Лабораторная работа № 4

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Цель работы: получить навык численного решения краевых задач для уравнений гиперболического типа на примере начально-краевой задачи для линейного одномерного уравнения переноса и линейного одномерного неоднородного волнового уравнения.

Место для уравнения.

Задания на лабораторную работу

I. Начально-краевая задача для уравнения переноса

Рассматривается простейшая линейная одномерная задача для уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad x \in (a,b), t > 0, t < T; \qquad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [a,b]; \qquad (2)$$

$$u(t,a) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \qquad (3)$$

Параметры задачи выбираются в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 1). Начальное и граничные условия, а также функция $f(x,t)$ восстанавливаются по заданному точному решению.

Задача 1 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования С++ решения задачи (1)-(3) с использованием явной конечно-разностной схемы с шаблоном «левый уголок» на равномерной пространственно-временной сетке.
2) Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
3) Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики зависимости погрешности, оцениваемой в равномерной норме по пространственной переменной, от времени и шагов сетки.

Задача 2 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(3) с использованием неявной конечно-разностной схемы с шаблоном «левый уголок» (схема «бегущего счета») на равномерной пространственно-временной сетке.
2) Выполнить сравнение точности получаемого решения по двум схемам с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.

Индивидуальные задания к задаче 1

Таблица 1

№	a	b	T	c	Точное решение $u(x,t)$ ЭТО НЕ $f(x,t)$
1	0	5	2	3	$\frac{3}{16}\sin(x+t)-\frac{1}{4}\cos(x+t)\,x-\lvert 3t-x\rvert$
2	0	5	3	1	$t-\sin(t-x)\,,x<1,$ $t+1-x-\sin(t-x)\,,x\geq 1$
3	0	5	5	1	$e^{x-5}+e^{-9(x-t-1)^2}$
4	0	4	3	1	$-\frac{1}{5}\cos(5t)+e^{-9(x-t-1)^2}$
5	0	4	3	2	$\cos\big(\pi(x-2t)\big)+1\,,x<2$ $0,x<2t$
6	0	2	3	1	$-e^{-t}+\sin(x-t)+\cos(5x-5t)$
7	0	2	10	1	$\frac{1}{6}\sin(t+5x)+\sin(x-t)$
8	0	1	2	3	$t^3-t^2x+\sin(3x-9t)$
9	0	2	3	1	$1+tx-e^{x-t-1}$
10	0	2	2	1	$\frac{t^2}{2}+\sin(x-t)+e^{-9(x-t)^2}$

II. Начально-краевая задача для волнового уравнения

Рассматривается начально-краевая задача для линейного одномерного волнового уравнения с источником:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad x \in (0,1), t > 0; \tag{5}$$

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{6}$$

$$u_t{}'(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{7}$$

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \tag{8}$$

$$\alpha_1 u(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) = \psi_1(t), \qquad t > 0. \tag{9}$$

Параметры задачи выбираются в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 2). Аналитическое решение задачи строится по формуле Даламбера для всей оси x, функции $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ вычисляются по аналитическому решению для заданного в таблице вида граничных условий.

Задача 3 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования С++ решения задачи (5)-(9) с использованием явной разностной схемы на равномерной пространственно-временной сетке.
2) Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
3) Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.

Задача 4 (2 балла).

4) Написать вычислительную программу на языке программирования С++ решения задачи (5)-(9) с использованием неявной разностной схемы с весами на равномерной пространственно-временной сетке.
5) Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
6) Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.

Задача 5 (2 балла).

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (5)-(9) по схеме повышенного порядка аппроксимации на равномерной сетке.
2) Выполнить сравнение точности получаемого решения с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.

Индивидуальные задания к задаче 2

Таблица 2

№ в-та	a^2	$f(t,x)$	$\varphi_0(x)$	$\varphi_0(x)$	Граничные условия
1	*1*	6	x^2	$4x$	$u(t,0), u_x(t,1)$
2	*4*	xt	x^2	x	$u_x(t,0), u(t,1)$
3	*1*	$\sin x$	$\sin x$	0	$u_x(t,0), u(t,1)$
4	*1*	e^x	$\sin x$	$x+\cos x$	$u(t,0), u(t,1)$
5	*9*	$\sin x$	1	1	$u_x(t,0), u(t,1)$
6	*4*	$\sin 3x$	0	0	$u_x(t,0)$, $(u-u_x)u(t,1)$
7	*1*	$\sin 2t$	0	0	$(u-u_x)(t,0)$ $u_x(t,1)$
8	*1*	6	x^2	$4x$	$u_x(t,0), u(t,1)$
9	*4*	xt	x^2	x	$u(t,0), u_x(t,1)$
10	*1*	$\sin x$	$\sin x$	0	$u(t,0), u_x(t,1)$
11	*1*	e^x	$\sin x$	$x+\cos x$	$u_x(t,0), u(t,1)$
12	*9*	$\sin x$	1	1	$u_x(t,0), u(t,1)$
13	*4*	$\sin 3x$	0	0	$u_x(t,0), u(t,1)$
14	*1*	$\sin 2t$	0	0	$(u+u_x)(t,0)$, $u(t,1)$
15	*1*	$\sin 2x$	0	0	$u_x(t,0), u(t,1)$

Теоретическая часть

Номер задачи	*Литература*
1	[1] глава X, §1, п.1,2 [2] Гл.V §5 п.1,3
2	[1] глава X, §1, п.1,2 [2] Гл.V §5 п.3
3	[1] глава XIII, §1, п.2 [2] Гл.V §6 п.1
4	[2] Гл.V §6 п.1

1. Калиткин Н.Н. Численные методы.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем

По каждой решенной задаче в обязательном порядке оформляется отчет. Лабораторная работа считается выполненной, если набрано 6 и более баллов.