



International Baccalaureate®  
Baccalauréat International  
Bachillerato Internacional

# **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

## **Nivel superior y medio**

**Exámenes de muestra 1, 2 y 3**

**Primeros exámenes en 2021**

## **TABLA DE CONTENIDO**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 1 examen de muestra**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 1 esquema de calificación**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 2 examen de muestra**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 2 esquema de calificación**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 3 examen de muestra**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel superior**  
**prueba 3 esquema de calificación**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel medio**  
**prueba 1 examen de muestra**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel medio**  
**prueba 1 esquema de calificación**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel medio**  
**prueba 2 examen de muestra**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación nivel medio**  
**prueba 2 esquema de calificación**

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación****Nivel superior****Prueba 1**

Examen de muestra

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Instrucciones para los alumnos**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



**No escriba en esta página.**

Las respuestas que se escriban en  
esta página no serán corregidas.



24EP02

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Al acabar la jornada escolar, el director del colegio hizo una encuesta entre los alumnos preguntándoles en cuántas clases habían utilizado Internet.

Los datos se muestran en la siguiente tabla.

<b>Número de clases en las que los alumnos utilizaron Internet</b>	0	1	2	3	4	5	6
<b>Número de alumnos</b>	20	24	30	$k$	10	3	1

- (a) Indique si los datos son discretos o continuos. [1]

La media del número de clases en las que un alumno dado utilizó Internet es igual a 2.

- (b) Halle el valor de  $k$ . [4]

No era posible encuestar a todos los alumnos del colegio, así que el director hizo una lista con los nombres de todos los alumnos, por orden alfabético, y luego encuestó solo a cada 10.<sup>a</sup> persona de la lista (saltándose las 9 que hay en medio).

- (c) Identifique la técnica de muestreo que se utilizó en la encuesta. [1]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

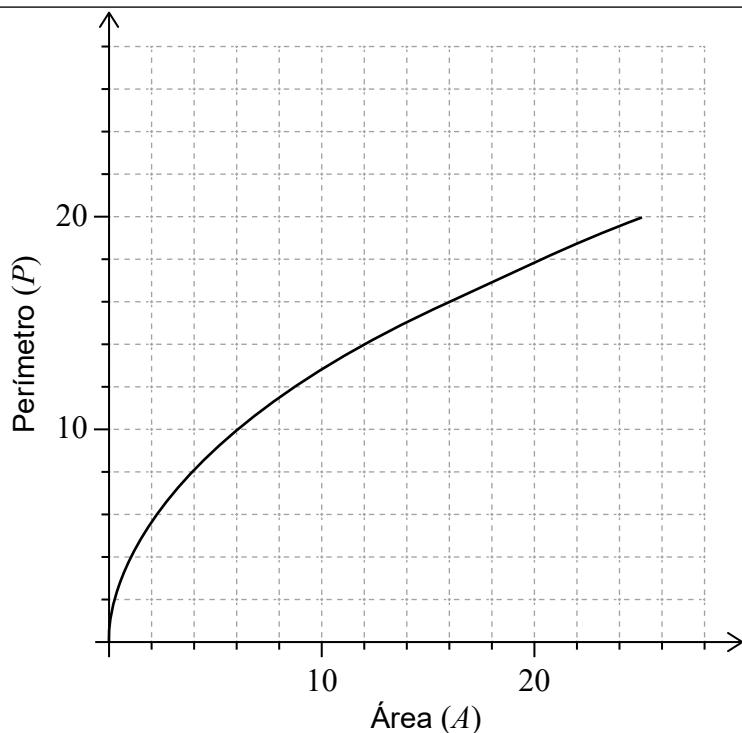


24EP03

Véase al dorso

**2.** [Puntuación máxima: 5]

El perímetro del cuadrado  $P$  se puede representar mediante la función  $P(A) = 4\sqrt{A}$ ,  $A \geq 0$ , donde  $A$  es el área del cuadrado. El gráfico de la función  $P$  se muestra para  $0 \leq A \leq 25$ .



- (a) Escriba el valor de  $P(25)$ . [1]
- (b) En estos mismos ejes de coordenadas dibuje con precisión el gráfico de la función inversa  $P^{-1}$ . [3]
- (c) En el contexto de la pregunta, explique el significado de  $P^{-1}(8) = 4$ . [1]



## 3. [Puntuación máxima: 6]

El catedrático Vinculum investigó la temporada de migración del ave bulbul, desde los humedales que constituyen su hábitat natural a un clima más templado.

Halló que durante la temporada migratoria la población ( $P$ ) de estas aves está modelada por  $P = 1350 + 400(1,25)^{-t}$ ,  $t \geq 0$ , donde  $t$  es el número de días transcurridos desde el comienzo de la temporada migratoria.

- (a) Halle la población de bulbules,
  - (i) al inicio de la temporada migratoria.
  - (ii) en los humedales cuando han transcurrido 5 días. [3]
  
- (b) Calcule el tiempo que tarda la población en descender por debajo de los 1400 ejemplares. [2]
  
- (c) Conforme a este modelo, halle cuál es el valor mínimo de la población de bulbules durante la temporada migratoria. [1]



24EP05

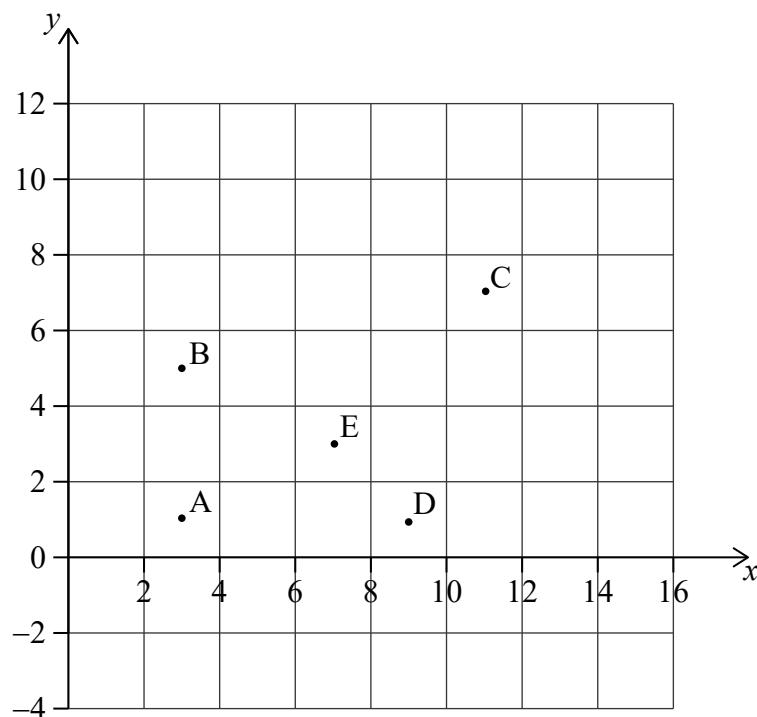
Véase al dorso

**4. [Puntuación máxima: 6]**

Los puntos A(3, 1), B(3, 5), C(11, 7), D(9, 1) y E(7, 3) representan los refugios que hay en el Parque Nacional Blackburn para resguardarse en caso de nevada. Estos refugios aparecen representados en los siguientes ejes de coordenadas.

Escala horizontal: 1 unidad representa 1 km.

Escala vertical: 1 unidad representa 1 km.



- (a) Calcule la pendiente del segmento de recta AE.

[2]

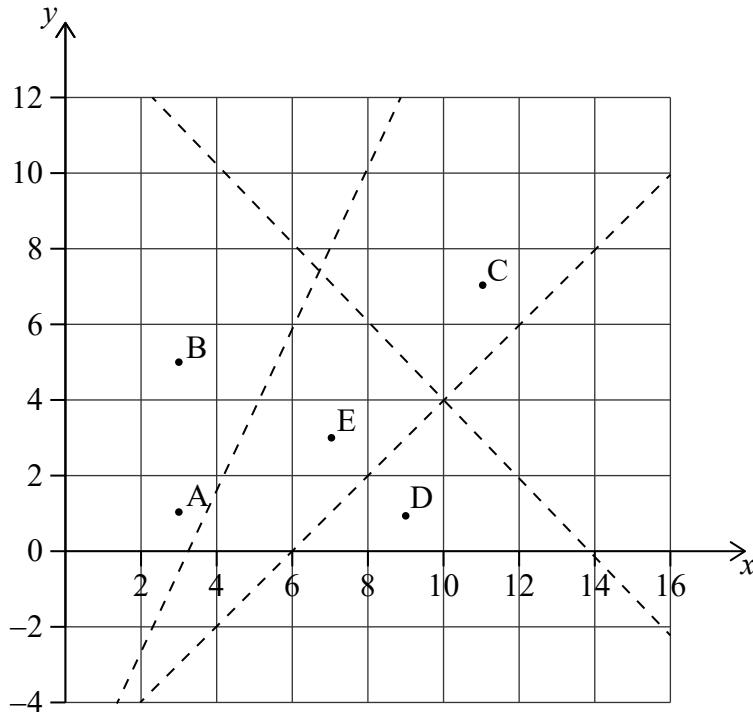
**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



24EP06

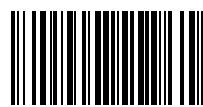
## (Pregunta 4: continuación)

El guardia forestal traza tres rectas para formar un diagrama de Voronoi incompleto.



- (b) Halle la ecuación de la recta que completaría la celda de Voronoi que contiene al sitio E. Dé la respuesta en la forma  $ax + by + d = 0$  donde  $a, b, d \in \mathbb{Z}$ . [3]
- (c) En el contexto de la pregunta, explique el significado de la celda de Voronoi que contiene al sitio E. [1]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



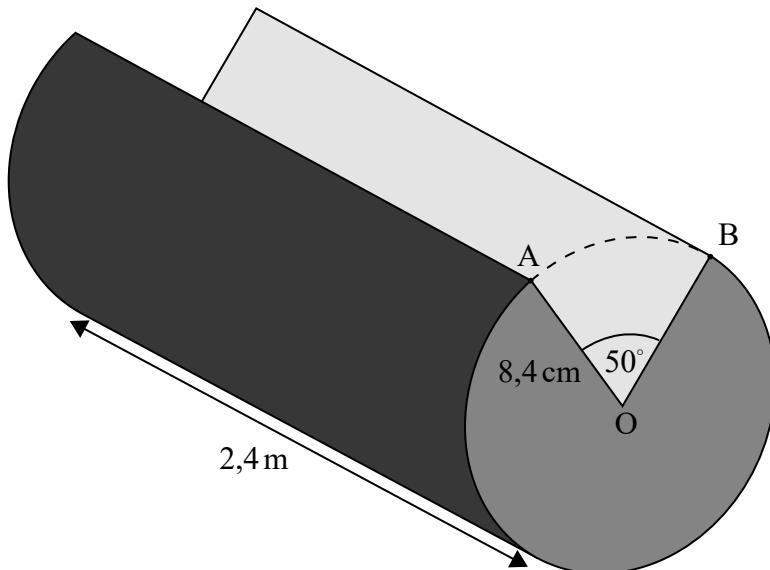
24EP07

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 5]

Helen está construyendo una cabaña, utilizando para ello troncos cilíndricos de 2,4 m de largo y 8,4 cm de radio. De uno de los troncos se corta una cuña. La siguiente figura muestra la sección transversal de este tronco.

**la figura no está dibujada a escala**



- (a) Halle  $50^\circ$  en radianes.

[1]

- (b) Halle el volumen de este tronco.

[4]



24EP08

**6.** [Puntuación máxima: 6]

Jae Hee juega a un juego con dado de seis caras no equilibrado.

Las caras del dado están rotuladas así:  $-3, -1, 0, 1, 2$  y  $5$ .

En este juego la puntuación ( $X$ ) que consigues es el número que queda hacia arriba cuando tiras el dado. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades correspondiente a  $X$ .

Puntuación $x$	$-3$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$5$
$P(X=x)$	$\frac{1}{18}$	$p$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{7}{18}$

- (a) Halle el valor exacto de  $p$ .

[1]

Jae Hee juega una vez a este juego.

- (b) Calcule la puntuación esperada.

[2]

Jae Hee juega dos veces a este juego y suma las puntuaciones obtenidas.

- (c) Halle la probabilidad de que Jae Hee obtenga una puntuación **total** de  $-3$ .

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



24EP09

Véase al dorso

7. [Puntuación máxima: 5]

Una partícula A se mueve de tal modo que su velocidad ( $v \text{ ms}^{-1}$ ) en el instante  $t$  viene dada por  $v = 2 \sin t$ ,  $t \geq 0$ .

La energía cinética ( $E$ ) de la partícula A se mide en julios (J) y viene dada por  $E = 5v^2$ .

- (a) Escriba una expresión que dé  $E$  en función del tiempo. [1]

- (b) A partir de lo anterior, halle  $\frac{dE}{dt}$ . [2]

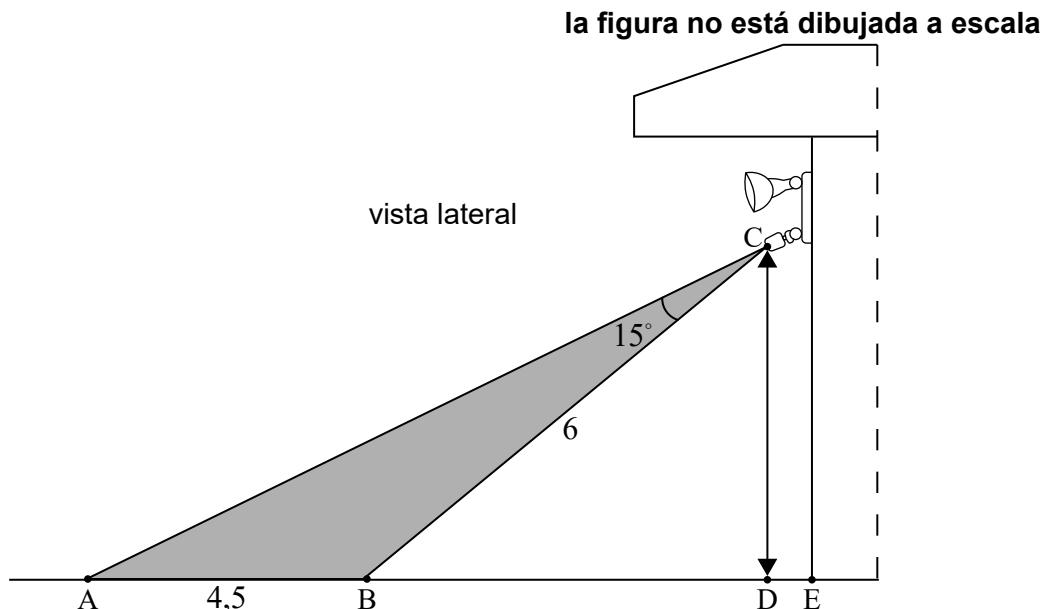
- (c) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, halle el primer instante en el que la razón de cambio de la energía cinética sea igual a  $5 \text{ Js}^{-1}$ . [2]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



## 8. [Puntuación máxima: 8]

Ollie ha instalado en la fachada lateral de su casa unas luces de seguridad que se activan mediante un sensor. El sensor está situado en el punto C, directamente encima del punto D. La región sombreada que encierra el triángulo ABC representa la zona que cubre el sensor. La distancia que hay entre A y B es igual a 4,5 m y entre B y C es igual a 6 m. El ángulo  $A\hat{C}B$  mide  $15^\circ$ .



- (a) Halle
- $C\hat{A}B$
- .

[3]

El punto B, situado a nivel del suelo, está a 5 m del punto E, que está en la entrada de la casa de Ollie. Ollie mide 1,8 m de alto y está de pie en el punto D, debajo del sensor, y empieza a caminar hacia el punto B.

- (b) Halle a qué distancia estará Ollie
- de la entrada de su casa**
- cuando active por primera vez el sensor.

[5]

.....  
 .....



24EP11

Véase al dorso

**9.** [Puntuación máxima: 5]

Un jefe quiere comprobar cuál es la media del peso de la harina que meten en sacos en su fábrica. Para ello toma una muestra aleatoria compuesta por 10 sacos y halla que la media del peso es 1,478 kg y la desviación típica de la muestra es 0,0196 kg.

- (a) Halle para esta muestra  $s_{n-1}$ . [2]
- (b) Halle un intervalo de confianza del 95 % para la media de la población, y dé la respuesta redondeando a 4 cifras significativas. [2]
- (c) En los sacos pone que contienen 1,5 kg de peso. Comente esta afirmación, haciendo referencia a la respuesta que dio en el apartado (b). [1]



**10. [Puntuación máxima: 6]**

En una cafetería dada, el tiempo que tardan en atender a un cliente que acaba de entrar sigue una distribución normal de media 1,5 minutos y desviación típica igual a 0,4 minutos.

Dos clientes entran juntos a la cafetería. Les van atendiendo de uno en uno.

Halle la probabilidad de que el tiempo total que tarden en atender a los dos clientes sea inferior a 4 minutos.

Indique claramente todas las suposiciones que haya hecho.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



24EP13

Véase al dorso

**11. [Puntuación máxima: 6]**

Una partícula P se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  en un campo magnético,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

- (a) Sabiendo que  $v$  es perpendicular a  $B$ , halle el valor de  $d$ .

La fuerza  $\mathbf{F}$  que genera  $\mathbf{P}$  al moverse en este campo magnético viene dado por la ecuación vectorial  $\mathbf{F} = a\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ .

- (b) Sabiendo que  $|F| = 14$ , halle el valor de  $a$ .



**12. [Puntuación máxima: 7]**

Las investigaciones realizadas llevan a una empresa a creer que los ingresos ( $R$ ) que se obtienen vendiendo sus artículos a un precio ( $p$ ) se pueden modelizar mediante la ecuación.

$$R(p) = cpe^{dp}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Hay dos modelos enfrentados: el A y el B, cada uno con distintos valores para los parámetros  $c$  y  $d$ .

En el modelo A,  $c = 3$  y  $d = -0,5$  y en el modelo B,  $c = 2,5$ ,  $d = -0,6$ .

La empresa prueba a vender los artículos a tres precios distintos en tres zonas parecidas y los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Zona	Precio ( $p$ )	Ingresos ( $R$ )
1	1	1,5
2	2	1,8
3	3	1,5

La empresa elegirá el modelo para el cual la suma de los cuadrados de los residuos sea menor.

Determine cuál de los dos modelos eligió la empresa.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**13. [Puntuación máxima: 6]**

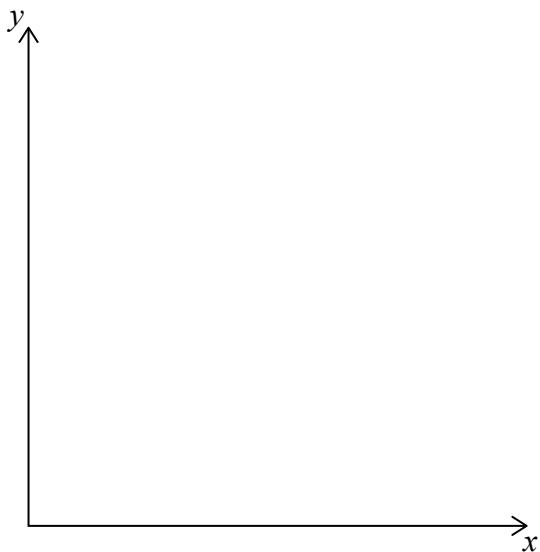
Las razones de cambio del área cubierta por dos tipos de hongos ( $X$  e  $Y$ ) en un árbol dado vienen dadas por las siguientes ecuaciones, donde  $x$  es el área que está cubierta por el hongo  $X$  e  $y$  es el área que está cubierta por el  $Y$ .

