
Práctica 1.

Incertidumbres y análisis gráfico de mediciones

Angel Yair García Pérez

Misael Iván Macías Márquez

Teodora Irene Ortiz Cruz

teodora625@ciencias.unam.mx

Facultad de Ciencias, UNAM

21 de Marzo del 2022

Semestre 2022-2

Resumen: Se determinó la aceleración de la gravedad local haciendo uso de un péndulo armado con material casero. Se midió con un cronómetro el tiempo de 10 oscilaciones de un péndulo simple, se aplicó el modelo clásico para el periodo de oscilación, se hizo un análisis gráfico utilizando errores nominales y estadísticos para tratar los datos obtenidos, la gravedad promedio obtenida fue $(9,36 \pm 1,54)m/s^2$ dando una incertidumbre relativa del 16 % y un error, comparando con un valor de referencia, de 0,27 veces la incertidumbre absoluta, al ser menor a 2 se puede considerar que el resultado es satisfactorio.

Introducción

El propósito de este experimento es obtener el valor la aceleración gravitacional g en la zona metropolitana de México, utilizando la ecuación clásica para el periodo de oscilación de un péndulo simple y aplicar la teoría de incertidumbres de manera adecuada a dicho modelo[1].

La importancia de este trabajo radica en el uso adecuado de la teoría de incertidumbres, pues aún que es un experimento simple, el uso no adecuado de ella puede llevar a resultados desfavorables, por otro lado también se resalta la importancia del modelo empleado para medir la gravedad en este trabajo, pues fue una de la primeras formas de medir g en distintas partes del mundo incluyendo México [2].

De acuerdo a los experimentos realizados a partir 1878 por Francisco Jiménez y Leandro Fernández el valor de g es aproximadamente $(9,7816 \pm 0,0001)\frac{m}{s^2}$ en lo que hoy en día es el Palacio Nacional[2]. Se espera obtener un valor g constante parecido al que fue reportado en los estudios de Jiménez y Fernández.

Teoría del péndulo simple

Un péndulo simple se conforma de una partícula de masa m suspendida de un punto O por una cuerda de longitud L y de masa despreciable, si la masa se lleva a un punto tal que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical y se suelta, esta comenzará a oscilar entre el punto inicial y su simétrico respecto la vertical[3]. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso mg , la tensión T y como se puede ver en la Figura 1, la fuerza tangencial $F_T = -mg \sin \theta$, por lo tanto la ecuación diferencial que describe este fenómeno es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

suponiendo que el ángulo θ sea lo suficientemente pequeño, es decir entre 10° a 15° se puede aproximar $\sin \theta \approx \theta$ y así se tiene que[3]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (2)$$

Lo cual es muy parecido a la ecuación diferencial para el movimiento armónico simple con $\omega^2 = \frac{g}{L}$, dado que el período en función de la frecuencia angular es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, entonces $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}}$, de tal forma en que despejando g se obtiene la ecuación clásica para el periodo de oscilación de un péndulo simple

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (3)$$

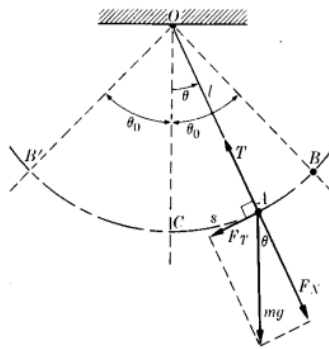


Figura 1: **Diagrama de un péndulo simple.** En este diagrama se observa un péndulo simple conformado por una masa puntual y también las fuerzas que existen en el movimiento.[3]

Desarrollo experimental

Como se puede observar en la Figura 2, en un soporte metálico sujetado a una repisa se introdujo una hoja de papel pegada a un pedazo de folder para mantenerla rígida, con ayuda de un transportador se marcaron los ángulos $\pm 15^\circ$, se ajustó el hilo cáñamo sobre el soporte y en el otro extremo del hilo se sujetó un tornillo de 76g, su eje de simetría se colocó verticalmente para que coincidiera con la vertical del péndulo.

