Programa del Diploma

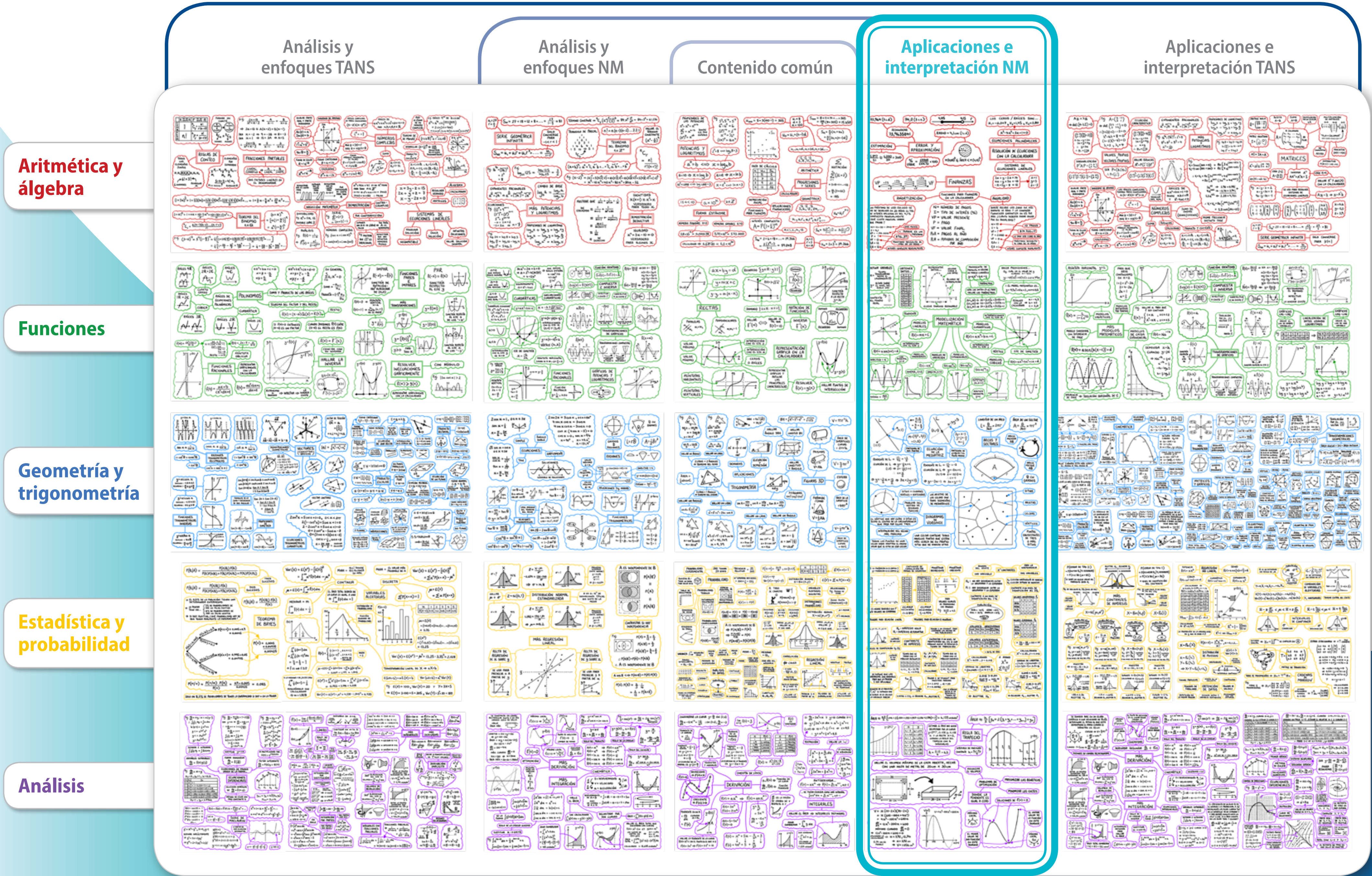
Mapa conceptual de Matemáticas

Aplicaciones e interpretación NM

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



Aritmética y álgebra

ERROR Y APROXIMACIÓN

REDONDEAR 73,9635041

73,964 (3 c.d.)

74,0 (3 c.s.)

RADIO = 4,1 cm (1 c.d.)

