Лабораторная работа №4

Решение начально-краевой задачи для уравнений гиперболического типа

Лабораторная работа №4

УГАТУ

Цель работы: получить навык численного решения краевых задач для уравнений гиперболического типа на примере начально-краевой задачи для

- линейного одномерного уравнения переноса
- линейного одномерного неоднородного волнового уравнения.

Уравнение переноса

УГАТУ

Рассматривается начально-краевая задача для простейшего линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad x \in (a,b), t > 0, t < T; \qquad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [a,b]; \qquad (2)$$

$$u(t,a) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \qquad (3)$$

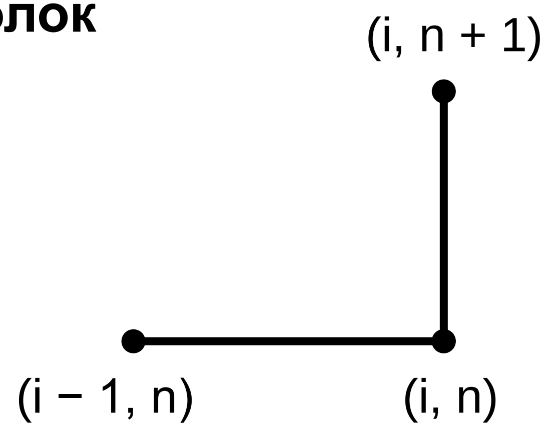
Решением будет функция вида $g(x - at)$, характеризующая волновой перенос вправо (в сторону увеличения x).

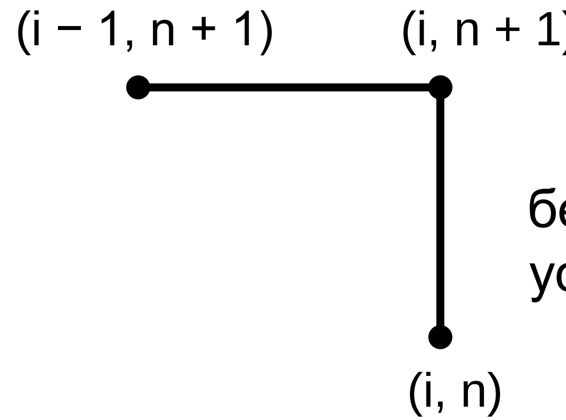
Является ДУЧП 1 порядка → для аппроксимации необходимо использовать шаблон, содержащий узлы сетки как минимум с двух временных и двух пространственных слоев.

