УГАТУ

Лабораторная работа №2

Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

Лабораторная работа №2

Цель работы: получить навык численного решения линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнений параболического типа с использованием различных конечно-разностных схем на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности с источником.

Начально-краевая задача

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(t,x,u), \quad x \in (0,1), t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1]; \tag{2}$$

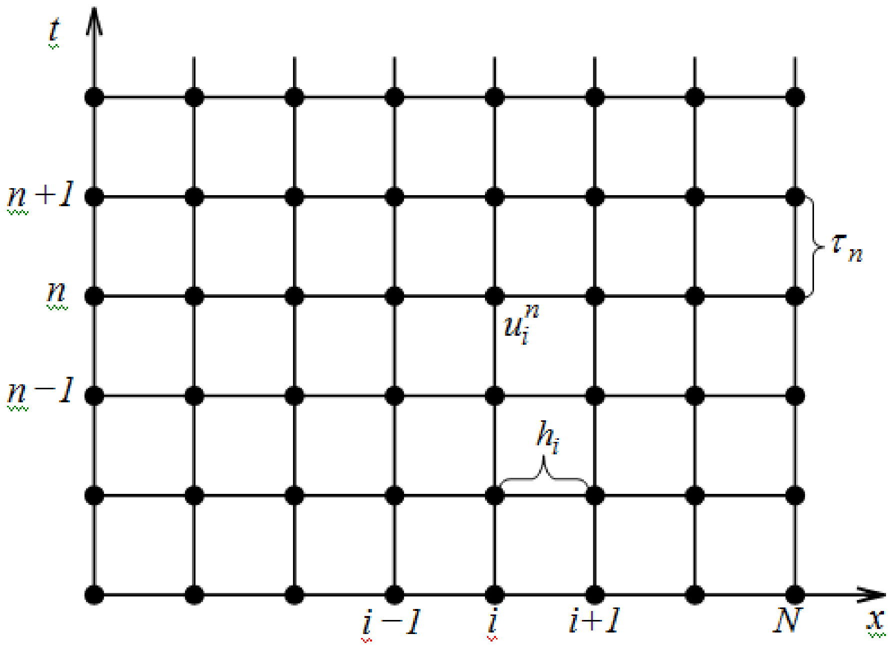
$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \tag{3}$$

$$\alpha_1 u(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) = \psi_1(t), \qquad t > 0. \tag{4}$$

Разностная задача

УГАТУ

Разностная задача строится с целью нахождения сеточной функции y^n_i, близкой к решению соответствующей дифференциальной задачи в некоторой норме.

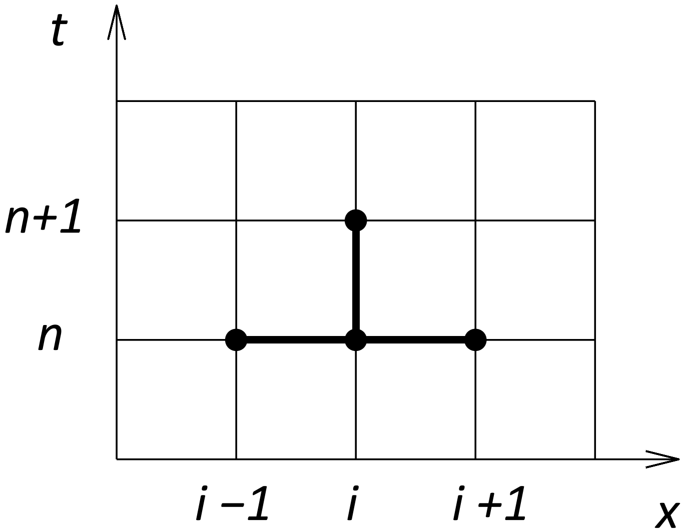


Правило написания разностных уравнений и дополнительных условий (начальных, краевых) называется разностной схемой.

Центрально-разностная явная схема

Центрально-разностная схема характеризуется наличием в разностном уравнении узловых точек с индексами *i - 1* и *i + 1*.

Явная схема позволяет вычислить значения в узловых точках на *n + 1* временном слое по явной формуле
 - без решения СЛАУ.



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\tau} = a\,\frac{u_{i-1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i+1}^{n}}{h^2}$$

Порядок аппроксимации схемы: O(τ + h^2),

т.е. первый по времени и второй по пространству.

