1. **Describe el tipo de ecuación y las regiones en las que es de tipo hiperbólica, parabólica y/o elíptica. Recuerda que debes de justificar el por qué de tu respuesta (calcular el discriminante).**

    a) $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

    b) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

    c) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} - 5u = 0$

    d) $e^{xy}u_{xx} + (\sinh x)u_{yy} + u = 0$

    SOLUCIÓN:

    Todas las EDP's son de segundo orden, lineales y homogéneas, ahora para calcular sus discriminantes tomemos en cuenta que

    $$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

    y entonces sus discriminantes son:

    a) $A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = -2 \rightarrow B^2 - 4AC = (-1)^2 - (1)(-2) = 3 \therefore$ es hiperbólica

    b) $A = 1 \qquad B = 2 \qquad C = 1 \rightarrow B^2 - 4AC = (2)^2 - (1)(1) = 3 \therefore$ es hiperbólica

    c) $A = 2 \qquad B = 4 \qquad C = 3 \rightarrow B^2 - 4AC = (4)^2 - (2)(3) = 10 \therefore$ es hiperbólica

    d) $A = e^{xy} \qquad B = 0 \qquad C = \sinh x \rightarrow B^2 - 4AC = (0)^2 - (e^{xy})(\sinh x) = e^{xy}\sinh x$ como $e^{xy} > 0 \quad \forall x, y$ entonces solo depende de $\sinh x$ que es mayor a 0 con $x > 0$, menor a 0 con $x < 0$ e igual a 0 con $x = 0 \therefore$ es hiperbólica con $x > 0$, elíptica con $x < 0$ y parabólica con $x = 0$ $(\forall y)$

2. **Para la siguiente ecuación diferencial parcial, ¿a qué ecuaciones diferenciales ordinarias llegamos cuando se ocupa el método de separación de variables?**

    $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

    Primero supongamos que existe una solución del tipo $u(r,t) = R(r)T(t)$, ahora sustituyamos

    $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \rightarrow R(r)T'(t) = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r)T(t))$$

    y por regla de la cadena

    $$R(r)T'(t) = \frac{kT(t)}{r}(R'(r) + rR''(r))$$

    que multiplicando por $\frac{1}{R(r)T(t)}$ y reordenando

    $$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{r}(\frac{R'(r)}{R(r)} + r\frac{R''(r)}{R(r)})$$

dado que r y t son independientes entre sí, cada lado debe ser una constante fija (digamos $-\lambda$ con $\lambda \neq 0$), entonces

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{r}(\frac{R'(r)}{R(r)} + r\frac{R''(r)}{R(r)}) = -\lambda$$

o de manera equivalente

$$T'(t) + k\lambda T(t) = 0$$

$$rR''(r) + R'(r) + r\lambda R(r) = 0$$

3. **Con el método de separación de variables resuelve la siguiente EDP:**

$$u_t = 17u_{xx} \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

con las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

y las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \\ 2 & si \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Supongamos que existe una solución de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ y sustituyamos

$$u_t = 17u_{xx} \rightarrow X(x)T'(t) = 17X''(x)T(t)$$

si multiplicamos por $\frac{1}{X(x)T(t)}$ y reordenamos, entonces

$$\frac{T'(t)}{17T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

dado que x y t son independientes entre sí, cada lado debe ser una constante fija (digamos $-\lambda$ con $\lambda \neq 0$), entonces

$$\frac{T'(t)}{17T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

o equivalentemente

$$T'(t) + 17\lambda T(t) = 0$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

ahora solo hay que resolver un par de EDO, empecemos por la segunda
Supongamos que la solución es de la forma $X(x) = e^{\beta x}$ con β una constante y sustituyamos