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

La matriz  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  tiene por valores propios  $2$  y  $-1$ , y sus correspondientes vectores propios son  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Inicialmente  $x = 8 \text{ cm}^2$  e  $y = 10 \text{ cm}^2$ .

- (a) Halle el valor de  $\frac{dy}{dx}$  cuando  $t = 0$ . [2]
- (b) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente una posible trayectoria para el crecimiento de estos dos hongos, señalando claramente todo comportamiento asintótico que haya. [4]



**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



(Pregunta 13: continuación)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



24EP17

Véase al dorso

**No escriba en esta página.**

Las respuestas que se escriban en  
esta página no serán corregidas.



24EP18

14. [Puntuación máxima: 8]

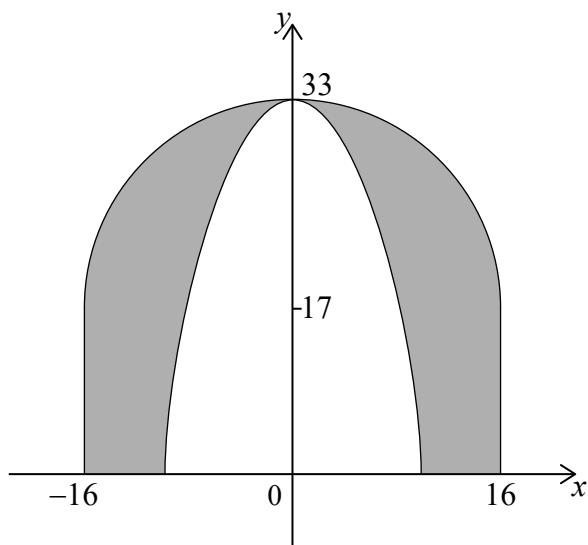
- (a) El gráfico de  $y = -x^3$  se transforma en el gráfico de  $y = 33 - 0,08x^3$  mediante una traslación de  $a$  unidades en vertical y un estiramiento paralelo al eje  $x$  de razón  $b$ .

(i) Escriba el valor de  $a$ .

(ii) Halle el valor de  $b$ .

[3]

- (b) La cúpula exterior de una catedral tiene forma de semiesfera de 32 m de diámetro, que se apoya en unas paredes verticales de 17 m de altura. También se sustenta en una cúpula interior que se puede modelizar rotando la curva  $y = 33 - 0,08x^3$  un total de  $360^\circ$  alrededor del eje  $y$ , entre  $y = 0$  e  $y = 33$ , tal y como se indica en la figura.



Halle el volumen del espacio que queda entre las dos cúpulas.

[5]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



24EP19

Véase al dorso

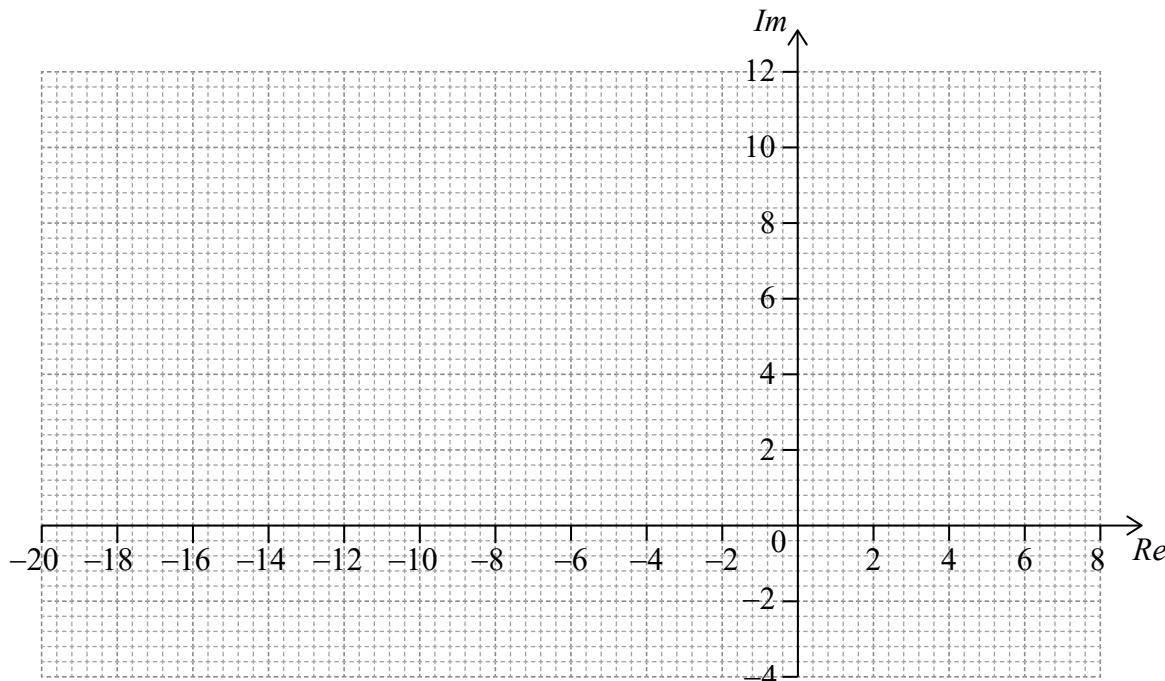
**15. [Puntuación máxima: 7]**

Sea  $w = ae^{\frac{\pi i}{4}}$ , donde  $a \in \mathbb{R}^+$ .

(a) Para  $a = 2$ ,

(i) halle los valores de  $w^2$ ,  $w^3$  y  $w^4$ ;

(ii) dibuje con precisión  $w$ ,  $w^2$ ,  $w^3$  y  $w^4$  en el siguiente diagrama de Argand. [5]



Sea  $z = \frac{w}{2-i}$ .

(b) Halle el valor de  $a$  para el cual las sucesivas potencias de  $z$  están todas dispuestas en un círculo. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 15: continuación)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



24EP21

Véase al dorso

**16.** [Puntuación máxima: 6]

El número de peces que se consiguen coger en una hora en un lago dado sigue una distribución de Poisson.

Emily, la propietaria del lago, dice en los anuncios que el número promedio de peces que se logran pescar en una hora es igual a tres.

Tom, que es muy aficionado a la pesca, no está convencido y cree que es inferior a tres. Para ello, decide plantear la siguiente prueba: Tom estará pescando durante una hora y si coge menos de dos peces rechazará la afirmación de Emily.

- (a) Indique una hipótesis nula y una hipótesis alternativa que resulten apropiadas para la prueba de Tom. [1]
- (b) Halle la probabilidad de cometer un error de Tipo I. [2]

El número promedio de peces que se cogen en una hora es, en realidad, de 2,5.

- (c) Halle la probabilidad de cometer un error de Tipo II. [3]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**17. [Puntuación máxima: 6]**

El Sr. Burke da clases de matemáticas a un grupo de 15 estudiantes, de los cuales 6 son chicas y 9 son chicos.

Cada día el Sr. Burke elige al azar a un o una estudiante para que resuelva el ejercicio que mandó de deberes el día anterior.

En el primer mes, el Sr. Burke da clase a este grupo en 20 ocasiones.

- (a) Halle la probabilidad de que elija a una chica en 8 ocasiones.

[2]

La tutora de todo el curso, la Sra. Smith, decide elegir al azar a un o una estudiante del curso completo para que lea los avisos en la asamblea. En ese curso hay en total 80 estudiantes. La Sra. Smith calcula que la probabilidad de elegir a un chico en 8 ocasiones en las 20 primeras asambleas es igual a 0,153357, redondeando a 6 lugares decimales.

- (b) Halle el número de chicos que hay en ese curso.

[4]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



24EP23

Véase al dorso

**18.** [Puntuación máxima: 6]

La velocidad ( $A$ ) de una reacción química que se realiza a temperatura fija depende de la concentración de dos compuestos ( $B$  y  $C$ ), según la ecuación

$$A = kB^x C^y, \text{ donde } x, y, k \in \mathbb{R}.$$

Un científico mide las tres variables en tres ocasiones durante la reacción y obtiene los siguientes valores.

<b>Experimento</b>	<b><math>A</math> (mol l<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>)</b>	<b><math>B</math> (mol l<sup>-1</sup>)</b>	<b><math>C</math> (mol l<sup>-1</sup>)</b>
1	5,74	2,1	3,4
2	2,88	1,5	2,4
3	0,980	0,8	1,9

Halle  $x$ ,  $y$  y  $k$ .

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....

.....  
 .....



# **Esquema de calificación**

## **Examen de muestra**

### **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

#### **Nivel superior**

#### **Prueba 1**

16 páginas

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1, A2**.

#### 2 Puntos de Método y puntos de Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio y hay que otorgar los puntos conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2, A3, etc**, **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontramos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

## Ejemplos

	<b>Respuesta correcta incluida</b>	<b>Desarrollo adicional incluido</b>	<b>Acción</b>
<b>1.</b>	$8\sqrt{2}$	$5,65685\dots$ <i>(valor decimal incorrecto)</i>	Conceda el <b>A1</b> final <i>(ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)</i>
<b>2.</b>	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el <b>A1</b> final
<b>3.</b>	$\log a - \log b$	$\log(a-b)$	No conceda el <b>A1</b> final

## 3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis**; p. ej., (M1). Solo se pueden conceder si se ha incluido el procedimiento **correcto** o si ha quedado **implícito** en otro procedimiento posterior

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento aparezca escrito.

## 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo aplicables después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en **apartados o subapartados posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **tiene que estar incluido el desarrollo del ejercicio**; no basta con que haya una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de  $r > 1$  para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la/s respuesta/s final/es.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizás estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la/s respuesta/s correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

## 5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar los datos del enunciado de la pregunta, esto se considera un error de lectura (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar de su propio desarrollo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando se haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el desarrollo de la pregunta y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos, se ha de puntuar de acuerdo con el esquema de calificación.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos  
**MÉTODO 1**,  
**MÉTODO 2, etc.**
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN...O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, acepte formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas y algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

## 8 Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos incluidos en el esquema de calificación se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.*

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique expresamente lo contrario en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas que dé el alumno han de ser exactas o han de darse redondeando a tres cifras significativas.*»

## 9 Calculadoras

*Para este examen sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las que estén dotadas de un sistema algebraico computacional.*

### Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

*Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; no la notación de calculadora.*

**No** acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a) discretos

**A1****[1 punto]**

$$(b) \frac{24 + 60 + 3k + 40 + 15 + 6}{88 + k} = 2$$

**M1A1**

**Nota:** Conceda **M1** por sustituir los valores en la fórmula de la media; conceda **A1** por obtener una ecuación correcta.

por tratar de resolver su ecuación

**(M1)**

$$k = 31$$

**A1****[4 puntos]**

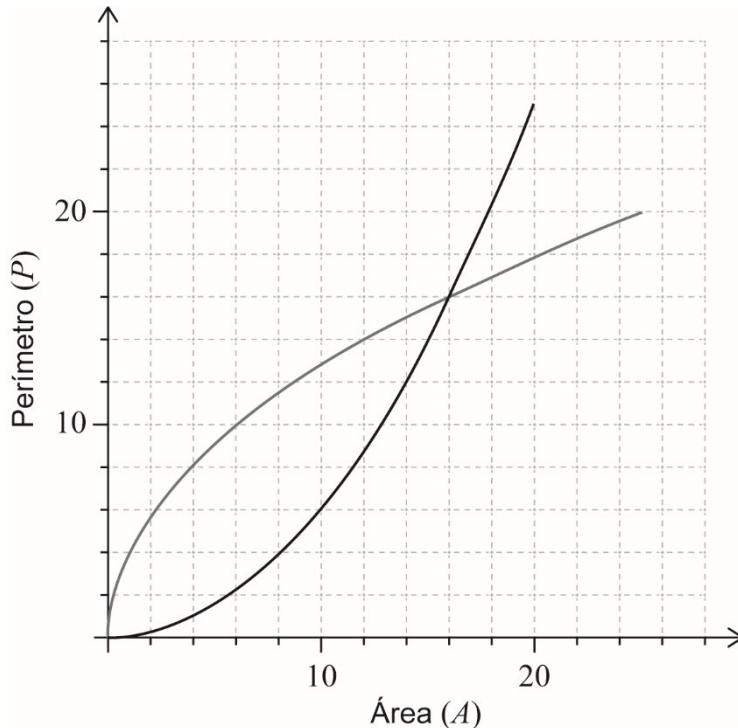
- (c) sistemática

**A1****[1 punto]****Total [6 puntos]**

2. (a) 20

**A1****[1 punto]**

- (b)

**(M1)A1A1**

**Nota:** Conceda **(M1)** por hacer una simetría respecto a la recta  $P = A$ ; conceda **A1** si un extremo es el punto (20 , 25); conceda **A1** por pasar por el punto (16 , 16).

**[3 puntos]**

- (c) cuando el perímetro es 8, el área es igual a 4

**A1****[1 punto]****Total [5 puntos]**

3. (a) (i) 1750

A1

(ii)  $1350 + 400 (1,25)^{-5}$

(M1)

$$= 1480$$

A1

**Nota:** Acepte 1481.

[3 puntos]

(b)  $1400 = 1350 + 400 (1,25)^{-t}$

(M1)

$$9,32 \text{ (días)} (9,31885...) \text{ (días)}$$

A1

[2 puntos]

(c) 1350

A1

**Nota:** Acepte 1351 como una interpretación válida del modelo, ya que  $P=1350$  es una asíntota.

[1 punto]

Total [6 puntos]

4. (a)  $\frac{3 - 1}{7 - 3}$

(M1)

$$= 0,5$$

A1

[2 puntos]

(b)  $y - 2 = -2(x - 5)$

(A1)(M1)

**Nota:** Conceda (A1) por incluir su  $-2$ ; conceda (M1) por haber sustituido correctamente en la ecuación de la recta el  $(5, 2)$  y su pendiente de la normal.

$$2x + y - 12 = 0$$

A1

[3 puntos]

(c) todos los puntos de la celda están más cerca de E que de cualquier otro refugio

A1

[1 punto]

Total [6 puntos]

5. (a)  $\frac{50 \times \pi}{180} = 0,873 (0,872664\dots)$

**A1****[1 punto]**

(b) volumen =  $240 \left( \pi \times 8,4^2 - \frac{1}{2} \times 8,4^2 \times 0,872664\dots \right)$

**M1M1M1**

**Nota:** Conceda **M1** por  $240 \times$  área ; conceda **M1** por sustituir correctamente los valores en la fórmula del área de un sector circular; conceda **M1** por restar los ángulos o sus áreas.

=  $45800 (= 45811,96071)$

**A1****[4 puntos]****Total [5 puntos]**

6. (a)  $\frac{4}{18} \left( \frac{2}{9} \right)$

**A1****[1 punto]**

(b)  $-3 \times \frac{1}{18} + (-1) \times \frac{4}{18} + 0 \times \frac{3}{18} + \dots + 5 \times \frac{7}{18}$

**(M1)**

**Nota:** Conceda **(M1)** por sustituir correctamente su(s) valor(es) en la fórmula del valor esperado.

=  $1,83 \left( \frac{33}{18}; 1,83333\dots \right)$

**A1****[2 puntos]**

(c)  $2 \times \frac{1}{18} \times \frac{3}{18}$

**(M1)(M1)**

**Nota:** Conceda **(M1)** por  $\frac{1}{18} \times \frac{3}{18}$ ; conceda **(M1)** por multiplicar su producto por 2.

$\frac{1}{54} \left( \frac{6}{324}; 0,0185185\dots; 1,85\% \right)$

**A1****[3 puntos]****Total [6 puntos]**

7. (a)  $E = 5(2 \sin t)^2 (= 20 \sin^2 t)$  **A1**  
**[1 punto]**

(b)  $\frac{dE}{dt} = 40 \sin t \cos t$  **(M1)A1**  
**[2 puntos]**

(c)  $t = 0,126$  **(M1)A1**  
**[2 puntos]**

**Total [5 puntos]**

8. (a)  $\frac{\sin C\hat{A}B}{6} = \frac{\sin 15^\circ}{4,5}$  **(M1)(A1)**

$C\hat{A}B = 20,2^\circ (20,187415...)$  **A1**

**Nota:** Conceda **(M1)** por sustituir valores en la fórmula del teorema del seno y conceda **(A1)** por haber sustituido correctamente.

**[3 puntos]**

(b)  $C\hat{B}D = 20,2 + 15 = 35,2^\circ$  **A1**  
*(sea X el punto perteneciente a BD en el que Ollie activa el sensor)*

$$\tan 35,18741\dots = \frac{1,8}{BX} \quad \text{(M1)}$$

**Nota:** Conceda **A1** por su ángulo correcto  $C\hat{B}D$ . Conceda **M1** por haber sustituido correctamente valores en la relación trigonométrica.

$BX = 2,55285\dots$  **A1**

$5 - 2,55285\dots$  **(M1)**

$= 2,45 \text{ (m)} (2,44714\dots)$  **A1**  
**[5 puntos]**

**Total [8 puntos]**

9. (a)  $s_{n-1} = \sqrt{\frac{10}{9}} \times 0,0196 = 0,02066\dots$  **(M1)A1**

**[2 puntos]**

(b)  $(1,463 ; 1,493)$  **(M1)A1**

**Nota:** Si se utiliza  $s_n$  la respuesta es  $(1,464 ; 1,492)$ , conceda **M1A0**.

**[2 puntos]**

- (c) un 95 % de las veces estos resultados provendrían de una población con una media inferior a 1,5 kg, así que es probable que la media del peso sea inferior a 1,5kg **R1**

**[1 punto]****Total [5 puntos]**

10. sea  $T$  el tiempo que tardan en atender a los dos clientes y  $T_i$  el tiempo que tardan en atender al cliente  $i$ -ésimo,

suponiendo que  $T_1$  y  $T_2$  son independientes **R1**

$T$  sigue una distribución normal y  $T = T_1 + T_2$  **(M1)**

$E(T) = 1,5 + 1,5 = 3$  **A1**

$\text{Var}(T) = 0,4^2 + 0,4^2 = 0,32$  **M1A1**

$P(T < 4) = 0,961$  **A1**

**Total [6 puntos]**

11. (a)  $15 \times 0 + 2d + 4 = 0$

(M1)

$$d = -2$$

A1

[2 puntos]

(b)  $a \begin{pmatrix} -15 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(M1)

$$= a \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} \left( = 5a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

A1

el módulo es  $5a\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 14$

M1

$$a = \frac{14}{35} (= 0,4)$$

A1

[4 puntos]

Total [6 puntos]

**12.** (*Modelo A*)

$$R = 3pe^{-0,5p}$$

valores predichos

<i>p</i>	<i>R</i>
1	1,8196
2	2,2073
3	2,0082

**M1**

**(A1)**

$$SS_{res} = (1,8196 - 1,5)^2 + (2,2073 - 1,8)^2 + (2,0082 - 1,5)^2$$

**(M1)**

$$= 0,5263\dots$$

**A1**

*(Modelo B)*

$$R = 2,5pe^{-0,6p}$$

valores predichos

<i>p</i>	<i>R</i>
1	1,372
2	1,506
3	1,2397

**(A1)**

$$SS_{res} = 0,170576\dots$$

**A1**

eligió el modelo B

**A1**

**Nota:** Se pueden conceder puntos de método si se ha incluido el desarrollo bien para el modelo A o para el modelo B.

Conceda el **A1** final si ha hecho una deducción correcta a partir de sus valores (aquellos que ha calculado para el modelo A y para el modelo B).