4,05 — 4,15 — r

$\pi(4{,}05)^2 \leq$ ÁREA $< \pi(4{,}15)^2$

4.1

ESTIMACIÓN

$\frac{5.897}{21} \approx \frac{6.000}{20} = 300$

$\%\ \text{ERROR} = \frac{\text{ERROR}}{\text{EXACTO}} \times 100$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON LA CALCULADORA

ECUACIONES POLINÓMICAS

$x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$

LOS CEROS / RAÍCES SON... $x_1 = -0{,}247$, $x_2 = 1{,}45$, $x_3 = 2{,}80$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 14 \\ 4x - y + 3z &= -10 \\ -x + 2y - z &= 12 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 5 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

FINANZAS

VP +I% +P +I% +P +I% +P +I% VF

FUNCIONES PARA FINANZAS EN LA CALCULADORA

- N = NÚMERO DE PAGOS
- I = TIPO DE INTERÉS (%)
- VP = VALOR PRESENTE
- P = PAGO
- VF = VALOR FINAL
- PpA = PAGOS AL AÑO
- PcA = PERIODOS DE COMPOSICIÓN POR AÑO

AMORTIZACIÓN

UN PRÉSTAMO DE USD 150.000 SE HA DE DEVOLVER EN 20 AÑOS. EL TIPO DE INTERÉS APLICADO ES DEL 4,1% COMPUESTO MENSUALMENTE. ¿QUÉ CUOTA MENSUAL HABRÁ QUE PAGAR?

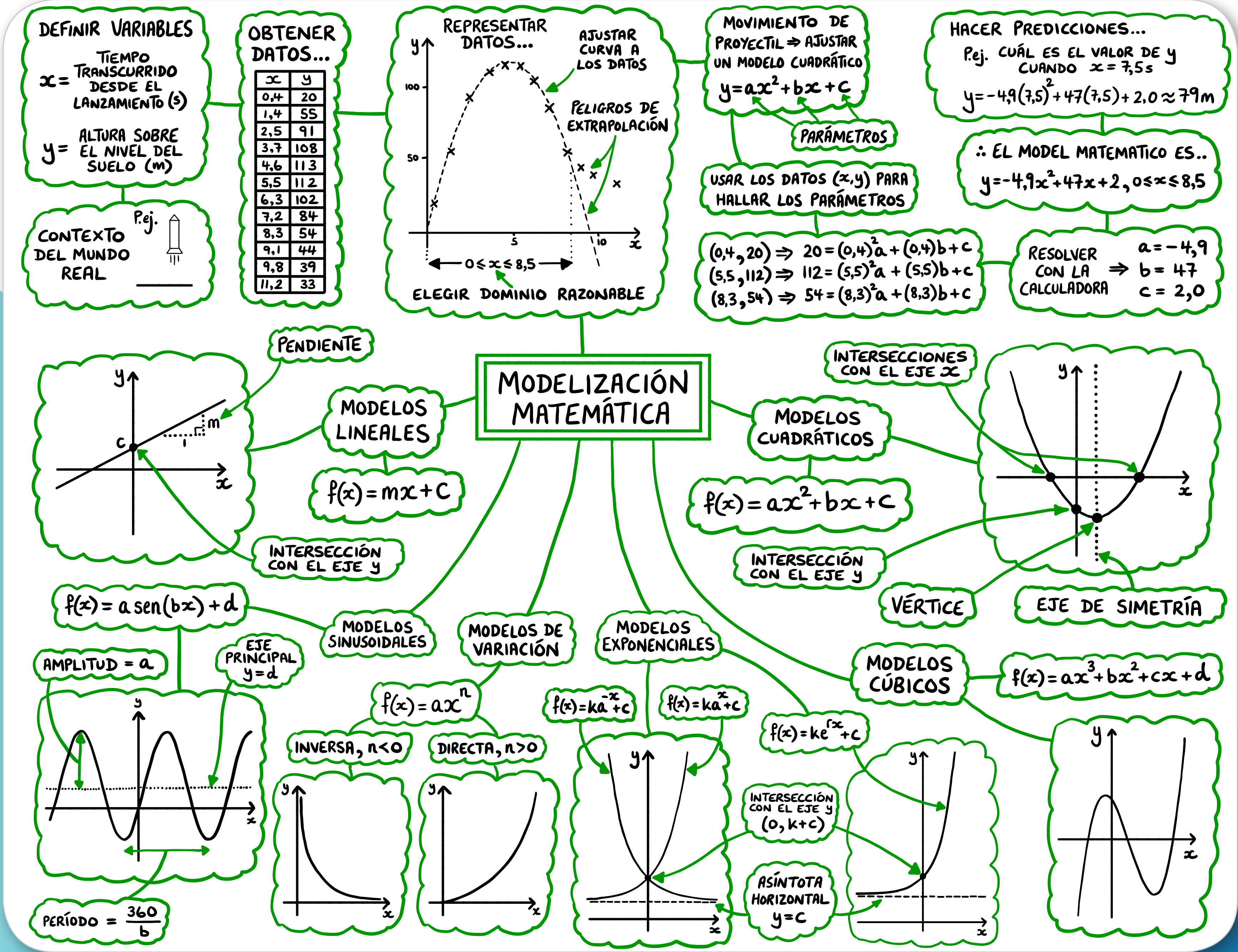
- N = 12 × 20 = 240 ← 240 MESES
- I = 4,1
- VP = −150.000 ← − PORQUE ES UN PRÉSTAMO
- P = ? ← $916,89
- VF = 0 ← PRESTAMO DEVUELTO AL CABO DE 20 AÑOS
- PpA = 12
- PcA = 12 ← INTERÉS COMPUESTO MENSUALMENTE

