Filtros Digitais FIR (Finite Impulse Response)

Prof. Juan Mauricio Villanueva
jmauricio@cear.ufpb.br

Filtros FIR (Finite Impulse Response)

- Para um sistema FIR de ordem M

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k]}$$

- Com função de transferência

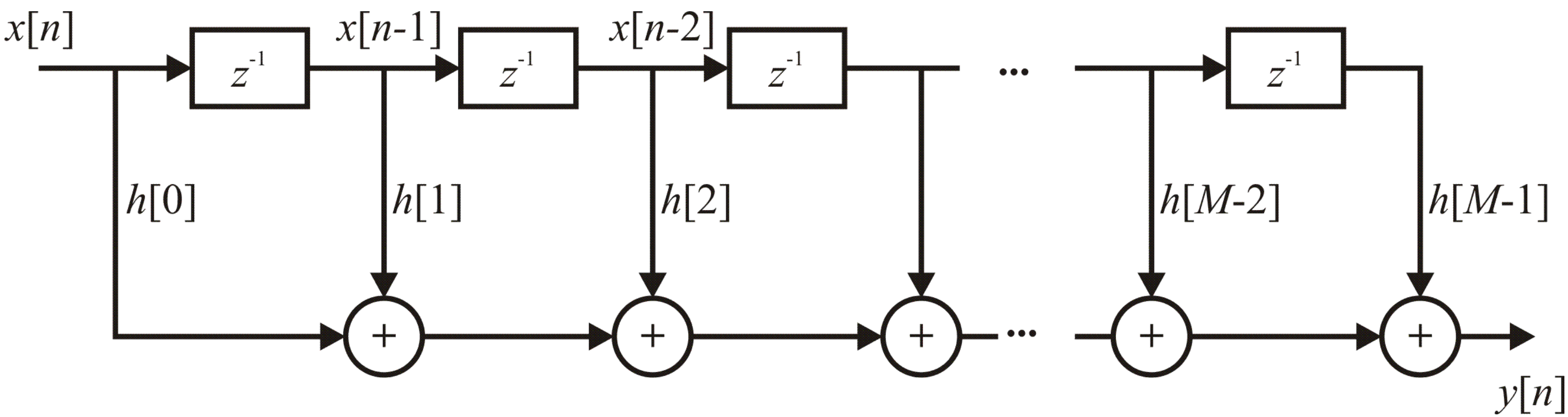
$$\boxed{H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}$$

- E resposta ao impulso

$$\boxed{h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & caso\,contrario \end{cases}}$$

Estrutura FIR: Forma Direta I

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k x[n-k]$$



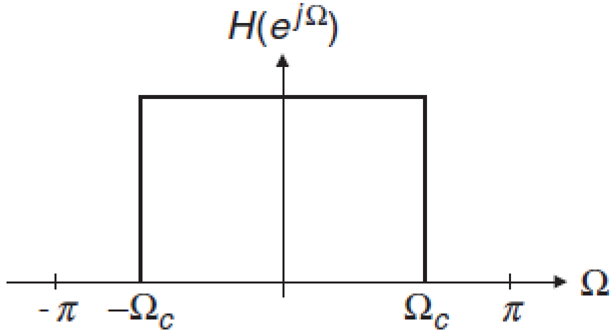
Projeto de Filtros Digitais FIR

- O projeto de filtros, implica na seleção de uma sequência finita que represente a resposta ao impulso de um filtro ideal
- Os filtros FIR sempre são estáveis, e com fase linear (atraso no tempo)
- Métodos comuns para o projeto de filtros FIR:
  - Janelas, usando a resposta ao impulso dos filtros ideais
  - Amostragem em frequência
  - Projeto iterativo baseado em restrições ótimas

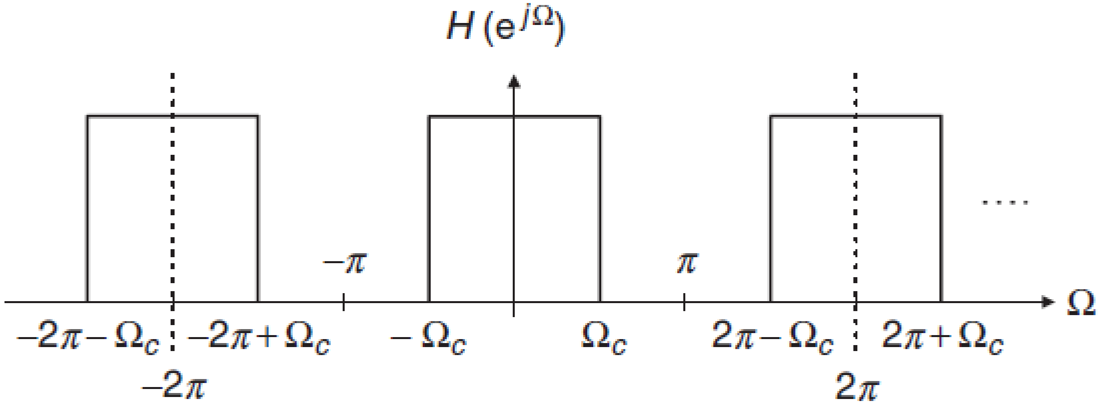
Projeto de Filtros FIR por Transformada de Fourier