Шаблоны схем первого порядка

Левый уголок

условно
устойчива

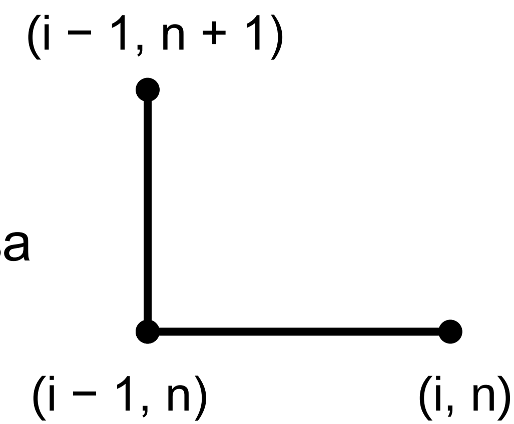


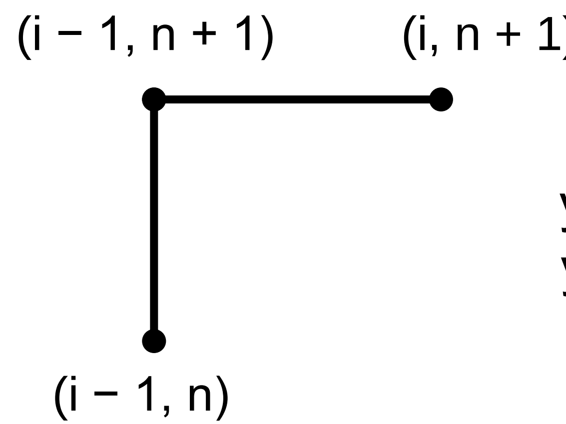


безусловно
устойчива

Правый уголок

абсолютно
неустойчива

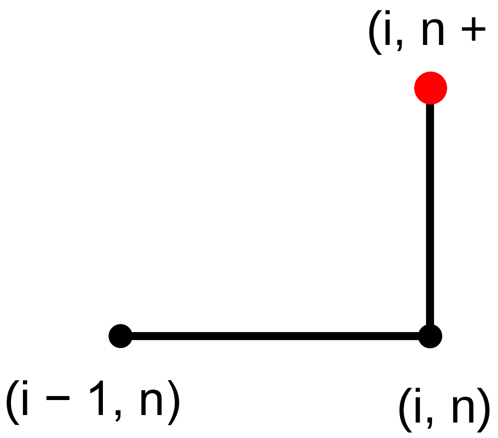




условно
устойчива

Явная схема "Левый уголок"

Шаблон явной схемы содержит единственную точку на верхнем временном слое:



$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a\frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = f_i^{n+1}$$

Следовательно, можно явно выписать формулу для этой точки:

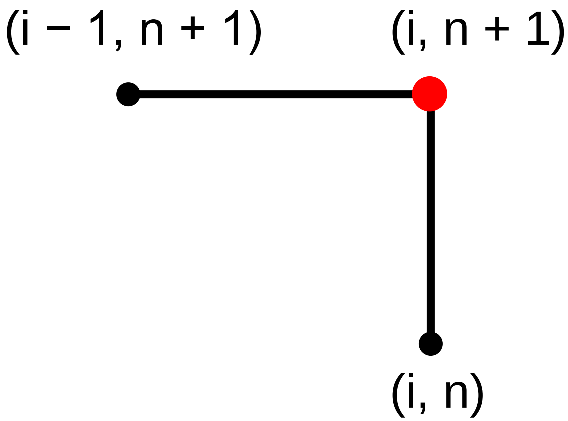
$$y_i^{n+1} = \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right)y_i^n + \frac{a\tau}{h}y_{i-1}^n + \tau f_i^{n+1}$$

Порядок аппроксимации схемы: $O(\tau + h)$, т.е. первый по времени и по пространству.

Схема условно устойчива, условие устойчивости: $\frac{a\tau}{h} \le 1$

Неявная схема "Левый уголок"

Шаблон неявной схемы содержит несколько точек на верхнем временном слое:



$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}+a\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}=f_i^{n+1}$$

Так как шаблон содержит всего две точки на верхнем временном слое, а волна бежит вправо, можно решать задачу без СЛАУ послойно (схема бегущего счета):

перебираются узлы слева направо → функцию в узле *(i, n+1)* можно выразить через уже известные к этому моменту *(i, n)* и *(i-1, n+1).*

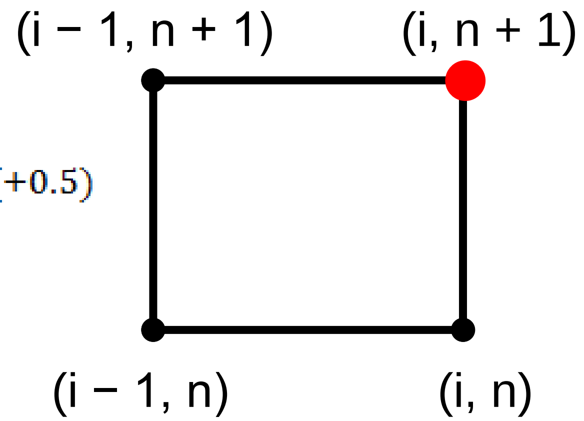
$$\left(1+\frac{a\tau}{h}\right)y_i^{n+1}=\frac{a\tau}{h}y_{i-1}^{n+1}+y_i^n+\tau f_i^{n+1}$$

Порядок аппроксимации схемы: $O(\tau + h)$, т.е. первый по времени и по пространству.

Схема безусловно устойчива.

Неявная схема с весами

Шаблон неявной схемы с весами:



$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a\sigma \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} + a(1-\sigma)\frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = f_i^{n(+0.5)}$$

Данная схема также может быть посчитана
как схема бегущего счета (можно записать явную формулу для верхней правой точки шаблона).

Порядок аппроксимации схемы: $O(\tau + h)$, но при специальном выборе

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}$$

получаем схему повышенного порядка аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.