**Total [7 puntos]**

13. (a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{16 - 20}{24 - 20}$

$$= -1$$

**M1****A1****[2 puntos]**

(b) hay una asíntota de la trayectoria a lo largo de  $r = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**M1A1**

**Nota:** Conceda **M1A0** si la asíntota va a lo largo de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

la trayectoria comienza en  $(8, 10)$ , con pendiente negativa

**A1A1****[4 puntos]****Total [6 puntos]**

14. (a) (i)  $a = 33$

(ii)  $\frac{1}{\sqrt[3]{0,08}} = 2,32$

**A1****M1A1****[3 puntos]**

(b) volumen dentro de la cúpula exterior

$$\frac{2}{3}\pi \times 16^3 + \pi \times 16^2 \times 17 = 22250,85$$

**M1A1**

volumen dentro de la cúpula interior

$$\pi \int_0^{33} \left( \frac{33 - y}{0,08} \right)^{\frac{2}{3}} dy = 3446,92$$

**M1A1**

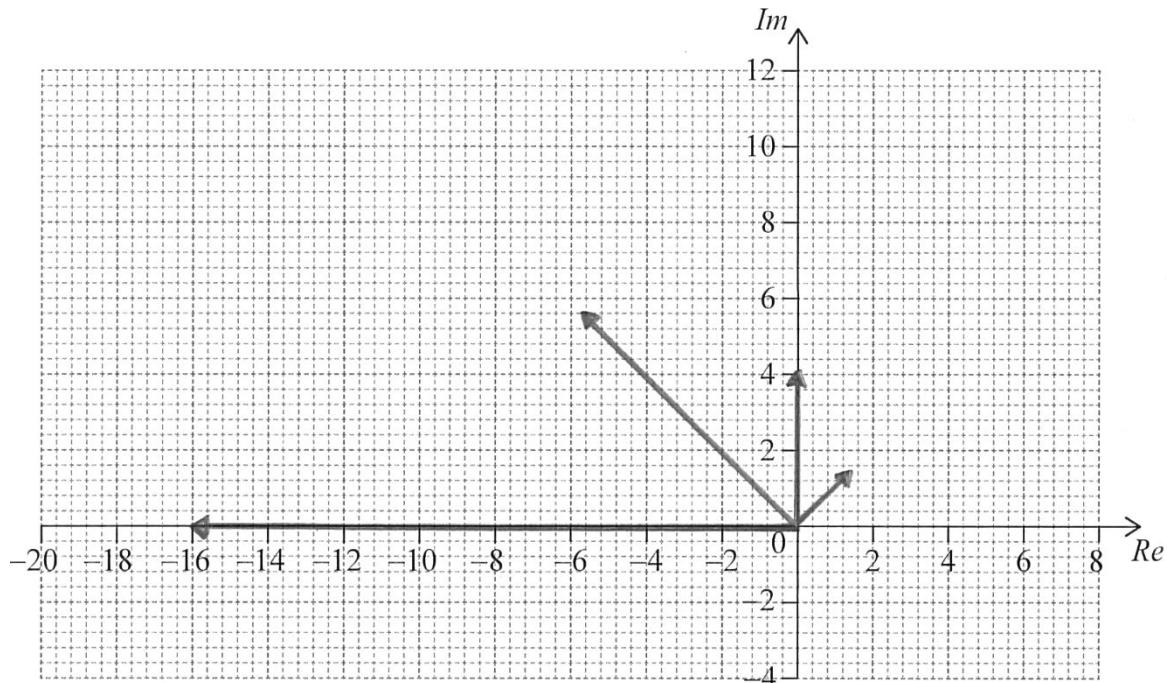
volumen entre las dos cúpulas =  $22250,85 - 3446,92 = 18803,93 \text{ m}^3$

**A1****[5 puntos]****Total [8 puntos]**

15. (a) (i)  $4e^{\frac{\pi i}{2}}, 8e^{\frac{3\pi i}{4}}, 16e^{\pi i}$   $\left(= 4i, -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i, -16\right)$

(M1)A1

(ii)



A3

**Nota:** Conceda **A1** si los argumentos son correctos; conceda **A1** por indicar claramente  $4i$  y  $-16$ ; conceda **A1** por  $|w| < 4$  y  $4 < |w^3| < 16$ .

[5 puntos]

(b)  $2^2 + 1^2 = a^2$

M1

$a = \sqrt{5}$  ( $= 2,24$ )

A1

[2 puntos]

Total [7 puntos]

16. (a)  $H_0 : m = 3$ ,  $H_1 : m < 3$

A1

**Nota:** Acepte proposiciones equivalentes que estén escritas con palabras.

[1 punto]

- (b) (Sea  $X$  el número de peces que se han pescado)

$$P(X \leq 1 | m = 3) = 0,199$$

M1A1

[2 puntos]

- (c)  $P(X \geq 2 | m = 2,5) (= 1 - P(X \leq 1 | m = 2,5))$

M1A1

**Nota:** Conceda **M1** por utilizar  $m = 2,5$  para evaluar una probabilidad; conceda **A1** por indicar también que  $X \geq 2$ .

$$= 0,713$$

A1

[3 puntos]

Total [6 puntos]

17. (a)  $P(X = 8)$

(M1)

**Nota:** Conceda **(M1)** si hay pruebas de que el alumno ha reconocido la probabilidad binomial.

p. ej.,  $P(X = 8)$ ,  $X \sim B\left(20, \frac{6}{15}\right)$ .

$$= 0,180 (0,179705...)$$

A1

[2 puntos]

- (b) sea  $x$  el número de estudiantes varones

por darse cuenta de que la probabilidad de elegir a un chico es igual a  $\frac{x}{80}$  (A1)

$$\left( \text{Por plantear la ecuación } {}^{20}C_8 \left( \frac{x}{80} \right)^8 \left( \frac{80-x}{80} \right)^{12} = \right) 0,153357 \quad (\text{M1})$$

número de estudiantes que son chicos = 37

(M1)A1

**Nota:** Conceda **(M1)A0** si la respuesta es 27.

[4 puntos]

Total [6 puntos]

18.  $\log A = x \log B + y \log C + \log k$  **(M1)**

$$\log 5,74 = x \log 2,1 + y \log 3,4 + \log k$$

$$\log 2,88 = x \log 1,5 + y \log 2,4 + \log k$$

$$\log 0,980 = x \log 0,8 + y \log 1,9 + \log k$$

**M1A1**

**Nota:** Permita el uso sistemático de cualquier base; permita el uso de equivalentes numéricos.

por tratar de resolver su sistema de ecuaciones

**(M1)**

$$x = 1,53, y = 0,505$$

**A1**

$$k = 0,997$$

**A1**

**Total [6 puntos]**

---

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación**  
**Nivel superior**  
**Prueba 2**

Examen de muestra

2 horas

---

**Instrucciones para los alumnos**

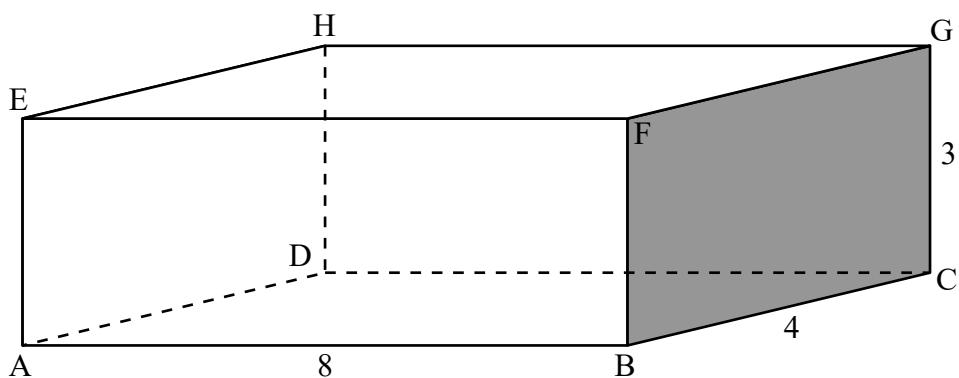
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

**1.** [Puntuación máxima: 15]

La empresa *Happy Straw Company* fabrica pajitas para beber.

Las pajitas vienen envasadas en pequeñas cajas rectangulares cerradas; cada una mide 8 cm de largo, 4 cm de ancho y 3 cm de altura. Toda esta información se muestra en la figura.



- (a) Calcule (en  $\text{cm}^2$ ) el área de la superficie de la caja. [2]

- (b) Calcule la longitud AG. [2]

Todas las semanas, la empresa *Happy Straw Company* vende  $x$  cajas de pajitas. Se sabe que  $\frac{dP}{dx} = -2x + 220$ ,  $x \geq 0$ , donde  $P$  representa los beneficios semanales (en dólares, \\$) que obtienen por la venta de  $x$  miles de cajas.

- (c) Halle el número de cajas que se deberían vender cada semana para maximizar los beneficios. [3]

Los beneficios que obtienen por la venta de 20 000 cajas son 1700 \\$.

- (d) Halle  $P(x)$ . [5]

- (e) Halle el menor número de cajas que se tienen que vender cada semana para poder tener beneficios. [3]

**2.** [Puntuación máxima: 12]

La empresa de golosinas *Slugworth Candy Company* vende una bolsa variada que contiene caramelos de distintas formas y colores.

De todos los caramelos que se elaboran, se sabe que el 80% tienen forma de estrella y el 20% tienen forma de luna creciente. Se sabe también que el 10% de las estrellas y el 30% de las lunas crecientes son de color amarillo.

(a) Se escoge un caramelo al azar.

(i) Halle la probabilidad de que el caramelo sea amarillo.

(ii) Sabiendo que el caramelo es amarillo, halle la probabilidad de que tenga forma de estrella.

[4]

Según las especificaciones del fabricante, en cada bolsa de caramelos variados los colores deberían estar distribuidos como sigue:

Color	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
Porcentaje (%)	15	25	20	20	10	10

El Sr. Slugworth abre una bolsa que contiene 80 caramelos y anota la frecuencia con la que aparece cada color.

Color	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
Frecuencia observada	10	20	16	18	12	4

Para investigar si la muestra concuerda con las especificaciones del fabricante, el Sr. Slugworth realiza una prueba (contraste) de  $\chi^2$  para determinar la bondad del ajuste. La prueba se lleva a cabo a un nivel de significación del 5%.

(b) Escriba la hipótesis nula para esta prueba.

[1]

(c) **Copie** la siguiente tabla en el cuadernillo de respuestas y complétela.

[2]

Color	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
Frecuencia esperada						

(d) Escriba el número de grados de libertad.

[1]

(e) Halle el valor del parámetro  $p$  correspondiente a esta prueba.

[2]

(f) Indique la conclusión de esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta.

[2]

3. [Puntuación máxima: 18]

**En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos lugares decimales.**

Bryan decide comprarse un coche nuevo que tiene un precio de 14 000€, pero no se puede permitir pagar todo de golpe. El concesionario de coches le ofrece dos opciones de financiación para el préstamo:

**Opción de financiación A:**

Préstamo a 6 años, con un tipo de interés anual nominal del 14% **compuesto trimestralmente**. No hay que pagar entrada y los pagos del préstamo (es decir, los reembolsos) se realizan cada trimestre.

- (a) (i) Halle el reembolso que tiene que pagar cada trimestre.
- (ii) Halle la cantidad total que habrá pagado por el coche.
- (iii) Halle los intereses que ha pagado por el préstamo.

[7]

**Opción de financiación B:**

Préstamo a 6 años, con un tipo de interés anual nominal del  $r\%$  **compuesto mensualmente**. En las condiciones del préstamo se exige pagar un 10% de entrada y luego realizar pagos (reembolsos) mensuales de 250€.

- (b) (i) Halle la cantidad que podrá tomar prestada con esta opción.
- (ii) Halle el tipo de interés anual,  $r$ .
- (c) Indique cuál de las dos opciones de financiación debería elegir Bryan. Justifique su respuesta.

[5]

[2]

Bryan elige la opción B. El concesionario de coches va invirtiendo el dinero que le paga Bryan tan pronto como lo reciben.

- (d) Si lo invierten en una cuenta bancaria que paga un interés del 0,4% al mes y la inflación es del 0,1% al mes, calcule la cantidad real de dinero que el concesionario de coches habrá recibido al final de esos 6 años.

[4]

**4.** [Puntuación máxima: 14]

La posición de un avión viene dada por las coordenadas  $(x, y, z)$ , donde  $x$  e  $y$  representan el desplazamiento hacia el este y hacia el norte respecto a un aeropuerto dado, y  $z$  es la altura sobre el nivel del suelo a la que está el avión. Todos los desplazamientos están en kilómetros.

La velocidad del avión es  $\begin{pmatrix} -150 \\ -50 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ km h}^{-1}$ .

A las 13.00 se le detecta en una posición que está a 30 km al este y a 10 km al norte del aeropuerto, y a una altura de 5 km. Sea  $t$  el tiempo (en horas) transcurrido desde las 13.00.

- (a) Escriba una ecuación vectorial para expresar el desplazamiento ( $r$ ) del avión en función de  $t$ . [2]
- (b) Si el avión siguiera volando a la velocidad dada
  - (i) verifique que pasaría directamente por encima del aeropuerto;
  - (ii) indique a qué altura estaría el avión en este punto;
  - (iii) halle la hora a la que estaría volando justo por encima del aeropuerto. [4]
- (c) (i) Halle la hora a la que el avión se encuentra a 4 km sobre el nivel del suelo.  
 (ii) Halle la distancia directa del aeropuerto a la que se encuentra el avión en este punto. [5]
- (d) Sabiendo que la velocidad del avión, tras ajustar el ángulo de descenso, es  $\begin{pmatrix} -150 \\ -50 \\ a \end{pmatrix} \text{ km h}^{-1}$ , halle el valor de  $a$ . [3]

**5.** [Puntuación máxima: 17]

La siguiente tabla muestra el coste (en dólares estadounidenses, US\$) de los vuelos directos entre cinco ciudades. Las celdas sin números indican que no existen vuelos directos. Las filas representan las ciudades de salida. Las columnas representan las ciudades de destino.

		Ciudad de destino					
		A	B	C	D	E	F
Ciudad de salida	A		90	150			
	B	90		80	70	140	
	C	150	80				
	D		70			100	180
	E		140		100		210
	F				180	210	

- (a) Muestre en forma de grafo los vuelos directos que hay entre estas ciudades. [2]
- (b) Escriba la matriz de adyacencia correspondiente a este grafo. [2]
- (c) Utilizando la respuesta que dio en (b), halle el número de formas distintas que hay de salir de la ciudad A y regresar a ella cogiendo exactamente 6 vuelos. [2]
- (d) Indique si es o no posible salir de la ciudad A y volver a ella habiendo cogido exactamente 6 vuelos y tras haber pasado por cada una de las 5 ciudades restantes exactamente una vez. Justifique su respuesta. [2]

La siguiente tabla muestra el coste mínimo del viaje entre estas ciudades.

		Ciudad de destino					
		A	B	C	D	E	F
Ciudad de salida	A	0	90	150	160	$a$	$b$
	B	90	0	80	70	140	250
	C	150	80	0	150	220	330
	D	160	70	150	0	100	180
	E	$a$	140	220	100	0	210
	F	$b$	250	330	180	210	0

- (e) Halle los valores de  $a$  y  $b$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 5: continuación)**

Un viajante de comercio tiene que ir a cada una de estas ciudades; el viaje empieza y termina en la ciudad A.

- (f) Utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar un límite superior para el coste del viaje. [3]
- (g) Borrando el vértice A, utilice el algoritmo del vértice borrado para hallar un límite inferior para el coste del viaje. [4]

**6.** [Puntuación máxima: 14]

En una ciudad hay dos empresas de fibra óptica: X e Y. Cada año, el 20% de los clientes que están con la empresa X se marchan con la empresa Y, y el 10% de los clientes que están con la empresa Y se marchan con la empresa X. El resto de pérdidas y ganancias de clientes que tienen estas empresas se pueden ignorar.

- (a) Escriba la matriz de transición  $T$  que representa los movimientos que se producen entre estas dos empresas en un año dado. [2]
- (b) Halle los valores propios y los correspondientes vectores propios de  $T$ . [4]
- (c) A partir de lo anterior, escriba dos matrices,  $P$  y  $D$ , tales que  $T = PDP^{-1}$ . [2]

Inicialmente, la empresa X y la empresa Y tienen 1200 clientes cada una.

- (d) Halle una expresión que dé el número de clientes que tendrá la empresa X al cabo de  $n$  años, donde  $n \in \mathbb{N}$ . [5]
- (e) A partir de lo anterior, escriba el número de clientes que la empresa X puede esperar tener a largo plazo. [1]

**7. [Puntuación máxima: 20]**

Se introduce un objeto por la parte superior de un tubo vertical largo —que está lleno de un líquido espeso y viscoso— en el instante  $t = 0$ .

Al principio se creía que la resistencia del líquido sería proporcional a la velocidad del objeto. Por ello se propuso el siguiente modelo, en el que el desplazamiento del objeto ( $x$ , en metros) respecto a la parte superior del tubo viene dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 9,81 - 0,9 \left( \frac{dx}{dt} \right).$$

- (a) Sustituyendo  $v = \frac{dx}{dt}$  en la ecuación, halle una expresión que dé la velocidad del objeto en el instante  $t$ . Dé la respuesta en la forma  $v = f(t)$ . [7]

La velocidad máxima que alcanza el objeto durante su caída se denomina “velocidad terminal”.

- (b) A partir de la solución que dio al apartado (a), o de cualquier otro modo alternativo, halle la velocidad terminal del objeto que predice este modelo. [2]

Se lleva a cabo un experimento, en el que el objeto se mete en el líquido en repetidas ocasiones y cada vez se mide su velocidad terminal. La velocidad terminal medida resultó ser siempre menor que la que predecía el modelo utilizado. Se sugirió que la resistencia al movimiento en realidad es proporcional a la velocidad al cuadrado y, por ello, se planteó el siguiente modelo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 9,81 - 0,9 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

- (c) Escriba la ecuación diferencial como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. [2]
- (d) Utilice el método de Euler, con un paso de 0,2, para hallar el desplazamiento y la velocidad del objeto cuando  $t = 0,6$ . [4]
- (e) Aplicando repetidas veces el método de Euler, halle una aproximación para la velocidad terminal, redondeando la respuesta a cinco cifras significativas. [1]

Cuando un objeto alcanza la velocidad terminal su aceleración es igual a cero.

- (f) Utilice la ecuación diferencial para hallar la velocidad terminal del objeto. [2]
- (g) Utilice las respuestas que dio en los apartados (d), (e) y (f) para comentar la precisión de la aproximación de Euler para este modelo. [2]



# **Esquema de calificación**

## **Examen de muestra**

### **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

**Nivel superior**

**Prueba 2**

15 páginas

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1, A2**.

