

1. La primer ley de la termodinámica nos ofrece la siguiente relación:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

- a) Explique breve y concisamente la interpretación física de la expresión anterior

Sol:

La expresión anterior describe la relación entre la energía mecánica (trabajo) y no mecánica (calor) con la energía interna de un sistema que podría verse como su energía total

- b) ¿Se puede considerar la energía como la suma de una componente calor y una componente de trabajo?

No del todo porque podrían existir otras formas de energía presentes, como la debida al potencial químico, etc

2. A partir de la primera ley demuestre la relación:

$$\delta Q = C_P d\theta - \frac{\kappa\theta}{\beta} (C_P - C_V) dP$$

Sol:

por la primera ley tenemos que

$$\delta Q = p dV + dU \quad (1)$$

ahora como

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta dp$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_\theta dp$$

si sustituimos en (1)

$$\begin{aligned} \delta Q &= p \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta dp \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p d\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_\theta dp \\ \delta Q &= \left[p \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p \right] d\theta + \left[p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_\theta \right] dp \end{aligned} \quad (2)$$

ahora si derivamos (2) respecto a θ con p constante y sustituimos en (2)

$$\left(\frac{\delta Q}{d\theta} \right)_p = p \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_p = C_p$$

$$dQ = C_p d\theta + \left[p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta \right] dp \quad (3)$$

si derivamos (3) respecto a θ con V constante y usamos $\left(\frac{dp}{d\theta} \right)_V = \frac{\beta}{\kappa_\theta}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{d\theta} \right)_V &= C_p + \left[p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta \right] \left(\frac{dp}{d\theta} \right)_V = C_V \\ \left[p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta \right] &= -(C_p - C_v) \frac{1}{\left(\frac{dp}{d\theta} \right)_V} = -(C_p - C_v) \frac{\kappa_\theta}{\beta} \\ \therefore dQ &= C_p d\theta - (C_p - C_v) \frac{\kappa_\theta}{\beta} dp \end{aligned}$$

3. En un metal a bajas temperaturas la capacidad calorífica a volumen constante varía con la temperatura de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\frac{C_V}{n} = \left(\frac{124,8}{\Theta} \right)^3 \frac{mJ}{mol \cdot K} T^3 + \gamma T$$

donde Θ se conoce como la temperatura de Debye y γ es una constante con las unidades adecuadas. Para el cobre se tiene

$$\Theta = 343K \quad \gamma = 0,688 \frac{mJ}{mol \cdot K^2}$$

¿Cuánto calor por mol es transferido en un proceso en el que la temperatura cambia de $1,7K$ a $2,3K$?

Recuerde que las unidades de $\frac{C_V}{n}$ son $\frac{mJ}{mol \cdot K}$.

Dado que $C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V$, entonces el calor por mol en un proceso de $1,7K$ a $2,3K$ es

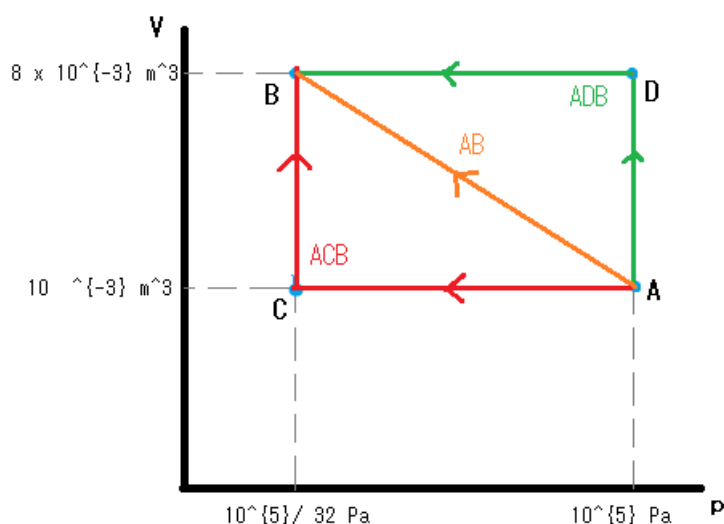
$$\begin{aligned} \int_{1,7K}^{2,3K} dT \frac{C_V}{n} &= \left(\frac{124,8}{\Theta} \right)^3 \frac{mJ}{mol \cdot K} \int_{1,7K}^{2,3K} dT T^3 + \gamma \int_{1,7K}^{2,3K} dT T \\ &= \left(\frac{124,8}{\Theta} \right)^3 \frac{mJ}{mol \cdot K} \left(\frac{(2,3K)^4}{4} - \frac{(1,7K)^4}{4} \right) + \gamma \left(\frac{(2,3K)^2}{2} - \frac{(1,7K)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1227}{250} \left(\frac{124,8}{\Theta} \right)^3 \frac{mJK^3}{mol} + \frac{6\gamma}{5} K^2 \\ &\approx (0,24 + 0,83) \frac{mJ}{mol} = 1,07 \frac{mJ}{mol} \end{aligned}$$