- Para uma resposta ideal de um filtro passa-baixo

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

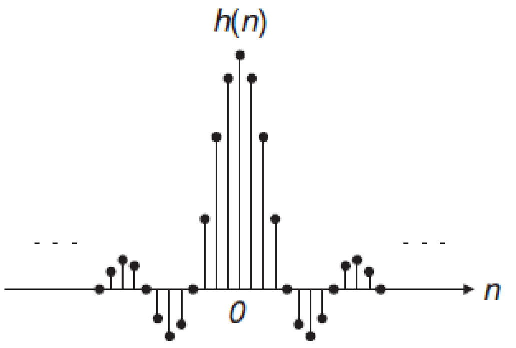


$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \text{ for } -\infty < n < \infty.$$



Projeto de Filtros FIR por Transformada de Fourier

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \qquad \text{Para } -\infty < n < \infty$$



$$\text{Para } n = 0 \qquad h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1\,d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

$$\text{Para } n \neq 0 \qquad h(n) = \left.\frac{e^{jn\Omega}}{2\pi jn}\right|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{1}{\pi n}\frac{e^{jn\Omega_c} - e^{-jn\Omega_c}}{2j} = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}$$

<u>Função de Transferência:</u>

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \cdots + h(-2)z^{2} + h(-1)z^{1} + h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots$$

<u>Simetria</u>

$$\boxed{H(z) = h(M)z^{M} + \cdots + h(1)z^{1} + h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(M)z^{-M}}$$

Projeto de Filtros FIR por Transformada de Fourier

Função de Transferência (simetria):

$$H(z) = h(M)z^{M} + \cdots + h(1)z^{1} + h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(M)z^{-M}$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{2M}(2M)z^{-2M}$$

$$b_n = h(n - M) \qquad \text{Para } n = 0,\ 1, \ldots,\ 2M$$

Projeto de Filtros FIR por Transformada de Fourier

Tipo de Filtro	Resposta ao Impulso $h(n)$
Lowpass:	$h(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\sin(\Omega_c n)}{n\pi} \text{ for } n \neq 0 & -M \leq n \leq M \end{cases}$
Highpass:	$h(n) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ -\frac{\sin(\Omega_c n)}{n\pi} \text{ for } n \neq 0 & -M \leq n \leq M \end{cases}$
Bandpass:	$h(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_H - \Omega_L}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\sin(\Omega_H n)}{n\pi} - \frac{\sin(\Omega_L n)}{n\pi} \text{ for } n \neq 0 & -M \leq n \leq M \end{cases}$
Bandstop:	$h(n) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_H + \Omega_L}{\pi} & n = 0 \\ -\frac{\sin(\Omega_H n)}{n\pi} + \frac{\sin(\Omega_L n)}{n\pi} \text{ for } n \neq 0 & -M \leq n \leq M \end{cases}$

Coeficientes do Filtro FIR, h(n), para M amostras.
Função de Transferência:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_{2M} z^{-2M}$$

$$b_n = h(n - M),\ n = 0,\ 1, \cdots,\ 2M$$

Exemplo 1

- Calcular os coeficientes do Filtro Passa-Baixo FIR com 3-tap, com frequência de corte 800 Hz e frequência de amostragem 8000 amostras/s

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{800}{8000} = \frac{\pi}{5} \ \ rad$$

$$2M + 1 = 3 \ tap$$

$$Para \quad n = 0 \ \rightarrow \ h(0) = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

$$Para \quad n \neq 0 \ \rightarrow \ h(n) = \frac{\sin\left(\Omega_c n\right)}{n\pi} = \frac{\sin\left(0.2\pi n\right)}{n\pi}$$

Exemplo 1

$$h(0) = \frac{0.2\pi}{\pi} = 0.2$$

$$h(1) = \frac{\sin[0.2\pi \times 1]}{1 \times \pi} = 0.1871$$

$$h(-1) = h(1) = 0.1871.$$

$$b_0 = h(0-1) = h(-1) = 0.1871$$

$$b_1 = h(1-1) = h(0) = 0.2$$

$$b_2 = h(2-1) = h(1) = 0.1871.$$

$$H(z) = 0.1871 + 0.2z^{-1} + 0.1871z^{-2}.$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0.1871 + 0.2z^{-1} + 0.1817z^{-2}.$$

$$Y(z) = 0.1871X(z) + 0.2z^{-1}X(z) + 0.1871z^{-2}X(z).$$

$$y(n) = 0.1871x(n) + 0.2x(n-1) + 0.1871x(n-2).$$

Exemplo 1

- Resposta em Frequência

$$z = e^{j\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = 0.1871 + 0.2e^{-j\Omega} + 0.1871e^{-j2\Omega}.$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x)$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= e^{-j\Omega}\left(0.1871e^{j\Omega} + 0.2 + 0.1871e^{-j\Omega}\right) \\ &= e^{-j\Omega}(0.2 + 0.3742\cos(\Omega)) \end{aligned}$$

Exemplo 1

- Em genal, o filtro FIR com coeficientes simétricos têm uma resposta de Fase Linear, dado por

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -M\Omega + \text{posível fase de } 180^\circ$$

