Лабораторная работа №3

Решение краевых задач для эллиптических уравнений

Лабораторная работа №3

Цель работы: получить навык численного решения краевых задач для уравнений эллиптического типа с использованием различных методов на примере задачи Дирихле для линейного двумерного неоднородного уравнения.

Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для линейного двумерного неоднородного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами:

$$\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+c(x,y)u+f(x,y)=0, \qquad (1)$$

$$(x,y)\in\Omega=(0,l_x)\times\left(0,l_y\right);$$

$$u|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \qquad (x,y)\in\Gamma=\partial\Omega. \qquad (2)$$

Данная задача может описывать, например, стационарный процесс распределения температуры в пластине.

Постановка задачи

УГАТУ

Рассмотрим частный случай уравнения (1) – уравнение Пуассона с постоянными коэффициентами. Получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \qquad (1')$$

$$(x, y) \in \Omega = (0, l_x) \times \left(0, l_y\right);$$

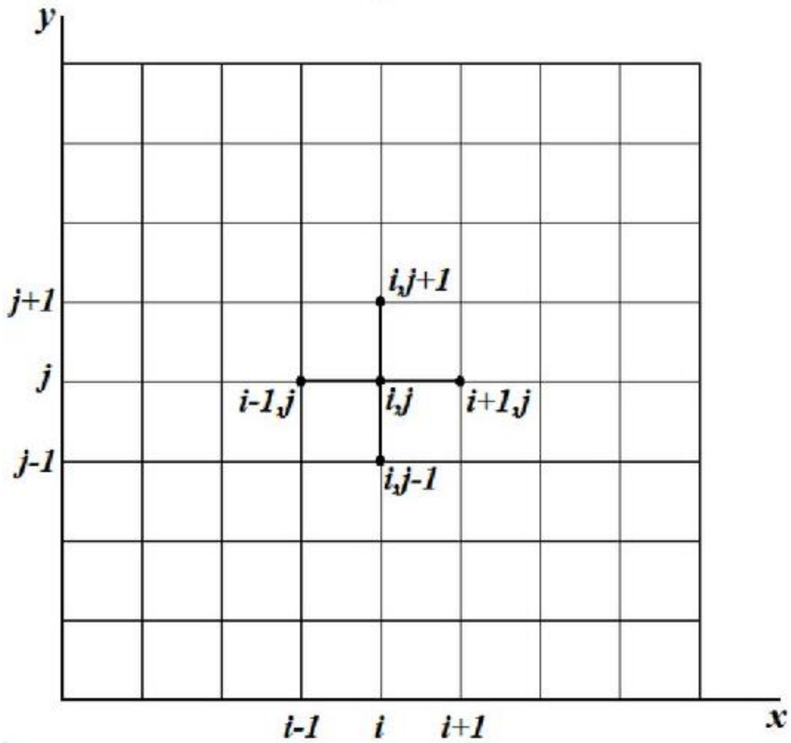
$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \varphi^1(y), \\ u|_{x=l_x} &= \varphi^2(y), \\ u|_{y=0} &= \varphi^3(x), \\ u|_{y=l_y} &= \varphi^4(x). \end{aligned} \qquad (2')$$

Разностная схема

Введем сетку

$$\{x_i = i \cdot h_x, y_i = j \cdot h_y, i = 0 \dots n, j = 0 \dots m\}$$

Для аппроксимации уравнения (1) будем использовать крестообразный шаблон.



$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h_y^2} = \\ = -f_{i,j}, \quad i = 1 \dots n-1, j = 1 \dots m-1$$

$$U_{0,j} = \varphi_j^1, \qquad j = 0 \dots m$$
$$U_{n,j} = \varphi_j^2, \qquad j = 0 \dots m$$
$$U_{i,0} = \varphi_i^3, \qquad i = 0 \dots n$$
$$U_{i,m} = \varphi_i^4, \qquad i = 0 \dots n$$

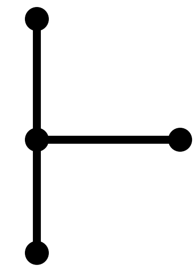
Уравнения, содержащие граничные условия, можно убрать из системы разностных уравнений, подставив вместо соответствующих неизвестных их значения.

