Semana 2

Sistema Electrónico Digital

Unidad 2

Métodos para el análisis y síntesis de circuitos lógicos

2. Métodos para el análisis y síntesis de circuitos lógicos

El álgebra de Boole fue creada por George Boole, por lo que dicha disciplina lleva su nombre. El objetivo de Boole era describir las operaciones mentales mediante las cuales se realizan razonamientos.

En 1938, Claude Elwood Shannon (matemático, ingeniero eléctrico y criptógrafo) empleó el álgebra de Boole en circuitos de conmutación con el objetivo de describir la conducta de circuitos digitales a través de un álgebra binaria.

El álgebra de Boole es una estructura algebraica compuesta por un conjunto B de dos elementos y dos operaciones binarias, en donde se cumplen los axiomas de clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad, identidad y complementariedad.

2.1 Álgebra de Boole

Como ya vimos en el apartado introductorio, el álgebra de Boole cumple varios axiomas, que definiremos matemáticamente en las siguientes secciones.

El álgebra de Boole es un sistema algebraico cerrado que contiene un conjunto B de dos elementos, {0, 1}; y dos operadores { · , + }. Los operadores también suelen representarse según: {AND, OR}.

Con base en esta definición, se cumplen los siguientes axiomas y postulados:

Axioma de clausura. Si a y b pertenecen a B, entonces $a \cdot b$ y $a+b$ también corresponden a B.

Axioma de igualdad. Dos expresiones son iguales si una puede ser sustituida por la otra.

Axioma de elementos únicos. Existen elementos únicos (0 y 1) en B, por tanto, para cada a en B se tienen:

$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$

Axioma de conmutatividad. Si a y b pertenecen a B:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Axioma de asociatividad. Si a, b y c pertenecen a B:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Axioma de distributividad. Si a, b y c pertenecen a B:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Axioma de complementariedad. Si a pertenece a B, existe un complemento único de a que se representa por a’ y también por ā:

$$a + a' = 1$$
$$a \cdot a' = 0$$

Al complemento único de a se le puede representar, según convenga, por medio de a' y not a. Asimismo, a dicho complemento también se le denomina elemento opuesto.

De acuerdo con Agustín Olivier (2002), con los postulados anteriores se pueden demostrar las identidades del álgebra de Boole que se describen en la tabla 1 y también mediante la teoría de conjuntos.

Tabla 1. Identidades del álgebra de Boole.

Suma Lógica	Multiplicación Lógica	Complemento
0 + 0 = 0	0 . 0 = 0	$\overline{0} = 1$
0 + 1 = 1	0 . 1 = 0	$\overline{1} = 0$
1 + 0 = 1	1 . 0 = 0	$\overline{x} = \overline{\overline{\overline{x}}}$
1 + 1 = 1	1 . 1 = 1	$\overline{\overline{x}} = x$

$x + 0 = x$	$x \cdot 0 = 0$	
$x + 1 = 1$	$x \cdot 1 = x$	
$x + x = x$	$x \cdot x = x$	
$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$	

Fuente: Olivier (2002, p. 57).

2.2. Funciones lógicas y expresiones booleanas

Las funciones lógicas o funciones booleanas son aquellas que cumplen con los axiomas y postulados de Boole; en cambio, las expresiones booleanas son operaciones con variables que se rigen por el álgebra de Boole.

La salida de un sistema digital combinacional puede describirse a través de una función booleana, aplicada a sus variables de entrada. Es decir, las salidas de una red combinacional dependen solamente de sus entradas (y no de otros factores). De hecho, un sistema digital combinacional se define de esa forma.

Definiciones

a) Una variable booleana es un símbolo, que puede ser sustituido por un elemento del conjunto B={0,1}, y una constante booleana es un valor perteneciente al conjunto {0,1}.
b) El valor de la variable (del punto anterior) es el elemento que es sustituido por el símbolo de la variable.
c) Una función booleana de n variables f(x1, x2, x3, ..., xn) es un mapeo o correspondencia que asocia un valor booleano a f, con cada una de las posibles combinaciones de valores que pueden tomar las variables.
d) Una expresión o fórmula booleana queda definida por reglas o pautas recurrentes.
   a. Constantes y variables son expresiones.
   b. Si x e y son expresiones, por ende, x+y, x·y, x', y', (x) también son expresiones.
e) Una función booleana es una función $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, para la cual existe una expresión $E(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, por lo que:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = E(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \textbf{(1)}$$

f) Un literal es el símbolo empleado para una variable o su complemento.
g) Dos expresiones son equivalentes si una puede ser obtenida a partir de la otra, mediante un número finito de aplicaciones de los postulados o teoremas, o bien, si tienen las mismas tablas de verdad.
h) Suelen emplearse dos tipos restringidos de expresiones:

La siguiente sintaxis muestra la formación de expresiones como suma de productos.