ANUALIDAD

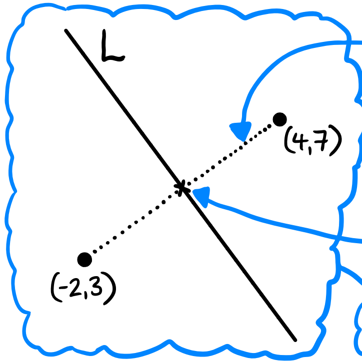
QUIERE RECIBIR USD 2000 POR AÑO DURANTE 10 AÑOS Y LA COMPAÑÍA FINANCIERA GARANTIZA UN 6% POR AÑO. ¿CUÁNTO DEBERÍA PAGAR AHORA POR SU ANUALIDAD?

- N = 10 ← 10 PAGOS
- I = 6
- VP = ? ← $14.720,17
- P = 2.000 ← LE DAN USD 2.000 AL AÑO
- VF = 0 ← PRÉSTAMO DEVUELTO AL CABO DE 10 AÑOS
- PpA = 1
- PcA = 1 ← INTERÉS COMPUESTO ANUALMENTE

Funciones


MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
DEFINIR VARIABLES
x = TIEMPO TRANSCURRIDO DESDE EL LANZAMIENTO (s)
y = ALTURA SOBRE EL NIVEL DEL SUELO (m)
CONTEXTO DEL MUNDO REAL
P.ej.
OBTENER DATOS...
x y
0,4 20
1,4 55
2,5 91
3,7 108
4,6 113
5,5 112
6,3 102
7,2 84
8,3 54
9,1 44
9,8 39
11,2 33
REPRESENTAR DATOS...
AJUSTAR CURVA A LOS DATOS
PELIGROS DE EXTRAPOLACIÓN
y
100
50
5
10
x
0 ≤ x ≤ 8,5
ELEGIR DOMINIO RAZONABLE
MOVIMIENTO DE PROYECTIL ⇒ AJUSTAR UN MODELO CUADRÁTICO
y = ax² + bx + c
PARÁMETROS
USAR LOS DATOS (x,y) PARA HALLAR LOS PARÁMETROS
(0,4, 20) ⇒ 20 = (0,4)²a + (0,4)b + c
(5,5, 112) ⇒ 112 = (5,5)²a + (5,5)b + c
(8,3, 54) ⇒ 54 = (8,3)²a + (8,3)b + c
RESOLVER CON LA CALCULADORA ⇒ a = −4,9 b = 47 c = 2,0
∴ EL MODEL MATEMATICO ES..
y = −4,9x² + 47x + 2,0 ≤ x ≤ 8,5
HACER PREDICCIONES...
P.ej. CUÁL ES EL VALOR DE y CUANDO x = 7,5 s
y = −4,9(7,5)² + 47(7,5) + 2,0 ≈ 79 m
MODELOS LINEALES
PENDIENTE
f(x) = mx + C
c
m
1
y
x
INTERSECCIÓN CON EL EJE y
MODELOS CUADRÁTICOS
f(x) = ax² + bx + c
INTERSECCIONES CON EL EJE x
INTERSECCIÓN CON EL EJE y
VÉRTICE
EJE DE SIMETRÍA
MODELOS SINUSOIDALES
f(x) = a sen(bx) + d
AMPLITUD = a
EJE PRINCIPAL y = d
PERÍODO = 360/b
MODELOS DE VARIACIÓN
f(x) = axⁿ
INVERSA, n<0
DIRECTA, n>0
MODELOS EXPONENCIALES
f(x) = ka⁻ˣ + c
f(x) = kaˣ + c
f(x) = ke^{rx} + c
INTERSECCIÓN CON EL EJE y (0, k+c)
ASÍNTOTA HORIZONTAL y = c
MODELOS CÚBICOS
f(x) = ax³ + bx² + cx + d