3-tap $(M = 1)$

Exemplo 1

- Magnitude e Fase

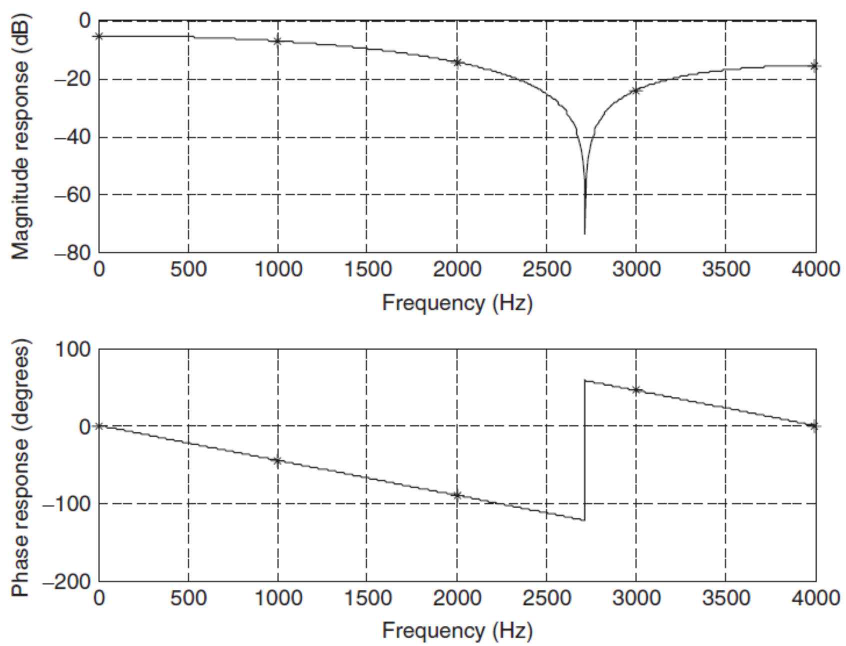
$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}(0.2 + 0.3742\cos\Omega).$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = |0.2 + 0.3472\cos\Omega|$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -\Omega & \text{if } 0.2 + 0.3472\cos\Omega > 0 \\ -\Omega + \pi & \text{if } 0.2 + 0.3472\cos\Omega < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1

Ω radianos	$f = \frac{\Omega f_s}{2\pi}$ Hz	$0.2 + 0.3742 \cos \Omega$	$\lvert H(e^{j\Omega})\rvert$	$\lvert H(e^{j\Omega})\rvert_{dB}$ dB	$\angle H(e^{j\Omega})$ graus
0	0	0.5742	0.5742	−4.82	0
$\pi/4$	1000	0.4646	0.4646	−6.66	−45
$\pi/2$	2000	0.2	0.2	−14.0	−90
$3\pi/4$	3000	−0.0646	0.0646	−23.8	45
π	4000	−0.1742	0.1742	−15.2	0

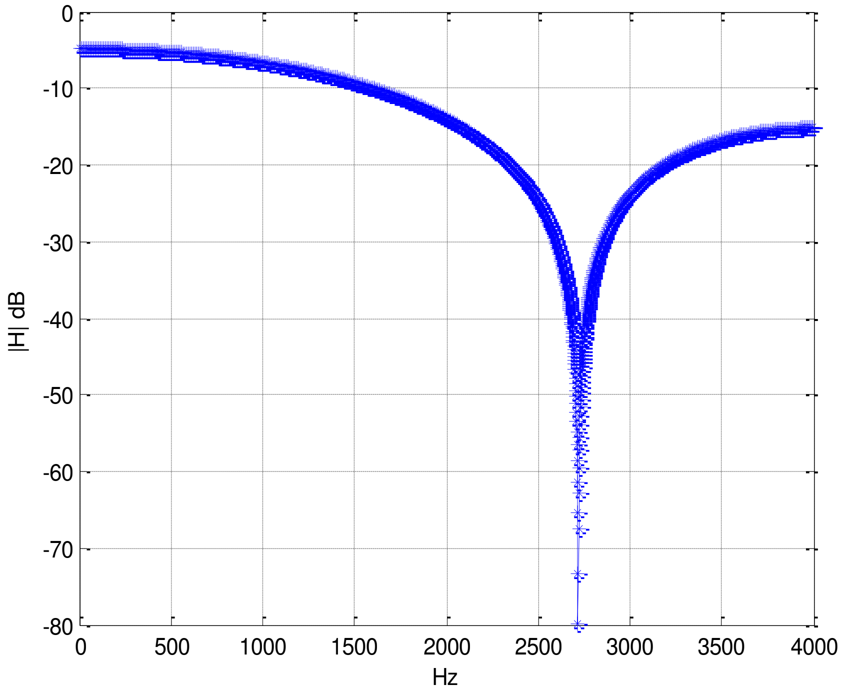


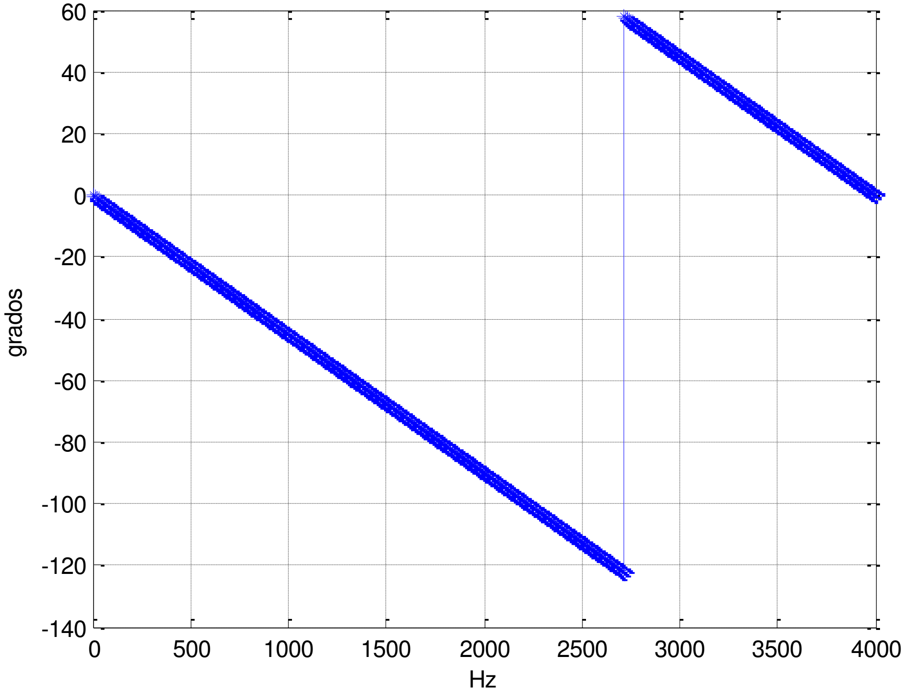
Exemplo 1

```
fc = 800;
fs = 8000;
M = 1;
tap = 2*M+1;
omega = 0:0.001:pi;
hertz = omega*fs/(2*pi)
moduloH = 20*log10(abs(0.2+0.3742*cos(omega)));
for i = 1:length(omega)
    if (0.2+0.3742*cos(omega(i)))>0
        faseH(i) = -M*omega(i);
    elseif (0.2+0.3742*cos(omega(i)))<0
        faseH(i) = -M*omega(i)+pi;
    end
end
figure
plot(hertz,moduloH)
axis([0 4000 -80 0]),grid
figure
plot(hertz,faseH*180/pi), grid
```