- Una expresión es un OR de sus términos.
- Un término es el AND de sus factores.
- Un factor es una constante, variable o variable complementada.
- Ejemplo: 0 + a + 1bc + d’ + a’cde

La siguiente sintaxis, muestra la formación de expresiones como producto de sumas.

- Una expresión es un AND de sus términos entre paréntesis.
- Un término es el OR de sus factores.
- Un factor es una constante, variable o variable complementada.
- Ejemplo: a(1) · (c+d’+0) · (a + b + c + e’)

Los operadores lógicos de la lógica booleana de primer orden son la negación (operación de aridad 1, es decir, con un solo operando), la conjunción y la disyunción (operaciones de aridad 2, en otras palabras, con dos operandos). Estos operandos lógicos corresponden a las palabras “no” (negación), “y” (conjunción o multiplicación), “o” (disyunción o suma).

Para el caso de lógica, los valores corresponden a verdadero o falso, y se mapean en la electrónica digital como 1 o 0, respectivamente.

Las tablas de verdad de estos operadores se muestran en las figuras 1, 2 y 3:

Negación

A	A’
1	0
0	1

Figura 1. Tabla de verdad de la negación.

Conjunción (Multiplicación o "Y")

La conjunción es un operador, que actúa sobre dos valores de verdad, normalmente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad verdadero cuando ambas proposiciones son verdaderas, y falso en cualquier otro caso.

En términos más simples, será verdadera cuando las dos proposiciones son verdaderas.

A	B	A·B ($A \wedge B$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 2. Tabla de verdad de la conjunción.

Disyunción (Suma u "O")

La disyunción es un operador lógico que actúa sobre dos valores de verdad, generalmente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad verdadero cuando una de las proposiciones es verdadera o cuando ambas lo son, y falso cuando ambas son falsas. En términos más simples, será verdadera cuando por lo menos una de las proposiciones es verdadera; de lo contrario, será falsa.

A	B	A+B ($A \vee B$)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 3. Tabla de verdad de la disyunción.

Espacios y funciones booleanas

Se define el espacio booleano como B = {0, 1}. Ahora bien, mediante el producto cartesiano podemos determinar el espacio B^2:

$B^2 = \{0,1\} X \{0, 1\} = \{ (00), (01), (10), (11) \}$ **(2)**

Para x = (x1, x2), es posible definir una función booleana f de dos variables:

$f(x) = B^2 \to B$ **(3)**

Es decir, cada punto del espacio B^2 se mapea a un punto del espacio B.

Para n variables booleanas, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ se define una función f:

$f(x) = B^n \to B$ **(4)**

Para cada punto de B^n la función f (x) asigna un elemento de B; la función booleana puede tomar valores 1 o 0, dependiendo de los valores individuales de las variables.

El conjunto uno ("on") se define como los puntos de B^n que se mapean a 1:

$f^1 = f^{-1}(1) = x \mid f(x) = 1$ **(5)**

El conjunto cero ("off") se define como los puntos de Bn que se mapean a 0:

$f^0 = f^{-1}(0) = x \mid f(x) = 0$ **(6)**

Si $f1$ = Bn se dice que es una tautología. Por tanto, se anota $f = 1$.

Si $f^0 = B^n$ se tiene que f^1 es vacío y se dice que f no se puede satisfacer. En lógica, la expresión asociada a la función se llama contradicción.

Una función se puede satisfacer cuando existe al menos un elemento en el conjunto uno, en otras palabras, al menos para una combinación de las entradas la función toma valor verdadero.

Dos funciones f y g son equivalentes si para todo $x \in B^n$ se tiene:

$f(x) = g(x)$ **(7)**

Representación de funciones booleanas

Las funciones booleanas se representan mediante expresiones y tablas de verdad.

