Macías Márquez Misael Iván

1. Pruebe las siguientes propiedades del conmutador

   a) $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}] = -[\hat{C},\hat{A}+\hat{B}]$
   Por definición tenemos que

$$[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = (\hat{A}+\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}+\hat{B})$$

$$= \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{B} = (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) + (\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B})$$

$$= [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}] \qquad \blacksquare$$

$$= (\hat{A}+\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}+\hat{B}) = -(\hat{C}(\hat{A}+\hat{B}) - (\hat{A}+\hat{B})\hat{C})$$

$$= -[\hat{C},\hat{A}+\hat{B}] \qquad \blacksquare$$

   b) $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$
   Por definición tenemos que

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

$$= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B})$$

$$= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

$$= \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B}$$

$$= \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} \qquad \blacksquare$$

   c) Si $\hat{F}(\hat{p}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \hat{p}^j$, con $a_j \in \mathbb{C}$, $\forall j$, entonces $[\hat{x},\hat{F}(\hat{p})] = j\hbar\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{p}}$
   Por a)

$$[\hat{x},\hat{F}(\hat{p})] = [\hat{x},\sum_{j=1}^{\infty} a_j\hat{p}^j] = [\hat{x},(\sum_{j=2}^{\infty} a_j\hat{p}^j) + a_1\hat{p}]$$

$$= [\hat{x},\sum_{j=2}^{\infty} a_j\hat{p}^j] + a_1[\hat{x},\hat{p}]$$

   y haciendo esto una infinidad de veces llegamos a

$$[\hat{x}, \hat{F}(\hat{p})] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j [\hat{x}, \hat{p}^j]$$

ahora demostremos por inducción que $[\hat{x}, \hat{p}^j] = i\hbar j \hat{p}^{j-1}$
para $j = 1$, sabemos que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar = i\hbar(1)\hat{p}^{1-1}$
supongamos que, $[\hat{x}, \hat{p}^j] = i\hbar j \hat{p}^{j-1}$
entonces por b) y por hipótesis

$$[\hat{x}, \hat{p}^{j+1}] = -[\hat{p}\hat{p}^j, \hat{x}] = -(\hat{p}[\hat{p}^j, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}]\hat{p}^j)$$

$$= \hat{p}[\hat{x}, \hat{p}^j] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}^j = \hat{p} i\hbar j \hat{p}^{j-1} + i\hbar p^j$$

$$= i\hbar p^j (j+1) \qquad \blacksquare$$

entonces ya con esto

$$[\hat{x}, \hat{F}(\hat{p})] = \sum_{j=1}^{\infty} a_j [\hat{x}, \hat{p}^j] = i\hbar \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \hat{p}^{j-1}$$

$$= i\hbar \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \hat{p}^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \hat{p}^j$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \hat{F}(\hat{p}) \qquad \blacksquare$$

d) Si $\hat{G}(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \hat{x}^j$, con $b_j \in \mathbb{C}$, $\forall j$, entonces $[\hat{p}, \hat{G}(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{x}}$

Por a)

$$[\hat{p}, \hat{G}(\hat{x})] = [\hat{p}, \sum_{j=1}^{\infty} b_j \hat{x}^j] = [\hat{p}, (\sum_{j=2}^{\infty} b_j \hat{x}^j) + b_1 \hat{x}]$$

$$= [\hat{p}, \sum_{j=2}^{\infty} b_j \hat{x}^j] + a_1 [\hat{p}, \hat{x}]$$

y haciendo esto una infinidad de veces llegamos a

$$[\hat{p}, \hat{G}(\hat{x})] = \sum_{j=1}^{\infty} b_j [\hat{p}, \hat{x}^j]$$

ahora demostremos por inducción que $[\hat{p}, \hat{x}^j] = -i\hbar j \hat{x}^{j-1}$
para $j = 1$, sabemos que $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar = -i\hbar(1)\hat{x}^{1-1}$
supongamos que, $[\hat{p}, \hat{x}^j] = -i\hbar j \hat{x}^{j-1}$

entonces por b) y por hipótesis

$$[\hat{p}, \hat{x}^{j+1}] = -[\hat{x}\hat{x}^j, \hat{p}] = -(\hat{x}[\hat{x}^j, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^j)$$

$$= \hat{x}[\hat{p}, \hat{x}^j] + [\hat{p}, \hat{x}]\hat{x}^j = -\hat{p}i\hbar j\hat{x}^{j-1} - i\hbar\hat{x}^j$$

$$= -i\hbar\hat{x}^j(j+1) \qquad \blacksquare$$

entonces ya con esto

$$[\hat{p}, \hat{G}(\hat{x})] = \sum_{j=1}^{\infty} b_j[\hat{p}, \hat{x}^j] = -i\hbar\sum_{j=1}^{\infty} b_j j\hat{x}^{j-1}$$

$$= -i\hbar\sum_{j=1}^{\infty} b_j\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\hat{x}^j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{j=1}^{\infty} b_j\hat{x}^j$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\hat{G}(\hat{x}) \qquad \blacksquare$$