#### 2 Puntos de Método y puntos de Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio y hay que otorgar los puntos conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2, A3, etc**, **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontramos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

## Ejemplos

	<b>Respuesta correcta incluida</b>	<b>Desarrollo adicional incluido</b>	<b>Acción</b>
<b>1.</b>	$8\sqrt{2}$	$5,65685\dots$ <i>(valor decimal incorrecto)</i>	Conceda el <b>A1</b> final <i>(ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)</i>
<b>2.</b>	$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$	$\operatorname{sen} x$	No conceda el <b>A1</b> final
<b>3.</b>	$\log a - \log b$	$\log(a-b)$	No conceda el <b>A1</b> final

## 3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis**; p. ej., (M1). Solo se pueden conceder si se ha incluido el procedimiento **correcto** o si ha quedado **implícito** en otro procedimiento posterior

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento aparezca escrito.

## 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo aplicables después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en **apartados o subapartados posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **tiene que estar incluido el desarrollo del ejercicio** (seguido); no basta con que haya una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de  $r > 1$  para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita,  $\operatorname{sen} \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la/s respuesta/s final/es.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizás estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la/s respuesta/s correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

## 5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar los datos del enunciado de la pregunta, esto se considera un error de lectura (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar de su propio desarrollo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando se haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el desarrollo de la pregunta y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos, se ha de puntuar de acuerdo con el esquema de calificación.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos  
**MÉTODO 1**,  
**MÉTODO 2, etc.**
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN...O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, acepte formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas y algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

## 8 Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos incluidos en el esquema de calificación se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.*

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique expresamente lo contrario en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas que dé el alumno han de ser exactas o han de darse redondeando a tres cifras significativas.*»

## 9 Calculadoras

*Para este examen sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las que estén dotadas de un sistema algebraico computacional.*

### Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

*Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; no la notación de calculadora.*

**No** acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a)  $2(8 \times 4 + 3 \times 4 + 3 \times 8)$  **M1**  
 $= 136 \text{ (cm}^2\text{)}$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (b)  $\sqrt{8^2 + 4^2 + 3^2}$  **M1**  
 $(AG =) 9,43 \text{ (cm)} (9,4339\dots, \sqrt{89})$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (c)  $-2x + 220 = 0$  **M1**  
 $x = 110$  **A1**  
 $110\,000 \text{ (cajas)}$  **A1**  
**[3 puntos]**
- (d)  $P(x) = \int -2x + 220 \, dx$  **M1**

**Nota:** Conceda **M1** si hay pruebas de que ha hecho la integral.

$$P(x) = -x^2 + 220x + c$$
 **A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por dar o bien  $-x^2$  o  $220x$ ; conceda **A1** por dar ambos términos (y que sean correctos) y dar además la constante de integración.

$$1700 = -(20)^2 + 220(20) + c$$
 **M1**

$$c = -2300$$

$$P(x) = -x^2 + 220x - 2300$$
 **A1**  
**[5 puntos]**

- (e)  $-x^2 + 220x - 2300 = 0$  **M1**  
 $x = 11,005$  **A1**  
 $11\,006 \text{ (cajas)}$  **A1**

**Nota:** Conceda **M1** por plantear su  $P(x) = 0$ ; conceda **A1** por dar la solución correcta de su ecuación para  $x$ . Conceda el **A1** final por expresar su solución indicando el mínimo número de cajas. No acepte 11 005 (que es el número entero más próximo) ni tampoco 11 000 (que es la respuesta tras redondear a 3 cifras significativas) puesto que ninguna de las dos respuestas cumple los requisitos planteados en el enunciado de la pregunta.

**[3 puntos]**

**Total [15 puntos]**

2. (a) (i)  $P(A) = 0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,3$  **M1**  
 $= 0,14$  **A1**

(ii)  $P(\text{Estrella} | A) = \frac{0,8 \times 0,1}{0,14}$  **M1**  
 $= 0,571 \left( \frac{4}{7}, 0,571428\dots \right)$  **A1**

**[4 puntos]**

- (b) los colores de los caramelos están distribuidos según las especificaciones del fabricante

**A1**

**[1 punto]**

(c)

Color	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
Frecuencia esperada	12	20	16	16	8	8

**A2**

**Nota:** Conceda **A2** por dar correctamente los 6 valores esperados, **A1** por dar solo 4 o 5 valores correctos y **A0** en el resto de casos.

**[2 puntos]**

(d) 5

**A1**

**[1 punto]**

(e) 0,469 (0,4688117...)

**A2**

**[2 puntos]**

(f) dado que  $0,469 > 0,05$

**R1**

no se rechaza la hipótesis nula. No hay pruebas suficientes que nos permitan rechazar las especificaciones del fabricante

**A1**

**Nota:** Conceda **R1** por comparar correctamente su valor correcto del parámetro  $p$  con el nivel de la prueba; conceda **A1** por obtener de dicha comparación el resultado correcto. No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]**

**Total [12 puntos]**

3. (a) (i)  $N = 24$

$$I\% = 14$$

$$VA = -14000$$

$$VF = 0$$

$$P/A = 4$$

$$C/A = 4$$

(M1)(A1)

**Nota:** Conceda **M1** por intentar utilizar una aplicación (*app*) financiera en la calculadora/medio tecnológico; conceda **A1** si todos los valores anteriores son correctos. Acepte  $VA = 14000$ .

$$871,82(\text{€})$$

A1

(ii)  $4 \times 6 \times 871,82$

(M1)

$$20923,68(\text{€})$$

A1

(iii)  $20923,68 - 14000$

(M1)

$$6923,68(\text{€})$$

A1

[7 puntos]

(b) (i)  $0,9 \times 14000 (= 14000 - 0,10 \times 14000)$

M1

$$12600,00(\text{€})$$

A1

(ii)  $N = 72$

$$VA = 12600$$

$$PMT = -250$$

$$VF = 0$$

$$P/A = 12$$

$$C/A = 12$$

(M1)(A1)

**Nota:** Conceda **M1** por intentar utilizar una aplicación (*app*) financiera en la calculadora/medio tecnológico; conceda **A1** si todos los valores anteriores son correctos. Acepte  $VA = -12600$ , siempre y cuando  $PMT = 250$ .

$$12,56(\%)$$

A1

[5 puntos]

continúa en la página siguiente...

*Continuación de la Pregunta 3*(c) **O BIEN**

Bryan debería elegir la Opción A  
no hay que pagar entrada

**A1****R1**

**Nota:** Conceda **R1** por indicar que no hay que pagar una entrada.  
Conceda **A1** por haber tomado la decisión correcta basándose en ese hecho. No conceda **R0A1**.

**O BIEN**

Bryan debería elegir la Opción B  
coste de la Opción A (6923,69) > coste de la Opción B  
( $72 \times 250 - 12\,600 = 5400$ )

**A1****R1**

**Nota:** Conceda **R1** por comparar correctamente los costes.  
Conceda **A1** por haber tomado la decisión correcta basándose en esa comparación. No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]**(d) el tipo de interés real es  $0,4 - 0,1 = 0,3\%$ **(M1)**

para calcular el valor de los otros pagos  $250 + 250 \times 1,003 + \dots + 250 \times 1,003^{71}$   
ha utilizado la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica o la app financiera de la calculadora de pantalla gráfica  
 $= 20\,058,43$

**(M1)**

valor del depósito al final de esos 6 años

$$1400 \times (1,003)^{72} = 1736,98$$

**(A1)**

El valor total es (€) 21 795,41

**A1**

**Nota:** Se pueden conceder los dos puntos **M** por utilizar correctamente la app financiera de la calculadora de pantalla gráfica:

$$N = 72 \quad (6 \times 12)$$

$$I\% = 3,6 \quad (0,3 \times 12)$$

$$VA = 0$$

$$PMT = -250$$

$$VF =$$

$$P/A = 12$$

$$C/A = 12$$

**O BIEN**

$$N = 72 \quad (6 \times 12)$$

$$I\% = 0,3$$

$$VA = 0$$

$$PMT = -250$$

$$VF =$$

$$P/A = 1$$

$$C/A = 1$$

**[4 puntos]****Total [18 puntos]**

4. (a)  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -150 \\ -50 \\ -20 \end{pmatrix}$  **A1A1**

**[2 puntos]**

(b) (i) cuando  $x = 0, t = \frac{30}{150} = 0,2$  **M1**

**O BIEN**

cuando  $y = 0, t = \frac{10}{150} = 0,2$  **A1**

dado que los dos valores de  $t$  son iguales, el avión pasa justo por encima del aeropuerto

**O BIEN**

$t = 0,2, y = 0$  **A1**

(ii) altura  $= 5 - 0,2 \times 20 = 1\text{ km}$  **A1**

(iii) hora 13.12 **A1**

**[4 puntos]**

(c) (i)  $5 - 20t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{20}$  (3 minutos) **(M1)**

la hora es 13.03 **A1**

(ii) el desplazamiento es  $\begin{pmatrix} 22,5 \\ 7,5 \\ 4 \end{pmatrix}$  **A1**

la distancia es  $\sqrt{22,5^2 + 7,5^2 + 4^2}$  **(M1)**

$= 24,1\text{ km}$  **A1**

**[5 puntos]**

continúa en la página siguiente...

*Continuación de la Pregunta 4*

(d) **MÉTODO 1**

el tiempo transcurrido hasta el aterrizaje es  $12 - 3 = 9$  minutos

**M1**

la altura que ha de descender es = 4 km

$$a = \frac{-4}{\frac{9}{60}}$$

$$= -26,7$$

**M1**

**A1**

**MÉTODO 2**

$$\begin{pmatrix} -150 \\ -50 \\ a \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 22,5 \\ 7,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**M1**

$$-150 = 22,5 s \Rightarrow s = -\frac{20}{3}$$

**M1**

$$a = -\frac{20}{3} \times 4$$

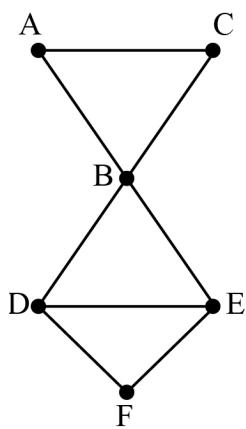
$$= -26,7$$

**A1**

[3 puntos]

**Total [14 puntos]**

5. (a)



A2

[2 puntos]

(b) por tratar de formar una matriz de adyacencia

M1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A1

[2 puntos]

(c) por elevar la matriz a la sexta potencia

(M1)

50

A1

[2 puntos]

(d) no es posible

A1

porque tienes que pasar dos veces por B

R1

**Nota:** No conceda **A1R0**.

[2 puntos]

(e)  $a = 230, b = 340$ 

A1A1

[2 puntos]

(f)  $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$ 

(M1)

90 + 70 + 100 + 210 + 330 + 150

(A1)

950 (US\$)

A1

[3 puntos]

continúa en la página siguiente...

*Continuación de la Pregunta 5*

(g) por hallar el peso del árbol generador minimal

$$70 + 80 + 100 + 180 = 430 \text{ (US$)}$$

por añadir dos aristas de peso mínimo

$$430 + 90 + 150 = 670 \text{ (US$)}$$

**M1**

**A1**

**M1**

**A1**

**[4 puntos]**

**Total [17 puntos]**

6. (a)  $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$

**M1A1**

**[2 puntos]**

(b)  $\begin{vmatrix} 0,8 - \lambda & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

**M1**

$$\lambda = 1 \text{ y } 0,7$$

**A1**

vectores propios  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**(M1)A1**

**Nota:** Acepte cualquier múltiplo escalar de los vectores propios.

**[4 puntos]**

(c) **O BIEN**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

**A1A1**

**O BIEN**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**A1A1**

**[2 puntos]**

(d)  $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

**A1**

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

**M1A1**

por tratar de multiplicar matrices

**M1**

así, en la empresa A, al cabo de  $n$  años,  $400(2 + 0,7^n)$

**A1**

**[5 puntos]**

(e)  $400 \times 2 = 800$

**A1**

**[1 punto]**

**Total [14 puntos]**

7. (a)  $\frac{dv}{dt} = 9,81 - 0,9v$  **M1**

$$\int \frac{1}{9,81 - 0,9v} dv = \int 1 dt \quad \text{**M1**$$

$$-\frac{1}{0,9} \ln(9,81 - 0,9v) = t + c \quad \text{**A1**$$

$$9,81 - 0,9v = A e^{-0,9t} \quad \text{**A1**$$

$$v = \frac{9,81 - A e^{-0,9t}}{0,9} \quad \text{**A1**$$

cuando  $t = 0$ ,  $v = 0$  y, a partir de lo anterior,  $A = 9,81$  **A1**

$$v = \frac{9,81(1 - e^{-0,9t})}{0,9}$$

$$v = 10,9(1 - e^{-0,9t}) \quad \text{**A1**$$

**[7 puntos]**

(b) o bien sea  $t$  que tiende a infinito, o bien  $\frac{dv}{dt} = 0$  **(M1)**

$$v = 10,9 \quad \text{**A1**$$

**[2 puntos]**

(c)  $\frac{dx}{dt} = y$  **M1**

$$\frac{dy}{dt} = 9,81 - 0,9y^2 \quad \text{**A1**$$

**[2 puntos]**

(d)  $x_{n+1} = x_n + 0,2y_n$ ,  $y_{n+1} = y_n + 0,2(9,81 - 0,9(y_n)^2)$  **(M1)(A1)**

$$x = 1,04, \frac{dx}{dt} = 3,31 \quad \text{**(M1)A1**$$

**[4 puntos]**

(e) 3,3015 **A1**

**[1 punto]**

(f)  $0 = 9,81 - 0,9(v)^2$  **M1**

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{9,81}{0,9}} = 3,301511\dots (= 3,30) \quad \text{**A1**$$

**[2 puntos]**

*Continuación de la Pregunta 7*

(g) el modelo permitió hallar la velocidad terminal de manera muy precisa,  
así que es una buena aproximación

**R1**

los valores intermedios indicaban que el objeto superaba la velocidad  
terminal, con lo que no es una buena aproximación

**R1**

**[2 puntos]**

**Total [20 puntos]**

---



**Matemáticas: aplicaciones e interpretación**  
**Nivel superior**  
**Prueba 3**

Examen de muestra

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 27]

Dos colegios del IB (el A y el B) siguen ambos el Programa del Diploma del IB pero tienen métodos de enseñanza diferentes. Un grupo de investigación quiso averiguar si los métodos de enseñanza distintos conducen a resultados finales parecidos.

Para ello, de cada uno de estos colegios se cogió un grupo de ocho alumnos elegidos al azar. A ambas muestras se les dio un examen normalizado al inicio del curso y, basándose en la nota que obtuvieron, se hizo una predicción de los puntos del IB que lograrían. Esta nota se comparó luego con el total de puntos del IB que obtuvieron realmente al acabar el curso.

Los resultados previos indican que tanto las predicciones basadas en los exámenes normalizados como los puntos del IB que logran finalmente siguen una distribución normal.

Se puede suponer que:

- El examen normalizado es un método válido para predecir los puntos del IB finales
- Las desviaciones respecto a los valores predichos se pueden atribuir a las circunstancias particulares del alumno o del colegio.

- (a) Identifique una prueba o contraste que quizás se haya utilizado para verificar la hipótesis nula de que las predicciones basadas en los resultados del examen normalizado siguen una distribución normal. [1]
- (b) Indique por qué el comparar únicamente los puntos del IB finales que obtienen los alumnos de los dos colegios no sería una prueba (contraste) válida para analizar la eficacia de esos dos métodos de enseñanza distintos. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Los datos correspondientes al colegio A se muestran en la siguiente tabla.

**Colegio A**

Número del alumno	Género	Puntos del IB predichos ( $p$ )	Puntos del IB finales ( $f$ )
1	masculino	43,2	44
2	masculino	36,5	34
3	femenino	37,1	38
4	masculino	30,9	28
5	masculino	41,1	39
6	femenino	35,1	39
7	masculino	36,4	40
8	masculino	38,2	38
<b>Media</b>		37,31	37,5

- (c) Para cada alumno se calculó el cambio de los puntos predichos a los puntos finales ( $f - p$ ).
- (i) Halle la media de los cambios.
  - (ii) Halle la desviación típica de los cambios. [3]
- (d) Utilice la prueba  $t$  de Student para muestras pareadas, para determinar si existen pruebas concluyentes de que los alumnos del colegio A han logrado mejorar su puntuación del IB desde que comenzó el curso. [4]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Los datos correspondientes al colegio B se muestran en la siguiente tabla.

**Colegio B**

Número del alumno	Género	Puntos del IB finales – Puntos del IB predichos ( $f-p$ )
1	masculino	8,7
2	femenino	-1,1
3	femenino	4,8
4	femenino	-1,5
5	masculino	2,5
6	femenino	3,2
7	femenino	-1,3
8	femenino	3,1
<b>Media</b>		2,3

- (e) (i) Utilice una prueba (contraste) adecuada para determinar si existen (o no) pruebas, a un nivel de significación del 5%, de que los alumnos del colegio B han mejorado más que los del colegio A.
- (ii) Indique por qué era importante comprobar que ambos conjuntos de puntuaciones siguen una distribución normal.

[6]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

El colegio A también otorga a cada alumno una puntuación por el esfuerzo realizado en cada asignatura. Esta puntuación de esfuerzo está basada en una escala del 1 al 5, donde un 5 representa un esfuerzo extraordinario.

Número del alumno	Género	Puntos del IB predichos	Puntos del IB finales	Promedio de los puntos por esfuerzo
1	masculino	43,2	44	4,4
2	masculino	36,5	34	4,2
3	femenino	37,1	38	4,7
4	masculino	30,9	28	4,3
5	masculino	41,1	39	3,9
6	femenino	35,1	39	4,9
7	masculino	36,4	40	4,9
8	masculino	38,2	38	4,3
<b>Media</b>		37,31	37,5	4,45

Se afirma que el esfuerzo que realiza un alumno es un factor importante para poder obtener una puntuación más alta que los puntos del IB predichos.

- (f) (i) Realice una prueba con los datos del colegio A para mostrar que es razonable suponer que existe una relación lineal entre la puntuación de esfuerzo y la mejora lograda por el alumno en los puntos del IB. Puede suponer que las puntuaciones de esfuerzo siguen una distribución normal.
- (ii) A partir de lo anterior, halle la mejora esperada entre los puntos predichos y los finales si la puntuación de esfuerzo aumenta en una unidad. Dé la respuesta redondeando a un lugar decimal.

[4]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Una profesora de matemáticas del colegio A afirma que la comparación realizada entre los dos colegios no es válida porque la muestra procedente del colegio B contiene mayormente chicas y la del colegio A, mayormente chicos. Ella cree que las chicas suelen lograr una mejora mayor en su puntuación final, respecto a la puntuación predicha.

Para ello recoge más datos procedentes de otros colegios, y agrupa los resultados en cuatro categorías, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

	$(f - p) < -2$	$-2 \leq (f - p) < 0$	$0 \leq (f - p) < 2$	$(f - p) \geq 2$
<b>Chicos</b>	6	8	10	9
<b>Chicas</b>	3	8	14	8

- (g) Utilice una prueba (contraste) apropiada para determinar si las mejoras logradas son independientes del género. [6]
- (h) Si fuera a repetir la prueba que realizó en el apartado (e), donde trataba de comparar la calidad de la enseñanza de los dos colegios, sugiera **dos** maneras en las que podría escoger la muestra para así aumentar la validez de dicha prueba. [2]

**2.** [Puntuación máxima: 28]

El número de ardillas pardas ( $x$ ) que hay en una zona boscosa se puede modelizar mediante la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1000}(2000 - x), \text{ donde } x > 0$$

(a) (i) Halle la población de equilibrio de ardillas pardas que sugiere este modelo.

(ii) Explique por qué aumenta la población de ardillas cuando  $x$  es inferior a este valor.