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



$m = \frac{7-3}{4--2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (1,5)$

PARTIENDO DE DOS PUNTOS

Pendiente de $L = \frac{-1}{2/3} = \frac{-3}{2}$

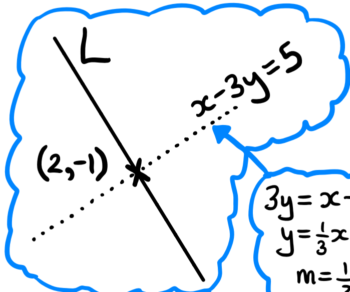
Ecuación de $L \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + c$

$(1,5) \Rightarrow 5 = -\frac{3}{2}(1) + c$

$\therefore c = \frac{13}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow 3x + 2y = 13$

ECUACIÓN DE LA MEDIATRIZ



$3y = x - 5$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

$m = \frac{1}{3}$

PARTIENDO DE LA RECTA Y EL PUNTO MEDIO

Pendiente de $L = \frac{-1}{1/3} = -3$

Ecuación de $L \Rightarrow y = -3x + c$

$(2,-1) \Rightarrow 2 = -3(-1) + c$

$\therefore c = -1$

$\Rightarrow y = -3x - 1 \Rightarrow 3x + y = -1$

ARCOS Y SECTORES

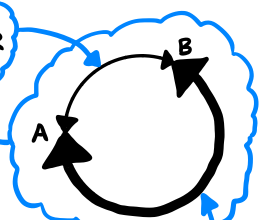
LONGITUD DE UN ARCO

$l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

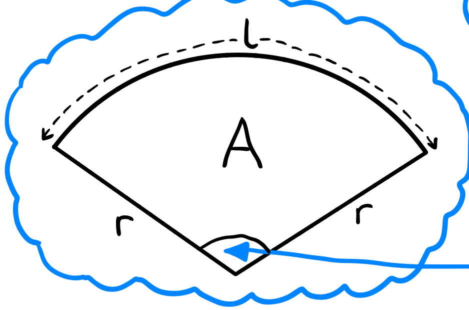
ÁREA DE UN SECTOR

$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ARCO MENOR AB

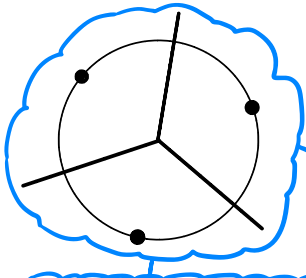


ARCO MAYOR AB



θ EN GRADOS

DIAGRAMAS DE VORONOI



SITIOS = CIUDADES

VÉRTICES = VERTEDEROS

PROBLEMA DEL VERTIDO DE RESIDUOS TÓXICOS

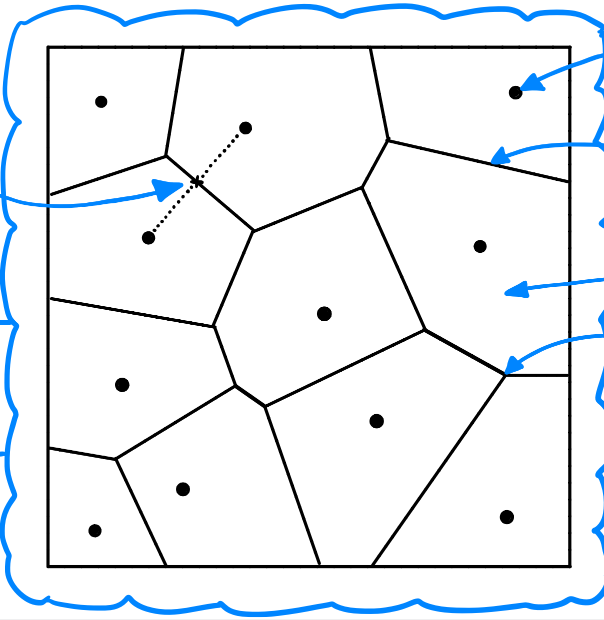
EL VÉRTICE QUE HAY ENTRE 3 SITIOS ES JUSTO EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR ELLOS TRES.