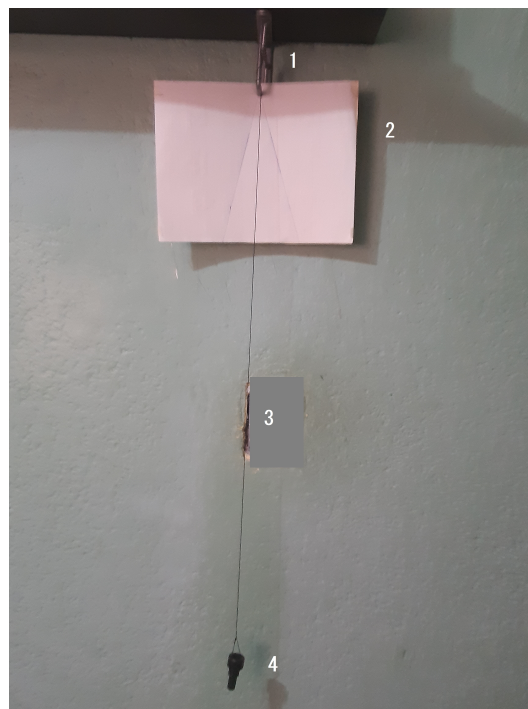


Figura 2: **Arreglo Experimental.** Consiste en (1) Soporte de repisa, (2) Papel con marca de ángulos, (3) Hilo cáñamo, (4) Tornillo

Procedimiento

Para medir el tiempo de una oscilación, primero con una cinta métrica se midió la longitud del hilo desde su origen hasta el centro de masa del tornillo. Después se realizaron 5 medidas preliminares de tiempo para 10 oscilaciones, colocando el tornillo en el ángulo 15° de lado derecho y soltándolo para dejarlo oscilar, estos tiempos se dividieron sobre 10 para hallar el tiempo de una oscilación (T) y se sacó el promedio de las 5 medidas. El procedimiento se repitió para 10 longitudes L del péndulo.

Resultados y Análisis

En el experimento, para distintas longitudes, se obtuvieron los siguientes resultados:

Longitud (L) [m]	Periodo promedio (\hat{T}) [s]	gravedad (g) [m/s^2]
1 ± 0.05	2.024 ± 0.089	9.637
0.9 ± 0.05	1.928 ± 0.089	9.558
0.8 ± 0.05	1.819 ± 0.089	9.545
0.7 ± 0.05	1.703 ± 0.089	9.529
0.6 ± 0.05	1.576 ± 0.089	9.537
0.5 ± 0.05	1.440 ± 0.089	9.519
0.4 ± 0.05	1.290 ± 0.089	9.489
0.3 ± 0.05	1.127 ± 0.089	9.325
0.2 ± 0.05	0.932 ± 0.089	9.090
0.1 ± 0.05	0.686 ± 0.089	8.389

Cuadro 1: Valores de longitud y periodo promedio obtenidos a partir de las mediciones tomadas en el experimento, con ellos se calculo el valor de la gravedad.

\hat{T} se obtuvo del promedio de los 5 periodos del apéndice para cada respectiva longitud y g fue hallada mediante la ecuación (3):

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{\hat{T}^2}$$

Sacando el promedio de la gravedad se obtuvo que:

$$\hat{g} = 9,362m/s^2$$

De las medidas directas se tiene que la incertidumbre de ángulo y la masa del tornillo están dadas por la mínima escala:

$$\delta\theta = 1^\circ \quad \delta m = 1g$$

Para la longitud del péndulo se obtuvo una incertidumbre de definición $\sigma_{def,L} = \pm 5cm$, debido a que no fue posible encontrar la localización de el centro de masa del tornillo de forma precisa, se encontró que podía estar en un rango de posiciones, además se debe resaltar que la longitud del péndulo variaba un poco mientras oscilaba porque se colgó sobre un soporte de techo redondo, sin embargo se desprecio esta incertidumbre pues era una variación pequeña, también se obtuvo una incertidumbre de apreciación $\sigma_{ap,L} = 0,05cm$, sumando por cuadraturas se obtiene que la incertidumbre de la longitud es:

$$\delta L = \sqrt{(5cm)^2 + (0,05cm)^2} = 5cm$$

Para la incertidumbre del tiempo, se midió el tiempo de reacción con el cronómetro, se obtuvieron 10 datos de 10 intentos de detener el cronómetro justo a los 3 segundos de haberlo iniciado, se tomo la diferencia de los 10 datos con los 3 segundo y el promedio como el tiempo de reacción.