[3]

Un año los conservacionistas se dieron cuenta de que había una serie de ardillas negras que estaban trasladándose a esa zona boscosa. Las dos especies de ardilla compiten por los mismos recursos alimenticios. Sea  $y$  el número de ardillas negras que hay en esa zona boscosa.

Los conservacionistas quieren predecir la población futura de cada una de las dos especies de ardillas. Estudios realizados en otras zonas de bosque indican que cuando las dos poblaciones entran en contacto, su crecimiento se puede modelizar mediante las siguientes ecuaciones diferenciales, en las que  $t$  viene dado en decenas de años.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1000}(2000 - x - 2y), \quad x, y \geq 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1000}(3000 - 3x - y), \quad x, y \geq 0$$

Se alcanza un punto de equilibrio para las poblaciones cuando se cumple que  $\frac{dx}{dt} = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

(b) (i) Verifique que  $x = 800$ ,  $y = 600$  es un punto de equilibrio.

(ii) Halle los otros tres puntos de equilibrio.

[6]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Cuando las dos poblaciones son pequeñas, el modelo puede reducirse al siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \\ \frac{dy}{dt} &= 3y.\end{aligned}$$

- (c) (i) Utilizando la separación de variables, muestre que la solución general de  $\frac{dx}{dt} = 2x$  es  $x = Ae^{2t}$ .
- (ii) Escriba la solución general de  $\frac{dy}{dt} = 3y$ .
- (iii) Si en las dos poblaciones hay 10 ardillas cuando  $t = 0$ , utilice las soluciones dadas en los apartados (c) (i) y (ii) para estimar el número de ardillas negras y de ardillas pardas que habrá cuando  $t = 0,2$ . Dé las respuestas redondeando al número entero más próximo.

[7]

En el caso de poblaciones de mayor tamaño, los conservacionistas deciden utilizar el método de Euler para hallar los resultados a largo plazo para estas poblaciones. Ellos utilizarán el método de Euler con un paso de 2 años ( $t = 0,2$ ).

- (d) (i) Escriba las expresiones que utilizarán los conservacionistas para  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$ .
- (ii) Sabiendo que las poblaciones iniciales son  $x = 100$ ,  $y = 100$ , halle la población que habrá de cada una de las especies de ardilla cuando  $t = 1$ .
- (iii) Partiendo de esos valores iniciales, utilice iteraciones adicionales del método de Euler para hallar la población que habrá de cada una de esas especies de ardilla a largo plazo.
- (iv) Utilice el mismo método para hallar cuál sería la población de estas ardillas a largo plazo si las poblaciones iniciales fueran  $x = 400$ ,  $y = 100$ .

[7]

- (e) Utilice el método de Euler con un paso de 0,2 para dibujar aproximadamente, en los mismos ejes de coordenadas, la trayectoria aproximada de cada población cuando las poblaciones iniciales son las siguientes:

- (i)  $x = 1000$ ,  $y = 1500$   
 (ii)  $x = 1500$ ,  $y = 1000$

[3]

- (f) Sabiendo que el punto de equilibrio que hay en  $(800, 600)$  es un punto de silla, dibuje aproximadamente el retrato de fase para  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  en los mismos ejes que ya utilizó en el apartado (e).

[2]

# **Esquema de calificación**

## **Examen de muestra**

### **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

**Nivel superior**

**Prueba 3**

10 páginas

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1, A2**.

#### 2 Puntos de Método y puntos de Respuesta/Precisión

- No conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio y hay que otorgar los puntos conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2, A3, etc**, no divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontramos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

## Ejemplos

	<b>Respuesta correcta incluida</b>	<b>Desarrollo adicional incluido</b>	<b>Acción</b>
<b>1.</b>	$8\sqrt{2}$	$5,65685\dots$ <i>(valor decimal incorrecto)</i>	Conceda el <b>A1</b> final <i>(ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)</i>
<b>2.</b>	$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$	$\operatorname{sen} x$	No conceda el <b>A1</b> final
<b>3.</b>	$\log a - \log b$	$\log(a-b)$	No conceda el <b>A1</b> final

## 3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis**; p. ej., (M1). Solo se pueden conceder si se ha incluido el procedimiento **correcto** o si ha quedado **implícito** en otro procedimiento posterior

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento aparezca escrito.

## 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo aplicables después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en **apartados o subapartados posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **tiene que estar incluido el desarrollo del ejercicio** (seguido); no basta con que haya una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de  $r > 1$  para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita,  $\operatorname{sen} \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la/s respuesta/s final/es.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizás estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la/s respuesta/s correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

## 5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar los datos del enunciado de la pregunta, esto se considera un error de lectura (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar de su propio desarrollo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando se haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el desarrollo de la pregunta y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos, se ha de puntuar de acuerdo con el esquema de calificación.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos  
**MÉTODO 1**,  
**MÉTODO 2, etc.**
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN...O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, acepte formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas y algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

## 8 Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos incluidos en el esquema de calificación se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.*

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique expresamente lo contrario en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas que dé el alumno han de ser exactas o han de darse redondeando a tres cifras significativas.*»

## 9 Calculadoras

*Para este examen sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las que estén dotadas de un sistema algebraico computacional.*

### Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

*Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; no la notación de calculadora.*

**No** acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a)  $\chi^2$  (bondad del ajuste) A1  
[1 punto]

(b) **O BIEN**

porque el objetivo es medir la mejora lograda

**O BIEN**

porque los alumnos de los dos colegios pueden tener distintas capacidades

R1

[1 punto]

(c) (i) 0,1875 (acepte 0,188; 0,19) A1

(ii) 2,46 **(M1)A1**

**Nota:** Conceda **(M1)A0** si la respuesta es 2,63.

[3 puntos]

(d)  $H_0$ : no han mejorado su puntuación

$H_1$ : han mejorado su puntuación A1

por tratar de utilizar la prueba  $t$  de Student de una cola para muestras relacionadas (pareadas) **(M1)**

valor del parámetro  $p = 0,423$  A1

no existen pruebas concluyentes de que los alumnos hayan mejorado R1

**Nota:** Si no ha planteado las hipótesis conceda, como máximo, **A0M1A1R0**.

[4 puntos]

(e) (i)  $H_0$ : no existe ninguna diferencia entre los dos colegios

$H_1$ : los alumnos del colegio B han mejorado más que los del colegio A A1

prueba  $t$  de Student de una cola con 2 muestras **(M1)**

valor del parámetro  $p = 0,0984$  A1

$0,0984 > 0,05$  (no es significativo a un nivel del 5%) con lo que no se ha de rechazar la hipótesis nula **R1A1**

**Nota:** El **A1** final no se puede conceder si ha seguido un razonamiento incorrecto.

El **R1A1** final puede obtenerse tras arrastrar un error (partiendo de su valor incorrecto del parámetro  $p$ ).

Conceda como máximo **A1(M1)A0R1A1** si dio un valor del parámetro  $p = 0,0993$ .

(ii) la muestra es demasiado pequeña como para poder aplicar el teorema central del límite (y en la prueba  $t$  de Student se supone que los valores siguen una distribución normal) **R1**

[6 puntos]

*Continuación de la Pregunta 1*

(f) (i)  $H_0: \rho = 0$   
 $H_1: \rho > 0$

**A1**

**Nota:** Permite que las hipótesis se planteen con palabras (en lugar de simbólicamente).

Valor del parámetro  $p = 0,00157$

**A1**

$(0,00157 < 0,01)$  hay pruebas significativas de que existe una correlación (lineal) entre esfuerzo y mejora (con lo que es razonable suponer que existe una relación lineal)

**R1**

(ii) (pendiente de la recta de regresión =) 6,6

**A1****[4 puntos]**

(g)  $H_0: \text{la mejora y el género del alumno son independientes}$

$H_1: \text{la mejora y el género del alumno no son independientes}$

**A1**

por elegir la prueba (contraste) de  $\chi^2$  para determinar si hay independencia (**M1**)

agrupa las dos primeras columnas porque los valores esperados en la primera columna son menores que 5

**M1**

nueva tabla de valores observados

	$(f - p) < 0$	$0 \leq (f - p) < 2$	$(f - p) \geq 2$
<b>Chicos</b>	14	10	9
<b>Chicas</b>	11	14	8

**(A1)**

valor del parámetro  $p = 0,581$

**A1**

no existen pruebas significativas de que el género del alumno y la mejora sean dependientes

**R1****[6 puntos]**

(h) *Por ejemplo:*

muestras más grandes / incluir los datos de todo el colegio  
 incluir en cada muestra el mismo número de chicos que de chicas  
 que en cada muestra esté presente un abanico similar de capacidades  
 (si es posible) que tengan rangos de esfuerzo similares

**R1R1**

**Nota:** Conceda **R1** por cada sugerencia razonable que haga con el objetivo de aumentar la validez de la prueba (contraste).

**[2 puntos]****Total [27 puntos]**

2. (a) (i) 2000 **(M1)A1**

(ii) porque el valor de  $\frac{dx}{dt}$  es positivo (para  $x > 0$ ) **R1**

**[3 puntos]**

(b) (i) ha sustituido  $x = 800, y = 600$  en las dos ecuaciones **M1**

ambas ecuaciones las ha igualado a 0 **A1**

por consiguiente, es un punto de equilibrio **AG**

(ii)  $x = 0, y = 0$  **A1**

$x = 2000, y = 0, x = 0, y = 3000$  **M1A1A1**

**Nota:** Conceda **M1** por tratar de resolver el sistema, siempre y cuando haya hallado algunos valores de  $x$  e  $y$ .

**[6 puntos]**

(c) (i)  $\int \frac{1}{x} dx = \int 2 dt$  **M1**

$\ln x = 2t + c$  **A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por el miembro de la derecha; **A1** por el miembro de la izquierda.

$x = e^c e^{2t}$  **M1**

$x = Ae^{2t}$  (donde  $A = e^c$ ) **AG**

(ii)  $y = Be^{3t}$  **A1**

**Nota:** Permite el uso de cualquier letra para el término constante, incluida la  $A$ .

(iii)  $x = 15, y = 18$  **(M1)A1**

**[7 puntos]**

*continúa en la página siguiente...*

*Continuación de la Pregunta 2*

(d) (i)  $x_{n+1} = x_n + 0,2 \frac{x_n}{1000} (2000 - x_n - 2y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + 0,2 \frac{y_n}{1000} (3000 - 3x_n - y_n)$$

**M1A1**

**Nota:** Acepte formas equivalentes.

(ii)  $x = 319, y = 617$

**(M1)A1A1**

(iii) el número de ardillas pardas cae a 0,  
la población de ardillas negras llega a 3000

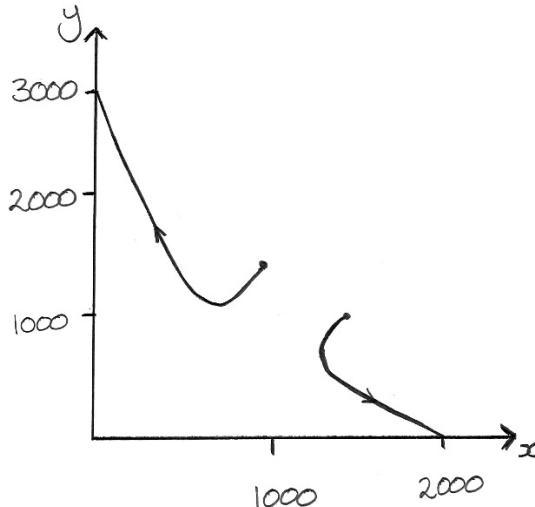
**A1**

(iv) el número de ardillas pardas sube a 2000,  
el número de ardillas negras cae a 0

**A1**

**[7 puntos]**

(e) (i) **Y** (ii)



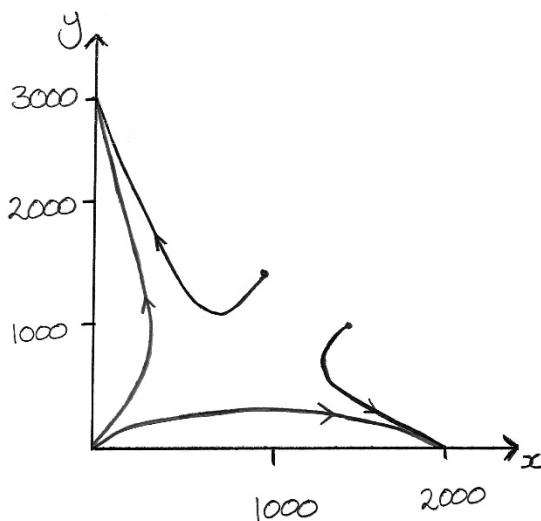
**M1A1A1**

**[3 puntos]**

*continúa en la página siguiente...*

Continuación de la Pregunta 2

(f)



A1A1

**Nota:** Conceda **A1** por una trayectoria que empiece cerca del  $(0, 0)$  y vaya hacia el  $(0, 3000)$  y **A1** por una trayectoria que empiece cerca del  $(0, 0)$  y vaya hacia el  $(2000, 0)$  pasando aproximadamente por los lugares correctos.

[2 puntos]

Total [28 puntos]

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación****Nivel medio****Prueba 1**

Examen de muestra

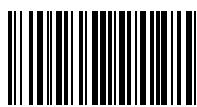
Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Instrucciones para los alumnos**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

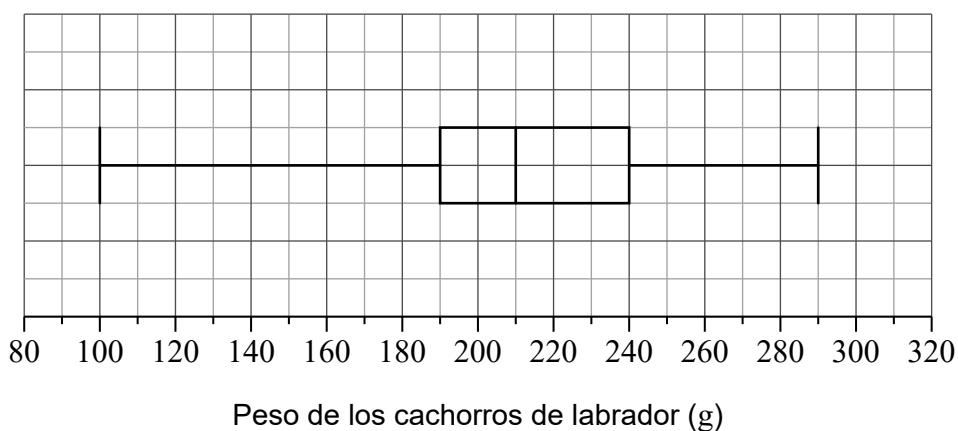


Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 6]

Palvinder cría en su finca cachorros de labrador. Durante muchos años ha ido anotando el peso (g) de los cachorros.

Los datos recogidos se muestran en el siguiente diagrama de caja y bigotes.



- (a) Escriba el valor de la mediana del peso de los cachorros. [1]
  - (b) Escriba el valor del tercer cuartil. [1]
  - (c) Halle el rango intercuartil. [2]
- Los pesos de estos cachorros de labrador siguen una distribución normal.
- (d) Halle el peso del cachorro que más puede pesar sin que sea un valor atípico. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



(Pregunta 1: continuación)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



20EP03

Véase al dorso

**2.** [Puntuación máxima: 6]

El equipo de baloncesto de los Tigres de Osaka juega en un estadio multinivel.



Las entradas más caras son las de la primera fila. El precio de las entradas de cada fila (en yenes, ¥) forma una progresión aritmética. En la siguiente tabla se muestran los precios de las tres primeras filas.

<b>Precio de las entradas por partido</b>	
1. <sup>a</sup> fila	6800 yenes
2. <sup>a</sup> fila	6550 yenes
3. <sup>a</sup> fila	6300 yenes

- (a) Escriba el valor de la diferencia común ( $d$ ). [1]
- (b) Calcule el precio de una entrada para la fila 16.<sup>a</sup>. [2]
- (c) Halle el coste total de comprar 2 entradas para cada una de las 16 primeras filas. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**3.** [Puntuación máxima: 6]

Al acabar la jornada escolar, el director del colegio hizo una encuesta entre los alumnos preguntándoles en cuántas clases habían utilizado Internet.

Los datos se muestran en la siguiente tabla.

Número de clases en las que los alumnos utilizaron Internet	0	1	2	3	4	5	6
Número de alumnos	20	24	30	$k$	10	3	1

- (a) Indique si los datos son discretos o continuos.

[1]

La media del número de clases en las que un alumno dado utilizó Internet es igual a 2.

- (b) Halle el valor de  $k$ .

[4]

No era posible encuestar a todos los alumnos del colegio, así que el director hizo una lista con los nombres de todos los alumnos, por orden alfabético, y luego encuestó solo a cada 10.<sup>a</sup> persona de la lista (saltándose las 9 que hay en medio).

- (c) Identifique la técnica de muestreo que se utilizó en la encuesta.

[1]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

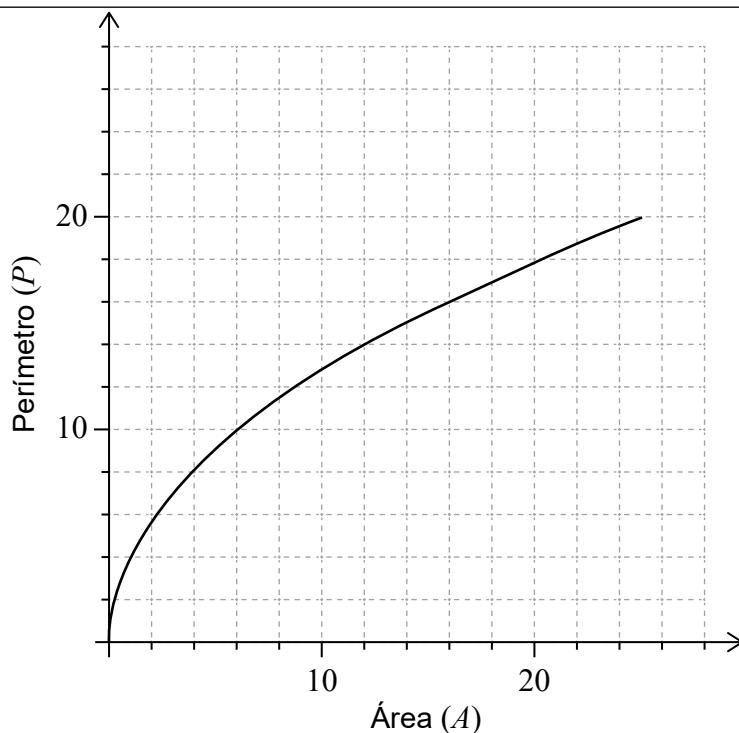


20EP05

Véase al dorso

**4.** [Puntuación máxima: 6]

El perímetro del cuadrado  $P$  se puede representar mediante la función  $P(A) = 4\sqrt{A}$ ,  $A \geq 0$ , donde  $A$  es el área del cuadrado. El gráfico de la función  $P$  se muestra para  $0 \leq A \leq 25$ .



- (a) Escriba el valor de  $P(25)$ .

[1]

El recorrido (imagen) de  $P(A)$  es  $0 \leq P(A) \leq n$ .

- (b) A partir de lo anterior, escriba el valor de  $n$ .

[1]

- (c) En estos mismos ejes de coordenadas dibuje con precisión el gráfico de la función inversa  $P^{-1}$ .

[3]

- (d) En el contexto de la pregunta, explique el significado de  $P^{-1}(8) = 4$ .