Схема условно устойчива при $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}$

Волновое уравнение

Рассматривается начально-краевая задача для линейного одномерного волнового уравнения с источником:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad x \in (0,1), t > 0; \tag{5}$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{6}$$

$$u_t{}'(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{7}$$

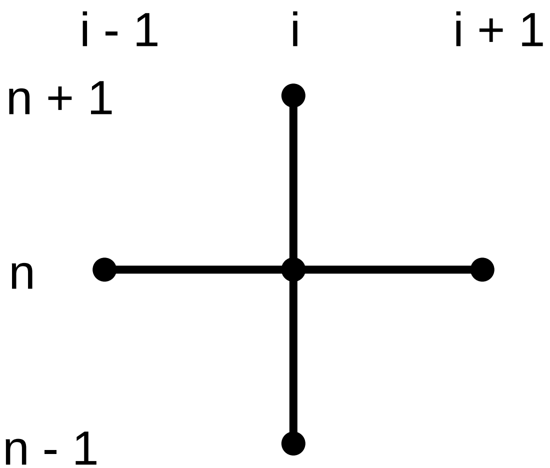
$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \tag{8}$$

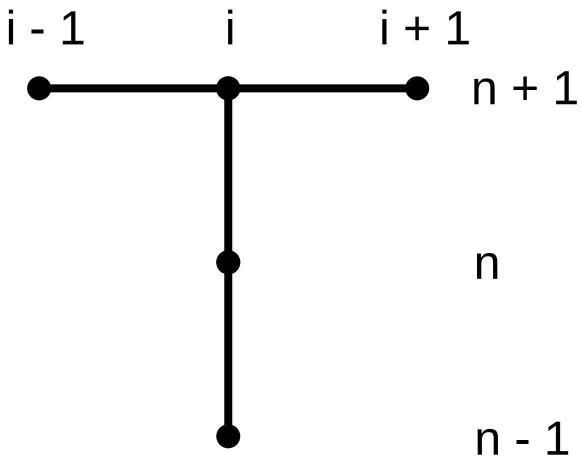
$$\alpha_1 u(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) = \psi_1(t), \qquad t > 0. \tag{9}$$

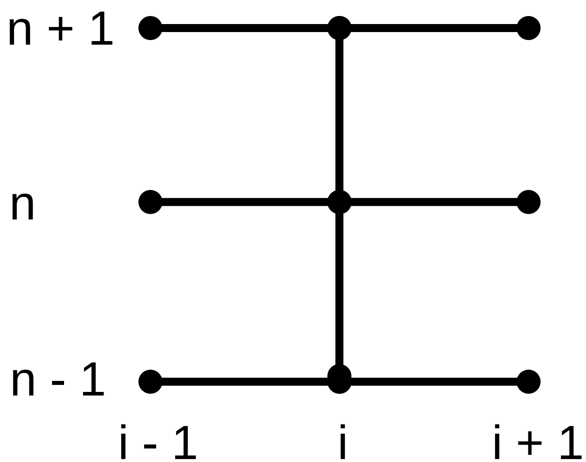
Решением будет функция вида $g_1(x - at) + g_2(x - at)$, характеризующая волновой перенос в двух направлениях.

Конечно-разностные схемы

Для аппроксимации необходимо использовать шаблон, содержащий узлы сетки как минимум с трех временных и трех пространственных слоев.

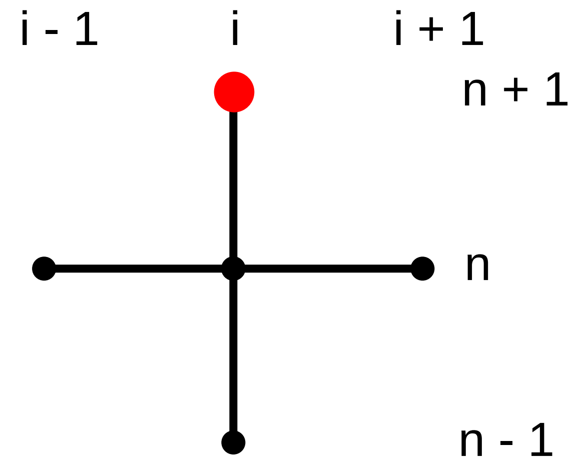






Явная схема "Крест"

Шаблон явной схемы содержит единственную точку на верхнем временном слое:



$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f_i^{n+1}$$

Следовательно, можно явно выписать формулу для этой точки.