Разностная схема

Рассмотрим, как преобразуются уравнения разностной схемы для приграничных точек, на примере уравнений при $i = 1$:

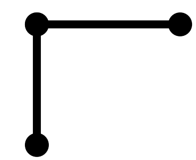
$j = 2 \ldots m - 2$:

$$\frac{U_{2,j}}{h_x^2} - 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{1,j} + \frac{U_{1,j-1}}{h_y^2} + \frac{U_{1,j+1}}{h_y^2} = -f_{1,j} - \frac{\varphi_j^1}{h_x^2},$$



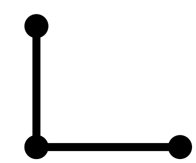
$j = 1$:

$$\frac{U_{2,1}}{h_x^2} - 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{1,1} + \frac{U_{1,2}}{h_y^2} = -f_{1,1} - \frac{\varphi_1^1}{h_x^2} - \frac{\varphi_1^3}{h_y^2},$$



$j = m - 1$:

$$\frac{U_{2,1}}{h_x^2} - 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{1,1} + \frac{U_{1,2}}{h_y^2} = -f_{1,m-1} - \frac{\varphi_1^1}{h_x^2} - \frac{\varphi_1^4}{h_y^2}.$$



Матрица СЛАУ

Неизвестные $U_{i,j}$ образуют в данном случае матрицу.
Для формирования СЛАУ преобразуем их в вектор неизвестных следующим образом:

$$\mathbf{U} = (U_{1,1},\ U_{2,1},\ U_{3,1},\ \ldots\ U_{n-1,1},\ U_{1,2},\ U_{2,2},\ \ldots\ U_{n-1,2},\ \ldots\ U_{1,n-1},\ U_{2,n-1},\ \ldots\ U_{n-1,n-1})$$

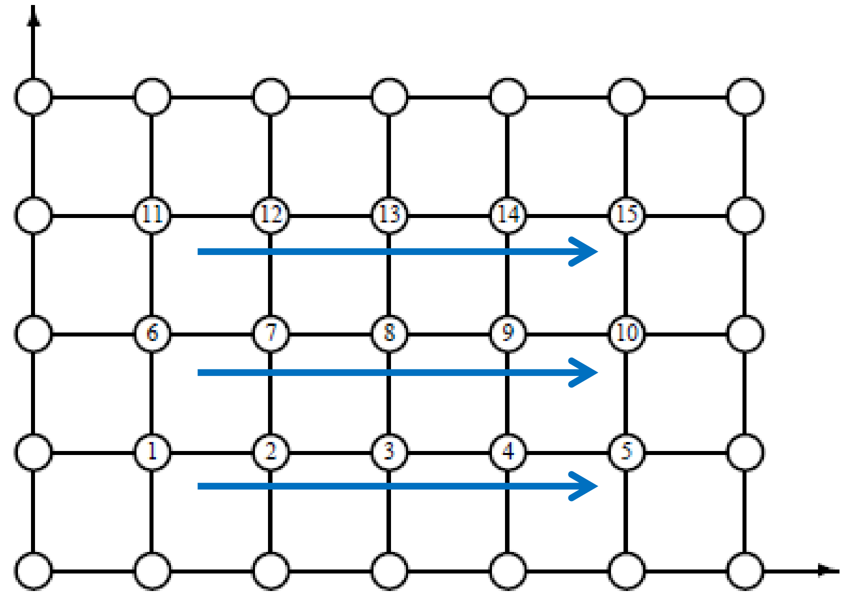
Внутренние узлы сетки перечислены в порядке, соответствующем их расположению вдоль оси изменения координаты *x*.

Тогда систему разностных уравнений можно записать в матричном виде

$$\mathbf{AU} = \mathbf{F}$$

F – вектор значений функции *f(x,y)* во внутренних узлах сетки, выстроенный аналогично **U**

A – матрица коэффициентов: имеет 5 диагоналей.



Матрица СЛАУ

Например, для n = 6, m = 5 с учетом исключения граничных точек индексы будут меняться в диапазоне $i = 1 \ldots 5$, $j = 1 \ldots 4$ и система будет иметь вид:

α	β				γ																$U_{1,1}$		$f'_{1,1}$
β	α	β				γ															$U_{2,1}$		$f'_{2,1}$
	β	α	β				γ														$U_{3,1}$		$f'_{3,1}$
		β	α	β				γ													$U_{4,1}$		$f'_{4,1}$
			β	α					γ												$U_{5,1}$		$f'_{5,1}$
γ					α	β				γ											$U_{1,2}$		$f'_{1,2}$
	γ				β	α	β				γ										$U_{2,2}$		$f_{2,2}$
		γ				β	α	β				γ									$U_{3,2}$		$f_{3,2}$
			γ				β	α	β				γ								$U_{4,2}$		$f_{4,2}$
				γ				β	α					γ						×	$U_{5,2}$	=	$f'_{5,2}$
					γ					α	β				γ						$U_{1,3}$		$f'_{1,3}$
						γ				β	α	β				γ					$U_{2,3}$		$f_{2,3}$
							γ				β	α	β				γ				$U_{3,3}$		$f_{3,3}$
								γ				β	α	β				γ			$U_{4,3}$		$f_{4,3}$
									γ				β	α					γ		$U_{5,3}$		$f'_{5,3}$
										γ					α	β					$U_{1,4}$		$f'_{1,4}$
											γ				β	α	β				$U_{2,4}$		$f'_{2,4}$
												γ				β	α	β			$U_{3,4}$		$f'_{3,4}$
													γ				β	α	β		$U_{4,4}$		$f'_{4,4}$
														γ				β	α		$U_{5,4}$		$f'_{5,4}$