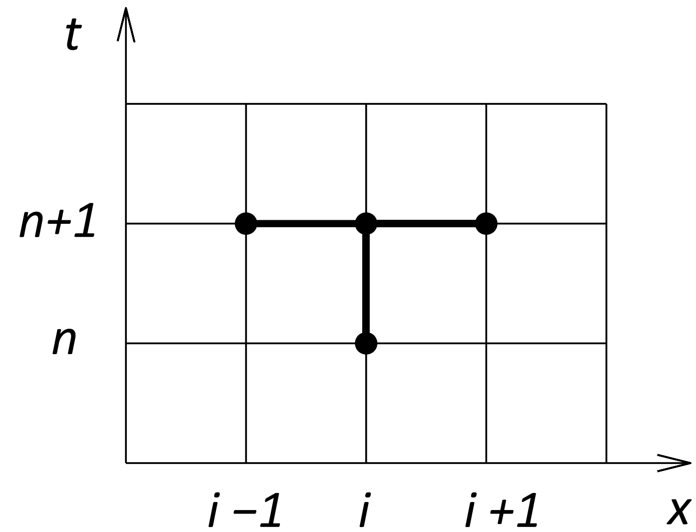
Особенностью подобных схем является преимущественно ***условная устойчивость***, то есть наличие ограничения на размер дискретных шагов по времени и пространству.

Для приведённого примера: $\dfrac{\alpha\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{2}$

Неявная конечно-разностная схема

Характерной особенностью неявных схем является наличие в разностном уравнении нескольких неизвестных (искомых величин с индексом *n + 1*).

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=a\,\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$



Для вычисления значений в узловых точках на *n + 1* временном слое требуется решить СЛАУ.

Как правило, неявные схемы **абсолютно устойчивы**.

Порядок аппроксимации схемы такой же, как и в случае явной схемы: $O(\tau + h^2)$

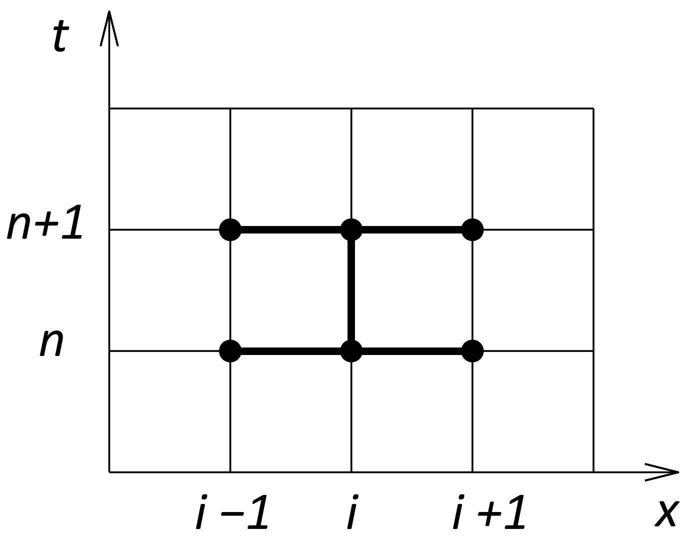
Схема Кранка – Николсон

Схема Кранка – Николсон предполагает при записи конечно-разностных соотношений использовать узловые точки сразу с двух временных шагов.

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{a}{2}\,\frac{u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^n - 2(u_i^{n+1} + u_i^n) + u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n}{h^2}$$

Такой подход приводит к увеличению порядка аппроксимации по времени: $O(\tau^2 + h^2)$



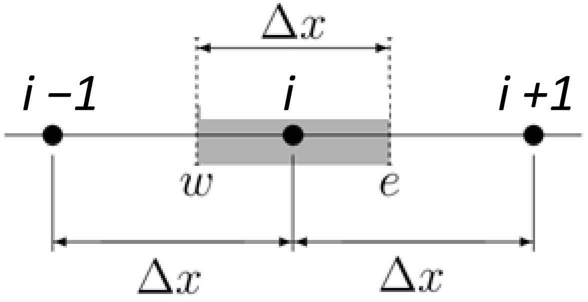
Схемы Кранка – Николсон обычно являются абсолютно устойчивыми.

Консервативная схема

Консервативная конечно-разностная схема строится на основе законов сохранения, следствием которых является уравнение в частных производных.

Закон сохранения записывается для некоторого контрольного объёма, окружающего узел сетки, а затем записывается математически с учётом дискретной сетки.