$$\beta^2 e^{\beta x} + \lambda e^{\beta x} = 0$$

que factorizando

$$(\beta^2 + \lambda)e^{\beta x} = 0$$

y dado que $e^{\lambda x}$ es mayor a 0 para cualquier x y β

$$\beta^2 + \lambda = 0 \to \beta = \pm i\sqrt{\lambda}$$

por lo que las soluciones son

$$X_1(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} \qquad X_2(x) = c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración, y así la solución general es

$$X(x) = X_1(x) + X_2(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

ahora aplicando la identidad de Euler ($e^{a\pm ib} = e^a \cos b \pm ie^a \sin b$)

$$X(x) = c_1(e^0 \cos\sqrt{\lambda}x + ie^0 \sin\sqrt{\lambda}x) + c_2(e^0 \cos\sqrt{\lambda}x - ie^0 \sin\sqrt{\lambda}x)$$

y reordenando

$$X(x) = c_1(\cos\sqrt{\lambda}x + i\sin\sqrt{\lambda}x) + c_2(\cos\sqrt{\lambda}x - i\sin\sqrt{\lambda}x)$$

$$= c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_1 i\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x - c_2 i\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$= (c_1 + c_2)\cos\sqrt{\lambda}x + (c_1 - c_2)i\sin\sqrt{\lambda}x$$

que se puede escribir como

$$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

donde $C_1 = c_1 + c_2$ y $C_2 = i(c_1 - c_2)$, ahora resolvamos la primera, basta con reordenar un poco para resolverla

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -17\lambda$$

integrando

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)}dt = -\int 17\lambda dt \rightarrow \ln T(t) = -17\lambda t + c$$

por lo que la solución general es

$$T(t) = C_1 e^{-17\lambda t}$$

ya con las soluciones, solo falta usar las condiciones iniciales y de frontera para definir las constante, por lo mientras la solución general es

$$u(x,t) = (C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x)e^{-17\lambda t}$$

por las condiciones de frontera, se tiene que

$$u(0,t) = (C_1 \cos\sqrt{\lambda}0 + \cancel{C_2 \sin\sqrt{\lambda}0})e^{-17\lambda t} = C_1 e^{-17\lambda t} = 0 \rightarrow C_1 = 0 \qquad \text{(esto implica } C_2 \neq 0\text{)}$$

$$u(\pi,t) = (\cancel{C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi)e^{-17\lambda t} = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi e^{-17\lambda t} = 0 \rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

lo ultimo significa que

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi \qquad n \in Z$$

Sin embargo para no tomar en cuenta la misma solución 2 veces, se toma n positivo, es decir

$$\lambda = n^2$$

$$\therefore u_n(x,t) = C_n sin(nx)e^{-17n^2 t}$$

y por el principio de superposición

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)e^{-17n^2 t}$$

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0)\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx = \frac{4}{n\pi}(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)$$

por lo que la solución general es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)e^{-17n^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi)sin(nx)e^{-17n^2 t}$$

4. **Clasifica los puntos singulares de las siguientes EDO, es decir, identifica si son puntos singulares regulares o irregulares.**

   a) $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$
   b) $xy'' - (x+3)^{-2}y = 0$
   c) $(x^2-9)^2y'' + (x+3)y' + 2y = 0$
   d) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{(x-1)^3}y = 0$

   SOLUCIÓN:

   a) Primero despejando y''

$$y'' + \frac{4x^2}{x^3}y' + \frac{3}{x^3}y = 0$$

   entonces

$$P(x) = \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \frac{4}{x};\ Q(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to x_0} Q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3} = \infty$$

   por lo que esta EDP solo tiene un punto singular, $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)P(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}} = 4$$