4. Sea un gas encerrado en un cilindro con un pistón movable. Se observa que, si las paredes son adiabáticas, un incremento cuasi-estático en el volumen resulta en un decremento en la presión de acuerdo con la ecuación

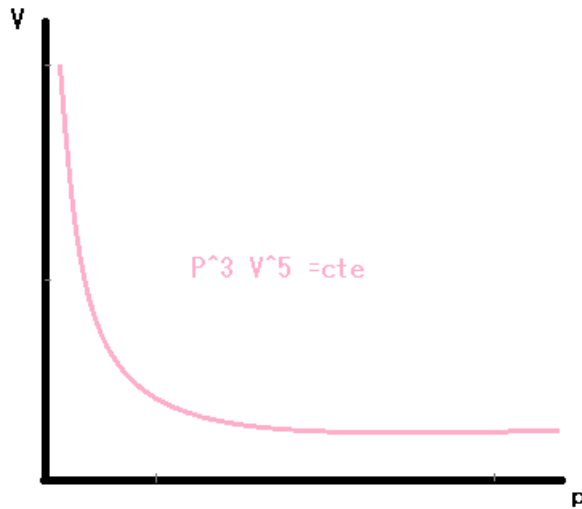
$$P^3V^5 = cte \quad (4)$$

Considere los siguientes estados del sistema:

- a) A: un estado con volumen $10^{-3}m^3$ y presión 10^5 Pa.
 - b) B: un estado con volumen $8 \times 10^{-3}m^3$ y presión $10^5/32$ Pa.
 - c) C: un estado con volumen igual al de A y presión igual a la de B.
 - d) D: un estado con volumen igual al de B y presión igual a la de A
- 1) Dibuje el diagrama, en el espacio fase, de los procesos ADB, ACB, AB y el proceso dado por la ec. (4).



Si despejamos V de la ec. (4) obtenemos una hipérbola



- 2) Encuentre el trabajo cuasi-estático realizado y el calor neto transferido en cada uno de los procesos: ADB, ACB y AB (siguiendo la línea recta que conecta estos dos puntos en el espacio fase).

El trabajo cuasi-estático está determinado por $W = \int p dV$, entonces

$$ADB \rightarrow W_{ADB} = W_{AD} + \cancel{W_{DB}} = \int_{1 \times 10^{-3} m^3}^{8 \times 10^{-3} m^3} P_{cte} dV =$$

$$= (1 \times 10^5 Pa)(8 \times 10^{-3} m^3 - 1 \times 10^{-3} m^3) = 700 J$$

$$ACB \rightarrow W_{ACB} = \cancel{W_{AC}} + W_{CB} = \int_{1 \times 10^{-3} m^3}^{8 \times 10^{-3} m^3} P'_{cte} dV$$

$$= \left(\frac{1 \times 10^5}{32} Pa\right)((8 \times 10^{-3} m^3 - 1 \times 10^{-3} m^3)) = 21,88 J$$

$$AB \rightarrow W_{AB} = 360,94 J$$

para el calor transferido supongamos que es un gas dicotómico e ideal

$$ADB \rightarrow Q_{ADB} = \frac{7}{2}(P_B V_B - P_A V_A) = -262,5 J$$

$$ACB \rightarrow Q_{ACB} = \frac{7}{2}(P_B V_B - P_A V_A) = Q_{ADB}$$

$$AB \rightarrow Q_{AB} = \frac{7}{2}(P_B V_B - P_A V_A) = Q_{ADB} = Q_{ACB}$$

3) Calcule la energía del estado con $P = 5 \times 10^4 Pa$ y $V = 8 \times 10^{-3} m^3$

La verdad no sé a que se refieren pero bueno si uso la ec. (4) las unidades no son de energía, así que creo que no debo usar eso, ahora ya que PV tiene unidades de energía, usaré eso

$$PV = (5 \times 10^4 Pa)(8 \times 10^{-3} m^3) = 400 J = E(?)$$