La incertidumbre absoluta está dada por el tiempo de reacción (ver apéndice) $\sigma_{est,T} = 0,089s$ y la escala mínima del cronómetro $\sigma_{ap,T} = 0,001s$:

$$\delta T = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{ap}^2} = 0,089s$$

Tomando el tiempo promedio para cada péndulo y sumando por cuadraturas, se llega a que la incertidumbre de los promedios de periodos es $\delta\hat{T} = 0,089s$.

Análisis de errores nominales (σ_{nom}) y estadísticos (σ_{est}) de g

La incertidumbre nominal para g se obtiene a partir de la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$\sigma_{nom,g} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 \delta L^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{T}}\right)^2 \delta \hat{T}^2} = \frac{4\pi^2}{\hat{T}^2} \sqrt{\delta L^2 + \frac{4L^2 \delta \hat{T}^2}{\hat{T}^2}}$$

sustituyendo la longitud L del valor de g más cercano a \hat{g} y su correspondiente periodo promedio \hat{T} , tenemos que $\sigma_{nom,g} = 1,54 \text{ m/s}^2$ con una gravedad $g = 9,32 \text{ m/s}^2$.

Y haciendo análisis estadístico a los datos de la tabla se obtuvo:

$$S_g = 0,376 \text{ m/s}^2 \quad N_{op} = 1 \quad \hat{g} = 9,362 \text{ m/s}^2 \quad \sigma_{est,g} = 0,119 \text{ m/s}^2$$

Incetidumbre estadística por análisis gráfico

Para determinar g se linealizó la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$l = \left(\frac{g}{4\pi^2}\right) \hat{T}^2 \quad (4)$$

Usando el método de mínimos cuadrados se puede determinar la pendiente :

$$\frac{g}{4\pi^2}$$

Los datos de la gráfica en la Figura 3 se pueden consultar en el apéndice.