Exemplo 1

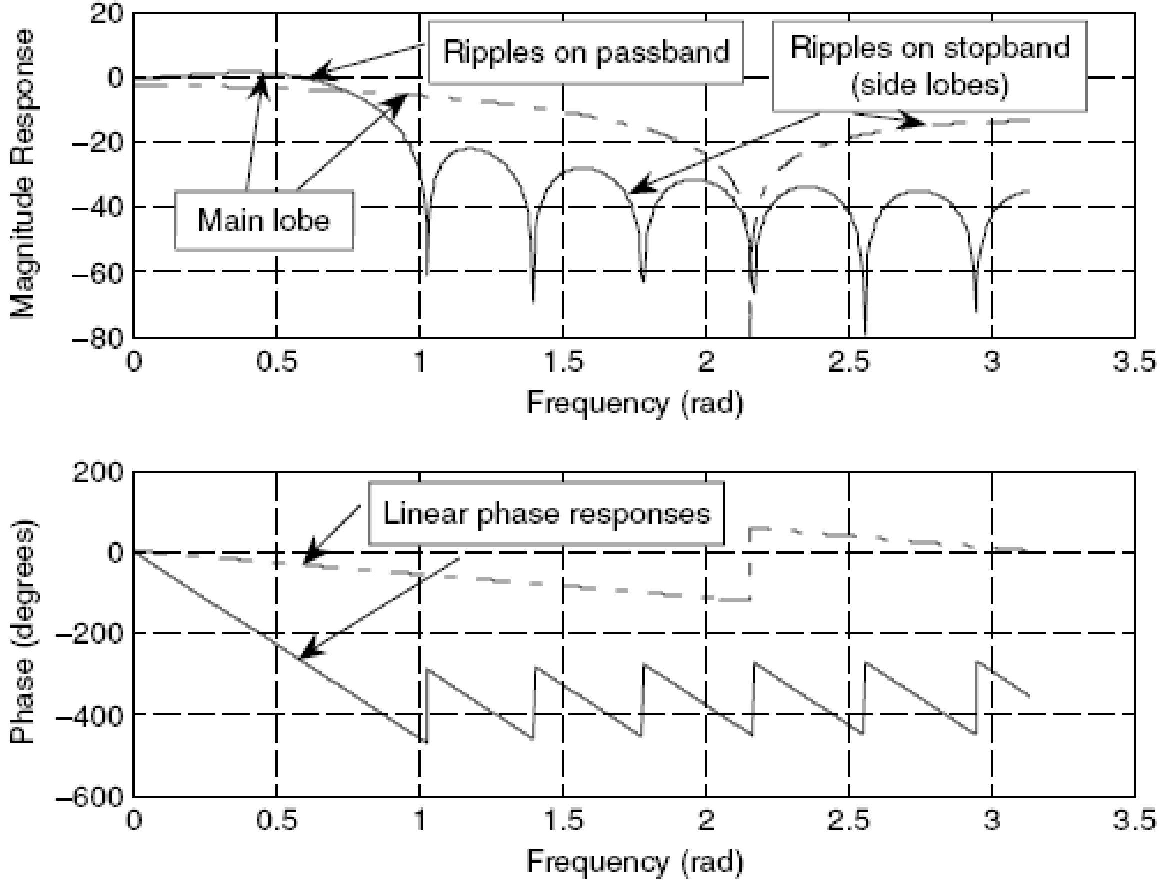
- Magnitude e Fase





Exemplo 1

- Para $M = 1 \quad (2M + 1 = 3 \quad \text{tap})$ – – –
- Para $M = 8 \quad (2M + 1 = 17 \; \text{tap})$ ——



Exemplo 2

- Calcular os coeficientes do Filtro Passa-Faixa FIR com 5-tap, com frequência de corte inferior 2000 Hz, frequência de corte superior 2400, e frequência de amostragem 8000 amostras/s

$$2M + 1 = 5\,tap$$

$$\Omega_L = 2\pi \frac{f_L}{f_s} = 2\pi \frac{2000}{8000} = \frac{\pi}{2} \;\; rad$$

$$\Omega_H = 2\pi \frac{f_H}{f_s} = 2\pi \frac{2400}{8000} = \frac{3\pi}{5} \;\; rad$$

