1. **Calcula las transformadas seno y coseno de Fourier de la función definida por :**

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \quad , \quad 0 < x < a \\ \\ 0 \quad\quad , \quad\quad x > a \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Sabemos que las funciones $y = \sin x$ y $y = 0$ son continuas en todo su dominio, así que podemos decir que $f(x)$ es continua a trozos en el intervalo $(0, \infty)$, o bien $f(x) \in P_1(0, \infty)$, ahora veamos que $f(x) \in A_1(R^+)$

$$\int_0^\infty |f(x)| dx$$

y por propiedades de la integral

$$\int_0^\infty |f(x)| dx = \int_0^a |f(x)| dx + \int_a^\infty |f(x)| dx$$

$$= \int_0^a |\sin x| dx + \cancel{\int_a^\infty 0 dx}$$

pero como $|\sin x| \leq 1$, entonces

$$= \int_0^a |\sin x| dx \leq \int_0^a 1 dx = a$$

$$\rightarrow \int_0^\infty |f(x)| dx \text{ es finito} \qquad \therefore f(x) \in A_1(R^+)$$

por lo anterior, podemos aplicar la transformada seno y coseno de Fourier

la transformada seno de Fourier es por definición

$$F_s[f; x \rightarrow \xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \xi x dx$$

y por propiedades de la integral

$$F_s[f; x \rightarrow \xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a f(x) \sin \xi x dx + \int_a^\infty f(x) \sin \xi x dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a \sin x \sin \xi x dx + \cancel{\int_a^\infty (0) \sin \xi x dx} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin x \sin \xi x dx$$

ahora, usemos la identidad trigonométrica $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$$F_s[f; x \to \xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{1}{2}(\cos(x - \xi x) - \cos(x + \xi x))dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \left[\int_0^a \cos(x(1-\xi))dx - \int_0^a \cos(x(1+\xi))dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^a \frac{1-\xi}{1-\xi} \cos(x(1-\xi))dx - \int_0^a \frac{1+\xi}{1+\xi} \cos(x(1+\xi))dx \right]$$

entonces, sea $u = x(1-\xi)$ y $v = x(1+\xi)$, $du = (1-\xi)dx$; $dv = (1+\xi)dx$(omitiré los limites de integración por un momento solo por comodidad)

$$F_s[f; x \to \xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{u} \int \cos u du - \frac{1}{v} \int \cos v dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-\xi} \sin u| - \frac{1}{1+\xi} \sin v| \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-\xi} \sin x(1-\xi)|_0^a - \frac{1}{1+\xi} \sin x(1+\xi)|_0^a \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-\xi}(\sin a(1-\xi) - \cancel{\sin 0(1-\xi)}) - \frac{1}{1+\xi}(\sin a(1+\xi) - \cancel{\sin 0(1+\xi)}) \right]$$

$$= \frac{(1+\xi)\sin a(1-\xi) - (1-\xi)\sin a(1+\xi)}{(1-\xi^2)\sqrt{2\pi}} = F_s(\xi)$$

Ahora calculemos la transformada coseno de Fourier, que por definición

$$F_c[f; x \to \xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos\xi x dx$$

y por propiedades de la integral

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a f(x) \cos\xi x dx + \int_a^\infty f(x) \cos\xi x dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a \sin x \cos\xi x dx + \cancel{\int_a^\infty (0) \cos\xi x dx} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a \sin x \cos\xi x dx \right]$$

ahora, usemos la identidad trigonométrica $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$$F_c[f;x\to\xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\left[\int_0^a \sin{(x-\xi x)}dx + \int_0^a \sin{(x+\xi x)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^a \sin x(1-\xi)dx + \int_0^a \sin x(1+\xi)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^a \frac{1-\xi}{1-\xi}\sin x(1-\xi)dx + \int_0^a \frac{1+\xi}{1+\xi}\sin x(1+\xi)dx\right]$$

entonces, sea $u = x(1-\xi)$ y $v = x(1+\xi)$, $du = (1-\xi)dx$; $dv = (1+\xi)dx$(omitiré los limites de integración por un momento solo por comodidad)

$$F_c[f;x\to\xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-\xi}\int \sin u du + \frac{1}{1+\xi}\int \sin v dv\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-\xi}(-\cos u)| + \frac{1}{1+\xi}(-\cos v)|\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-\xi}(-\cos x(1-\xi))|_0^a + \frac{1}{1+\xi}(-\cos x(1+\xi))|_0^a\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-\xi}(\cos 0(1-\xi) - \cos a(1-\xi)) + \frac{1}{1+\xi}(\cos 0(1+\xi) - \cos a(1+\xi))\right]$$

$$= \frac{(1+\xi)(1-\cos a(1-\xi)) + (1-\xi)(1-\cos a(1+\xi))}{(1-\xi^2)\sqrt{2\pi}} = F_c(\xi)$$

