Macías Márquez Misael Iván

1. Encuentre las trayectorias y las leyes de movimiento de una partícula que se mueve bajo el campo de fuerzas centrales,

$$U(r) = \begin{cases} -V & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

con $V > 0$, para diferentes valores del momento angular y la energía.

Sol:

Dado que tenemos un problema de fuerza central, el lagrangiano del sistema queda descrito por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - U(r)$$

y como L no depende de ϕ y t explícitamente, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = cte = M = mr^2\dot{\phi}$$

o bien

$$\dot{\phi}^2 = \left(\frac{M}{mr^2}\right)^2 = \frac{M^2}{m^2r^4}$$

ahora como la energía total (E) se conserva

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{M^2}{m^2r^4} + U(r)$$

y despejando $\dot{r}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}$$

o también

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}}$$

$$\phi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

entonces sea $U(r) = U_0$, $b = 2m(E - U_0)$, y $u = 1/r$, y entonces

$$\phi = -M \int \frac{du}{\sqrt{b - M^2 u^2}}$$

ahora sea $u = \frac{\sqrt{b}\sin s}{M}$ y $du = \frac{\sqrt{b}\cos s}{M} ds$ y así

$$\phi = -\sqrt{b} \int \frac{ds}{\sqrt{b}} = -s + \phi_0 = -\sin^{-1} \frac{Mu}{\sqrt{b}} + \phi_0$$

o de manera equivalente y con $\phi_0 = 0$

$$\phi = \frac{r\sqrt{2m(E - U_0) - M^2/r^2}\, \mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{2m(E - U_0)r^2 - M^2}/M\right)}{\sqrt{2m(E - U_0)r^2 - M^2}}$$

entonces para $r < R$, se tiene que $r > \frac{M}{\sqrt{2m(E+V)}}$ y para $r > R$, $r > \frac{M}{\sqrt{2mE}}$

2. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales definido por el potencial

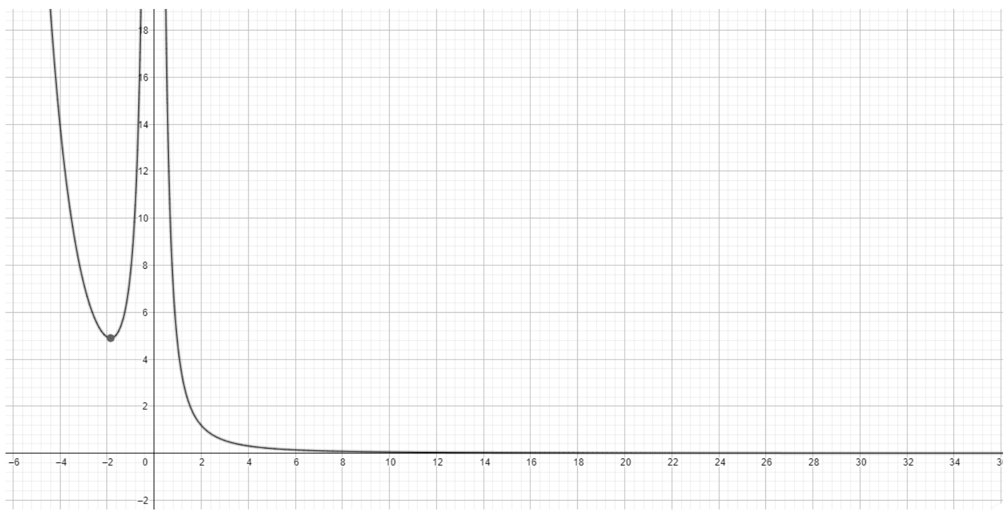
$$U(r) = -k\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

donde k y α son constantes positivas.

   a) Describa cualitativamente el movimiento en términos de los valores del momento angular y la energía

   Sol:

   El potencial efectivo es de la forma



   entonces para $E > 0$, no existirá limite superior aunque sí uno inferior para r por lo que se tienen orbitas no acotadas, para $E < 0$ dado que el potencial efectivo es mayor a cero, ese valor es imposible, se podrían tener orbitas cerradas para $r < 0$ pero como eso no es posible pues no hay.

b) ¿Cuando son posibles órbitas circulares? Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales respecto al movimiento circular.