2. Resuelva la siguiente ecuación de valores propios en la representación de ímpetus

$$\hat{p}\tilde{\phi}_{p_0}(p) = p_0\tilde{\phi}_{p_0}(p)$$

además muestre que dichas funciones propias cumplen con el teorema de desarrollo

Sol:

La ecuación anterior en representación de posiciones es

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\phi_{p_0}(x) = p_0\phi_{p_0}(x)$$

que resolviendo

$$\int dx\frac{\psi'_{p_0}(x)}{\psi_{p_0}(x)} = \int dx\frac{ip_0}{\hbar}$$

$$\ln\psi_{p_0}(x) = C\frac{ixp_0}{\hbar}$$

$$\psi_{p_0}(x) = Ce^{\frac{ixp_0}{\hbar}}$$

ahora sustituyendo esto en

$$\tilde{\psi}_{p_0}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_{p_0}(x)e^{\frac{-ipx}{\hbar}} = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{\frac{-ipx}{\hbar}}$$

Si $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ (que es la constante de normalización) entonces

$$\tilde{\psi}_{p_0}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{ix}{\hbar}(p_0 - p)} = \delta(p_0 - p)$$

3. Use el teorema de desarrollo para probar que si $\psi_n(x)$ son funciones propias no degeneradas, normalizadas, del operador hermitiano $\hat{H}$, con valores propios discretos e_n, es decir

$$\hat{H}\psi_{E_n}(x) = E_n\psi_{E_n}(x)$$

entonces la función delta de Dirac tiene el desarrollo

$$\delta(x - x_0) = \sum_n \psi^*_{E_n}(x_0)\psi_{E_n}(x)$$

Sol:

Suponiendo que las funciones propias de ψ_{E_n} pertenecen al espacio de Hilbert, entonces

$$\psi(x) = \sum_n C_{E_n}\psi_{E_n}(x)$$

ahora si $\psi(x) = \delta(x - x_0)$ y como $C_{E_n} =< \psi_{E_n}, \psi(x) >=< \psi_{E_n}, \delta(x - x_0) >= \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*_{E_n}\delta(x - x_0) = \psi_{E_n}(x_0)$,

$$\delta(x - x_0) = \sum_n \psi^*_{E_n}(x_0)\psi_{E_n}(x)$$

4. Suponga que el operador hermitiano $\hat{H}$ tiene funciones propias no degeneradas $\psi_n(x)$ con valores propios E_n, es decir

$$\hat{H}\psi_{E_n}(x) = E_n\psi_{E_n}(x)$$

Muestre que si $\hat{H}$ conmuta con el operador de paridad, entonces las funciones $\psi_{E_n}(x)$ también serán funciones propias del operador de paridad

Sol:

por hipótesis tenemos que $[\hat{P}, \hat{H}] = \hat{P}\hat{H} - \hat{H}\hat{P} = 0$ donde $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$, ahora aplicando el operador de paridad a la ec. dada

$$\hat{P}\hat{H}\psi_{E_n}(x) = E_n\hat{P}\psi_{E_n}(x)$$

$$\hat{H}(\hat{P}\psi_{E_n}(x)) = E_n(\hat{P}\psi_{E_n}(x))$$

o bien $\hat{P}\psi_{E_n}(x)$ son funciones propias no degeneradas con valores propios E_n lo que significa que $\hat{P}\psi_{E_n}(x)$ es proporcional a $\psi_{E_n}(x)$