[1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



20EP06

(Pregunta 4: continuación)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



20EP07

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 6]

El catedrático Vinculum investigó la temporada de migración del ave bulbul, desde los humedales que constituyen su hábitat natural a un clima más templado.

Halló que durante la temporada migratoria la población ( $P$ ) de estas aves está modelada por  $P = 1350 + 400(1,25)^{-t}$ ,  $t \geq 0$ , donde  $t$  es el número de días transcurridos desde el comienzo de la temporada migratoria.

- (a) Halle la población de bulbules,
- (i) al inicio de la temporada migratoria.
  - (ii) en los humedales cuando han transcurrido 5 días. [3]
- (b) Calcule el tiempo que tarda la población en descender por debajo de los 1400 ejemplares. [2]
- (c) Conforme a este modelo, halle cuál es el valor mínimo de la población de bulbules durante la temporada migratoria. [1]



20EP08

**6.** [Puntuación máxima: 5]

Como parte de un estudio sobre estilos de vida saludable, Jing decidió visitar la Universidad de Surrey Hills. Allí fue anotando el puesto que ocupaba en la universidad cada entrevistado y con qué frecuencia comía una ensalada. Los resultados se muestran en la tabla.

		<b>Ensaladas por semana</b>			
		<b>0</b>	<b>1–2</b>	<b>3–4</b>	<b>&gt;4</b>
<b>Alumnos</b>	45	26	18	6	
<b>Profesores</b>	15	8	5	12	
<b>Personal y administración</b>	16	13	10	6	

Para determinar si hay independencia, Jing realizó una prueba (contraste) de  $\chi^2$  a un nivel de significación del 5%.

- (a) Indique la hipótesis nula. [1]
- (b) Calcule el valor del parámetro  $p$  correspondiente a esta prueba (contraste). [2]
- (c) Indique, dando una respuesta razonada, si se debería aceptar o no la hipótesis nula. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



20EP09

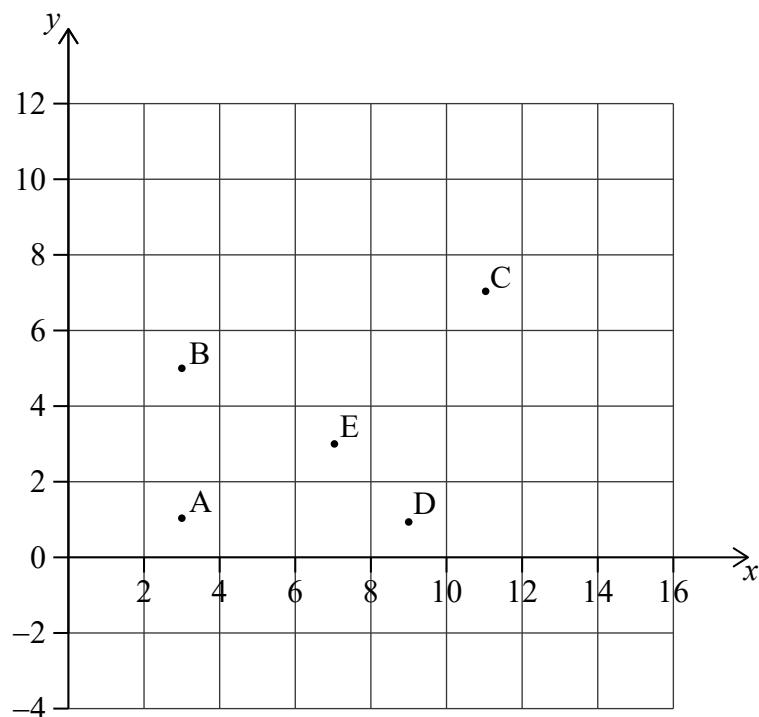
Véase al dorso

**7. [Puntuación máxima: 6]**

Los puntos A(3, 1), B(3, 5), C(11, 7), D(9, 1) y E(7, 3) representan los refugios que hay en el Parque Nacional Blackburn para resguardarse en caso de nevada. Estos refugios aparecen representados en los siguientes ejes de coordenadas.

Escala horizontal: 1 unidad representa 1 km.

Escala vertical: 1 unidad representa 1 km.



- (a) Calcule la pendiente del segmento de recta AE.

[2]

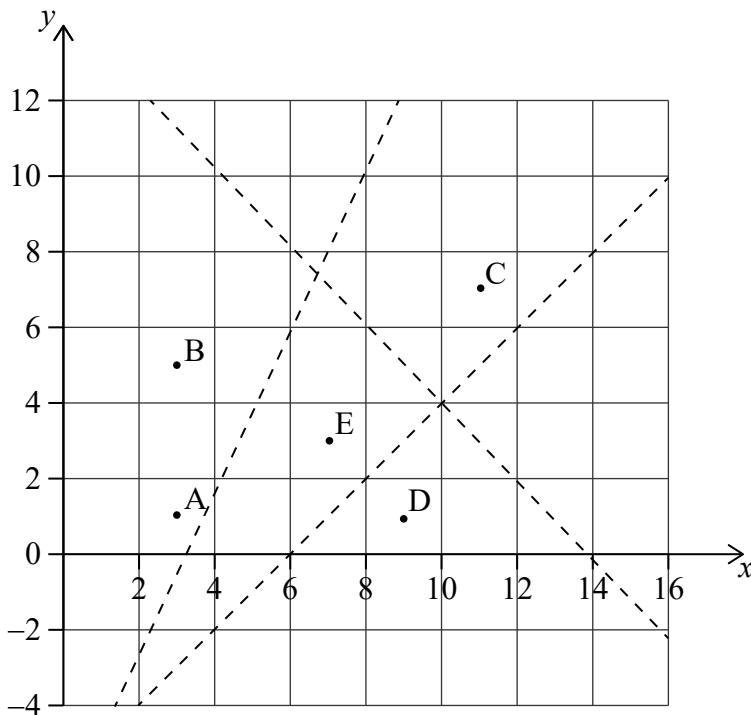
**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



20EP10

**(Pregunta 7: continuación)**

El guardia forestal traza tres rectas para formar un diagrama de Voronoi incompleto.



- (b) Halle la ecuación de la recta que completaría la celda de Voronoi que contiene al sitio E.  
Dé la respuesta en la forma  $ax + by + d = 0$  donde  $a, b, d \in \mathbb{Z}$ . [3]
- (c) En el contexto de la pregunta, explique el significado de la celda de Voronoi que contiene al sitio E. [1]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**8. [Puntuación máxima: 4]**

El nivel de intensidad del sonido ( $L$ ) medido en decibelios (dB) es una función de la intensidad del sonido ( $S$ ), en vatios por metro cuadrado ( $\text{W m}^{-2}$ ). Dicho nivel de intensidad viene dado por la siguiente fórmula:

$$L = 10 \log_{10}(S \times 10^{12}), S \geq 0$$

- (a) Hay una orquesta cuya intensidad del sonido es de  $6,4 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$ . Calcule el nivel de intensidad ( $L$ ) de la orquesta.

[2]

- (b) En un concierto de rock el nivel de intensidad es de 112 dB. Halle la intensidad del sonido ( $S$ ).

[2]



20EP12

**9.** [Puntuación máxima: 6]

La Sra. Calhoun mide la altura de los estudiantes de su clase de matemáticas. Le interesa saber si la media de las alturas de los chicos ( $\mu_1$ ) es igual que la media de las alturas de las chicas ( $\mu_2$ ). La información aparece recogida en la tabla.

<b>Altura de los chicos (cm)</b>	150	148	143	152	151	149	147
<b>Altura de las chicas (cm)</b>	148	152	154	147	146	153	152

Para comparar las medias de los dos grupos se utilizó una prueba  $t$  de Student a un nivel de significación del 10 %. Se supone que los datos siguen una distribución normal y que las desviaciones típicas de los dos grupos son iguales.

- (a) (i) Indique la hipótesis nula. [2]  
(ii) Indique la hipótesis alternativa. [2]
- (b) Calcule el valor del parámetro  $p$  correspondiente a esta prueba (contraste). [2]
- (c) Indique, dando una respuesta razonada que lo justifique, si la Sra. Calhoun debería aceptar o no la hipótesis nula. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

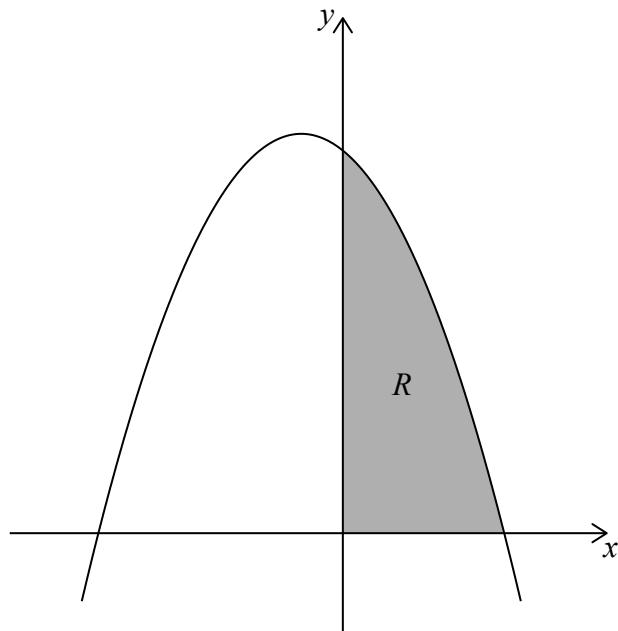
.....



20EP13

**10.** [Puntuación máxima: 5]

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de  $f(x) = (6 - 3x)(4 + x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . La región sombreada  $R$  está delimitada por el eje  $y$ , el eje  $x$  y el gráfico de  $f$ .



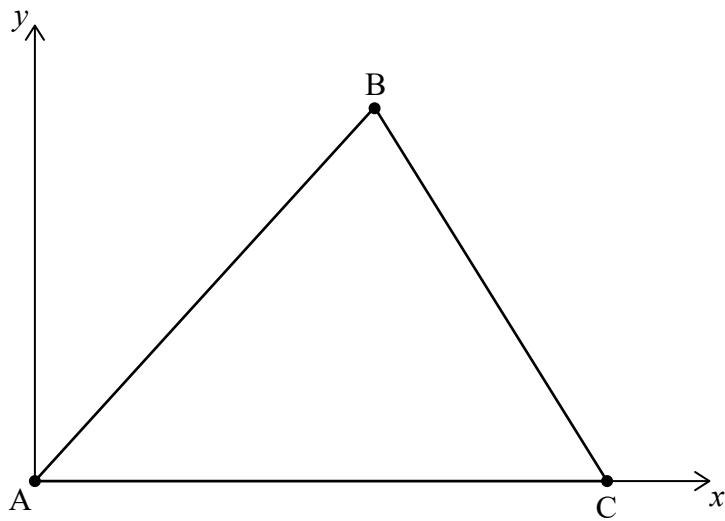
- (a) Escriba una integral para el área de la región  $R$ .

[2]

- (b) Halle el área de la región  $R$ .

[1]

Los tres puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 10)$  y  $C(a, 0)$  definen los vértices de un triángulo.



- (c) Halle el valor de  $a$ —la coordenada  $x$  de  $C$ —de modo tal que el área del triángulo sea igual al área de la región  $R$ .

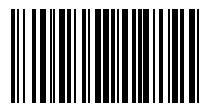
[2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



**(Pregunta 10: continuación)**

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



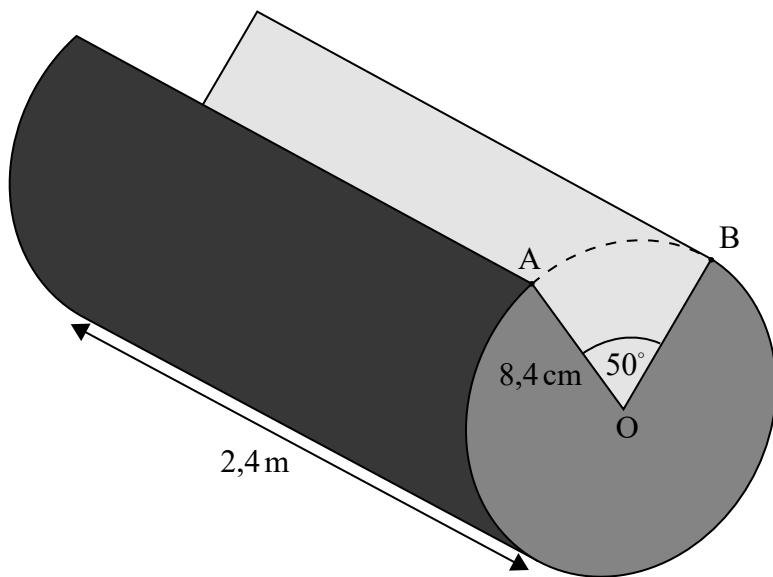
20EP15

Véase al dorso

**11. [Puntuación máxima: 4]**

Helen está construyendo una cabaña, utilizando para ello troncos cilíndricos de 2,4 m de largo y 8,4 cm de radio. De uno de los troncos se corta una cuña. La siguiente figura muestra la sección transversal de este tronco.

**la figura no está dibujada a escala**



Halle el volumen de este tronco.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**12.** [Puntuación máxima: 6]

Jae Hee juega a un juego con dado de seis caras no equilibrado.

Las caras del dado están rotuladas así:  $-3, -1, 0, 1, 2$  y  $5$ .

En este juego la puntuación ( $X$ ) que consigues es el número que queda hacia arriba cuando tiras el dado. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades correspondiente a  $X$ .

Puntuación $x$	-3	-1	0	1	2	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{18}$	$p$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{7}{18}$

- (a) Halle el valor exacto de  $p$ . [1]

Jae Hee juega una vez a este juego.

- (b) Calcule la puntuación esperada. [2]

Jae Hee juega dos veces a este juego y suma las puntuaciones obtenidas.

- (c) Halle la probabilidad de que Jae Hee obtenga una puntuación **total** de -3. [3]



**13. [Puntuación máxima: 6]**

El Sr. Burke da clases de matemáticas a un grupo de 15 estudiantes, de los cuales 6 son chicas y 9 son chicos.

Cada día el Sr. Burke elige al azar a un o una estudiante para que resuelva el ejercicio que mandó de deberes el día anterior.

- (a) Halle la probabilidad de que, en un día dado, el Sr. Burke elija para resolver el ejercicio a una chica. [1]

En el primer mes, el Sr. Burke da clase a este grupo en 20 ocasiones.

- (b) Halle la probabilidad de que elija a una chica en 8 ocasiones. [2]

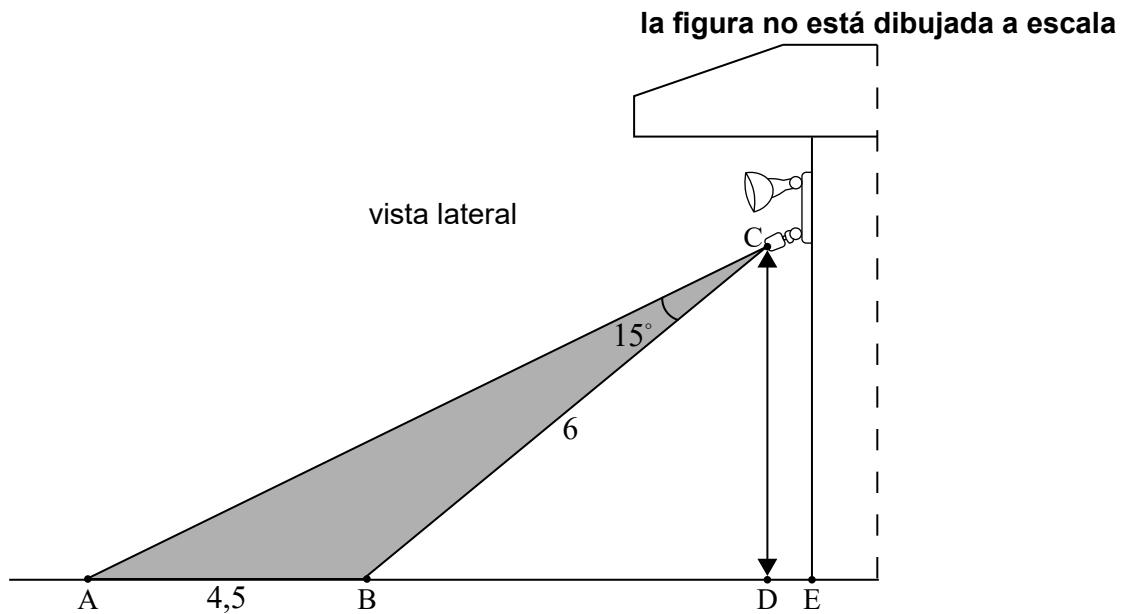
- (c) Halle la probabilidad de que elija a un chico como mucho en 9 ocasiones. [3]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**14.** [Puntuación máxima: 8]

Ollie ha instalado en la fachada lateral de su casa unas luces de seguridad que se activan mediante un sensor. El sensor está situado en el punto C, directamente encima del punto D. La región sombreada que encierra el triángulo ABC representa la zona que cubre el sensor. La distancia que hay entre A y B es igual a 4,5 m y entre B y C es igual a 6 m. El ángulo  $A\hat{C}B$  mide  $15^\circ$ .



- (a) Halle  $C\hat{A}B$ .

[3]

El punto B, situado a nivel del suelo, está a 5 m del punto E, que está en la entrada de la casa de Ollie. Ollie mide 1,8 m de alto y está de pie en el punto D, debajo del sensor, y empieza a caminar hacia el punto B.

- (b) Halle a qué distancia estará Ollie **de la entrada de su casa** cuando active por primera vez el sensor.

[5]

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en  
esta página no serán corregidas.



20EP20

# **Esquema de calificación**

## **Examen de muestra**

### **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

**Nivel medio**

**Prueba 1**

14 páginas

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1, A2**.

#### 2 Puntos de Método y puntos de Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio y hay que otorgar los puntos conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2, A3, etc**, **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontramos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

## Ejemplos

	<b>Respuesta correcta incluida</b>	<b>Desarrollo adicional incluido</b>	<b>Acción</b>
<b>1.</b>	$8\sqrt{2}$	$5,65685\dots$ <i>(valor decimal incorrecto)</i>	Conceda el <b>A1</b> final <i>(ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)</i>
<b>2.</b>	$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$	$\operatorname{sen} x$	No conceda el <b>A1</b> final
<b>3.</b>	$\log a - \log b$	$\log(a-b)$	No conceda el <b>A1</b> final

## 3 Puntuaciones implícitas

*Las puntuaciones implícitas se muestran entre paréntesis; p. ej., (M1). Solo se pueden conceder si se ha incluido el procedimiento correcto o si ha quedado implícito en otro procedimiento posterior*

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento aparezca escrito.