Sol:

El lagrangiano para nuestro potencial es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}e^{-\alpha r}$$

ahora las ec. de movimiento son

$$mr^2\ddot{\theta} = 0$$

lo que nos da la conservación del momento angular, y para r

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(1+\alpha r)\frac{e^{-\alpha r}}{r^2} = 0$$

entonces para tener orbitas circulares se debe tener que $\dot{r} = 0$ entonces $\ddot{r} = 0$ y así

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{m}(1+\alpha r)\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}$$

entonces la velocidad angular necesaria para tener orbitas circulares es:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{m}(1+\alpha r')}\frac{e^{-\alpha r'/2}}{(r')^{3/2}}$$

para algún r'

y su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi(r')^{3/2}}{\sqrt{\frac{k}{m}(1+\alpha r')e^{-\alpha r'}}}$$

3. Sea $U(r)$ el potencial arbitrario de un campo de fuerzas centrales.

   a) Haga la transformación $r = 1/u$ y obtenga la ecuación diferencial (de la orbita) para $u(\phi)$.

   Sol:

   Ya que el momento angular se conserva,podemos escribir

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}$$

   y entonces

$$\frac{d}{dt} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\phi}$$

   con segunda derivada

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{M^2}{m^2r^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\phi}\right)$$

y sacando la ec. de movimiento de la lagrangiana del problema anterior

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = m\ddot{r} - \frac{M^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

se tiene que

$$m\frac{M^2}{m^2r^2}\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right) + \frac{M^2}{mr^3} = \frac{\partial U}{\partial r}$$

ahora sea $u = 1/r$ y $du = -1/r^2$, entonces

$$\frac{M^2u^2}{m}(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u) = U'$$

b) Obtenga la forma explicita de la ecuación diferencial si $U(r) = -k/r^\beta$, donde k y β son constantes.

Sol:

Primero derivemos el potencial

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{k\beta}{r^{\beta+1}} = k\beta u^{\beta+1}$$

entonces por el inciso anterior

$$\frac{M^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\phi} + u\right) = k\beta u^{\beta+1}$$

$$\frac{M^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\phi} + u - \frac{k\beta m u^{\beta-1}}{M^2}\right) = 0$$

y como $u \neq 0\ \forall r$,

$$\frac{d^2u}{d\phi} + u - \frac{k\beta m u^{\beta-1}}{M^2} = 0$$

4. Una partícula se mueve en dos dimensiones bajo la acción de un campo de fuerzas centrales determinado por el potencial $U(r) = \alpha r^p + \beta r^q$. Halle las potencias p y q para las cuales es posible una orbita espiral de la forma $r = c\theta^2$, donde c es una constante.

   Sol:

   Se sabe que

$$\theta = \int \frac{M dr}{r^2\sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}}$$

   y para tener la espiral se debe cumplir

$$\theta = \sqrt{\frac{r}{c^2}}$$

entonces derivando y sustituyendo el potencial

$$\frac{M}{r^2\sqrt{2m(E-\alpha r^p - \beta r^q) - M^2/r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c^2 r}}$$

$$4c^2r^2 + 1 = \frac{2m}{M}(Er^2 - \alpha r^{p+2} - \beta r^{q+2})$$

y así tenemos que

$$c = \sqrt{\frac{mE}{2M}} \qquad \frac{2m}{M}(\alpha+\beta) = -1 \qquad p = q = -2$$

5. *a*) Demuestre que para una partícula de masa m en un campo de fuerzas centrales $V(r) = -k/r$ (problema de Kepler), el vector

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$$

conocido como vector de Laplace-Runge-Lenz es una constante de movimiento.

