §1) [2] (Глава VII, §1) [3] (Глава 10, §5)
3,4	[1] (Глава XI, §1) [2] (Глава VII, §2)

1. Калиткин Н.Н. Численные методы.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.

По каждой решенной задаче в обязательном порядке оформляется отчет. Лабораторная работа считается выполненной, если набрано 6 и более баллов.