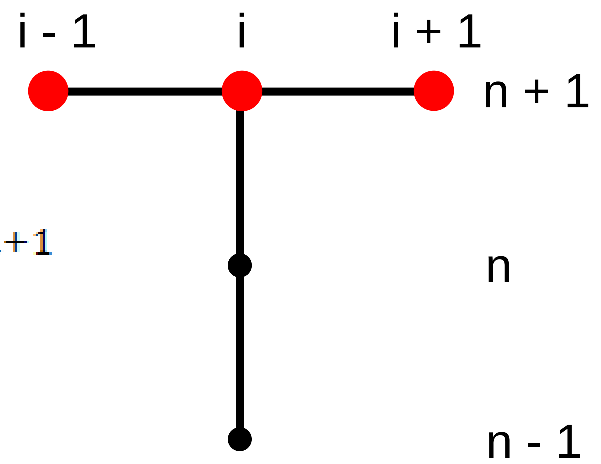
Порядок аппроксимации схемы: $O(\tau^2 + h^2)$, т.е. второй по времени и по пространству.

Схема условно устойчива, условие устойчивости: $\dfrac{a^2\tau^2}{h^2} \le 1$

Неявная схема "Т"

Шаблон неявной схемы содержит несколько точек на верхнем временном слое:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1}$$



Следовательно, для каждого временного слоя нужно решать СЛАУ. Матрица СЛАУ будет трехдиагональной, как и в случае неявной схемы для уравнения теплопроводности.

Порядок аппроксимации схемы: О($\tau^2 + h^2$), т.е. второй по времени и по пространству.

Схема безусловно устойчива.

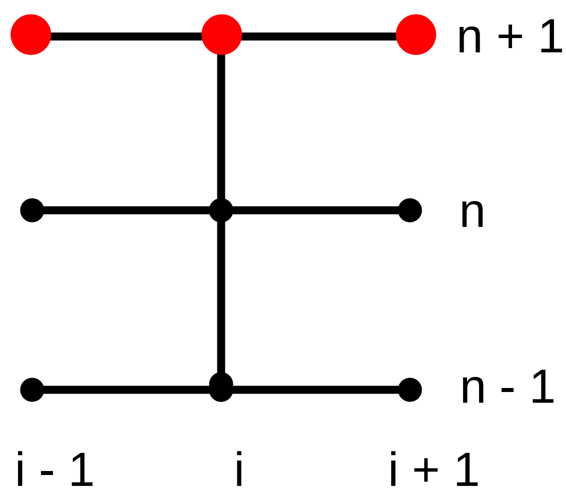
Неявная схема с весами

Шаблон неявной схемы с весами также содержит несколько точек на верхнем временном слое:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = a^2\sigma\frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$+a^2(1-2\sigma)\frac{y_{i+1}^{n} - 2y_i^{n} + y_{i-1}^{n}}{h^2}$$

$$+a^2\sigma\frac{y_{i+1}^{n-1} - 2y_i^{n-1} + y_{i-1}^{n-1}}{h^2} + \varphi_i^n$$



Следовательно, для каждого временного слоя нужно решать СЛАУ. Матрица СЛАУ также будет трехдиагональной. Схема условно устойчива при

$$\sigma \geq \bar{\sigma} = \frac{1}{4(1-\varepsilon)} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \varepsilon > 0$$

Порядок аппроксимации схемы: O(τ^2 + h^2), но при специальном выборе

$\sigma = \bar{\sigma} - h^2/12\tau^2$ и $\varphi_i^n = f + f'' \cdot h^2/12$

получаем схему повышенного порядка аппроксимации O(τ^2 + h^4).

Начальные и граничные условия

УГАТУ

Для всех рассмотренных схем на порядок аппроксимации влияет аппроксимация:

- второго начального условия (на производную) – есть всегда!
- граничных условий 2 и 3 рода – если есть.

Соответственно, для сохранения второго порядка аппроксимации нужно построить аппроксимацию первой производной из начального и граничных условий – также второго порядка.

Для схемы повышенного порядка аппроксимации граничные условия 2 и 3 рода тоже должны быть повышенного (четвертого) порядка аппроксимации.