Como el momento angular se conserva

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} - mk\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + mk\frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}$$

ahora usando que $\dot{p} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ y $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \times (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - mk\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + mk\frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}$$

y por la identidad del triple producto cruz

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -mk\left(\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - r^2\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}\right)$$

y ya que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -mk\left(\frac{\mathbf{r}r\dot{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\dot{r}\right) = 0$$

por lo tanto $\mathbf{A}$ es una constante de movimiento

b) muestre que este vector pertenece al plano de la orbita.

Sol:

Para demostrar que $\mathbf{A}$ pertenece al plano de la orbita,debemos mostrar que

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = 0$$

entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r})\cdot L$$

y como $\mathbf{p}\times\mathbf{L}$ es ortogonal a $\mathbf{L}$ y por definición $\mathbf{r}$ es ortogonal a L

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = \cancel{\mathbf{p}\times\mathbf{L}\cdot L} - \cancel{mk\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot L} = 0$$

por lo tanto $\mathbf{A}$ pertenece al plano de la orbita.

c) Pruebe que la ecuación de la órbita está dada por

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}\left(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta\right)$$

Sol:

Sea θ el angulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{A}$, entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{p}\times\mathbf{L}\cdot\mathbf{r} - mk\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r} = \mathbf{p}\times\mathbf{L}\cdot\mathbf{r} - mkr = Ar\cos\theta$$

y por la semiconmutatividad del triple producto escalar

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{p}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{L} - mkr = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} - mkr = L^2 - mkr = Ar\cos\theta$$

por lo tanto despejando

$$r(mk + A\cos\theta) = L^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}\left(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta\right)$$

d) Determine la relación entre $\mathbf{A}$ y la excentricidad ϵ de la órbita.

Sol:

La ec. del inciso anterior se puede reescribir de la siguiente forma

$$\frac{\frac{mk}{L^2}}{r} = \left(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta\right)$$

la cual es muy parecida a la ec. de la trayectoria para el potencial usado($p/r = 1 + \epsilon\cos\theta$) por lo que podemos decir que la excentricidad es

$$\epsilon = \frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

6. Evaluar aproximadamente el cociente entre las masas del Sol y la Tierra, utilizando únicamente las duraciones del año y del mes lunar (27.3 días) y los radios medios de la orbita terrestre ($1{,}49\times10^8 km$) y de la orbita lunar ($3{,}5\times10^5 km$).

   Sol:

   Como se vio para el problema de Kepler, el periodo orbital T es

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha}$$

con a el radio medio de la orbita, $m = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ la masa reducida del sistema y $\alpha = G m_i m_j$ Supongamos que $m_i \gg m_j$, entonces se tiene que

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = a^3 \frac{\cancel{m_i m_j}}{\cancel{m_i m_j} G(m_i + m_j)} \approx \frac{a^3}{G m_i}$$

ahora ya que la masa de la tierra (m_T) es mucho mayor a la de la luna (m_L) y a su vez la masa del sol (m_S) es mucho mayor a la de la tierra, entonces

$$\left(\frac{T_{ST}}{2\pi}\right)^2 = \frac{a_{ST}^3}{G m_S}$$

$$\left(\frac{T_{TL}}{2\pi}\right)^2 = \frac{a_{TL}^3}{G m_T}$$

por lo tanto

$$\frac{m_T}{m_S} = \left(\frac{T_{ST}}{T_{TL}}\right)^2 \left(\frac{a_{TL}}{a_{ST}}\right)^3 = \left(\frac{365}{27{,}3}\right)^2 \left(\frac{3{,}5 \times 10^5}{1{,}49 \times 10^8}\right)^3 = 2{,}32 \times 10^{-6}$$

7. Suponga una partícula de masa m que se mueve en el potencial unidimensional $U(x) = A|x|^n$, donde A es una constante. Demuestre que el periodo T del movimiento periódico de la partícula depende de su energía E como

$$T \propto E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}$$

Sol:

Por la conservación de la energía

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + A|x|^n$$

o bien

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - A|x|^n)}{m}}} \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{m}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{E - A|x|^n}}$$

entonces dada la forma del potencial, el periodo T es

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_{-(E/A)^{1/n}}^{(E/A)^{1/n}} \frac{dx}{\sqrt{E - A|x|^n}}$$