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_H - \Omega_L}{\pi} & n = 0 \\ \dfrac{\sin\left(\Omega_H \pi\right)}{n\pi} - \dfrac{\sin\left(\Omega_L \pi\right)}{n\pi} & n \neq 0 \quad -2 \leq n \leq 2 \end{cases}$$

Exemplo 2

- Calculo dos coeficientes:

$$h(0) = \frac{\Omega_H - \Omega_L}{\pi} = \frac{0.6\pi - 0.5\pi}{\pi} = 0.1$$

$$h(1) = \frac{\sin[0.6\pi \times 1]}{1 \times \pi} - \frac{\sin[0.5\pi \times 1]}{1 \times \pi} = -0.01558$$

$$h(-1) = h(1) = -0.01558$$

$$h(2) = \frac{\sin[0.6\pi \times 2]}{2 \times \pi} - \frac{\sin[0.5\pi \times 2]}{2 \times \pi} = -0.09355$$

$$h(-2) = h(2) = -0.09355$$

$$b_0 = b_4 = -0.09355$$

$$b_1 = b_3 = -0.01558$$

$$b_2 = 0.1$$

Exemplo 2

- Função de Transferência:

$$H(z) = -0.09355 - 0.01558z^{-1} + 0.1z^{-2} - 0.01558z^{-3} - 0.09355z^{-4}$$

- Resposta em Frequência:

$$z = e^{j\Omega}$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = -0.09355 - 0.01558e^{-j\Omega} + 0.1e^{-j2\Omega} - 0.01558e^{-j3\Omega} - 0.09355e^{-j4\Omega}$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j2\Omega}\left(-0.09355e^{j2\Omega} - 0.01558e^{j\Omega} + 0.1 - 0.01558e^{-j\Omega} - 0.09355e^{-j2\Omega}\right)$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x)$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j2\Omega}\left(-0.09355(e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}) + 0.1 - 0.01558(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})\right)$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j2\Omega}\left(-0.1871\cos(2\Omega) + 0.1 - 0.03116\cos(\Omega)\right)$$

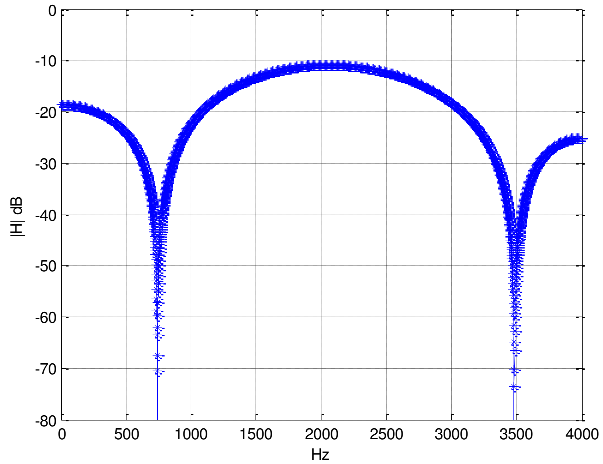
Exemplo 2

- Magnitude e Fase

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j2\Omega}\left(-0.1871\cos(2\Omega) + 0.1 - 0.03116\cos(\Omega)\right)$$

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \left|-0.1871\cos(2\Omega) + 0.1 - 0.03116\cos(\Omega)\right|$$

$$\angle H\left(e^{j\Omega}\right) = \begin{cases} -2\Omega & si \quad -0.1871\cos(2\Omega) + 0.1 - 0.03116\cos(\Omega) > 0 \\ -2\Omega + \pi & si \quad -0.1871\cos(2\Omega) + 0.1 - 0.03116\cos(\Omega) < 0 \end{cases}$$

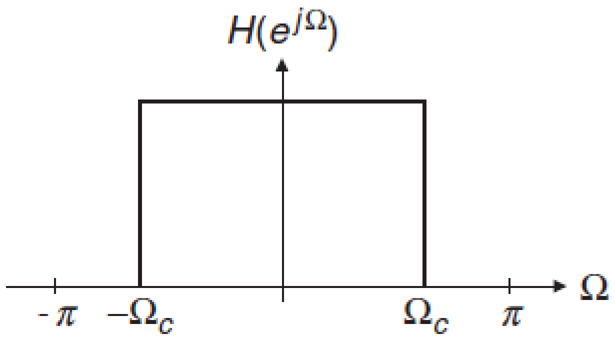


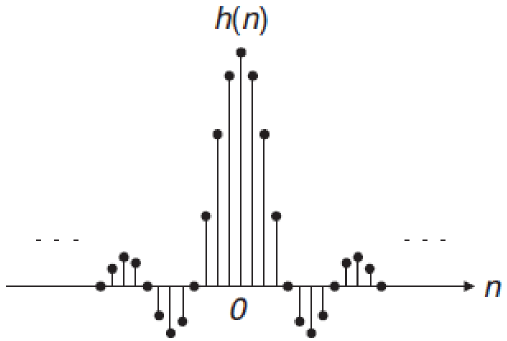
Projeto de Filtros FIR pelo Método de Janelas

- Se realiza o truncamiento da resposta ao impulso ideal $h[n]$ por uma janela w[n]:

Multiplicação em tempo discreto ⇒ $\boxed{h_w[n] = h[n]w[n]}$

Convolução na Frequência ⇒ $\boxed{H_w(F) = H(F) * W(F)}$





Projeto de Filtros FIR pelo Método de Janelas

- Características das Funções que caracterizam Janelas

JANELAS	$-M \leq n \leq M$
Boxcar	$w[n] = 1$
Blackman	$w[n] = 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2n\pi}{M}\right)$
Barlett	$w[n] = 1 - \frac{\lvert n \rvert}{M}$
Hanning	$w[n] = 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right)$
Hamming	$w[n] = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right)$