Expresiones

Una función puede ser descrita por una expresión. Por ejemplo:

f (A, B, C) = AB+ A'C + AC' **(8)**

La función puede ser evaluada para las diferentes combinaciones de valores que tomen las variables. Por ejemplo, para A = 1, B = 0 y C = 0.

$$f(1, 0, 0) = 1\cdot0 + 1'\cdot0 + 1\cdot0' = 0 + 0\cdot0 + 1\cdot1 = 1$$

Existen infinitas representaciones equivalentes de una función a través de expresiones. Esto nos lleva al problema de síntesis lógica que consiste en encontrar la "mejor" expresión para representar a una función.

La mayor ventaja de esta representación es que puede ser muy compacta y facilita la manipulación matemática. Por tanto, representar una función en su forma más compacta se le denomina simplificación de funciones y lo veremos en el siguiente bloque.

Tablas de verdad

Una función puede ser descrita por una tabla de verdad, la cual despliega todas las posibles combinaciones de valores de las variables y el valor asociado de la función. Por ejemplo, para la expresión (8), su tabla de verdad sería la mostrada en la figura 4:

A	B	C	*f*
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Figura 4. Tabla de verdad de la función f (A, B, C) = AB+ A'C + AC'.

La fila marcada en color rojo corresponde a los valores calculados en la sección anterior: A = 1, B = 0 y C = 0, en donde la función obtiene el valor de 1.

> La mayor ventaja de la representación por tabla de verdad es que es única. Dos funciones con tablas de verdad iguales son equivalentes. Sin embargo, a medida que el número de variables aumenta su uso deja de ser práctico.

2.3. Compuertas lógicas y circuitos integrados

Las compuertas lógicas son circuitos electrónicos reales que llevan a cabo las operaciones lógicas básicas y que, al combinarlas, pueden simular el comportamiento de cualquier expresión y función lógica.

La compuerta inversor cambia el valor de la señal de entrada a su valor opuesto, tal como se muestra en la tabla de verdad de la figura 1. El símbolo de la compuerta inversor se muestra en la figura 5.

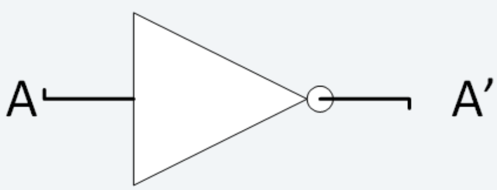
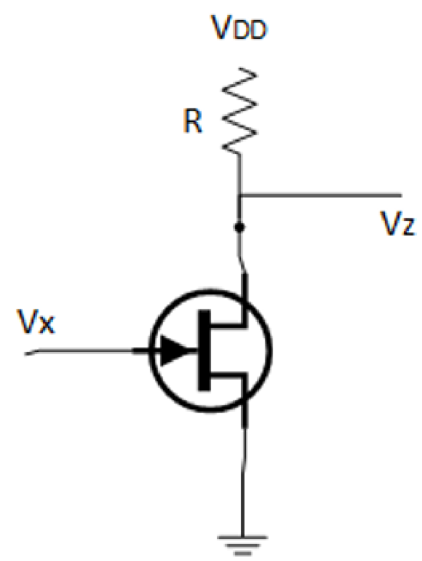


Figura 5. Compuerta NOT.

Para implementar la compuerta lógica NOT o inversor, se utiliza un único transistor MOSFET que actúa sobre la tensión de entrada, produciendo una única tensión de salida. Si consideramos los dos posibles valores de tensión a la salida con el interruptor abierto (Vx=0) o cerrado (Vx= tensión alta), podemos ver cómo la relación entre las tensiones a la entrada y a la salida es la que existe entre el operando y el resultado de la operación booleana negación lógica.

El estudio de los transistores MOSFET es propio de materias de electrónica analógica, por lo que se muestra el circuito de la compuerta lógica NOT, solo con fines complementarios en la figura 6.



Vx	Vz
1	0
0	1

Figura 6. Implementación de la compuerta NOT con un transistor MOSFET. Fuente: Elaboración propia.

La compuerta lógica AND (o Y) se comporta como la operación booleana de multiplicación, o bien, la conjunción en términos de lógica. Su símbolo se representa en la figura 7.

Figura 7. Símbolo de la compuerta lógica AND.