## 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo aplicables después de haberse cometido un error)

*Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los apartados de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados posteriores de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), tiene que estar incluido el desarrollo del ejercicio (seguido); no basta con que haya una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.*

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de  $r > 1$  para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita,  $\operatorname{sen} \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la/s respuesta/s final/es.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizás estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la/s respuesta/s correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

## 5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar los datos del enunciado de la pregunta, esto se considera un error de lectura (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar de su propio desarrollo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando se haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el desarrollo de la pregunta y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos, se ha de puntuar de acuerdo con el esquema de calificación.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos  
**MÉTODO 1**,  
**MÉTODO 2, etc.**
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN...O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, acepte formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas y algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

## 8 Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos incluidos en el esquema de calificación se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.*

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique expresamente lo contrario en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas que dé el alumno han de ser exactas o han de darse redondeando a tres cifras significativas.*»

## 9 Calculadoras

*Para este examen sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las que estén dotadas de un sistema algebraico computacional.*

### Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

*Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; no la notación de calculadora.*

**No** acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a) 210 g **A1**  
**[1 punto]**
- (b) 240 g **A1**  
**[1 punto]**
- (c)  $240 - 190$  **(M1)**  
 $= 50 \text{ g}$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (d)  $240 + 1,5 \times (50)$  **M1**  
 $= 315 \text{ g}$  **A1**  
**[2 puntos]**
- Total [6 puntos]**

2. (a)  $(d =) - 250$  **A1**  
**[1 punto]**
- (b)  $(u_{16} =) 6800 + (16 - 1)(- 250)$  **M1**  
 $(\$) 3050$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (c)  $(S_{16} =) \left( \frac{16}{2} \right) (2 \times 6800 + (16 - 1)(- 250)) \times 2$  **M1M1**

**Nota:** Conceda **M1** por sustituir correctamente los valores en la fórmula de la serie aritmética.  
Conceda **M1** si se ve explícitamente la multiplicación por 2.

**O BIEN**

$$(S_{16} =) \left( \frac{16}{2} \right) (6800 + 3050) \times 2$$
**M1M1**

**Nota:** Conceda **M1** por sustituir correctamente los valores en la fórmula de la serie aritmética.  
Conceda **M1** si se ve explícitamente la multiplicación por 2.

158 000 (¥) (157 600)

**A1**

**[3 puntos]**

**Total [6 puntos]**

3. (a) discretos

A1

[1 punto]

(b)  $\frac{24 + 60 + 3k + 40 + 15 + 6}{88+k} = 2$

M1A1

**Nota:** Conceda **M1** por sustituir los valores en la fórmula de la media; conceda **A1** por obtener una ecuación correcta.

por tratar de resolver su ecuación

(M1)

$k = 31$

A1

[4 puntos]

(c) sistemática

A1

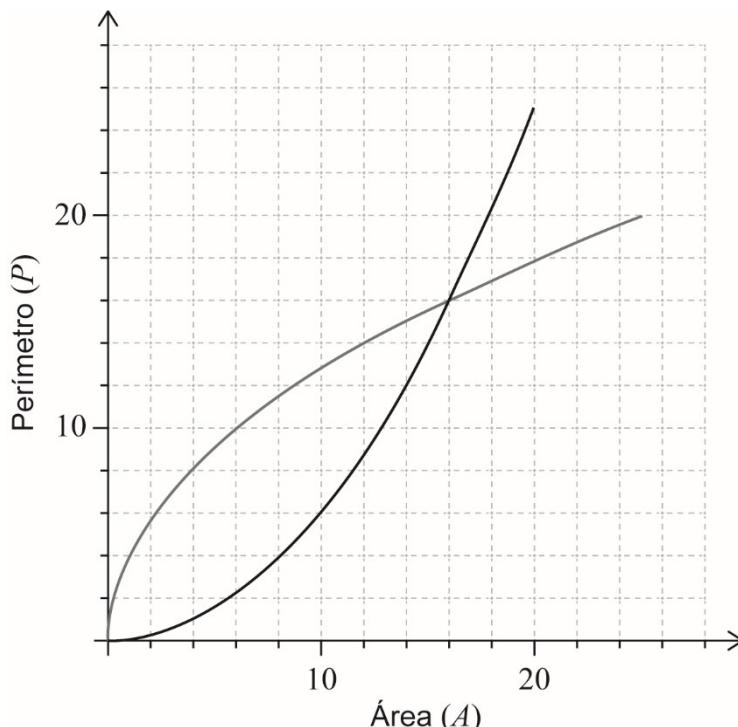
[1 punto]

**Total [6 puntos]**

4. (a) 20

**A1****[1 punto]**(b)  $n = 20$ **A1****Nota:** Arrastre a partir de la parte (a).**[1 punto]**

(c)

**(M1)A1A1****Nota:** Conceda **(M1)** por hacer una simetría respecto a la recta  $P = A$ ; conceda **A1** si un extremo es el punto (20, 25); conceda **A1** por pasar por el punto (16, 16).**[3 puntos]**

(d) cuando el perímetro es 8, el área es igual a 4

**A1****[1 punto]****Total [6 puntos]**

5. (a) (i) 1750

**A1**

(ii)  $1350 + 400 (1,25)^{-5}$

**(M1)**

$= 1480$

**A1****Nota:** Acepte 1481.**[3 puntos]**

(b)  $1400 = 1350 + 400 (1,25)^{-t}$

**(M1)**

9,32 (días (9,31885...)) (días))

**A1****[2 puntos]**

(c) 1350

**A1****Nota:** Acepte 1351 como una interpretación válida del modelo, ya que  $P=1350$  es una asíntota.**[1 punto]****Total [6 puntos]**

6. (a) el número de ensaladas que come una persona por semana es independiente del puesto que ocupa en la universidad

**A1****Nota:** Acepte “no está asociado (con)” en lugar de “es independiente”.**[1 punto]**

(b) 0,0201 (0,0201118...)

**A2****[2 puntos]**

(c)  $0,0201 < 0,05$

**R1**

la hipótesis nula se rechaza

**A1****[2 puntos]****Nota:** Conceda (**R1**) por comparar correctamente su valor del parámetro  $p$  con el nivel de la prueba (contraste); conceda (**A1**) por interpretar correctamente el resultado de dicha comparación. No conceda (**R0**)(**A1**).**Total [5 puntos]**

7. (a)  $\frac{3 - 1}{7 - 3}$  **(M1)**

$= 0,5$  **A1**

**[2 puntos]**

(b)  $y - 2 = -2(x - 5)$  **(A1)(M1)**

**Nota:** Conceda **(A1)** por incluir su  $-2$ ; conceda **(M1)** por haber sustituido correctamente en la ecuación de la recta el  $(5, 2)$  y su pendiente de la normal.

$2x + y - 12 = 0$  **A1**

**[3 puntos]**

- (c) todos los puntos de la celda están más cerca de E que de cualquier otro refugio

**A1**

**[1 punto]**

**Total [6 puntos]**

8. (a)  $10 \log_{10} (6,4 \times 10^{-3} \times 10^{12})$  **(M1)**

$= 98,1$  (dB)  $(98,06179\dots)$  **A1**

**[2 puntos]**

(b)  $112 = 10 \log_{10} (S \times 10^{12})$  **(M1)**

$0,158 (\text{W m}^{-2}) (0,158489\dots (\text{W m}^{-2}))$  **A1**

**[2 puntos]**

**Total [4 puntos]**

9. (a) (i)  $\mu_1 - \mu_2 = 0$

**A1**

(ii)  $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

**A1**

**Nota:** Acepte proposiciones equivalentes que estén escritas con palabras.

**[2 puntos]**

(b) 0,296 (0,295739...)

**A2****[2 puntos]**

(c)  $0,296 > 0,1$

**R1**

no se rechaza la hipótesis nula; no existen diferencias entre la media de la altura de los chicos y la de las chicas

**A1**

**Nota:** Conceda (**R1**) por comparar correctamente su valor del parámetro  $p$  con el nivel de la prueba (contraste); conceda (**A1**) por interpretar correctamente el resultado de dicha comparación. No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]****Total [6 puntos]**

10. (a)  $A = \int_0^2 (6-3x)(4+x)dx$

**A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por los límites  $x = 0, x = 2$ . Conceda **A1** por una integral de  $f(x)$ .

**[2 puntos]**

(b) 28

**A1****[1 punto]**

(c)  $28 = 0,5 \times a \times 10$

**M1**

$$5,6 \left( \frac{28}{5} \right)$$

**A1****[2 puntos]****Total [5 puntos]**

11. volumen =  $240 \left( \pi \times 8,4^2 - \frac{1}{2} \times 8,4^2 \times \frac{50 \times \pi}{180} \right)$  **M1M1M1**

**Nota:** Conceda **M1** por  $240 \times$  área ; conceda **M1** por sustituir correctamente los valores en la fórmula del área de un sector circular; conceda **M1** por restar al área del círculo su valor del área del sector.

$$= 45800 (= 45811,96071)$$

**A1****Total [4 puntos]**

12. (a)  $\frac{4}{18} \left( \frac{2}{9} \right)$  **A1**

**[1 punto]**

(b)  $-3 \times \frac{1}{18} + (-1) \times \frac{4}{18} + 0 \times \frac{3}{18} + \dots + 5 \times \frac{7}{18}$  **(M1)**

**Nota:** Conceda **(M1)** por sustituir correctamente su(s) valor(es) en la fórmula del valor esperado.

$$= 1,83 \left( \frac{33}{18}; 1,83333\dots \right)$$

**A1****[2 puntos]**

(c)  $2 \times \frac{1}{18} \times \frac{3}{18}$  **(M1)(M1)**

**Nota:** Conceda **(M1)** por  $\frac{1}{18} \times \frac{3}{18}$ ; conceda **(M1)** por multiplicar su producto por 2.

$$\frac{1}{54} \left( \frac{6}{324}; 0,0185185\dots; 1,85\% \right)$$

**A1****[3 puntos]****Total [6 puntos]**

13. (a)  $\frac{6}{15} \left( 0,4, \frac{2}{5} \right)$

A1

[1 punto]

(b)  $P(X = 8)$

(M1)

**Nota:** Conceda (M1) si hay pruebas de que el alumno ha reconocido la probabilidad binomial.

p. ej.,  $P(X = 8), X \sim B\left(20, \frac{6}{15}\right)$ .

= 0,180 (0,179705...)

A1

[2 puntos]

(c)  $P(\text{chico}) = \frac{9}{15} (0,6)$

A1

$P(X \leq 9) = 0,128 (0,127521...)$

(M1)A1

**Nota:** Conceda (M1) por dar pruebas de haber utilizado un enfoque correcto; p. ej.,  $P(X \leq 9)$ .

[3 puntos]

**Total [6 puntos]**

14. (a)  $\frac{\sin \hat{CAB}}{6} = \frac{\sin 15^\circ}{4,5}$  **(M1)(A1)**

$C \hat{A} B = 20,2^\circ$  (20,187415...) **A1**

**Nota:** Conceda **(M1)** por sustituir valores en la fórmula del teorema del seno y conceda **(A1)** por haber sustituido correctamente.

**[3 puntos]**

(b)  $C \hat{B} D = 20,2 + 15 = 35,2^\circ$  **A1**  
*(sea X el punto perteneciente a BD en el que Ollie activa el sensor)*

$$\tan 35,18741\dots^\circ = \frac{1,8}{BX} \quad \text{**(M1)**}$$

**Nota:** Conceda **A1** por su ángulo correcto  $C \hat{B} D$ . Conceda **M1** por haber sustituido correctamente valores en la relación trigonométrica.

$BX = 2,55285\dots$  **A1**

$$\begin{aligned} 5 - 2,55285\dots \\ = 2,45 \text{ (m)} (2,44714\dots) \end{aligned} \quad \text{**(M1)**}\quad \text{**A1**}$$

**[5 puntos]****Total [8 puntos]**

## Matemáticas: aplicaciones e interpretación

Nivel medio

Prueba 2

Examen de muestra

1 hora 30 minutos

---

### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

Página en blanco

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 17]

**En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos lugares decimales.**

Bryan decide comprarse un coche nuevo que tiene un precio de 14 000€, pero no se puede permitir pagar todo de golpe. El concesionario de coches le ofrece dos opciones de financiación para el préstamo:

**Opción de financiación A:**

Préstamo a 6 años, con un tipo de interés anual nominal del 14% **compuesto trimestralmente**. No hay que pagar entrada y los pagos del préstamo (es decir, los reembolsos) se realizan cada trimestre.

- (a) (i) Halle el reembolso que tiene que pagar cada trimestre.
- (ii) Halle la cantidad total que habrá pagado por el coche.
- (iii) Halle los intereses que ha pagado por el préstamo.

[7]

**Opción de financiación B:**

Préstamo a 6 años, con un tipo de interés anual nominal del  $r\%$  **compuesto mensualmente**. En las condiciones del préstamo se exige pagar un 10% de entrada y luego realizar pagos (reembolsos) mensuales de 250€.

- (b) (i) Halle la cantidad que podrá tomar prestada con esta opción.

- (ii) Halle el tipo de interés anual,  $r$ .

[5]

- (c) Indique cuál de las dos opciones de financiación debería elegir Bryan. Justifique su respuesta.

[2]

El coche de Bryan se deprecia a un ritmo anual del 25% cada año.

- (d) Halle cuál será el valor del coche de Bryan seis años después de haberlo comprado.

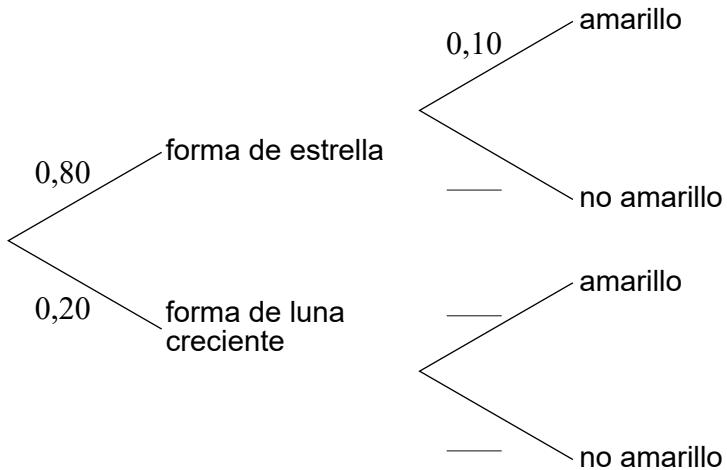
[3]

**2.** [Puntuación máxima: 14]

La empresa de golosinas *Slugworth Candy Company* vende una bolsa variada que contiene caramelos de distintas formas y colores.

De todos los caramelos que se elaboran, se sabe que el 80% tienen forma de estrella y el 20% tienen forma de luna creciente. Se sabe también que el 10% de las estrellas y el 30% de las lunas crecientes son de color amarillo.

- (a) Utilizando esta información, **copie** y complete el siguiente diagrama de árbol. [2]



- (b) Se escoge un caramelo al azar.

- (i) Halle la probabilidad de que el caramelo sea amarillo.  
(ii) Sabiendo que el caramelo es amarillo, halle la probabilidad de que tenga forma de estrella.

[4]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Según las especificaciones del fabricante, en cada bolsa de caramelos variados los colores deberían estar distribuidos como sigue:

<b>Color</b>	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
<b>Porcentaje (%)</b>	15	25	20	20	10	10

El Sr. Slugworth abre una bolsa que contiene 80 caramelos y anota la frecuencia con la que aparece cada color.

<b>Color</b>	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
<b>Frecuencia observada</b>	10	20	16	18	12	4

Para investigar si la muestra concuerda con las especificaciones del fabricante, el Sr. Slugworth realiza una prueba (contraste) de  $\chi^2$  para determinar la bondad del ajuste. La prueba se lleva a cabo a un nivel de significación del 5%.

- (c) Escriba la hipótesis nula para esta prueba. [1]
- (d) **Copie** la siguiente tabla en el cuadernillo de respuestas y complétela. [2]

<b>Color</b>	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
<b>Frecuencia esperada</b>						

- (e) Escriba el número de grados de libertad. [1]
- (f) Halle el valor del parámetro  $p$  correspondiente a esta prueba. [2]
- (g) Indique la conclusión de esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

**3.** [Puntuación máxima: 17]

El Centro Acuático Malvern organizó una competición de saltos desde el trampolín de 3 metros. Los jueces (Stan y Minsun) otorgaron a cada uno de los 8 participantes una puntuación de hasta 10 puntos. Los datos primarios se resumen en la siguiente tabla.

Participantes	A	B	C	D	E	F	G	H
Puntuación de Stan ( $x$ )	4,1	3	4,3	6	7,1	6	7,5	6
Puntuación de Minsun ( $y$ )	4,7	4,6	4,8	7,2	7,8	9	9,5	7,2

- (a) (i) Escriba el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson ( $r$ ).  
(ii) Utilizando ese valor de  $r$ , interprete la relación que existe entre las puntuaciones que concede Stan y las puntuaciones que concede Minsun. [4]
- (b) Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ . [2]
- (c) (i) Utilice la ecuación de regresión que halló en el apartado (b) para estimar cuál será la puntuación que concederá Minsun cuando Stan otorgue un 10 perfecto.  
(ii) Indique si esta estimación es fiable. Justifique su respuesta. [4]

El Comisario de la competición quiere hallar el coeficiente de correlación por rangos de Spearman.

- (d) Copie la siguiente tabla y complete la información que falta. [2]

Participantes	A	B	C	D	E	F	G	H
Rango de Stan		8					1	4
Rango de Minsun		8					1	4,5

- (e) (i) Halle el valor del coeficiente de correlación por rangos de Spearman ( $r_s$ ).  
(ii) Comente el valor de  $r_s$  que ha obtenido. [4]

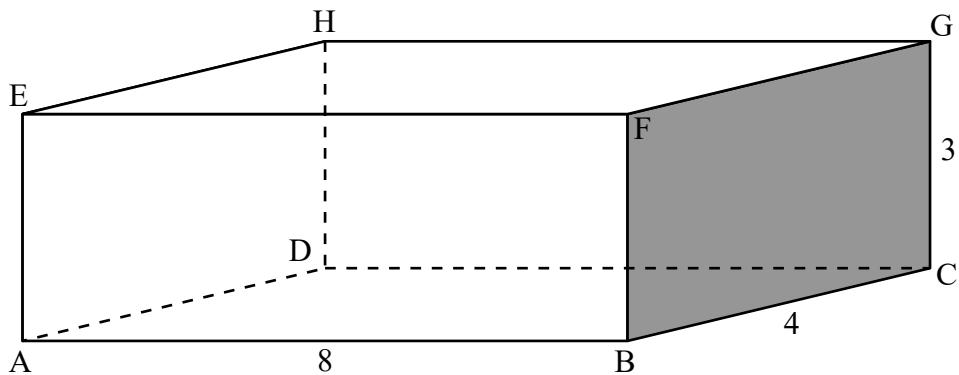
El Comisario cree que la puntuación que concedió Minsun al participante G es demasiado alta, así que decide bajársela de 9,5 a 9,1.

- (f) Explique por qué razón no varía el valor del coeficiente de correlación por rangos de Spearman ( $r_s$ ). [1]

**4.** [Puntuación máxima: 15]

La empresa *Happy Straw Company* fabrica pajitas para beber.

Las pajitas vienen envasadas en pequeñas cajas rectangulares cerradas; cada una mide 8 cm de largo, 4 cm de ancho y 3 cm de altura. Toda esta información se muestra en la figura.



- (a) Calcule (en  $\text{cm}^2$ ) el área de la superficie de la caja. [2]
- (b) Calcule la longitud AG. [2]

Todas las semanas, la empresa *Happy Straw Company* vende  $x$  cajas de pajitas. Se sabe que  $\frac{dP}{dx} = -2x + 220$ ,  $x \geq 0$ , donde  $P$  representa los beneficios semanales (en dólares, \$) que obtienen por la venta de  $x$  miles de cajas.

- (c) Halle el número de cajas que se deberían vender cada semana para maximizar los beneficios. [3]

Los beneficios que obtienen por la venta de 20 000 cajas son 1700 \$.