INTERPOLACIÓN DEL VECINO MÁS PRÓXIMO

TODOS LOS PUNTOS DE UNA CELDA DADA ADOPTAN EL MISMO VALOR QUE EL SITIO DE ESA CELDA

LAS ARISTAS DE LAS CELDAS SON TODAS SEGMENTOS DE MEDIATRICES

UNA CELDA CONTIENE TODOS AQUELLOS PUNTOS QUE ESTÁN MÁS CERCA DE SU PROPIO SITIO QUE DE NINGÚN OTRO.



SITIOS

ARISTAS

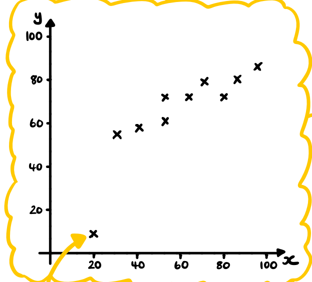
CELDAS

VÉRTICES

PUNTOS EQUIDISTANTES DE TRES O MÁS SITIOS

Estadística y probabilidad

P.ej. x = PUNTUACIÓN EN EL EXAMEN 1
y = PUNTUACIÓN EN EL EXAMEN 2



r_s ES MENOS SENSIBLE QUE r ANTE VALORES NO ESPERADOS

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN POR RANGOS DE SPEARMAN

x	y
20	9
30	56
41	58
53	61
53	72
64	72
71	79
80	72
85	80
96	85

RANGO x	RANGO y	d
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4,5	4	0,5
4,5	6	-1,5
6	6	0
7	8	-1
8	6	2
9	9	0
10	10	0

CCMRP CON LOS DATOS $r = 0.842$

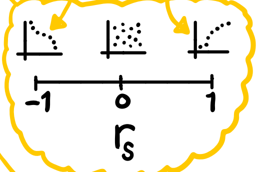
CCMRP CON LOS RANGOS $r_s = 0.954$

PRUEBAS PARA RELACIÓN LINEAL

PRUEBAS PARA RELACIÓN ES MONÓTONA

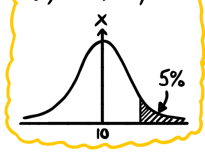
MONÓTONA DECRECIENTE

MONÓTONA CRECIENTE



PARA VALORES IGUALES SE PROMEDIAN LOS RANGOS
P.ej. $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$

$H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu > 10$



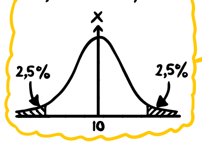
CONTRASTE DE UNA COLA

H_0: HIPÓTESIS NULA
H_1: HIPÓTESIS ALTERNATIVA

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

NIVELES DE SIGNIFICACIÓN P.ej. 5%

$H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$



CONTRASTE DE DOS COLAS

PRUEBA t DE STUDENT PARA COMPARAR LAS MEDIAS DE DOS POBLACIONES

CONTRASTAR A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 5% SI UNA MÁQUINA NUEVA HA REDUCIDO EL TIEMPO DE FABRICACIÓN

TIEMPO QUE SE TARDA CON LA MÁQUINA ANTIGUA (s)

51,9	52,7	52,6	52,5	53,1	54,0
53,6	53,0	53,3	52,9	51,7	54,1

$n_1 = 12$, $\bar{x}_1 = 52{,}95$
$s_1 = 0{,}7416$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$

CONTRASTE DE UNA COLA

CALCULADORA

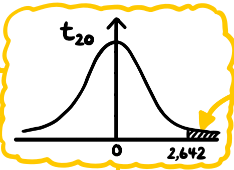
TIEMPO QUE SE TARDA CON LA MÁQUINA NUEVA (s)

52,1	51,3	52,4	53,2	51,8
51,0	51,8	52,8	52,3	52,7

$n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 52{,}14$
$s_2 = 0{,}6835$