La tabla de verdad de la compuerta lógica AND es la misma que la tabla de verdad de la conjunción de la figura 2. Su implementación con transistores MOSFET (tema estudiado en Electrónica analógica) se muestra en la figura 8.

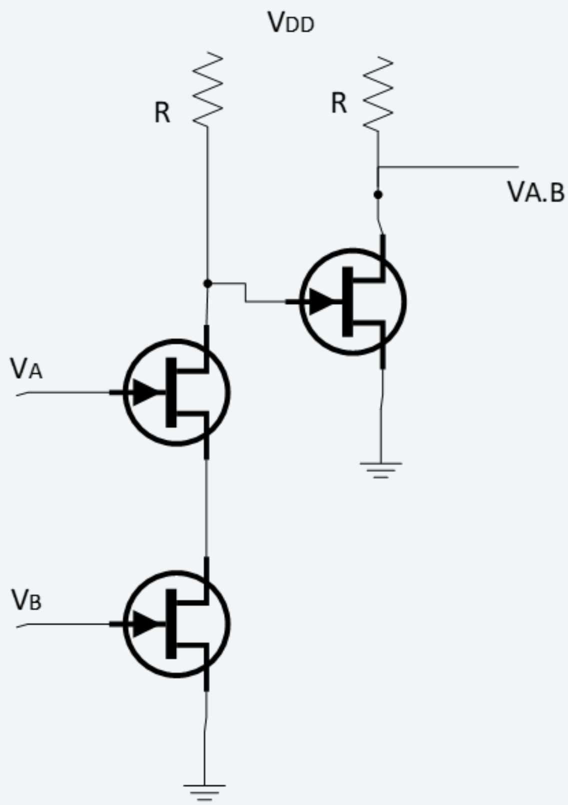


Figura 8. Compuerta AND con transistores MOSFET. Fuente: Elaboración propia.

La compuerta lógica OR (u O) se comporta como la operación booleana de suma, o bien, la disyunción en términos de lógica. Su símbolo se representa en la figura 9.

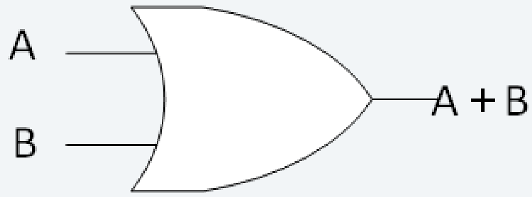
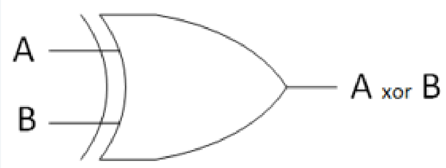


Figura 9. Compuerta lógica OR.

La tabla de verdad de la compuerta lógica AND es la misma que la tabla de verdad de la conjunción de la figura 2.

En un circuito electrónico real, el valor de “1” se representa con un voltaje, típicamente igual a 5 volts (con un margen de error de +- .3 volts), y el valor de “0” se representa con un voltaje igual a cero (con un margen de error de +- .3 volts).

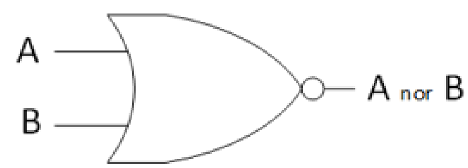
La compuerta OR exclusivo o XOR y su tabla de verdad se muestran en la figura 10.



A	B	A xor B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 10. Compuerta XOR con su tabla de verdad.

Finalmente, la compuerta NOR exclusivo o simplemente NOR y su tabla de verdad se muestra en la figura 11.



A	B	A nor B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 11. Compuerta NOR con su tabla de verdad.

Con todas las compuertas analizadas es posible implementar cualquier función booleana, incluso de varias variables como veremos en la siguiente sección.

Representación de funciones a través de circuitos con compuertas lógicas

Para implementar una función booleana mediante compuertas lógicas, empecemos por el ejemplo más sencillo posible:

Sea la función f (A, B) = A·B, su implementación en circuito digital corresponde a la figura 7.

En general, un circuito lógico es una combinación de compuertas lógicas que representan o simulan el comportamiento de una función lógica. La figura 12 muestra la representación de un circuito lógico que representa a f (A, B, C).