Projeto de Filtros FIR pelo Método de Janelas

- **Processo de Projeto:**

1. Obter os coeficientes do Filtro FIR utilizando o Método da Transformada de Fourier

2. Multiplicar os Coeficientes do Filtro FIR pela sequência da janela selecionada

$$h_w(n) = h(n)w(n) \qquad\qquad n = -M, \ldots., 0, 1, \ldots., M$$

3. Aplicar o atraso à resposta truncada $h_w(n)$ de M amostras

$$b_n = h_w(n - M) \qquad\qquad Para \quad n = 0, 1, \ldots, 2M$$

Exemplo 3

- Projetar um filtro FIR passa-baixo de 3-tap, com frequência de corte de 800 Hz e frequência de amostragem 8000 amostras/s, utilizando a janela de Hamming.

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{800}{8000} = \frac{\pi}{5} \ \ rad$$

$$2M + 1 = 3 \ tap$$

$$Para \quad n = 0 \ \rightarrow \ h(0) = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

$$Para \quad n \neq 0 \ \rightarrow \ h(n) = \frac{\sin\left(\Omega_c n\right)}{n\pi} = \frac{\sin\left(0.2\pi n\right)}{n\pi}$$

Exemplo 3

- Calculo dos coeficientes do filtro FIR

$$h(0) = \frac{0.2\pi}{\pi} = 0.2$$

$$h(1) = \frac{\sin[0.2\pi \times 1]}{1 \times \pi} = 0.1871$$

$$h(-1) = h(1) = 0.1871.$$

Exemplo 3

- Calculo dos coeficientes da Janela de Hamming

$$w_{ham}(0) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{0\pi}{1}\right) = 1$$

$$w_{ham}(1) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{1 \times \pi}{1}\right) = 0.08$$

$$w_{ham}(-1) = w_{ham}(1) = 0.08$$

Exemplo 3

- Multiplicando os coeficientes do filtro FIR com os coeficientes da Janela de Hamming

$$h(0) = 0.2$$

$$h(1) = 0.1871$$

$$h(-1) = h(1) = 0.1871$$

$$w_{ham}(0) = 1$$

$$w_{ham}(1) = 0.08$$

$$w_{ham}(-1) = w_{ham}(1) = 0.08$$

$$h_w(0) = h(0)w_{ham}(0) = 0.2 \times 1 = 0.2$$

$$h_w(1) = h(1)w_{ham}(1) = 0.1871 \times 0.08 = 0.01497$$

$$h_w(-1) = h(-1)w_{ham}(-1) = 0.1871 \times 0.08 = 0.01497$$

Exemplo 3

- Atrasando a resposta truncada $h_w(n)$ por $M = 1$

$$h_w(0) = 0.2$$
$$h_w(1) = 0.01497$$
$$h_w(-1) = 0.01497$$

$$b_n = h_w(n - M)$$

Para $n = 0, 1, \ldots, 2M$

$$b_0 = b_2 = 0.01496$$
$$b_1 = 0.2$$

- Função de Transferência

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

$$H(z) = 0.01497 + 0.2z^{-1} + 0.01497z^{-2}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0.01497 + 0.2z^{-1} + 0.01497z^{-2}$$

$$Y(z) = 0.01497X(z) + 0.2z^{-1}X(z) + 0.01497z^{-2}X(z)$$

Exemplo 3

- Resposta em Frequência

$$z = e^{j\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = 0.01497 + 0.2e^{-j\Omega} + 0.01497e^{-j2\Omega}$$

