Macías Márquez Misael Iván

1. Considere los observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$

   a) Suponga que los estados propios comunes de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ forman una base completa ortonormal ¿Se puede concluir que $[\hat{A},\hat{B}]=0$? Argumente su respuesta.

   Sol:

   La ecuaciones de valores propios para los observables son

$$\hat{A}|\phi_\alpha^\beta\rangle = a_\alpha|\phi_\alpha^\beta\rangle$$

$$\hat{B}|\phi_\alpha^\beta\rangle = b_\alpha|\phi_\alpha^\beta\rangle$$

   por hipotesis forman una base del espacio de estado, entonces $\forall|\psi\rangle \in \xi$ tenemos

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}|\phi_\alpha^\beta\rangle$$

$$[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle = [\hat{A},\hat{B}]\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}|\phi_\alpha^\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})c_{\alpha\beta}|\phi_\alpha^\beta\rangle$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\hat{A}(\hat{B}|\phi_\alpha^\beta\rangle) - c_{\alpha\beta}\hat{B}(\hat{A}|\phi_\alpha^\beta\rangle)$$

   que usando las ecuaciones de valores propios

$$= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}ab|\phi_\alpha^\beta\rangle - c_{\alpha\beta}ba|\phi_\alpha^\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta}\cancel{(ab-ba)}c_{\alpha\beta}|\phi_\alpha^\beta\rangle = 0$$

   como es $\forall|\psi\rangle \in \xi$, entonces

$$[\hat{A},\hat{B}] = 0$$

   b) Si los observables anticonmutan ¿Es posible tener estados propios comunes a ambos? Argumente su respuesta

   Sol:

   Recordemos que dos observables anticonmutan si $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, ahora usemos las mismas ecuaciones de valores propios para los observables, entonces

$$\hat{A}\hat{B}|\phi_\alpha^\beta\rangle = ab|\phi_\alpha^\beta\rangle = -\hat{B}\hat{A}|\phi_\alpha^\beta\rangle = -ba|\phi_\alpha^\beta\rangle$$

   y así

$$2ab|\phi_\alpha^\beta\rangle = 0$$

   por lo tanto $a=0$ o $b=0$ o $|\phi_\alpha^\beta\rangle = 0$, lo que significa que o no existen vectores propios comunes o alguno/ambos de los valores propios es cero, así que no.

2. *a*) Usando la expresión $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$, pruebe que

$$\langle p|\hat{x}|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\phi\rangle$$

Sol:

$$\langle p|\hat{x}|\phi\rangle = \langle p|\hat{x}\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x||\phi\rangle$$

Gracias a la relación de completez ($\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x| = 1$)

$$\langle p|\hat{x}|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle p|\hat{x}|x\rangle\langle x|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dxx\langle p|x\rangle\langle x|\phi\rangle$$

pero por definición $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$ y pot hipotesis $\langle x|p\rangle^* = \langle p|x\rangle = \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$\langle p|\hat{x}|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dxx\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\phi(x) = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p}\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\phi(x)$$

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\langle p|x\rangle\langle x|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x||\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\phi\rangle$$

b) Considere el problema del oscilador armónico unidimensional. A partir de la ecuación de Schrodinger para el vector de estado $|\Psi(t)\rangle$, deduzca la ecuación de Schrodinger en la representación de ímpetus.

Sol:

Sabemos que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi\rangle + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|\psi\rangle$$

entonces

$$\langle p|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \langle p|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi\rangle + \langle p|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|\psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{2m}\langle p|\hat{p}^2|\psi\rangle + \frac{m\omega^2}{2}\langle p|\hat{x}^2|\psi\rangle$$

por definición $\langle p|\hat{p}^2 = p^2\langle p|$, y por el inciso anterior y $|\psi'\rangle = \hat{x}|\psi\rangle$

$$\langle p|\hat{x}^2|\psi\rangle = \langle p|\hat{x}|\psi'\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\psi'\rangle$$

$$= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\psi\rangle)$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})^2\langle p|\psi\rangle$$

y así

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle p|\psi\rangle = \frac{p^2}{2m}\langle p|\psi\rangle + \frac{m\omega^2}{2}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})^2\langle p|\psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p) + \frac{m\omega^2}{2}(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})^2\tilde{\psi}(p)$$

c) En un sistema existe una cantidad física representada por el operador $\hat{A}$ que no conmuta con el hamiltoniano, $\hat{A}$ tiene valores propios a_1 y a_2 correspondientes a los estados propios

$$|\phi_1\rangle = \frac{|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}} \qquad\qquad |\phi_2\rangle = \frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

donde $|u_1\rangle$ y $|u_2\rangle$ son estados propios, normalizados, del hamiltoniano con energías propias E_1 y E_2 respectivamente. Si el sistema se encuentra al tiempo $t = 0$ en el estado $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$, muestre que el valor esperado de $\hat{A}$ para cualquier valor de t esta dado por

$$< \hat{A} >_\psi = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}\cos\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}$$

Sol:

