Macías Márquez Misael Iván

1. Muestre que la longitud de onda de de Broglie de una partícula relativista de masa m y energía cinética K se escribe

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}$$

con c la velocidad de la luz y h la constante de Planck

Sol:

primero hay que despejar el momento p de la energía cinética relativista

$$K = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2 \qquad \rightarrow \qquad K + mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$$

$$(K + mc^2)^2 = m^2c^4 + c^2p^2 \qquad \rightarrow \qquad K^2 + 2mc^2K + \cancel{m^2c^4} = \cancel{m^2c^4} + c^2p^2$$

$$p^2 = \frac{K^2 + 2mc^2K}{c^2} \qquad \rightarrow \qquad p = \frac{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}{c}$$

que sustituyendo en la longitud de onda de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}$$

2. Una partícula libre que se mueve en una dimensión está representada por la función

$$\psi(x,t) = \mathbf{A}e^{i(kx - \omega t)}$$

con k, ω y $\mathbf{A}$ constantes

   a) Calcule la velocidad de grupo g usando la relación de dispersión no relativista. Muestre que esta equivale a la expresión clásica para la velocidad de la partícula

   Sol:

   por definicion se tiene que la velocidad de grupo es:

$$g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

   con $\|\mathbf{k}\| = k$, ahora si se multiplica por el $1 = \frac{\hbar}{\hbar}$ y usando la relación de Einstein-Planck ($E = \hbar\omega$) y la longitud de onda de de Broglie ($p = \hbar k$)

$$g = \frac{\hbar}{\hbar}\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial(\hbar\omega)}{\partial(\hbar k)} = \frac{\partial E}{\partial p}$$

   que por la relación de dispersión no relativista ($E = \frac{p^2}{2m}$)

$$g = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}m} = v$$

   donde el momento no relativista es $p = mv$

b) Muestre que este resultado se mantiene cuando uno utiliza la relación de dispersión relativista

Sol:

por el inciso anterior y la relación de dispersión relativista ($E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$)

$$g = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}) = \frac{\cancel{2}pc^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{c}\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = v'$$

donde v' es la velocidad relativista

c) Muestre que la relación entre la velocidad de fase u y de grupo g es

$$u = \frac{g}{2}$$

para la mecánica no relativista y

Sol:

La velocidad de fase es:

$$u = \frac{\omega}{k}$$

que multiplicando por el mismo uno y usando las mismas relaciones que en los incisos anteriores, se puede reescribir como:

$$u = \frac{E}{p} = \frac{p^{\cancel{2}}}{2\cancel{p}m}$$

y por el inciso a)

$$u = \frac{g}{2}$$

$$u = \frac{c^2}{g}$$

para la mecánica relativista, donde c es la velocidad de la luz

Sol:

por lo mismo

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}{p} = \frac{c^2}{\frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}} = \frac{c^2}{g}$$

3. La dependencia de la longitud de onda con la frecuencia en una guía de ondas viene dada por la expresión

$$\lambda(\nu) = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}}$$

con c y ν_0 constantes positivas. ¿Cuál es la velocidad de grupo de tales ondas?

Sol:

Despejando ν

$$\nu = \sqrt{\frac{c^2}{\lambda^2} + \nu_0}$$

y como $\frac{2\pi}{\lambda} = k$, $\omega = 2\pi\nu$, entonces

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left(2\pi\sqrt{\frac{k^2c^2}{4\pi^2} + \nu_0}\right) = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{k^2c^2}{4\pi^2} + \nu_0}}\frac{kc^2}{2\pi^{\cancel{2}}} = \frac{kc^2}{2\pi\sqrt{\frac{k^2c^2}{4\pi^2} + \nu_0}}$$

4. Para las funciones de cuadrado integrable $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$, con transformadas de Fourier $\tilde{\psi}_1(p)$ y $\tilde{\psi}_2(p)$, muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1^*(x)\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}_1^*(p)\tilde{\psi}_2(p)$$

Sol:

La definición usada para la transformada inversa de Fourier para una dimensión será