2. **Calcula la transformada de Fourier de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & , \quad x>0, a>0 \\ -e^{ax} & , \quad x<0, a>0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Las funciones $y = e^{-ax}$ y $y = -e^{ax}$ son continuas en todo su dominio, así que podemos decir que $f(x)$ es continua a trozos en el intervalo $(-\infty,\infty)$, o bien $f(x)\in P_1(-\infty,\infty)$, ahora veamos que $f(x)\in A_1(R)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

y por propiedades de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{\infty} |f(x)|dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} |-e^{ax}|dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-ax}|dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}(e^{0} - e^{-\infty}) - \frac{1}{a}(e^{-\infty} - e^{0}) = 0$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \text{ es finito} \qquad (x) \in A_1(R)$$

por lo anterior, podemos aplicar la transformada de Fourier
por definición

$$F[f; x \to \xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx$$

y por propiedades de la integral

$$F[f; x \to \xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{i\xi x}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{i\xi x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{i\xi x}dx \right]$$

y por propiedades de la exponencial

$$F[f; x \to \xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{0} e^{ax+i\xi x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{i\xi x-ax}dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{0} e^{x(a+i\xi)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{x(i\xi-a)}dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{0} \frac{a+i\xi}{a+i\xi} e^{x(a+i\xi)}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{i\xi-a}{i\xi-a} e^{x(i\xi-a)}dx \right]$$

sea $u = x(a+i\xi)$ y $v = x(i\xi - a)$, $du = (a+i\xi)dx$,$dv = (i\xi - a)dx$

$$F[f; x \to \xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a+i\xi} \int e^{u}du + \frac{1}{i\xi-a} \int e^{v}dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{u}| + \frac{1}{i\xi-a} e^{v}| \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{x(a+i\xi)}|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{i\xi-a} e^{x(i\xi-a)}|_{0}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{0(a+i\xi)} - \cancel{e^{-\infty(a+i\xi)}}}{a+i\xi} + \frac{e^{\infty(i\xi-a)} - e^{0(i\xi-a)}}{i\xi - a} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a+i\xi} + \frac{e^{\infty(i\xi)}\cancel{e^{-a\infty}} - 1}{i\xi - a} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{a+i\xi} + \frac{-1}{i\xi - a} \right] = \frac{2i\xi}{\sqrt{2\pi}(\xi^2 + a^2)} = F(\xi)$$

3. **La temperatura $u(x,t)$ de una varilla semiinfinita $0 \leq x < \infty$ satisface la ecuación diferencial parcial**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeta a las condiciones

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \text{ una constante, cuando } x = 0.t > 0$$

Determina la temperatura $u(x,t)$ en la varilla

SOLUCIÓN:

Apliquemos la transformada coseno de Fourier

$$F_c \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = F_c \left[\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

entonces, como la transformadad de coseno de Fourier de una derivada es $F[f'(t)] = -\xi^2 F(\xi) - f(0)$

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = \kappa(-\xi^2 U(\xi,t) - u_x(0,t))$$

donde $U = F_c(u)$,y por las condiciones de frontera

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = -\kappa(\xi^2 U(\xi,t) + \lambda)$$

$$\frac{-\kappa\xi^2}{-\kappa\xi^2} \frac{U'}{-\kappa(\xi^2 U(\xi,t) + \lambda)} = 1$$

$$\frac{1}{-\kappa\xi^2} \int \frac{-\kappa\xi^2 U'}{-\kappa(\xi^2 U(\xi,t) + \lambda)} dt = \int 1 dt$$