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2Q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x} = \infty$$

   por lo tanto x_0 es una singularidad irregular

   b) despejando y''

$$y'' - \frac{1}{x(x+3)^2}y = 0$$

   entonces

$$P(x) = 0;\ Q(x) = -\frac{1}{x(x+3)^2}$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_1} P(x) = \lim_{x\to -3} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} Q(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x(x+3)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to x_1} Q(x) = \lim_{x\to -3} -\frac{1}{x(x+3)^2} = \infty$$

por lo que esta EDP tiene 2 puntos singulares, $x_0 = 0$ y $x_1 = -3$

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)P(x) = \lim_{x\to 0} (x)0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_1} (x - x_1)P(x) = \lim_{x\to -3} (x+3)0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x+3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(x+3)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to x_1} (x - x_1)^2 Q(x) = \lim_{x\to -3} -\frac{\cancel{(x+3)^2}}{x\cancel{(x+3)^2}} = \lim_{x\to -3} -\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto x_0 y x_1 son puntos singulares regulares

c) Despejando y''

$$y'' + \frac{x+3}{(x^2-9)^2} y' + \frac{2}{(x^2-9)^2} y = 0$$

entonces

$$P(x) = \frac{x+3}{(x^2-9)^2};\ Q(x) = \frac{2}{(x^2-9)^2}$$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{(x^2-9)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to x_1} P(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{(x^2-9)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} Q(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x^2-9)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to x_1} Q(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2}{(x^2-9)^2} = \infty$$

por lo que esta EDP tiene 2 puntos singulares, $x_0 = 3$ y $x_1 = -3$

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)P(x) = \lim_{x\to 3} (x)\frac{(x-3)(x+3)}{(x^2-9)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x^2-9)}}{(x^2-9)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-9} = \infty$$

$$\lim_{x\to x_1} (x - x_1)P(x) = \lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)^2}}{(x-3)^2\cancel{(x+3)^2}} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{36}$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)^2}}{\cancel{(x-3)^2}(x+3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x+3)^2}=\frac{1}{18}$$

$$\lim_{x\to x_1}(x-x_1)^2Q(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2\cancel{(x+3)^2}}{(x-3)^2\cancel{(x+3)^2}}=\lim_{x\to -3}\frac{2}{(x-3)^2}=\frac{2}{36}$$

por lo tanto x_0 es un punto singular irregular y x_1 es un punto singular regular

d)

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{(x-1)^3}y=0$$

entonces

$$P(x)=-\frac{1}{x};\ Q(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to x_1}P(x)=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to x_0}Q(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)^3}=-1$$

$$\lim_{x\to x_1}Q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3}=\infty$$

por lo que esta EDP tiene 2 puntos singulares, $x_0=0$ y $x_1=1$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)=\lim_{x\to 0}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to x_1}(x-x_1)P(x)=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-1)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x-1)^3}=0$$

$$\lim_{x\to x_1}(x-x_1)^2Q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{3}}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$$

por lo tanto x_0 es singular regular y x_1 es singular irregular

5. **Con el método de Frobenius resuelve la ecuación de Legendre:**

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

A modo de guía para este ejercicio, los siguientes elementos te indicarán si vas por el camino correcto para la solución.

$\star$La ecuación de índices es: r(r-1) = 0

$\star$ Que con la raíz $r_1 = 0$, la relación de recurrencia es:

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

$\star$ La solución con esta raíz r_1, nos genera exponentes pares de x (haciendo que $a_1 = 0$), es:

$$y_{par} = a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + ... \right]$$

$\star$ Que con la raíz $r_2 = 1$, la relación de recurrencia es:

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$$

$\star$ La solución con esta raíz r_2, nos genera exponentes impares de x (haciendo que $a_1 = 1$), es:

$$y_{impar} = a_1 \left[x - \frac{n(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{n(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + ... \right]$$

SOLUCIÓN:

Primero veamos si las singularidades son regulares

$$P(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}; \qquad Q(x) = \frac{n(n+1)}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-2x}{1 - x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to x_1} P(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2x}{1 - x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to x_0} Q(x) = \lim_{x \to 1} \frac{n(n+1)}{1 - x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to x_1} Q(x) = \lim_{x \to -1} \frac{n(n+1)}{1 - x^2} = \infty$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-2x\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) P(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2x\cancel{(x+1)}}{-(x-1)\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} \frac{2x}{(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{n(n+1)(x-1)^{\cancel{2}}}{-(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{n(n+1)(x-1)}{-(x+1)}=0$$

$$\lim_{x\to x_1}(x-x_1)^2Q(x)=\lim_{x\to -1}\frac{n(n+1)(x+1)^{\cancel{2}}}{-(x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{n(n+1)(x+1)}{-(x-1)}=0$$