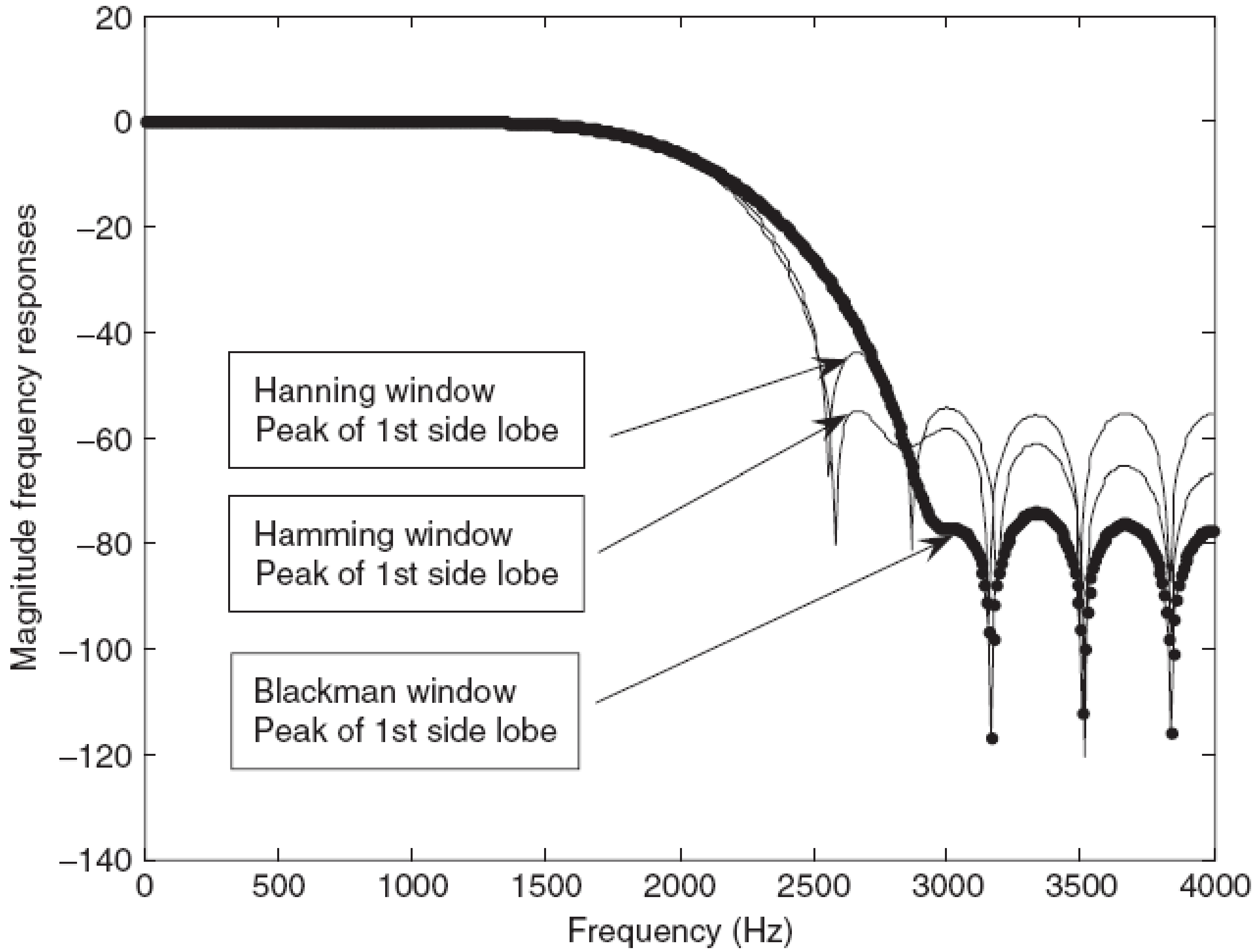
$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}\left(0.01497e^{j\Omega} + 0.2 + 0.01497e^{-j\Omega}\right)$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}(0.2 + 0.02994\cos\Omega)$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = |0.2 + 0.2994\cos\Omega|$$

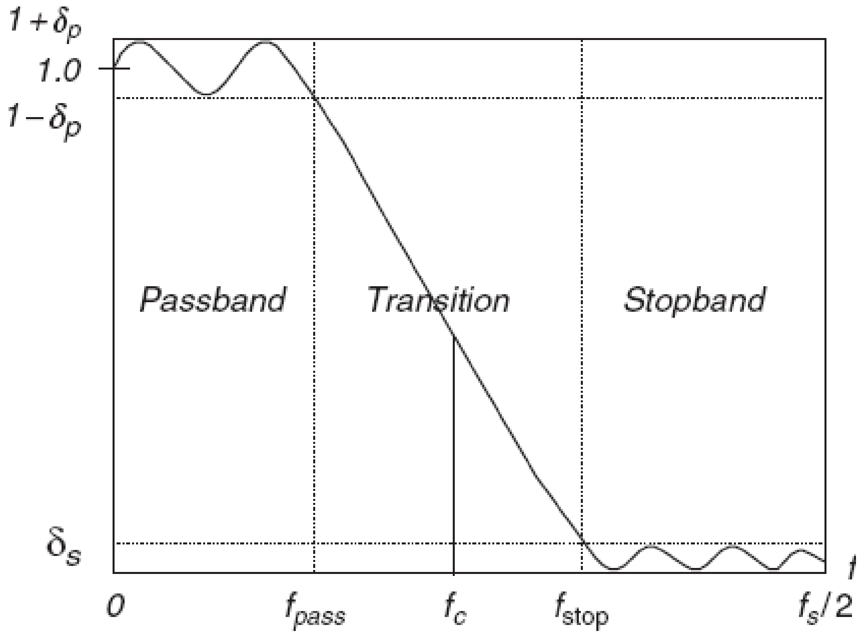
$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -\Omega & \text{if } 0.2 + 0.02994\cos\Omega > 0 \\ -\Omega + \pi & \text{if } 0.2 + 0.02994\cos\Omega < 0 \end{cases}$$

Comparação da Resposta em Frequência



Especificações de Projeto de Filtros FIR Passa-Baixo Usando a Janela de Hamming

- Especificaciones de la Respuesta en Frecuencia



- Banda de Transición Normalizada

$$\Delta f = \frac{\left| f_{stop} - f_{pass} \right|}{f_s}$$

Especificações de Projeto de Filtros FIR Passa-Baixo Usando a Janela de Hamming

- O comprimento do Filtro é dada por

$$N = \frac{3.3}{\Delta f}$$

- Ripple na banda passante

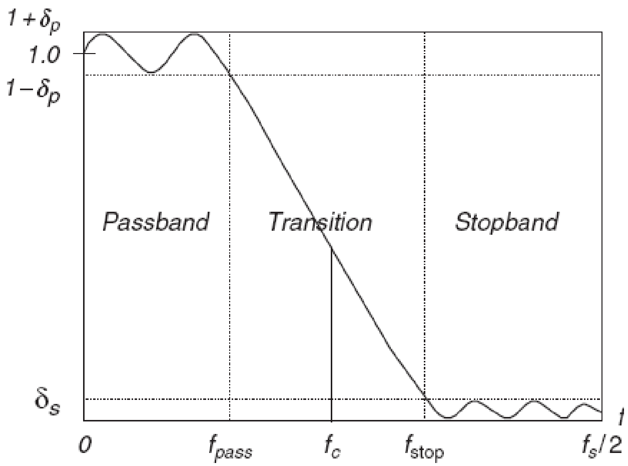
$$\delta_p \; dB = 20 \cdot \log_{10}\left(1 + \delta_p\right)$$