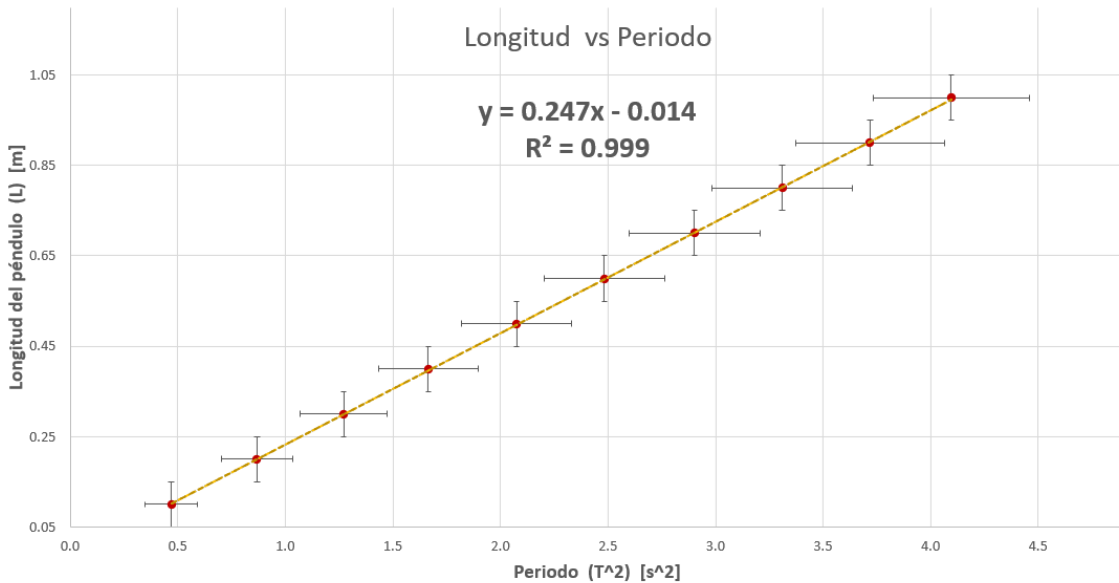


Figura 3: **Gráfica del modelo linealizado.** A partir de los datos obtenidos y el tratamiento de incertidumbres se obtuvo una gráfica donde g es la pendiente, en ella se puede ver que los datos se ajustan de forma favorable al modelo lineal.

Donde la incertidumbre de \hat{T}^2 esta dada por:

$$\delta(\hat{T}^2) = 2\hat{T}\delta T$$

La pendiente y ordenada al origen resultantes son:

$$m = (0,247 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$$

$$b = (0,014 \pm 0,02)^1 m$$

por lo tanto despejando a g y propagando la incertidumbre,

$$g = 4\pi^2 m$$

$$\delta g = 4\pi^2 \delta m$$

se obtiene un valor para la aceleración de la gravedad de:

$$g = (9,75 \pm 0,04) \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

Discusión

Se observa que, en la tabla, cada vez que la longitud se hacía mas pequeña, el valor obtenido de g era también mas pequeño, esto porque se hacía mas difícil detener el cronometro en el momento indicado debido a que el péndulo se movía mas rápido, parece que hubo un error sistemático.

Ahora, para mediciones únicas, se utilizaría el valor de g promedio con la incertidumbre $\sigma_{nom,g}$:

$$\hat{g} = (9,36 \pm 1,54)m/s^2$$

Para mediciones estadísticas se utilizaría a g promedio con la incertidumbre $\sigma_{est,g}$:

$$\hat{g} = (9,36 \pm 0,1)m/s^2$$

O para un análisis gráfico:

$$g = (9,75 \pm 0,04) \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

Conclusiones

Se uso un arreglo experimental casero, por lo tanto los instrumentos utilizados no fueron muy precisos ni fueron los mejores para la realización de este experimento, debido a esto la incertidumbre para las mediciones únicas fue alta, se obtuvo un error porcentual del 16 %, esto solo da un posible rango de valores donde puede estar el valor de la gravedad, comparando con el valor de referencia $(9,7816 \pm 0,0001)m/s^2$ se observa que el rango de valores obtenido $[(9,36 - 1,54)m/s^2, (9,36 + 1,54)m/s^2] = [7,82m/s^2, 10,9m/s^2]$ o $\hat{g} = (9,36 \pm 1,54)m/s^2$ es aceptable.

Si se compara el resultado estadístico con el valor de referencia, se puede notar que no concuerdan los resultados, por lo tanto del resultado estadístico obtenido no se puede concluir nada, se necesitaría mejorar el experimento.

Por otro lado, el análisis gráfico dio un buen resultado, el cual concuerda con nuestro valor de referencia.

Esto da a pensar que hubo un error sistemático al momento de tomar los datos, el cual arrastro hacia abajo el valor de g , pero al parecer la tendencia se mantuvo, por lo que el análisis gráfico arrojó un buen valor.

Al final se obtuvo un rango de valores $[7,82m/s^2, 10,9m/s^2]$ donde podría estar el valor de la gravedad.

Y un resultado estadístico para g :

$$g = (9,75 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$$

¹Se debe notar que el 0 entra en este intervalo

Referencias

- [1] Barrios B. Erick; Hernández C. Arnaldo. *Incertidumbres y análisis gráfico de mediciones*. 2022.
- [2] Moreno Corral M.A. Primeras mediciones precisas de la gravedad hechas en México. 2014.
- [3] Edward J. Finn; Alonso Marcelo. *FISICA VOL I: Mecánica*. Fondo Educativo Interamericano, 1994.