SE SUPONE QUE LAS VARIANZAS SON NORMALES PARA QUE LA PRUEBA t SEA APLICABLE

VARIANZAS DE LA POBLACIÓN σ_1^2, σ_2^2 SE SUPONEN QUE SON IGUALES ⇒ SE CALCULA LA VARIANZA PAREDA



PRUEBA t DE STUDENT PARA MUESTRAS PAREDAS
$t = 2{,}642$, $dl = 20$
$p = 0{,}00782$

$0{,}00782 < 5\%$ ⇒ RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

CON LA MÁQUINA NUEVA SE HA REDUCIDO EL TIEMPO DE FABRICACIÓN

χ^2 CONTRASTES

BONDAD DEL AJUSTE

UNA VARIABLE

H_0: NO HAY DIFERENCIAS ENTRE LO OBSERVADO Y LO ESPERADO
H_1: HAY DIFERENCIA ENTRE LO OBSERVADO Y LO ESPERADO

CONTRASTE A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 1%

POBLACIÓN
ROJO = 40% VERDE = 20%
AZUL = 30% AMARILLO = 10%
MUESTRA

VALORES OBSERVADOS

COLOR	ROJO	AZUL	VERDE	AMARILLO	TOTAL
f_o	74	40	17	19	150

VALORES ESPERADOS

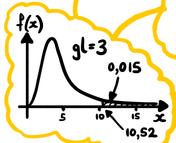
COLOR	ROJO	AZUL	VERDE	AMARILLO	TOTAL
f_e	60	45	30	15	150

= 30% DE 150

CALCULADORA
$\chi^2 = 10{,}52$, $p = 0{,}015$

GRADOS DE LIBERTAD = (COLUMNAS − 1) = 4 − 1 = 3

A MANO
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$



$0{,}015 > 0{,}01$
VALOR DE PARAM. p < NIVEL DE SIG.

$10{,}52 < 11{,}34$
$\chi^2_{calc} < \chi^2_{crit}$

⇒ ACEPTAR H_0

PARA LA INDEPENDENCIA

DOS VARIABLES

H_0: ELECCIÓN INDEPENDIENTE DE INGRESOS
H_1: ELECCIÓN DEPENDE DE INGRESOS

CONTRASTE A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 5%

VALORES OBSERVADOS f_o

	A	B	C	D	
BAJO	13	19	7	11	50
MEDIO	5	9	5	11	30
ALTO	12	12	13	3	40
	30	40	25	25	120

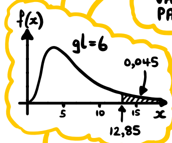
VALORES ESPERADOS f_E

	A	B	C	D	
BAJO	12,5	16,7	10,4	10,4	50
MEDIO	7,5	10,0	6,3	6,3	30
ALTO	10,0	13,3	8,3	8,3	40
	30	40	25	25	120

$= \frac{40}{120} \times \frac{30}{120} \times 120 = 10$

CALCULADORA
$\chi^2 = 12{,}85$, $p = 0{,}045$

GRADOS DE LIBERTAD = (FILAS − 1)(COLUMNAS − 1) = (3 − 1)(4 − 1) = 2 × 3 = 6



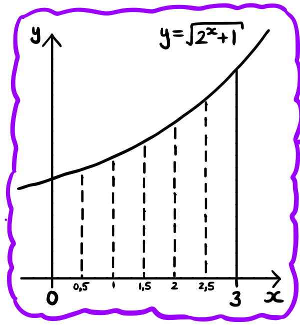
$0{,}045 < 0{,}05$
VALOR DE PARAM. p < NIVEL DE SIG.

$12{,}85 > 12{,}59$
$\chi^2_{calc} > \chi^2_{crit}$

⇒ RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

Análisis

$$\text{ÁREA} \approx \frac{0{,}5}{2}\left[1{,}414 + 2(1{,}554 + 1{,}732 + 1{,}957 + 2{,}236 + 2{,}580) + 3\right] = 6{,}133 \text{ unidades}^2$$



x	y
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}414$
$x_1 = 0{,}5$	$y_1 = 1{,}554$
$x_2 = 1$	$y_2 = 1{,}732$
$x_3 = 1{,}5$	$y_3 = 1{,}957$
$x_4 = 2$	$y_4 = 2{,}236$
$x_5 = 2{,}5$	$y_5 = 2{,}580$
$x_6 = 3$	$y_6 = 3{,}000$