$$\frac{\ln -\kappa(\xi^2 U(\xi,t) + \lambda)}{-\kappa\xi^2} = t + c$$

$$-\kappa(\xi^2 U(\xi,t)+\lambda) = e^{-\kappa\xi^2 t}e^{-\kappa\xi^2 c} = Ce^{-\kappa\xi^2 t}$$

$$U(\xi,t) = \frac{1}{-\kappa\xi^2}(Ce^{-\kappa\xi^2 t}+\kappa\lambda)$$

por la otra condición inicial se tiene que

$$\frac{1+\kappa\lambda}{-\kappa\xi} = 0 \qquad \to \qquad \kappa = -1/\lambda$$

entonces la solución en el espacio transformado es

$$U(\xi,t) = \frac{\lambda}{\xi^2}(Ce^{-\kappa\xi^2 t}-1)$$

ahora aplicando la transformada inversa coseno de FOurier

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\xi^2}(Ce^{-\kappa\xi^2 t}-1)\cos\xi x d\xi$$

4. **La función seno integral se define como:**

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

mientras que la función coseno integral queda definida por:

$$Ci(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du$$

Calcula la tranformada de Laplace de $Si(t)$ y de $Ci(t)$
SOLUCIÓN:
Primero demostremos que $\frac{d}{dp}L[f(t);t\to p] = -L[tf(t);t\to p]$

$$\frac{d}{dp}L[f(t);t\to p] = \frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dp}(f(t)e^{-pt})dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dp}(e^{-pt})dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt = -L[tf(t);t\to p]$$

ahora sí, veamos las transformadas de Laplace, por el teorema fundamental del cálculo

$$Ci'(t) = -\frac{\cos t}{t}$$

$$tCi'(t) = -\cos t$$

$$L[tCi'(t); t \to p] = L[-\cos t; t \to u]$$

como la transformada de Laplace es lineal y por lo demostrado anteriormente

$$-\frac{d}{dp}L[Ci'(t); t \to p] = -L[\cos t; t \to u]$$

y por el ejemplo 3.5

$$-\frac{d}{dp}L[Ci'(t); t \to p] = -\frac{u}{u^2+1}$$

por el teorema 3.5 de las notas

$$-\frac{d}{dp}(pL[Ci(t); t \to p] - \cancel{Ci(0)}) = -\frac{u}{u^2+1}$$

que integrando

$$pL[Ci(t); t \to p] = \int_0^p \frac{u}{u^2+1}du$$

sea $w = u^2 + 1$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{p^2+1} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}(\ln(p^2+1) - \cancel{\ln 1})$$

$$\therefore L[Ci(t); t \to p] = \frac{\ln(p^2+1)}{2p}$$

ahora para el seno integral

$$Si'(t) = -\frac{\sin t}{t}$$

$$tSi'(t) = -\sin t$$

$$L[tSi'(t); t \to p] = L[-\sin t; t \to u]$$

como la transformada de Laplace es lineal y por lo demostrado anteriormente

$$-\frac{d}{dp}L[Si'(t); t \to p] = -L[\sin t; t \to u]$$

y por el ejemplo 3.5

$$-\frac{d}{dp}L[Si'(t);t\to p] = -\frac{1}{u^2+1}$$

por el teorema 3.5 de las notas

$$-\frac{d}{dp}(pL[Si(t);t\to p] - \cancel{Si(0)}) = -\frac{1}{u^2+1}$$

que integrando

$$pL[Si(t);t\to p] = \int_0^p \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= tg^{-1}(p) - \cancel{tg^{-1}(0)} = tg^{-1}(p)$$

$$\therefore L[Si(t);t\to p] = \frac{tg^{-1}(p)}{p}$$

5. **Una función periódica f(t) de periodo 2π presenta una discontinuidad finita en $t=\pi$, está definida por:**

$$f(t) = \begin{cases} \sin t \quad , \quad 0\leq t<\pi \\ \\ \cos t \quad , \quad \pi<t\leq 2\pi \end{cases}$$

Evalúa la transformada de Laplace.

SOLUCIÓN:

Como $\sin t$ y $\cos t$ son cotinuas en todo su dominio, f(t) solo tiene discontinuidades en $(2n+1)\pi$, por lo que es continua a tramos, tambien como esas funciones están acotadas por 1, entonces $f(t)$ es de orden exponencial con $M=2, \sigma=0$ ($|f(t)|<Me^{\sigma t}=2$), entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ existe.

