Macías Márquez Misael Iván

1. El hamiltoniano de un oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones, de masa m y frecuencia angular ω, es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

   a) Utilizando separación de variables en coordenadas cartesianas, muestre que el espectro de energías vale $E = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$, con n un entero no negativo.

   Sol:

   Propongamos una solución del tipo $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, entonces

$$E\psi(x, y, z) = EX(x)Y(y)Z(z) = \hat{H}\psi(x, y, z)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}\right)$$

$$+\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)X(x)Y(y)Z(z)$$

   o bien

$$E = -\left(\frac{\hbar^2}{2mX(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2mY(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} + \frac{\hbar^2}{2mZ(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$E = \left(-\frac{\hbar^2}{2mX(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2mY(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} + \frac{m\omega^2}{2}y^2\right)$$

$$+\left(-\frac{\hbar^2}{2mZ(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \frac{m\omega^2}{2}z^2\right)$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

   con $(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{m\omega^2}{2}x_i^2)X_i(x_i) = E_i X_i(x_i)$, y entonces tenemos que $E_{x_i} = \hbar\omega(n_{x_i} + \frac{1}{2})$ y así

$$E = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_z + \frac{1}{2})$$

$$= \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$$

   con $n = n_x + n_y + n_z$

b) Muestre que la degeneración de los primeros tres niveles de energía es 1, 3, 6 y en general la degeneración del nivel n vale $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Sol:

Sea $m = n_x + n_y$, como se tienen $n+1$ formas de obtener a $n_x + n_y = n - n_z$, entonces para cada m se tiene $m+1$ valores distintos y su degeneración es

$$\sum_{m=0}^{n} m+1 = \sum_{m=1}^{n+1} m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2. Considere el hamiltoniano de una partícula de masa m en un potencial unidimensional de la forma

$$V(\hat{x}) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} & x > 0 \end{cases}$$

con ω una constante positiva.

a) ¿Qué condiciones de frontera deben cumplir las funciones propias del hamiltoniano asociado?

Sol:

Las condiciones de frontera son

$$\psi(x)_{x\to\infty} \quad \to \quad 0 \qquad\qquad \psi(0) = 0$$

b) ¿Qué relación hay entre las funciones propias del hamiltoniano del oscilador armónico y las funciones propias de este hamiltoniano?

Sol:

para que se cumpla $\psi(0) = 0$ para toda x,la solución $\Psi_N(x) = 0$ para $x \leq 0$, ahora para $x \geq 0$ tenemos

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

pero para esta ecuación de valores propios, la solución solo es cero en $x = 0$ para $n = 2N+1$ con N natural, así que

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \psi_{2N+1}(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

3. Una partícula de masa m y carga q está constreñida a moverse en una dimensión. Se encuentra sujeta a una fuerza armónica , además de estar inmersa en un campo electrostático homogéneo de magnitud ϵ. El hamiltoniano para este sistema es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} - q\epsilon\hat{x}$$

con ω una constante positiva.

a) Encuentre los valores propios y funciones propias de este hamiltoniano. Sugerencia: trate de proponer un cambio de variable que convierta este problema en el hamiltoniano del oscilador armónico usual $\hat{H}_0$

Sol:

Sea $\hat{x} = \hat{x}' + c$, entonces $[\hat{p}, \hat{x}'] = \hat{p}\hat{x}' - \hat{x}'\hat{p} = \hat{p}\hat{x} - \cancel{\hat{p}c} - \hat{x}\hat{p} + \cancel{c\hat{p}} = [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ por lo que $\hat{p} = \hat{p}'$, ahora sustituyendo

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}' + c)^2 - q\epsilon(\hat{x}' + c)$$

si $c = \frac{q\epsilon}{m\omega^2}$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}'^2}{2} - \frac{q^2\epsilon^2}{2m\omega^2} = \hat{H}_0 - \frac{q^2\epsilon^2}{2m\omega^2}$$

entonces el problema de valores propios queda como

$$\hat{H}\psi_n(x') = \hat{H}_0\psi_n(x') = (E_n + \frac{q^2\epsilon^2}{2m\omega^2})\psi_n(x')$$

donde $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{q^2\epsilon^2}{2m\omega^2}$ y $\psi_n(x') = \frac{(\hat{a}'^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}}\psi_0(x')$

b) Si la partícula se encuentra al tiempo $t = 0$ en el estado base del hamiltoniano $\hat{H}_0$, calcule la probabilidad de encontrar a la partícula en el estado base del hamiltoniano $\hat{H}$ al tiempo $t > 0$. Sugerencia : utilice el postulado de desarrollo para expresar el estado base de $\hat{H}_0$ en términos de las funciones propias de $\hat{H}$.