- Ripple na banda de parada

$$\delta_s \; dB = -20 \log_{10}\left(\delta_s\right)$$

- Frequência de Corte

$$f_c = \frac{f_{pass} + f_{stop}}{2}$$



Especificações de Projeto de Filtros FIR Passa-Baixo

Window Type	Window Function $w(n)$, $-M \le n \le M$	Window Length, N	Passband Ripple (dB)	Stopband Attenuation (dB)
Rectangular	1	$N = 0.9/\Delta f$	0.7416	21
Hanning	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$	$N = 3.1/\Delta f$	0.0546	44
Hamming	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$	$N = 3.3/\Delta f$	0.0194	53
Blackman	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2n\pi}{M}\right)$	$N = 5.5/\Delta f$	0.0017	74

Exemplo 4

- Projetar um filtro FIR passa-baixo, utilizando a janela rectangular, com as seguintes especificações:

$$\begin{aligned}
&\text{Passband} = 0 - 1{,}850\ \text{Hz} \\
&\text{Stopband} = 2{,}150 - 4{,}000\ \text{Hz} \\
&\text{Stopband attenuation} = 20\ \text{dB} \\
&\text{Passband ripple} = 1\ \text{dB}
\end{aligned}$$

$$f_s = 8000\ amostras/seg$$

- Banda de transição normalizada

$$\Delta f = \frac{|2150 - 1850|}{8000} = 0.0375$$

Exemplo 4

- Usando uma janela rectangular, o Ripple na banda passante é de 0.74 dB e a atenuação na banda de parada é de 21 dB

Window Type	Window Function $w(n)$, $-M \leq n \leq M$	Window Length, N	Passband Ripple (dB)	Stopband Attenuation (dB)
Rectangular	1	$N = 0.9/\Delta f$	0.7416	21
Hanning	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$	$N = 3.1/\Delta f$	0.0546	44
Hamming	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$	$N = 3.3/\Delta f$	0.0194	53
Blackman	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{n\pi}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2n\pi}{M}\right)$	$N = 5.5/\Delta f$	0.0017	74

- A seleção de esta janela satisfaz os requerimentos de ripple na banda passante de 1 dB e atenuação na banda de parada de 20 dB.

Exemplo 4

- O comprimento do Filtro é:

$$N = \frac{0.9}{\Delta f} = \frac{0.9}{0.0375} = 24$$

- É escolhido um valor maior N=25 para garantir as especificações do projeto.

- Frequência de Corte

$$f_c = \frac{1850 + 2150}{2} = 2000\, Hz$$

Exemplo 4

- O comprimento do Filtro 25-tap
- Frequência de Corte fc = 2000 Hz
- Frequência de amostragem fs = 8000 amostras/s
- Janela Rectangular

- Projetar o Filtro FIR passa-baixo usando o método de janelas

Exemplo 4

- Frequência de corte normalizada

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 2\pi \frac{2000}{8000} = \frac{\pi}{2} \;\; rad$$

$$2M + 1 = 25 \; tap$$

$$M = 12$$

$$-12 \le n \le 12$$

$$Para \quad n = 0 \;\rightarrow\; h(0) = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

$$Para \quad n \ne 0 \;\rightarrow\; h(n) = \frac{\sin(\Omega_c n)}{n\pi} = \frac{\sin(0.5\pi n)}{n\pi}$$

Exemplo 4

- Calculo dos coeficientes (M=12)

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0.5 \\
h(1) &= 0.3183 &&= h(-1) \\
h(2) &= 0 &&= h(-2) \\
h(3) &= -0.106 &&= h(-3) \\
h(4) &= 0 &&= h(-4) \\
h(5) &= 0.0636 &&= h(-5) \\
h(6) &= 0 &&= h(-6) \\
h(7) &= -0.0454 &&= h(-7) \\
h(8) &= 0 &&= h(-8) \\
h(9) &= 0.0353 &&= h(-9) \\
h(10) &= 0 &&= h(-10) \\
h(11) &= -0.0289 &&= h(-11) \\
h(12) &= 0 &&= h(-12)
\end{aligned}
$$

$b_n = h_w(n - M)$

Para $n = 0, 1, \ldots, 2M$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= b_{24} = 0.000000 \\
b_1 &= b_{23} = -0.028937 \\
b_2 &= b_{22} = 0.000000 \\
b_3 &= b_{21} = 0.035368 \\
b_4 &= b_{20} = 0.000000 \\
b_5 &= b_{19} = -0.045473 \\
b_6 &= b_{18} = 0.000000 \\
b_7 &= b_{17} = 0.063662 \\
b_8 &= b_{16} = 0.000000 \\
b_9 &= b_{15} = -0.106103 \\
b_{10} &= b_{14} = 0.000000 \\
b_{11} &= b_{13} = 0.318310 \\
b_{12} &= 0.500000
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

```
fc = 2000;
fs = 8000;
M= 12;
tap = 2*M+1;
i=1;
for n=-12:12
    if n==0
        h(i)=(pi/2)/pi;
    else
        h(i)=sin(0.5*pi*n)/(n*pi);
    end
    i= i+1;
end
freqz(h,1,tap,fs)
```