Recordando que

$$H(x-a) = \begin{cases} 0 \quad x-a<0 \quad ; x<a \\ \\ 1 \quad x-a>0 \quad ; x>a \end{cases}$$

$$H(x-b) = \begin{cases} 0 \quad x-b<0 \quad ; x<b \\ \\ 1 \quad x-b>0 \quad ; x>b \end{cases}$$

entonces, si $a<b$

$$H(x-a)-H(x-b)=\begin{cases} 0 & x<a \\ 1 & a<x<b \\ 1-1=0 & b<x \end{cases}$$

con esto, podemos escribir a f(t) como

$$f(t)=\sin t[H(t-2n\pi)-H(t-(2n+1)\pi)]+\cos t[H(t-(2n+1)\pi)-H(t-2(n+1)\pi)]$$

con n natural ($0\in N$),entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ es

$$L[f(t);t\to p]=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^\infty \{\sin t[H(t-2n\pi)-H(t-(2n+1)\pi)]+\cos t[H(t-(2n+1)\pi)-H(t-2(n+1)\pi)]\}e^{-pt}dt$$

por la linealidad de integrales

$$=\int_0^\infty \sin t[H(t-2n\pi)-H(t-(2n+1)\pi)]e^{-pt}dt+\int_0^\infty \cos t[H(t-(2n+1)\pi)-H(t-2(n+1)\pi)]e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^\infty \sin tH(t-2n\pi)e^{-pt}dt-\int_0^\infty \sin tH(t-(2n+1)\pi)e^{-pt}dt+$$

$$\int_0^\infty \cos t[H(t-(2n+1)\pi)e^{-pt}dt-\int_0^\infty \cos tH(t-2(n+1)\pi)e^{-pt}dt$$

y por el ejemplo 3.1 de la notas

$$=\int_{2n\pi}^\infty \sin te^{-pt}dt-\int_{(2n+1)\pi}^\infty \sin te^{-pt}dt+\int_{(2n+1)\pi}^\infty \cos te^{-pt}dt-\int_{2(n+1)\pi}^\infty \cos te^{-pt}dt$$

ahora resolvamos las 2 integrales necesarias y luego evaluemos los límites

$$\int \sin te^{-pt}dt=\int \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-pt}dt$$

$$=\int \frac{e^{it-pt}-e^{-it-pt}}{2i}dt=\int \frac{e^{t(i-p)}-e^{-t(i+p)}}{2i}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\int e^{t(i-p)}dt-\int e^{-t(i+p)}dt\right]=\frac{1}{2i}\left[\int \frac{i-p}{i-p}e^{t(i-p)}dt-\int \frac{-(i+p)}{-(i+p)}e^{-t(i+p)}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-p}\int e^{t(i-p)}(i-p)dt - \frac{1}{-(i+p)}\int e^{-t(i+p)}[-(i+p)]dt\right]$$

sea $u = t(i-p)$ y $dv = -t(i+p)$; $du = (i-p)dt$ $dv = -(i+p)dt$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-p}\int e^{u}du - \frac{1}{-(i+p)}\int e^{v}dv\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{u}}{i-p} - \frac{e^{v}}{-(i+p)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-(i+p)e^{u} - (i-p)e^{v}}{-(i-p)(i+p)}\right] = \frac{(i+p)e^{t(i-p)} + (i-p)e^{-t(i+p)}}{-2i(1+p^2)}$$

$$\int \cos te^{-pt}dt = \int \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-pt}dt$$

$$= \int \frac{e^{it-pt}+e^{-it-pt}}{2}dt = \int \frac{e^{t(i-p)}+e^{-t(i+p)}}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int e^{t(i-p)}dt + \int e^{-t(i+p)}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\int \frac{i-p}{i-p}e^{t(i-p)}dt + \int \frac{-(i+p)}{-(i+p)}e^{-t(i+p)}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-p}\int e^{t(i-p)}(i-p)dt + \frac{1}{-(i+p)}\int e^{-t(i+p)}[-(i+p)]dt\right]$$