Sol:

Dadas las condiciones la probabilidad es

$$| < \psi_0(x - c), \psi(x, t) > |^2$$

y por el teorema de desarrollo

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} C_n\psi_n(x - c9$$

con $C_n =< \psi_n(x - c), \psi_0(x) >$, entonces

$$| < \psi_0(x - c), \psi(x, t) > |^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} C_n < \psi_0(x - c), \psi_n(x - c) > \right|^2$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} C_n\delta_{0n} \right|^2 = \left| e^{-\frac{iE_0t}{\hbar}} C_0 \right|^2 = |C_0|^2$$

$$= | < \psi_0(x - c), \psi_0(x) > |^2 = \left| \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x^2 - cx + c^2/4)} e^{-\frac{m\omega c^2}{4\hbar}} \right|^2$$

$$= \frac{m\omega}{\pi\hbar} e^{-\frac{m\omega c^2}{2\hbar}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x - c/2)^2} \right|^2 = e^{-\frac{m\omega c^2}{2\hbar}}$$

4. Considere los operadores de ascenso $\hat{a}_1^\dagger$,$\hat{a}_2^\dagger$ y descenso $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ de dos osciladores armónicos independientes, es decir

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \qquad\qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Si a partir de ellos se definen los operadores

$$\hat{J}_+ = \hbar\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2, \qquad \hat{J}_- = \hbar\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1, \qquad \hat{J}_z = \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2) \qquad \hat{N} = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2$$

pruebe que

a) $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar\hat{J}_\pm$
Sol:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = [\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \hbar\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2] = \frac{\hbar^2}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2] - \frac{\hbar^2}{2}[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2]$$

$$= \frac{\hbar^2\hat{a}_2}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] - \frac{\hbar^2\hat{a}_1^\dagger}{2}[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_2] = \frac{\hbar^2\hat{a}_2}{2}(\hat{a}_1^\dagger[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + \cancel{[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger]}\hat{a}_1) - \frac{\hbar^2\hat{a}_1^\dagger}{2}(\hat{a}_2^\dagger\cancel{[\hat{a}_2, \hat{a}_2]} + [\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2]\hat{a}_2)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger + \frac{\hbar^2}{2}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 = \hbar^2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 = \hbar\hat{J}_+$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_-] = [\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2), \hbar\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1] = \frac{\hbar^2}{2}[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1] - \frac{\hbar^2}{2}[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1]$$

$$= -\left(\frac{\hbar^2}{2}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \frac{\hbar^2}{2}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) = -\hbar^2\hat{a}_2^2\hat{a}_1 = -\hbar\hat{J}_-$$

b) Si $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- - \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_z^2$, entonces $\hat{\mathbf{J}}^2 = \frac{\hbar^2}{2}\hat{N}(\frac{\hat{N}}{2} + 1)$
Sol:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- - \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_z^2 = (\hbar\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)(\hbar\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1) - \hbar\left(\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)\right) + \frac{\hbar^2}{4}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)^2$$

$$= \hbar^2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger - \frac{\hbar^2}{2}(\hat{a}_1^\dagger a_1 - \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2) + \frac{\hbar^2}{4}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)$$

$$= \hbar^2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1(1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2) - \frac{\hbar^2}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2) + \frac{\hbar^2}{4}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - 2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\hat{N} + \frac{\hbar^2}{4}\hat{N}^2 = \frac{\hbar^2}{2}\hat{N}\left(\frac{\hat{N}}{2} + 1\right)$$

c) $[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z] = 0$

Sol:

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z] = [\hat{J}_+\hat{J}_-, \hat{J}_z] - \hbar\cancel{[\hat{J}_z, \hat{J}_z]} + \hat{J}_z\cancel{[\hat{J}_z, \hat{J}_z]} + \cancel{[\hat{J}_z, \hat{J}_z}\hat{J}_z$$

$$= \hat{J}_+[\hat{J}_-, \hat{J}_z] + [\hat{J}_+, \hat{J}_z]\hat{J}_- = \pm\hbar\hat{J}_+\hat{J}_- = 0$$

5. Llamaremos estados coherentes ψ_a a los estados propios, normalizados, del operador de descenso $\hat{a}$, es decir

$$\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$$

Utilizando la completés de los estados propios del operador $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, demuestre que los estados ψ_α se pueden escribir como

$$\psi_a = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\phi_n = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\phi_0$$

donde ϕ_n es el estado propio del operador $\hat{N}$ con valor propio n

Sol:

Como las funciones propias de $\hat{N}$ forman una base del espacio de estados, y así

$$\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\psi_n$$

con $C_n =< \psi_n, \psi_\alpha >$, $\psi_n = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0$, que sustituyendo

$$C_n =< \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\psi_0, \psi_\alpha >= \frac{1}{\sqrt{n!}} < \psi_0, \hat{a}^n\psi_\alpha >= \frac{1}{\sqrt{n!}} < \psi_0, \alpha^n\psi_\alpha >$$

$$= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} < \psi_0, \psi_\alpha >= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C$$

entonces

$$\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\psi_n = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_n$$

ahora veamos a la constante C

$$< \psi_\alpha, \psi_\alpha >=< C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_n, C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\psi_m >$$

$$= |C|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^n)^*}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} < \psi_n, \psi_m >= |C|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^n)^*}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\delta_{nm}$$

$$= |C|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|a|^2)^n}{n!} = |c|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

o bien

$$|C|^2 = e^{-|\alpha|^2} \qquad \rightarrow \qquad C = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

y así

$$\psi_\alpha = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} \psi_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \psi_0$$