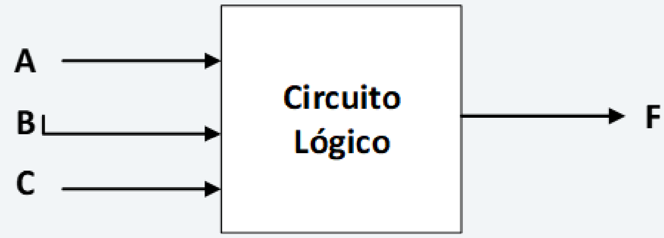


Figura 12. Circuito lógico que representa a f (A, B, C).

Ahora bien, si definimos a f (A, B, C) = AB + A'C + AC', el circuito lógico inmediato (puede haber infinitas combinaciones) sería el que se muestra en la figura 13.

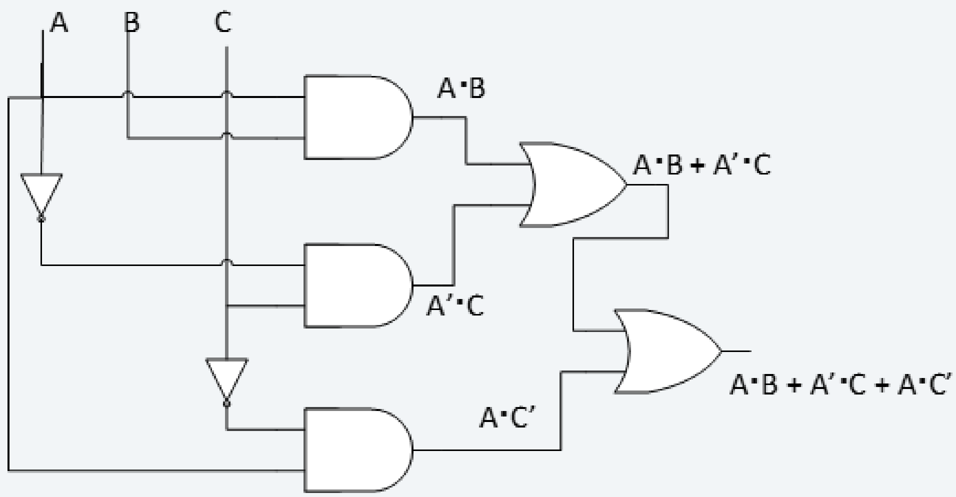


Figura 13. Implementación de a f (A, B, C) = AB + A'C + AC' que posee compuertas lógicas. Fuente: Elaboración propia.

En la vida práctica, los circuitos utilizan miles e incluso millones de compuertas lógicas para representar funciones y para funcionar como memoria, procesador o unidad aritmética lógica de las computadoras. Ahora bien, debido a los avances en electrónica y física, actualmente se utilizan los circuitos integrados.

Los circuitos integrados son circuitos comprimidos en un pastilla, normalmente fabricada con materiales semiconductores (chip), que realizan la misma función que un circuito compuesto por transistores, diodos, resistencias, etc., cuyo número puede llegar al millón de componentes.

En la figura 14 se muestra la fotografía de un circuito integrado.

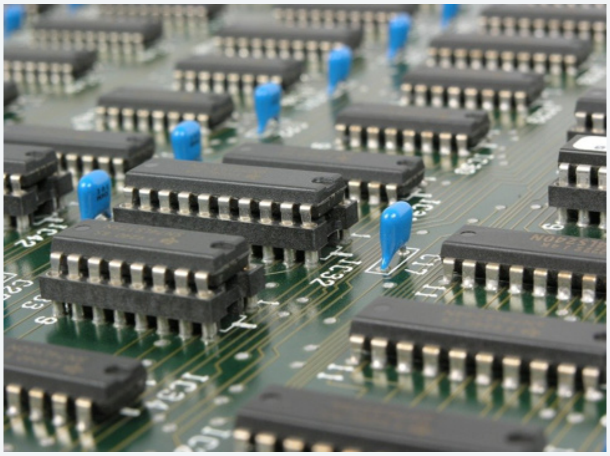


Figura 14. Circuito integrado. Fuente: CC0.

Referencias

Agustín Olivier, A. (2002). Electrónica digital combinacional. Diseño, teoría y práctica. Recuperado de https://www.academia.edu/6047555/Libro_de_electronica_digital_combinacional_diseno_teoria_y_practica