sea $u = t(i-p)$ y $dv = -t(i+p)$; $du = (i-p)dt$ $dv = -(i+p)dt$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-p}\int e^{u}du + \frac{1}{-(i+p)}\int e^{v}dv\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{u}}{i-p} + \frac{e^{v}}{-(i+p)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-(i+p)e^{u} + (i-p)e^{v}}{-(i-p)(i+p)}\right] = \frac{(i-p)e^{-t(i+p)} - (i+p)e^{t(i-p)}}{2(1+p^2)}$$

ahora si evaluemosy supongamos que $\mathrm{Re}(p) > 0$

$$L[f(t); t\to p] = \int_{2n\pi}^{\infty}\sin te^{-pt}dt - \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\sin te^{-pt}dt + \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\cos te^{-pt}dt - \int_{2(n+1)\pi}^{\infty}\cos te^{-pt}dt$$

$$= \left[\frac{(i+p)\cancel{e^{\infty(i-p)}} + (i-p)\cancel{e^{-\infty(i+p)}}}{-2i(1+p^2)} - \frac{(i+p)e^{2n\pi(i-p)} + (i-p)e^{-2n\pi(i+p)}}{-2i(1+p^2)}\right] -$$

$$\left[\frac{(i+p)\cancel{e^{\infty(i-p)}} + (i-p)\cancel{e^{-\infty(i+p)}}}{-2i(1+p^2)} - \frac{(i+p)e^{(2n+1)\pi(i-p)} + (i-p)e^{-(2n+1)\pi(i+p)}}{-2i(1+p^2)}\right] +$$

$$\left[\frac{(i-p)\cancel{e^{-\infty(i+p)}} - (i+p)\cancel{e^{\infty(i-p)}}}{2(1+p^2)} - \frac{(i-p)e^{-(2n+1)\pi(i+p)} - (i+p)e^{(2n+1)\pi(i-p)}}{2(1+p^2)}\right] -$$

$$\left[\frac{(i-p)\cancel{e^{-\infty(i+p)}}-(i+p)\cancel{e^{\infty(i-p)}}}{2(1+p^2)}-\frac{(i-p)e^{-2(n+1)\pi(i+p)}-(i+p)e^{2(n+1)\pi(i-p)}}{2(1+p^2)}\right]$$

$$=-\frac{(i+p)e^{2n\pi(i-p)}+(i-p)e^{-2n\pi(i+p)}}{-2i(1+p^2)}-\frac{(i+p)e^{(2n+1)\pi(i-p)}+(i-p)e^{-(2n+1)\pi(i+p)}}{-2i(1+p^2)}-$$

$$\frac{(i-p)e^{-(2n+1)\pi(i+p)}-(i+p)e^{(2n+1)\pi(i-p)}}{2(1+p^2)}-\frac{(i-p)e^{-2(n+1)\pi(i+p)}-(i+p)e^{2(n+1)\pi(i-p)}}{2(1+p^2)}$$

$$\frac{-1}{(1+p^2)}\left[\frac{(i+p)e^{\pi(i-p)}+(i-p)e^{-\pi(i+p)}}{2i}-\frac{(i-p)e^{-\pi(i+p)}+(i+p)e^{\pi(i-p)}}{2}\right]$$

$$=\frac{(i-1)((i+p)e^{\pi(i-p)}+(i-p)e^{\pi(i+p)})}{2i(1+p^2)}$$

también lo hice de otra forma pero creo que la correcta es la anterior, igual la pongo por si acaso

integremos por partes, sea $u=\sin t$ y $dv=e^{-pt}dt$;$du=\cos t dt$ $v=\frac{-e^{-pt}}{p}$

$$\int \sin t e^{-pt}dt=-\sin t\frac{e^{-pt}}{p}+\int\frac{e^{-pt}}{p}\cos t dt$$

ahora sea $u'=\cos t$ y mantegamos dv

$$\int \sin t e^{-pt}dt=-\sin t\frac{e^{-pt}}{p}+\frac{1}{p}\left[-\cos t\frac{e^{-pt}}{p}-\int\frac{e^{-pt}}{p}\sin(t)dt\right]$$

$$\int \sin t e^{-pt}dt=-\sin t\frac{e^{-pt}}{p}+\frac{1}{p^2}\left[-\cos t e^{-pt}-\int\sin(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$\int \sin t e^{-pt}dt+\frac{1}{p^2}\int\sin(t)e^{-pt}dt=-\sin t\frac{e^{-pt}}{p}-\frac{1}{p^2}\cos t e^{-pt}$$