Apéndice

Tiempos de reacción

tiempo de reacción [s]	diferencia [s]
3.010	0.010
3.021	0.021
2.770	0.230
3.094	0.094
2.825	0.175
2.976	0.024
3.118	0.118
3.103	0.103
2.905	0.095
3.024	0.024

Tabla 2:

Tiempos de reacción y su diferencia con 3s

$$\hat{x} = 0,089s \quad S_x = 0,073 \quad \sigma_{est} = 0,023 \quad \sigma_{ap} = 0,01s$$

$$N_{op} = 54$$

Tiempos medidos

tiempo (t) $\pm 0,089$ [s] 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089$ [s]
20.209	2.021
20.221	2.022
20.214	2.021
20.297	2.030
20.239	2.024

Tabla 3: Datos del péndulo con longitud de $(1 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 2,024s \quad S_T = 0,004s \quad \sigma_{est} = 0,002s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089$ [s] 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089$ [s]
19.278	1.928
19.198	1.920
19.273	1.927
19.317	1.932
19.347	1.935

Tabla 4: Datos del péndulo con longitud de $(0,9 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,928s \quad S_T = 0,006s \quad \sigma_{est} = 0,003s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089$ [s] 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089$ [s]
18.181	1.808
18.225	1.823
18.120	1.812
18.234	1.823
18.204	1.820

Tabla 5: Datos del péndulo con longitud de $(0,8 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,819s \quad S_T = 0,005s \quad \sigma_{est} = 0,002s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089$ [s] 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089$ [s]
17.096	1.710
17.044	1.704
16.963	1.696
17.060	1.706
17.010	1.701

Tabla 6: Datos del péndulo con longitud de $(0,7 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,703s \quad S_T = 0,005s \quad \sigma_{est} = 0,002s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089$ [s] 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089$ [s]
15.748	1.575
15.725	1.573
15.780	1.578
15.802	1.580
15.739	1.574

Tabla 7: Datos del péndulo con longitud de $(0,6 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,576s \quad S_T = 0,003s \quad \sigma_{est} = 0,001s \quad \sigma_{ap} = 0,001s \\ N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089[s]$ 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089[s]$
14.359	1.436
14.437	1.444
14.404	1.440
14.453	1.445
14.362	1.436

Tabla 8: Datos del péndulo con longitud de $(0,5 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,440s \quad S_T = 0,004s \quad \sigma_{est} = 0,002s \quad \sigma_{ap} = 0,001s \\ N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089[s]$ 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089[s]$
12.893	1.289
12.951	1.295
12.964	1.296
12.854	1.285
12.836	1.284

Tabla 9: Datos del péndulo con longitud de $(0,4 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 1,290s \quad S_T = 0,006s \quad \sigma_{est} = 0,003s \quad \sigma_{ap} = 0,001s \\ N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089[s]$ 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089[s]$
11.294	1.129
11.281	1.128
11.241	1.124
11.247	1.125
11.305	1.131

Tabla 10: Datos del péndulo con longitud de $(0,3 \pm 0,055)m$

$$\hat{T} = 1,127s \quad S_T = 0,003s \quad \sigma_{est} = 0,001s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089[s]$ 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089[s]$
9.263	0.926
9.316	0.932
9.363	0.936
9.314	0.931
9.331	0.933

Tabla 11: Datos del péndulo con longitud de $(0,2 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 0,932s \quad S_T = 0,004s \quad \sigma_{est} = 0,002s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$

tiempo (t) $\pm 0,089[s]$ 10 oscilaciones	período (T) $\pm 0,089[s]$
6.775	0.677
6.811	0.681
6.887	0.689
6.899	0.690
6.913	0.691

Tabla 12: Datos del péndulo con longitud de $(0,1 \pm 0,05)m$

$$\hat{T} = 0,686s \quad S_T = 0,006s \quad \sigma_{est} = 0,003s \quad \sigma_{ap} = 0,001s$$

$$N_{op} = 1$$