Macías Márquez Misael Iván

1. Muestre que el calor transferido durante un proceso cuasi-estático infinitesimal de un gas ideal puede escribirse como:

$$đQ = \frac{C_V}{nR} V dP + \frac{C_P}{nR} P dV$$

aplicando esta ecuación a un proceso adiabático muestre que

$$PV^\gamma = constante$$

Sol:

La relación de la tarea anterior es

$$đQ = C_P d\theta - \frac{\kappa_\theta}{\beta}(C_P - C_V) dP$$

y como tenemos un gas ideal, $\kappa_\theta = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{\theta}$, por lo que $\frac{\kappa_\theta}{\beta} = \frac{\theta}{p}$ o bien despejando en la ec. del gas ideal, $\frac{\kappa_\theta}{\beta} = \frac{V}{nR}$, entonces

$$đQ = C_P(d\theta - \frac{\theta}{p} dP) + C_V \frac{V}{nR} dP$$

ahora si P es constante y derivando la ec. del gas ideal, $d\theta = \frac{P}{nR} dV$ y $dP = 0$

$$đQ = C_P(\frac{P}{nR} dV - \cancel{\frac{\theta}{p} dP}) + C_V \frac{V}{nR} dP = C_P \frac{P}{nR} dV + C_V \frac{V}{nR} dP$$

para lo siguiente, como es un proceso adiabático, entonces

$$0 = C_P \frac{P}{nR} dV + C_V \frac{V}{nR} dP$$

$$-\frac{dP}{P} = \gamma \frac{dV}{V}$$

$$-\int \frac{dP}{P} = \gamma \int \frac{dV}{V}$$

$$-\ln P = \gamma \ln V + c$$

$$\ln P + \ln V^\gamma = \ln PV^\gamma = k$$

$$PV^\gamma = k' = cte$$

2. Muestre que el trabajo realizado por un gas ideal con capacidades caloríficas constantes durante una expansión cuasi-estática adiabática es igual a:

   a) $W = C_V(T_f - T_i)$
   Sol:
   Por la primera ley y como es un proceso adiabático

$$đ = dU - dW \qquad \rightarrow \qquad dW = dU = C_V(T_f - T_i)$$

   b) $W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{1-\gamma}$
   Sol:
   Por el ejercicio 1,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = c \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = c \frac{(V_f^{\gamma-1} - V_i^{\gamma-1})}{\gamma - 1}$$

   pero $PV = cV^{\gamma-1}$

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}$$

   c) $W = \frac{P_f V_f}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$
   Sol:
   Por el b)

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} = \frac{P_f V_f - \frac{P_i V_i^\gamma}{V_i^{\gamma-1}}}{\gamma - 1}$$

   y por ser un gas ideal ($P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma$)

$$W = \frac{P_f V_f - \frac{P_f V_f^\gamma}{V_i^{\gamma-1}}}{\gamma - 1} = \frac{P_f V_f}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}}\right] = \frac{P_f V_f}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$$

3. Derive la siguiente fórmula para un proceso cuasi-estático adiabático para el gas ideal, considere $\gamma = cte$

$$TV^{\gamma-1} = cte$$

   Sol:

   por el ejercicio 1

$$PV^\gamma = c$$

$$PV^{\gamma-1+1} = c$$

$$PVV^{\gamma-1} = c$$

y como $PV = nRT$

$$nRTV^{\gamma-1} = c$$

$$TV^{\gamma-1} = \frac{c}{nR} = c' = cte$$

4. Imagine que trabaja en una oficina de patentes, una compañía presenta un examen de patente para una máquina térmica cuya eficiencia -afirma- es del 75 %, la máquina funciona entre 2 baños térmicos de $20^{\cdot}C$ y $800^{\cdot}C$. En cada ciclo la máquina realiza un trabajo de $30,000$ J, disipando $10,000$ J al baño frío. ¿Otorgaría la patente?. Justifique su respuesta.

   Sol:

   Suponiendo que esta máquina es la más eficiente posible (máquina de Carnot) entonces la eficiencia sería

   $$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{296{,}15K}{1073{,}15K} = 0{,}724 = 72{,}4\,\%$$

   por lo que no sería posible la eficiencia que declaran aunque su máquina sea 'perfecta'.

   Ahora el trabajo realizado y disipado nos da una eficiencia de

   $$\eta = 1 - \frac{10000J}{30000J} = 0{,}667 = 66{,}7\,\%$$

   entonces creo que no se daría la patente.

5. Considere una máquina trabajando en un ciclo reversible y que emplea un gas ideal de capacidad calorífica C_p como sustancia que trabaja. El ciclo consiste de dos procesos a presión constante, conectados por dos adiabáticas (figura 1).

   a) Encuentre la eficiencia de esta máquina en términos de P_1 y P_2.

   Sol:

   Como los procesos BC y DA son adiabáticos, no se tiene transferencia de calor, así que esta se debe dar en los procesos AB y CD, el trabajo para ambos procesos es

   $$W = P_i \int dV = P_i \Delta V$$

   y como se emplea un gas ideal

   $$W = nR\Delta T$$

   también sabemos que la energía interna está determinada por

   $$U = C_V \Delta T \qquad\qquad \therefore Q = \Delta T(C_V + nR) = \Delta T C_P$$

o bien $Q = C_P P_i \Delta V/nR$, y entonces la eficiencia es (suponiendo que $|\Delta V|_{AB} = |\Delta V|_{CD}$)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_H|}{|Q_C|} = 1 - \frac{P_2}{P_1}\frac{\cancel{nR|\Delta V|_{CD}}}{\cancel{nR|\Delta V|_{AB}}} = 1 - \frac{P_2}{P_1}$$

b) ¿Cuál de las temperaturas T_A, T_B, T_C, T_D es la más alta?, ¿Cuál es la más baja?

Sol:

Como tenemos un gas ideal, entonces $T = \frac{PV}{nR}$ y como nR son contantes, $T_{max} = \frac{P_B V_B}{nR} = T_B$ y $T_{min} = \frac{P_D V_D}{nR} = T_D$

c) Como se compara esta máquina con una de Carnot trabajando con el mismo gas entre las temperaturas mas baja y más alta?

Sol:

Ya que $P = \frac{TnR}{V}$ para un gas ideal, entonces

$$\eta = 1 - \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2}$$

y como $V_1 > V_2$ por lo que su eficiencia es menor a la de Carnot