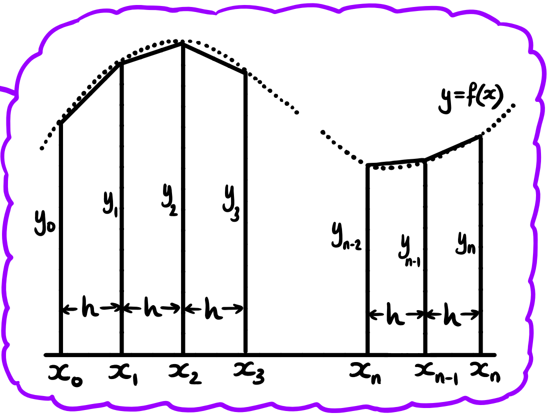
ESTIMAR EL ÁREA QUE QUEDA DELIMITADA POR LA CURVA $y=\sqrt{2^x+1}$, EL EJE y, EL EJE x Y LA RECTA $x=3$, USANDO LA REGLA DEL TRAPECIO CON 6 INTERVALOS

$$h = \frac{3-0}{6} = 0{,}5$$

$$\text{ÁREA} \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n\right]$$

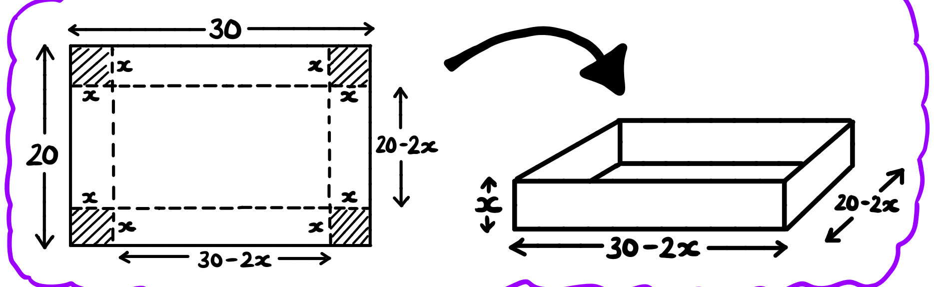
REGLA DEL TRAPECIO

INTERVALO DE ANCHURA CONSTANTE $h = \frac{x_n - x_0}{n}$



HALLAR EL VOLUMEN MÁXIMO DE LA CAJA ABIERTA, HECHA CON UNA HOJA DE METAL DE 20 cm × 30 cm

MAXIMIZAR EL VOLUMEN



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

MAXIMIZAR LOS BENEFICOS

MINIMIZAR LOS COSTES

DONDE LA PENDIENTE ES IGUAL A CERO

SOLUCIONES DE $f'(x) = 0$

$$V = x(20-2x)(30-2x)$$
$$= x(600 - 100x + 4x^2)$$
$$= 4x^3 - 100x^2 + 600x$$
$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$$

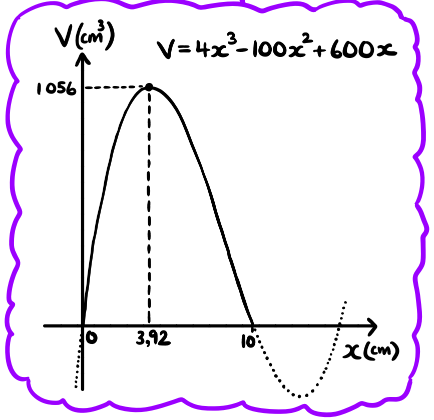
MÁXIMO CUANDO $\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0$

UTILIZANDO LA CALCULADORA $\Rightarrow x = 3{,}92,\ 12{,}74$

12,74 NO ES POSIBLE $\Rightarrow x = 3{,}92$ cm

$\Rightarrow V = 1056$ cm^3

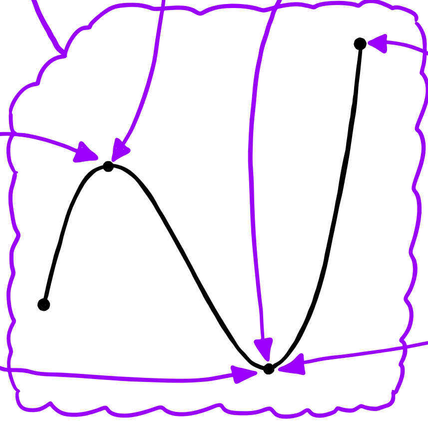


MÁXIMO LOCAL

+ 0 −

$f'(x)$

EL MENOR VALOR DE UNA FUNCIÓN EN ESTE DOMINIO



EL MAYOR VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESTE DOMINIO

MÍNIMO LOCAL

$f'(x)$

− 0 +