Solo tiene singularidades regulares, por lo tanto podemos usar el método de Frobenius

Supongamos que la solución es de la forma $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}$ $\quad a_0\neq 0$

Ahora derivemos y sustituyamos

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_nx^{k+r-1}$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}$$

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$

que simplificando

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1}$$

$$+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r}-2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r}$$

$$+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}[n(n+1)a_k-2(k+r)a_k-(k+r)(k+r-1)a_k]x^{k+r}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}[(n(n+1)-2(k+r)-(k+r)(k+r-1))a_k]x^{k+r}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))a_k x^{k+r}=0$$

$$r(r-1)a_0x^{r-2}+(1+r)ra_1x^{r-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))a_k x^{k+r}=0$$

$$r(r-1)a_0x^{r-2}+(1+r)ra_1x^{r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+2)(k+r+1)a_{k+2} x^{k+r}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))a_k x^{k+r}=0$$

$$r(r-1)a_0x^{r-2}+(1+r)ra_1x^{r-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+2)(k+r+1)a_{k+2}+(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))a_n]x^{k+r}=0$$

como $a_0 \neq 0$, entonces

$$r(r-1)=0$$

$$(k+r+2)(k+r+1)a_{k+2}+(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))a_k=0$$

Entonces la ecuación de índices

$$r^2-r=0$$

con raíces

$$r_1=0 \qquad r_2=1$$

y relación de recurrencia

$$a_{k+2}=\frac{-(n(n+1)-(k^2+(1+2r)k+r(1+r)))}{(k+r+2)(k+r+1)}a_k$$

y entonces, con r_1 se tiene

$$a_{k+2} = \frac{-(n(n+1) - k(k+1))}{(k+2)(k+1)} a_k$$

$$a_0 \qquad\qquad a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{n(n+1) - 0(0+1)}{(0+2)(0+1)} a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0 \qquad\qquad a_3 = a_1$$

$$a_4 = -\frac{n(n+1) - 2(2+1)}{(4)(3)} a_2 = \frac{(n(n+1) - 6)(n(n+1))}{4!} a_0$$

$$= \frac{(n^2 + n - 6)(n^2 + n)}{4!} a_0 = \frac{n^4 + n^3 + n^3 + n^2 - 6n}{4!} a_0 = \frac{n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n^3 - 8n^2 - 6n}{4!} a_0$$

$$= \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

con r_2

$$a_{k+2} = \frac{k^2 + 3k + 2 - n(n+1)}{(k+3)(k+2)} a_k = \frac{(k+2)(k+1) - n(n+1)}{(k+3)(k+2)} a_k$$

$$a_0 \qquad\qquad a_1 = 0$$

$$a_2 = n\frac{-n(n+1) + 2}{(3)(2)} a_0 = -\frac{n(n-1)(n+2)}{3!} a_0 \qquad\qquad a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{(4)(3) - n(n+1)}{(5)(4)} a_2 = \frac{(12 - n(n+1))n(n-1)(n+2)}{5!} a_0$$

$$= n\frac{-n^4 - 2n^3 + 13n^2 + 14n - 24}{5!} a_0 = \frac{n(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} a_0$$

así, sustituyendo en las soluciones

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^{n+r_1} = a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + ...\right]$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^{n+r_2} = a_0 \left[x - \frac{n(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{n(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + ...\right]$$

por lo tanto la solución general es

$$y = y_1 + y_2 = a_0 \left[1 + x - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 ... \right]$$