В одномерном случае производим интегрирование уравнения теплопроводности по пространству от *w* до *e* (по отрезку Δx) и по времени от t до $t + \Delta t$, а затем заменяем интегралы их разностными аналогами.



Консервативная схема

Рассмотрим уравнение без источника (*f = 0*). Проинтегрируем уравнение:

$$\int_w^e \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right) dt$$

Интегрирование левой части даёт $\Delta x (u_i^{n+1} - u_i^n)$

Интегрирование правой части сначала приводит к уравнению

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[k_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - k_w \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt$$

При предположении о кусочно-линейном профиле функции на границе контрольного объема правая часть принимает вид

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[k_e \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - k_w \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right] dt$$

Консервативная схема

Предположим, что

$$\int_{t}^{t+\Delta t} u_i dt = \left(\gamma u_i + (1-\gamma) u_i^0\right)\Delta t,$$

где $\gamma \in [0,1]$ – весовой коэффициент.

С учётом сказанного дискретный аналог для уравнения теплопроводности без источника записывается в виде:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) = \gamma\left[k_e \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} - k_w \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right] + (1-\gamma)\left[k_e \frac{u_{i+1}^{n} - u_i^{n}}{\Delta x} - k_w \frac{u_i^{n} - u_{i-1}^{n}}{\Delta x}\right].$$

Весовой коэффициент определяет уровень явности численной схемы:

при $\gamma = 0$ – полностью явная разностная схема;

при $\gamma = 0.5$ – полуявная схема Кранка – Николсон;

при $\gamma = 1$ – полностью неявная схема.

Консервативная схема

УГАТУ

Нелинейные коэффициенты рассчитываются не в узлах сетки, а в так называемых полуцелых точках (*i + 0.5, i - 0.5*).

Расчет нелинейных коэффициентов:

- по значениям функции с предыдущего временного слоя

$$k_e = k\left(\frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}\right), \quad k_w = k\left(\frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2}\right)$$

- по значениям функции с текущего временного слоя

$$k_e = k\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1}}{2}\right), \quad k_w = k\left(\frac{u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2}\right)$$

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности

$$k(u) = k_0 = const, \qquad f(t,x,u) = f(t,x). \tag{5}$$

Задача 1 (2 балла)

1. Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.
2. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1) – (5) с использованием **явной разностной схемы** на равномерной пространственно-временной сетке.
3. Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
4. Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики зависимости погрешности, оцениваемой в равномерной норме по пространственной переменной, от времени и шагов сетки.

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности

$$k(u) = k_0 = const, \qquad f(t,x,u) = f(t,x). \tag{5}$$

Задача 2 (4 балла)

1. Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.
2. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1) – (5) по **полностью неявной схеме** и **схеме Кранка – Николсон** на равномерной сетке.
3. Выполнить сравнение точности получаемого решения по двум схемам с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.
4. Сравнить время решения задач по трем схемам (явной, полностью неявной и Кранка – Николсон), обеспечивающих получение решения с одинаковым уровнем погрешности.

Порядок выполнения работы

II Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1) – (4) с дополнительными исходными данными *k(u) и F(u)*, где $f(t,x,u) = F(u)f(t,x)$.

Задача 3 (2 балла)

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(4) с использованием **неявной консервативной схемы** на равномерной сетке.
2. Убедиться в корректности программы на примере задачи 1.
3. Решить нелинейную задачу, рассчитывая значения коэффициентов теплопроводности в полуцелых точках с предыдущего временного шага.
4. Исследовать зависимость получаемого решения от величины шага сетки по пространственной и временной переменным. Построить графики решений для различных значений шага.

Порядок выполнения работы

УГАТУ

II Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1) – (4) с дополнительными исходными данными $k(u)$ и $F(u)$, где $f(t,x,u) = F(u)f(t,x)$.

Задача 4 (2 балла)

1. Выполнить модификацию программы из задачи 3 путем организации внутренних итераций на каждом временном шаге для повышения точности вычисления нелинейных слагаемых:
   - значения коэффициентов теплопроводности в полуцелых точках рассчитываются на текущем временном шаге методом последовательных приближений;
   - условием остановки итерационного процесса является достижение заданного преподавателем уровня погрешности вычислений нелинейных функций.
2. Выполнить сравнение получаемых решений по исходной и модифицированной программам.
3. Сравнить время работы двух программ для построения решений с одинаковым уровнем погрешности.