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}(p) e^{-ipx}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1^*(x)\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \tilde{\psi}_1^*(p_1) e^{ip_1x} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \tilde{\psi}_2(p_2) e^{-ip_2x}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(p_1-p_2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \tilde{\psi}_1^*(p_1) \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \tilde{\psi}_2(p_2)$$

ahora la delta de Dirac para una dimensión se definirá como

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(k-k')}$$

y asi

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^*(x)\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_1\tilde{\psi}_1^*(p_1)\delta(p_1 - p_2)\int_{-\infty}^{\infty} dp_2\tilde{\psi}_2(p_2)$$

y por definición de la delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^*(x)\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_2\tilde{\psi}_1^*(p_2)\tilde{\psi}_2(p_2)$$

5. A partir de la definición de la transformada de Fourier,pruebe que la unicidad de los coeficientes del desarrollo de la función $\psi(x)$ en terminos de ondas planas implica que la función delta de Dirac tiene la representación

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dpe^{ip(x-x')/\hbar}$$

Sol:

Ya vimos como es la transformada inversa de Fourier, ahora la no inversa se define como

$$\tilde{\psi}(p) = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)e^{ipx}$$

por lo que podemos escribir a $\psi(x)$ como

$$\psi(x') = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dp\tilde{\psi}(p)e^{-ipx'} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dp\left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)e^{ipx}e^{-ipx'}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dpe^{ip(x-x')}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)$$

pero sabemos por definición que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)\delta(x - x') = \psi(x')$$

asi que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dpe^{ip(x-x')} = \delta(x - x')$$

se me perdieron 2 $\hbar$:C

6. Encuentre la transformada de Fourier de la función unidimensional

$$g(k) = \begin{cases} 0 & k < -K \\ N & -K \leq k \leq K \\ 0 & K < k \end{cases}$$

con N y K constantes. Tambien encuentre el valor de N para la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = 1$$

se satisfaga

Sol:

$$f(x) = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx} = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-K}^{K} dk N e^{ikx} = N \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-K}^{K} dk e^{ikx}$$

$$= N \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{e^{iKx}}{ix} - \frac{e^{-iKx}}{ix}\right) = N \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{e^{iKx}}{ix} - \frac{e^{-iKx}}{ix}\right) = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{N(e^{iKx} - e^{-iKx})}{ix}$$

y como $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$f(x) = \left(\frac{2N^2\hbar}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin Kx}{x}$$

ahora veamos lo otro

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \frac{2N^2 K\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K dx \frac{\sin^2(Kx)}{(Kx)^2}$$

que haciendo el cambio de variable $\theta = Kx$, entonces $d\theta = K dx$ y por el resultado de cursos anteriores ($\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} d\theta = \pi$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \frac{2N^2 K\hbar}{\cancel{\pi}} \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2}} = 2N^2 K\hbar = 1$$

$$\therefore N = \frac{1}{\sqrt{2K\hbar}}$$

7. Demuestre las siguientes propiedades de la delta de Dirac

   a) $\delta(x) = \delta(-x)$

   Sol:

   Recordando que

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(k-k')}$$

   se tiene

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ix'(x)}$$

si se hace el cambio de variable $x' = -x''$ entonces, $dx' = -dx''$, y también los limites de integración se invierten así que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ix'(x)} = -\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\infty}^{-\infty} dx'' e^{-ix''(x)} = -\frac{-1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{ix''(-x)} = \delta(-x)$$

b) $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$, con $a > 0$
Sol:
ahora hagamos el cambio de variable $x' = ax''$ entonces, $dx' = adx''$

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{ix''(ax)} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{i(ax'')(x)} = \frac{1}{2a\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ix'(x)}$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ix'(x)}\right) = \frac{\delta(x)}{a}$$

c) Suponiendo que a es la única raíz de la función $f(x)$, esto es $f(a) = 0$, entonces $\delta(f) = \frac{\delta(x-a)}{|f'(a)|}$
Sol:
Supongamos que $|f'(a)| \neq 0$

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipf(x)}$$

ahora si aproximamos a $f(x)$ por los primeros términos de su serie de taylor alrededor de a, se tiene

$$\delta(f) \approx \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(\cancel{f(a)}+f'(a)(x-a))} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipf'(a)(x-a)}$$

y haciendo el cambio de variable $pf'(a) = p'$, entonces $dp = \frac{dp'}{|f'(a)|}$

$$\delta(f) = \frac{1}{|f'(a)|}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{ip'(x-a)}\right) = \frac{\delta(x-a)}{|f'(a)|}$$