$$(\frac{1}{p^2}+1)\int\sin(t)e^{-pt}dt=-\sin t\frac{e^{-pt}}{p}-\frac{1}{p^2}\cos t e^{-pt}$$

$$\frac{p^2+1}{p^2}\int \sin(t)e^{-pt}dt = -\sin t\frac{e^{-pt}}{p} - \frac{1}{p^2}\cos te^{-pt}$$

$$\int \sin(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}(-\frac{\sin t}{p} - \frac{\cos t}{p^2})\frac{p^2}{p^2+1}$$

$$\int \sin(t)e^{-pt}dt = -e^{-pt}\frac{p\sin t + \cos t}{p^2+1}$$

Sea $u = \cos t$ y $dv = e^{-pt}dt$; $du = -\sin tdt$ $v = \frac{-e^{-pt}}{p}$

$$\int \cos te^{-pt}dt = \cos t\frac{-e^{-pt}}{p} - \frac{1}{p}\int \sin te^{-pt}dt$$

ahora sea $u' = \sin t$ y mantengamos dv

$$\int \cos te^{-pt}dt = \cos t\frac{-e^{-pt}}{p} - \frac{1}{p}\left[-\sin t\frac{e^{-pt}}{p} + \int \frac{e^{-pt}}{p}\cos tdt\right]$$

$$\int \cos te^{-pt}dt = \cos t\frac{-e^{-pt}}{p} + \frac{1}{p^2}\left[\sin te^{-pt} - \int \cos te^{-pt}dt\right]$$

$$\frac{1}{p^2}\int \cos te^{-pt}dt + \int \cos te^{-pt}dt = \cos t\frac{-e^{-pt}}{p} + \frac{1}{p^2}\sin te^{-pt}$$

$$\frac{p^2+1}{p^2}\int \cos te^{-pt}dt = e^{-pt}(\frac{-\cos t}{p} + \frac{\sin t}{p^2})$$

$$\int \cos te^{-pt}dt = e^{-pt}(\frac{-\cos t}{p} + \frac{\sin t}{p^2})\frac{p^2}{p^2+1}$$

$$\int \cos te^{-pt}dt = e^{-pt}\frac{\sin t - p\cos t}{p^2+1}$$

ahora solo hay que evaluar, supongamos que Re(p)$>$ 0 (si Re(p)$<$ 0 entonces no está definida)

$$L[f(t); t \to p] = \int_{2n\pi}^{\infty}\sin te^{-pt}dt - \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\sin te^{-pt}dt + \int_{(2n+1)\pi}^{\infty}\cos te^{-pt}dt - \int_{2(n+1)\pi}^{\infty}\cos te^{-pt}dt$$

$$= -\left[\cancel{-e^{-p\infty}}\frac{p\sin\infty + \cos\infty}{p^2+1} + e^{-p2n\pi}\frac{\cancel{p\sin 2n\pi} + \cos 2n\pi}{p^2+1}\right]$$

$$-\left[\cancel{-e^{-p\infty}}\frac{p\sin\infty + \cos\infty}{p^2+1} + e^{-p(2n+1)\pi}\frac{\cancel{p\sin(2n+1)\pi} + \cos(2n+1)\pi}{p^2+1}\right]$$

$$+\left[\cancel{e^{-p\infty}}\frac{\sin\infty - p\cos\infty}{p^2+1} - e^{-p(2n+1)\pi}\frac{\cancel{\sin(2n+1)\pi} - p\cos(2n+1)\pi}{p^2+1}\right]$$

$$-\left[\cancel{e^{-p\infty}}\frac{\sin\infty - p\cos\infty}{p^2+1} - e^{-p2(n+1)\pi}\frac{\cancel{\sin 2(n+1)\pi} - p\cos 2(n+1)\pi}{p^2+1}\right]$$

$$= e^{-p2n\pi}\frac{p}{p^2+1} + \cancel{e^{-p(2n+1)\pi}\frac{p}{p^2+1} - e^{-p(2n+1)\pi}\frac{p}{p^2+1}} + e^{-p2(n+1)\pi}\frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{pe^{-p(2n+2(n+1))\pi}}{p^2+1} = \frac{pe^{-2p(2n+1)\pi}}{p^2+1}$$

con $Re(p) > 0$