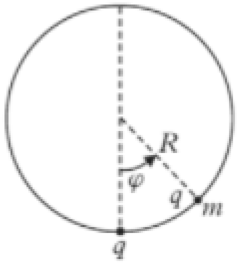
ahora sea $|y| = (A/E)^{1/n}|x|$, $dx = (E/A)^{1/n} dy$ y suponiendo que $\int_{-1}^{0} \frac{dy}{\sqrt{1+y^n}} = 0$

$$T = 2\sqrt{2m}(E/A)^{1/n} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{E - E|y|^n}} = 2\sqrt{\frac{2m}{E}} (E/A)^{1/n} \left[\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}\right]$$

que con el cambio de variable $y^n = u$ se llega a que

$$T = \left[2\sqrt{\frac{2\pi m}{A^{1/n}}} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/2 + 1/n)} \right] E^{1/n - 1/2} \qquad \rightarrow \qquad T \propto E^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}$$

8. Una carga puntual q de masa m se mueve (de manera restringida) sobre una circunferencia de radio R en el plano vertical y bajo la acción del campo gravitatorio. Otra carga q está fija en el punto más bajo de la circunferencia.



a) Encuentre la posición de equilibrio
Sol:
Por ley de cosenos, la distancia entre las 2 cargas está determinada por

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\phi$$

$$= 2R^2(1 - \cos\phi) = 4R^2 \sin^2 \phi/2$$

entonces el potencial del sistema es ($a = kq^2/8mgR^2$)

$$U(\phi) = 2mgR\left(\frac{2a}{r} + \sin^2\phi/2\right) = 2mgR\left(\frac{2a}{\sin\phi/2} + \sin^2\phi/2\right)$$

y así (sea $u = \sin\phi/2$)

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = 2mgR\left(a\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{\sin\phi/2} + \frac{\partial}{\partial\phi}\sin^2\phi/2\right)$$

$$= 2mgR\left(a\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \sin\phi/2\cos\phi/2\right)$$

$$= 2mgR\left(\sin\phi/2\cos\phi/2 - a\cos\phi/2\csc\phi/2\right)$$

$$= 2mgR\cot\phi/2\left(\sin^2\phi/2 - a\right)$$

que tiene como raíces a $\phi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ con $n \in Z$ y $\phi = 2\sin^{-1} a$

b) Encuentre la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de la carga móvil

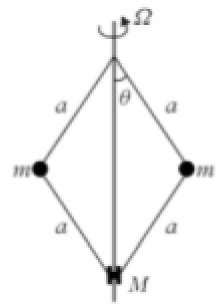
Sol:

recordando que $k = \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$, entonces

$$k = mR(2\sin^2\phi/2 + a\csc^2\phi/2 - 3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{R(2\sin^2\phi/2 + a\csc^2\phi/2 - 3)}$$

9. Halle la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del regulador centrífugo. El sistema rota con velocidad angular constante Ω alrededor del eje vertical, bajo el campo gravitatorio. Considere que 4 varillas articuladas de longitud a son de masa despreciable y que la masa M se desplaza libremente (sin fricción) sobre la varilla vertical.



Sol:

Usando coordenadas esfericas

$$x = r\sin\theta\cos\Omega t$$

$$y = r\sin\theta\sin\Omega t$$

$$z = -r\cos\theta$$

se puede obtener la lagrangiana

$$L = a^2\dot{\theta}^2(m + 2M\sin^2\theta) + ma^2\Omega^2\sin^2\theta + 2ga(m+M)\cos\theta$$

con un potencial $U(\theta) = ma^2\Omega^2\sin^2\theta + 2ga(m+M)\cos\theta$, entonces

$$k = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 2ma^2\Omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2ga(m+M)\cos\theta$$

por lo tanto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m+M}} = \sqrt{\frac{2ma^2\Omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2ga(m+M)\cos\theta}{2m+M}}$$