- (d) Halle  $P(x)$ . [5]
- (e) Halle el menor número de cajas que se tienen que vender cada semana para poder tener beneficios. [3]

**5.** [Puntuación máxima: 17]

La distancia de frenado de un vehículo se define como la distancia que recorre desde el lugar en el que se pisa el freno hasta el punto donde el vehículo se para completamente.

Se va anotando la velocidad ( $s \text{ m s}^{-1}$ ) y la distancia de frenado ( $d \text{ m}$ ) de un camión. Los datos recogidos se resumen en la siguiente tabla.

<b>Velocidad (<math>s \text{ m s}^{-1}</math>)</b>	0	6	10
<b>Distancia de frenado (<math>d \text{ m}</math>)</b>	0	12	60

Esta información se utilizó para crear el Modelo A, donde  $d$  es función de  $s$ ,  $s \geq 0$ .

$$\text{Modelo A: } d(s) = ps^2 + qs, \text{ donde } p, q \in \mathbb{Z}$$

Cuando la velocidad es de  $6 \text{ m s}^{-1}$ , el Modelo A se puede representar mediante la ecuación  $6p + q = 2$ .

- (a) (i) Escriba una segunda ecuación para representar el Modelo A cuando la velocidad es de  $10 \text{ m s}^{-1}$ . [4]
- (ii) Halle los valores de  $p$  y  $q$  [4]
- (b) Halle las coordenadas del vértice del gráfico de  $y = d(s)$ . [2]
- (c) Utilizando los valores de la tabla y la respuesta que dio en el apartado (b), dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = d(s)$  para  $0 \leq s \leq 10$  y  $-10 \leq d \leq 60$ , mostrando claramente el vértice. [3]
- (d) A partir de lo anterior, identifique por qué el Modelo A quizás no resulte apropiado a velocidades bajas. [1]

Se utilizaron una serie de datos adicionales para elaborar el Modelo B, que es un **modelo revisado** de la distancia de frenado de un camión.

$$\text{Modelo B: } d(s) = 0,95s^2 - 3,92s$$

- (e) Utilice el Modelo B para calcular una estimación de la distancia de frenado cuando la velocidad es de  $20 \text{ m s}^{-1}$ . [2]

La distancia de frenado real cuando el camión va a  $20 \text{ m s}^{-1}$  son 320m.

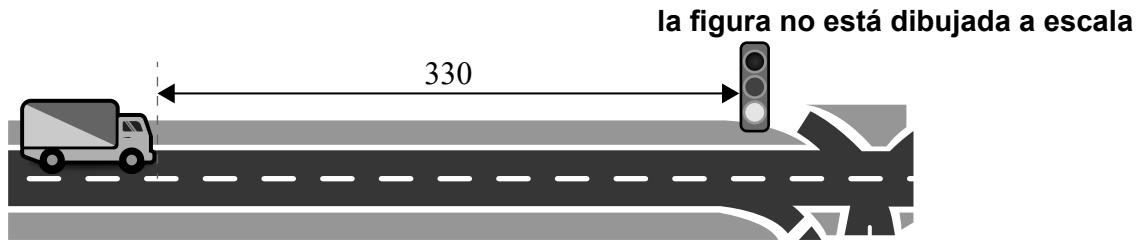
- (f) Calcule el porcentaje de error cometido en la estimación del apartado (e). [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 5: continuación)**

Se ha observado que una vez que el conductor se da cuenta de que tiene que detener el vehículo, transcurren en promedio 1,6 segundos hasta que pisa el freno. Durante este tiempo de reacción, el vehículo sigue moviéndose a la velocidad original.

Un camión se aproxima a un cruce a una velocidad de  $s \text{ m s}^{-1}$ . El conductor se da cuenta de que el semáforo del cruce está en rojo y que tiene que detener el vehículo dentro de una distancia de 330 m.



- (g) Utilizando el Modelo B y teniendo en cuenta el tiempo de reacción, calcule la velocidad máxima que puede llevar el camión para que logre pararse antes de llegar al cruce. [3]
-



# **Esquema de calificación**

## **Examen de muestra**

### **Matemáticas: aplicaciones e interpretación**

**Nivel medio**

**Prueba 2**

13 páginas

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Conceda los puntos utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1, A2**.

#### 2 Puntos de Método y puntos de Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio y hay que otorgar los puntos conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si los hay).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea es porque cada una se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2, A3, etc**, **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontramos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

## Ejemplos

	<b>Respuesta correcta incluida</b>	<b>Desarrollo adicional incluido</b>	<b>Acción</b>
<b>1.</b>	$8\sqrt{2}$	$5,65685\dots$ <i>(valor decimal incorrecto)</i>	Conceda el <b>A1</b> final <i>(ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)</i>
<b>2.</b>	$\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$	$\operatorname{sen} x$	No conceda el <b>A1</b> final
<b>3.</b>	$\log a - \log b$	$\log(a-b)$	No conceda el <b>A1</b> final

## 3 Puntuaciones implícitas

*Las puntuaciones implícitas se muestran entre paréntesis; p. ej., (M1). Solo se pueden conceder si se ha incluido el procedimiento correcto o si ha quedado implícito en otro procedimiento posterior*

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento aparezca escrito.

## 4 Puntuaciones de arrastre de error (solo aplicables después de haberse cometido un error)

*Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los apartados de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados posteriores de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), tiene que estar incluido el desarrollo del ejercicio (seguido); no basta con que haya una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.*

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de  $r > 1$  para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita,  $\operatorname{sen} \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la/s respuesta/s final/es.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizás estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la/s respuesta/s correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

## 5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar los datos del enunciado de la pregunta, esto se considera un error de lectura (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1,  $\sin \theta = 1,5$ , un valor no entero allí donde hay que dar uno entero), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar de su propio desarrollo, eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando se haya incluido el desarrollo del ejercicio. En aquellas preguntas de calculadora donde no esté incluido el desarrollo de la pregunta y se haya dado una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

## 6 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos, se ha de puntuar de acuerdo con el esquema de calificación.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos  
**MÉTODO 1**,  
**MÉTODO 2, etc.**
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN...O BIEN**.

## 7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, acepte formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas y algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

## 8 Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, uno de los puntos incluidos en el esquema de calificación se concederá por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.*

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique expresamente lo contrario en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas que dé el alumno han de ser exactas o han de darse redondeando a tres cifras significativas.*»

## 9 Calculadoras

*Para este examen sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las que estén dotadas de un sistema algebraico computacional.*

### Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

*Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; no la notación de calculadora.*

**No** acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a) (i)  $N = 24$

$$I\% = 14$$

$$VA = -14000$$

$$VF = 0$$

$$P/A = 4$$

$$C/A = 4$$

(M1)(A1)

**Nota:** Conceda **M1** por intentar utilizar una aplicación (*app*) financiera en la calculadora/medio tecnológico; conceda **A1** si todos los valores anteriores son correctos. Acepte  $VA = 14000$ .

$$871,82(\text{€})$$

A1

(ii)  $4 \times 6 \times 871,82$

(M1)

$$20923,68(\text{€})$$

A1

(iii)  $20923,68 - 14000$

(M1)

$$6923,68(\text{€})$$

A1

[7 puntos]

(b) (i)  $0,9 \times 14000 (= 14000 - 0,10 \times 14000)$

M1

$$12600,00(\text{€})$$

A1

(ii)  $N = 72$

$$VA = 12600$$

$$PMT = -250$$

$$VF = 0$$

$$P/A = 12$$

$$C/A = 12$$

(M1)(A1)

**Nota:** Conceda **M1** por intentar utilizar una aplicación (*app*) financiera en la calculadora/medio tecnológico; conceda **A1** si todos los valores anteriores son correctos. Acepte  $VA = -12600$ , siempre y cuando  $PMT = 250$ .

$$12,56(\%)$$

A1

[5 puntos]

continúa en la página siguiente...

*Continuación de la Pregunta 1*(c) **O BIEN**

Bryan debería elegir la Opción A

**A1**

no hay que pagar entrada

**R1**

**Nota:** Conceda **R1** por indicar que no hay que pagar una entrada.  
 Conceda **A1** por haber tomado la decisión correcta basándose en ese hecho. No conceda **R0A1**.

**O BIEN**

Bryan debería elegir la Opción B

**A1**coste de la Opción A (6923,69) > coste de la Opción B  
 $(72 \times 250 - 12600 = 5400)$ **R1**

**Nota:** Conceda **R1** por comparar correctamente los costes.  
 Conceda **A1** por haber tomado la decisión correcta basándose en esa comparación. No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]**

$$(d) 14000 \left(1 - \frac{25}{100}\right)^6$$

**(M1)(A1)**

**Nota:** Conceda **M1** por sustituir valores en la fórmula del interés compuesto. Conceda **A1** por hacer las sustituciones correctas.

$$= 2491,70 \text{ (USD)}$$

**A1****O BIEN**

$$N = 6$$

$$I\% = -25$$

$$VA = \pm 14000$$

$$P/A = 1$$

$$C/A = 1$$

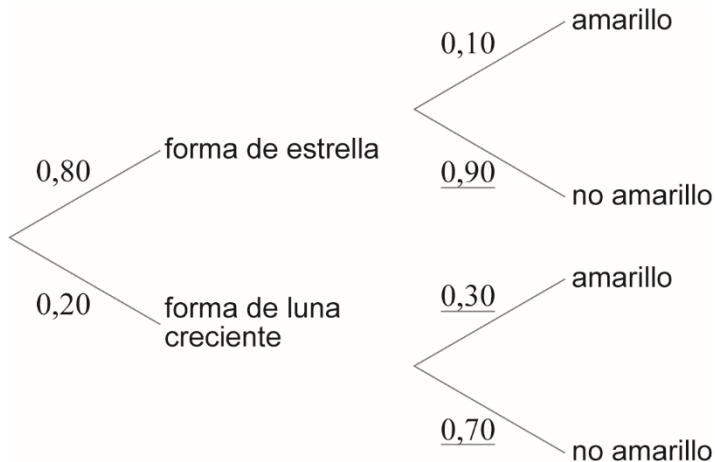
**(A1)(M1)**

**Nota:** Conceda **A1** por dar  $VA = \pm 14000$ , **M1** por otros valores correctos.

$$2491,70 \text{ (USD)}$$

**A1****[3 puntos]****Total [17 puntos]**

2. (a)

**A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por cada par de ramas que sea correcto.  
Acepte en las ramas valores decimales o valores  
porcentuales; considérelos formas equivalentes.

**[2 puntos]**

$$(b) \quad (i) \quad P(A) = 0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,3 \\ = 0,14$$

**M1****A1**

$$(ii) \quad P(\text{Estrella} | A) = \frac{0,8 \times 0,1}{0,14} \\ = 0,571 \left( \frac{4}{7}, 0,571428\dots \right)$$

**M1****A1****[4 puntos]**

(c) los colores de los caramelos están distribuidos según las especificaciones del fabricante

**A1****[1 punto]**

(d)

Color	Marrón	Rojo	Verde	Naranja	Amarillo	Morado
Frecuencia esperada	12	20	16	16	8	8

**A2**

**Nota:** Conceda **A2** por dar correctamente los 6 valores esperados, **A1** por dar solo 4 o 5 valores correctos y **A0** en el resto de casos.

**[2 puntos]**

(e) 5

**A1****[1 punto]**

(f) 0,469 (0,4688117...)

**A2****[2 puntos]***continúa en la página siguiente...*

*Continuación de la Pregunta 2*

(g) dado que  $0,469 > 0,05$

**R1**

no se rechaza la hipótesis nula. No hay pruebas suficientes que nos permitan rechazar las especificaciones del fabricante

**A1**

**Nota:** Conceda **R1** por comparar correctamente su valor correcto del parámetro  $p$  con el nivel de la prueba; conceda **A1** por obtener de dicha comparación el resultado correcto. No conceda **R0A1**.

**[2 puntos]**

**Total [14 puntos]**

3. (a) (i) 0,909 (0,909181...) **A2**

(ii) (muy) fuerte y positiva **A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por “(muy) fuerte”; **A1** por “positiva”.

**[4 puntos]**

(b)  $y = 1,14x + 0,578$  ( $y = 1,14033\dots x + 0,578183\dots$ ) **A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por  $1,14x$ ; **A1** por  $0,578$ . Concede como mucho **A1A0** si la respuesta no es una ecuación de la forma  $y = mx + c$ .

**[2 puntos]**

(c) (i)  $1,14 \times 10 + 0,578$  **M1**

12,0 (11,9814...) **A1**

(ii) no, la estimación no es fiable **A1**

está fuera del rango de datos conocidos **R1**

**O BIEN**

las puntuaciones mayores que 10 no son posibles **R1**

**Nota:** No conceda **A1R0**.

**[4 puntos]**

(d)

Participantes	A	B	C	D	E	F	G	H
Rango de Stan	7	8	6	4	2	4	1	4
Rango de Minsun	7	8	6	4,5	3	2	1	4,5

**A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** si los rangos de Stan son correctos. Concede **A1** si los rangos de Minsun son correctos.

**[2 puntos]**

(e) (i) 0,933 (0,932673...) **A2**

(ii) Stan y Minsun están muy de acuerdo en la clasificación (ranking) de los participantes **A1A1**

**Nota:** Concede **A1** por “están muy de acuerdo”; **A1** por hacer referencia a la clasificación / ranking / orden en el que los participantes han quedado.

**[4 puntos]**

(f) el bajar la puntuación a 9,1 no hace que cambie el rango del participante G **A1**

**[1 punto]**

**Total [17 puntos]**

4. (a)  $2(8 \times 4 + 3 \times 4 + 3 \times 8)$  **M1**  
 $= 136 \text{ (cm}^2\text{)}$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (b)  $\sqrt{8^2 + 4^2 + 3^2}$  **M1**  
 $(AG =) 9,43 \text{ (cm)} (9,4339\dots, \sqrt{89})$  **A1**  
**[2 puntos]**
- (c)  $-2x + 220 = 0$  **M1**  
 $x = 110$  **A1**  
110 000 (cajas) **A1**  
**[3 puntos]**
- (d)  $P(x) = \int -2x + 220 \, dx$  **M1**

**Nota:** Conceda **M1** si hay pruebas de que ha hecho la integral.

$$P(x) = -x^2 + 220x + c$$
 **A1A1**

**Nota:** Conceda **A1** por dar o bien  $-x^2$  o  $220x$ ; conceda **A1** por dar ambos términos (y que sean correctos) y dar además la constante de integración.

$$1700 = -(20)^2 + 220(20) + c$$
 **M1**

$$c = -2300$$

$$P(x) = -x^2 + 220x - 2300$$
 **A1**  
**[5 puntos]**

- (e)  $-x^2 + 220x - 2300 = 0$  **M1**  
 $x = 11,005$  **A1**  
11 006 (cajas) **A1**

**Nota:** Conceda **M1** por plantear su  $P(x) = 0$ ; conceda **A1** por dar la solución correcta de su ecuación para  $x$ . Conceda el **A1** final por expresar su solución indicando el mínimo número de cajas. No acepte 11 005 (que es el número entero más próximo) ni tampoco 11 000 (que es la respuesta tras redondear a 3 cifras significativas) puesto que ninguna de las dos respuestas cumple los requisitos planteados en el enunciado de la pregunta.

**[3 puntos]**

**Total [15 puntos]**

5. (a) (i)  $p(10)^2 + q(10) = 60$  **M1**

$10p + q = 6 \quad (100p + 10q = 60)$  **A1**

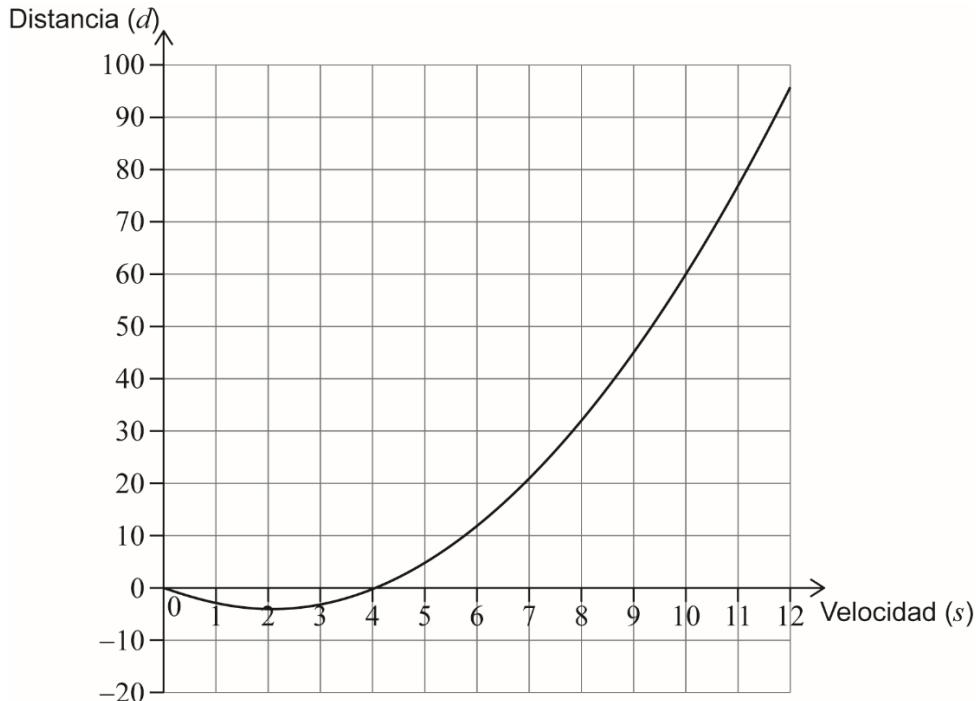
(ii)  $p = 1, q = -4$  **A1A1**

**Nota:** Si  $p$  y  $q$  son incorrectos los dos, conceda **M1A0** por el intento de resolver el sistema de ecuaciones.

(b)  $(2, -4)$  **[4 puntos]**

**Nota:** Conceda **A1** por cada coordenada que sea correcta.  
Conceda **A0A1** si faltan los paréntesis.

(c) **[2 puntos]**



**A3**

**Nota:** Conceda **A1** por trazar una curva cuadrática suave en unos ejes rotulados y dentro de la ventana correcta.

Conceda **A1** si la curva pasa por el  $(0, 0)$  y por el  $(10, 60)$ .

Conceda **A1** si la curva pasa por el vértice hallado por el alumno. Se pueden otorgar puntos de arrastre de error desde el apartado (b).

**[3 puntos]**

(d) el gráfico indica que existen distancias de frenado negativas (para velocidades bajas)

**R1**

**Nota:** Conceda **R1** por identificar alguna característica en su gráfico que implica que hay distancias de frenado negativas (vértice, rango de distancias de frenado...).

**[1 punto]**

continúa en la página siguiente...

*Continuación de la Pregunta 5*

(e)  $0,95 \times 20^2 - 3,92 \times 20$  **(M1)**

= 302(m) (301,6...) **A1**

**[2 puntos]**

(f)  $\left| \frac{301,6 - 320}{320} \right| \times 100$  **M1**

= 5,75(%) **A1**

**[2 puntos]**

(g)  $330 = 1,6 \times s + 0,95 \times s^2 - 3,92 \times s$  **M1A1**

**Nota:** Conceda **M1** por tratar de hallar una expresión donde se incluya la distancia de frenado (modelo B) y la distancia de reacción, e igualarla luego a 330. Conceda **A1** por plantear una ecuación que sea completamente correcta.

19,9( $\text{ms}^{-1}$ ) (19,8988...) **A1**

**[3 puntos]**

**Total [17 puntos]**