$$\alpha = -2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{h_x^2}$$

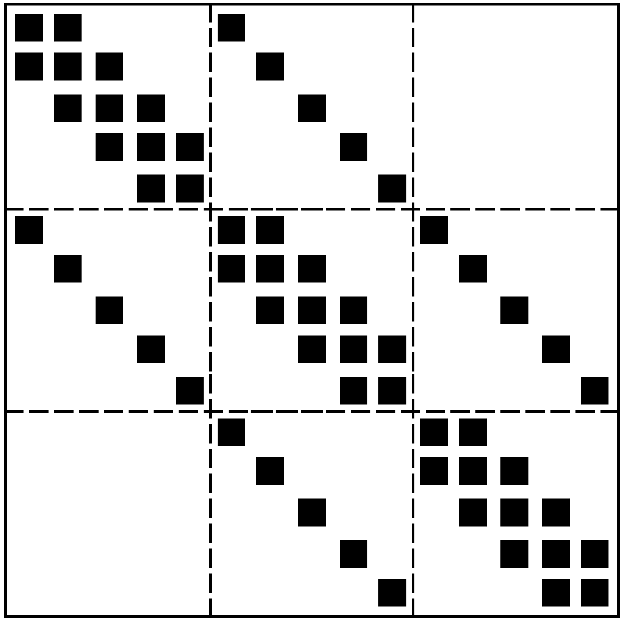
$$\gamma = \frac{1}{h_y^2}$$

f – правая часть основного уравнения

f' – правая часть с учетом граничных условий

Матрица СЛАУ

Общий вид матрицы:



Полученную матрицу можно представить в блочно-трехдиагональном виде:

$$A = \begin{pmatrix} -B & C & \\ C & -B & C \\ & C & -B \end{pmatrix}$$

где B – трехдиагональная матрица,
C – диагональная матрица.

При решении полученной СЛАУ можно использовать, например, блочную трехдиагональную прогонку*.

*Самарский А.А. и др. Методы решения сеточных уравнений. Глава II, § 4

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Задача Дирихле для уравнения Пуассона с постоянными коэффициентами

Рассматривается частный случай уравнения (1) – уравнение Пуассона с постоянными коэффициентами:

$$a(x,y) = b(x,y) = 1,\ c(x,y) = 0. \qquad (3)$$

Задача 1 (2 балла)

1. Написать вычислительную программу на языке программирования С++ решения задачи (1)-(3) с использованием конечно-разностной схемы с шаблоном «крест» на сетке с постоянными шагами и по направлениям x и y, удовлетворяющих соотношению: $\dfrac{h_x}{h_y} = \dfrac{l_x}{l_y}.$
2. Для решения получающейся СЛАУ использовать метод простых итераций. При этом матрица системы не должна храниться в памяти.
3. Исследовать зависимость погрешности решения от величины шагов сетки и построить соответствующие графики. Погрешность оценивать в равномерной норме.
4. Исследовать зависимости числа итераций от шага сетки.

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Задача Дирихле для уравнения Пуассона с постоянными коэффициентами

Рассматривается частный случай уравнения (1) – уравнение Пуассона с постоянными коэффициентами:

$$a(x,y) = b(x,y) = 1,\ c(x,y) = 0. \qquad (3)$$

Задача 2 (2 балла)

Решить задачу 1 с использованием для решения СЛАУ метод SOR. Параметр релаксации либо выбирается фиксированным, либо используется формула для оптимального значения.

Задача 3 (2 балла)

Решить задачу 1 с использованием для решения СЛАУ любой точный метод (Гаусса, LU-разложение, блочно-диагональная прогонка). В данной задаче матрицу системы можно хранить целиком в памяти, желательно только ненулевые диагонали*.

*Можно посмотреть способы хранения матрицы в LW_OverRelaxation.pdf

Порядок выполнения работы

УГАТУ

II Решение задачи с переменными коэффициентами

Рассматривается задача Дирихле (1) – (2) для линейного двумерного неоднородного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами.

Задача 4 (4 балла)

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(2) с параметрами, заданными функционально согласно варианту, методом переменных направлений.
2. Исследовать зависимость погрешности получаемого решения от величины шага сетки, построить соответствующие графики.

*Самарский А.А. и др. Методы решения сеточных уравнений. Глава XI, § 4