Sea j real tal que $\hat{P}\psi_{E_n}(x) = i\psi_{E_n}(x)$, desarrollando esto

$$\hat{P}\hat{P}\psi_{E_n}(x) = j\hat{P}\psi_{E_n}(x)$$

$$\hat{P}\psi_{E_n}(-x) = j(j\psi_{E_n}(x))$$

$$\psi_{E_n}(x) = j^2\psi_{E_n}(x)$$

por lo tanto $j = \pm 1$ y $\psi_{E_n}(x))$ es función propia de $\hat{P}$

5. muestre que si se estudia un sistema unidimensional definido en el intervalo $[-\pi, \pi]$, utilizando sólo funciones de onda $\psi(\theta)$, con la restricción $\theta \in [-\pi, \pi]$ y sujetas a la condición de frontera $\psi(\pi) = -\psi(-\pi)$, entonces el operador

$$\hat{L} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\theta}$$

es hermitiano

Sol:

$$< \hat{L} >_\psi = < \psi, \hat{L}\psi > = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\theta}\psi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\theta}\psi$$

y usando la integración por partes con $u = \psi*$ y $dv = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\theta}\psi$

$$< \hat{L} >_\psi = \frac{\hbar}{i}\psi^*\psi|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\hbar}{i}\psi\frac{d}{d\theta}\psi^*$$

pero por las condiciones de frontera $(\psi(\pi) = \psi(-\pi),\ \psi^*(\pi) = \psi^*(-\pi))$, $\frac{\hbar}{i}\psi^*\psi|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$$< \hat{L} >_\psi = -\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\hbar}{i}\psi\frac{d}{d\theta}\psi^* = (\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\hbar}{i}\psi^*\frac{d}{d\theta}\psi)^* = < \hat{L} >_\psi^*$$

por lo tanto $\hat{L}$ es hermitiano

6. Muestre que $g(\hat{x}, \hat{p}) = \sum_{n,m} B_{n,m}\frac{\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n}{2}$ es un operador hermitiano si todos los coeficientes $B_{n,m}$ son reales

Sol:

$g(\hat{x}, \hat{p})$ es hermitiano si $< g(\hat{x}, \hat{p}) >_\psi^* = < g(\hat{x}, \hat{p}) >_\psi$, o bien

$$< g(\hat{x}, \hat{p}) >_\psi^* = < \psi, g(\hat{x}, \hat{p})\psi >^*$$

$$= < \psi, \sum_{n,m} B_{n,m}\frac{\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n}{2}\psi >^* = \sum_{n,m}\frac{B_{n,m}^*}{2} < \psi, (\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n)\psi >^* \tag{1}$$

ahora veamos que $\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n$ es hermitiano

primero demostremos que $\hat{p}^n$ y $\hat{x}^m$ son hermitianos (por inducción), ya sabemos que $\hat{p}$ y $\hat{x}$ son hermitianos, entonces supongamos que $\hat{p}^{n-1}$ y $\hat{x}^{m-1}$ lo son

$$< \psi, \hat{p}^n\psi >^* = < \psi, \hat{p}^{n-1}(\hat{p}\psi) >^*$$

y por la hipotesis de inducción y la proposición 3a

$$< \psi, \hat{p}^n\psi >^* = < (\hat{p}\psi), \hat{p}^{n-1}\psi >$$

además como un operador hermitiano es equivalente a un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert

$$< \psi, \hat{p}^n\psi >^* = < (\hat{p}^t\psi), \hat{p}^{n-1}\psi > = < \psi, \hat{p}\hat{p}^{n-1}\psi > = < \psi, \hat{p}^n\psi > = < \hat{p} >_\psi \qquad \blacksquare$$

para el operador $\hat{x}$ es analogo

ahora si, veamos que $\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n$ es hermitiano

$$< \hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n >_\psi^* = < \psi, (\hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n)\psi >^*$$

$$= < \psi, \hat{p}^n(\hat{x}^m\psi) >^* + < \psi, \hat{x}^m(\hat{p}^n\psi) >^*$$

pero por lo demostrado anteriormente y la proposición 3a

$$= < \hat{x}^m\psi, \hat{p}^n\psi > + < \hat{p}^n\psi, \hat{x}^m\psi > = < \hat{x}^{tm}\psi, \hat{p}^n\psi > + < \hat{p}^{tn}\psi, \hat{x}^m\psi >$$

$$= < \psi, \hat{x}^m\hat{p}^n\psi > + < \psi, \hat{p}^n\hat{x}^m\psi > = < \hat{p}^n\hat{x}^m + \hat{x}^m\hat{p}^n >_\psi$$

por lo tanto por la ec. (1), $g(\hat{x}, \hat{p})$ es hermitiano si $B_{n,m} = B_{n,m}^*$ o bien si los coeficientes son reales $\blacksquare$