Dado que

$$\hat{H}|u_i\rangle = E_i|u_i\rangle$$

con $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$ y

$$\hat{A}|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle$$

por hipótesis y despejando

$$|u_1\rangle = \frac{|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|u_2\rangle = \frac{|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

entonces por el postulado de desarrollo

$$|\Psi\rangle = \sum_i e^{\frac{-iE_it}{\hbar}} c_i|u_i\rangle$$

y por la condición inicial

$$c_1 = \langle u_1|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad c_2 = \langle u_2|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\frac{-iE_it}{\hbar}}|u_1\rangle + e^{\frac{-iE_it}{\hbar}}|u_2\rangle)$$

o bien

$$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(e^{\frac{iE_it}{\hbar}}\langle u_1| + e^{\frac{iE_it}{\hbar}}\langle u_2|)(\hat{A}e^{\frac{-iE_it}{\hbar}}|u_1\rangle + \hat{A}e^{\frac{-iE_it}{\hbar}}|u_2\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle u_1|\hat{A}|u_1\rangle + e^{\frac{-i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle + e^{\frac{i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\langle u_1|\hat{A}|u_2\rangle + \langle u_2|\hat{A}|u_2\rangle)$$

ahora veamos estos valores

$$\hat{A}|u_1\rangle = \frac{\hat{A}|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{A}|u_2\rangle = \frac{\hat{A}|\phi_1\rangle - \hat{A}|\phi_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{a_1|\phi_1\rangle - a_2|\phi_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

y así

$$\langle u_1|\hat{A}|u_1\rangle = \frac{\langle(\phi_1| + \langle\phi_2|)(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\langle u_2|\hat{A}|u_2\rangle = \frac{|(\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle)(a_1|\phi_1\rangle - a_2|\phi_2\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle = \frac{\langle(\phi_1| - \langle\phi_2|)(a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$$\langle u_1|\hat{A}|u_2\rangle = \frac{(\langle\phi_1| + \langle\phi_2|)(a_1|\phi_1\rangle - a_2|\phi_2\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

por lo tanto

$$< \hat{A} >_\Psi = \frac{1}{2}(\frac{a_1 + a_2}{2} + e^{\frac{-i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\frac{a_1 - a_2}{2} + e^{\frac{i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\frac{a_1 - a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2})$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}\cos\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}$$

3. A partir de los postulados de la Mecánica Cuántica, muestre que si un observable está representado por medio del operador $\hat{A}$, con estados propios discretos no degenerados $|A_n\rangle$, entonces

   a) El valor esperado de $\hat{A}$ se puede escribir como

   $$< \hat{A} >_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$$

   Sol:

$$< \hat{A} >_\psi = \sum_n A_n |c_n|^2 = \sum_n A_n |\langle A_n|\psi\rangle|^2$$

$$= \sum_n A_n \langle\psi|A_n\rangle\langle A_n|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_n A_n |A_n\rangle\langle A_n|)|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

b) El operador $\hat{A}$ tiene la representación

$$\hat{A} = \sum_n A_n |A_n\rangle\langle A_n|$$

donde A_n son los posibles valores que se pueden obtener al medir $\hat{A}$ cuando el sistema se encuentra en el estado general $|\Psi\rangle$

Sol:

Por hipótesis $\forall |\psi\rangle \in \xi$, $|\psi\rangle = \sum_n c_n |A_n\rangle$, con $c_n = \langle A_n|\psi\rangle$, por lo que

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle A_n|\psi\rangle|A_n\rangle = \sum_n |A_n\rangle\langle A_n|\psi\rangle$$

o bien

$$\hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}\sum_n |A_n\rangle\langle A_n|\psi\rangle = (\sum_n A|A_n\rangle\langle A_n|)|\psi\rangle$$

por lo tanto

$$\hat{A} = \sum_n A_n |A_n\rangle\langle A_n|$$

c) Esta representación es un operador hermitiano si todos los números A_n son reales

Sol:

Por hipótesis $A_n^* = A_n$, entonces

$$\hat{A}^\dagger = \sum_n (A_n|A_n\rangle\langle A_n|)^\dagger = \sum_n A_n^* |A_n\rangle\langle A_n| = \sum_n A_n |A_n\rangle\langle A_n| = \hat{A}$$

4. Suponga que $\hat{H}$ es un operador hermitiano, con funciones propias no degeneradas normalizadas $\psi_n(x)$ con valores propios λ_n. Demuestre que la solución a la ecuación diferencial

$$(\hat{H} - \Lambda)\Psi(x) = F(x)$$

con $F(x)$ una función conocida y Λ una constante real, se puede expresar de la forma

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_n \frac{\psi_n^*(y)\psi_n(x)}{\lambda_n - \Lambda} F(y)$$

Con este resultado muestre que la función de Green para este problema se puede escribir en notación de Dirac como

$$\hat{G} = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{\lambda_n - \Lambda}$$

Sol:

Tenemos que $\Psi(x) = \sum_n a_n\psi_n$ y $F(x) = \sum_n b_n\psi_n$, entonces

$$(\hat{H} - \lambda)\Psi(x) = \sum_n a_n(\hat{H} - \Lambda)\psi_n = \sum_n a_n(\lambda_n - \Lambda)\psi_n = F(x) = \sum_n b_n\psi_n$$

o bien

$$\sum_n a_n(\lambda_n - \Lambda)\psi_n - b_n\psi_n = 0$$

por la independencia lineal de ψ_n

$$a_n = \frac{b_n}{\lambda_n - \Lambda}$$

que sustituyendo

$$\Psi(x) = \sum_n \frac{b_n}{\lambda_n - \Lambda}\psi_n(x) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dy\psi_n^*(y)F(y)\psi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_n \frac{\psi_n^*(y)\psi_n(x)}{\lambda_n - \Lambda}F(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dyG(x,y)F(y)$$

$$G(x,y) = \sum_n \frac{\langle\psi_n|y\rangle\langle x|\psi_n\rangle}{\lambda_n - \Lambda} = \sum_n \frac{\langle x|\psi_n\rangle\langle\psi_n|y\rangle}{\lambda_n - \Lambda}$$

$$= \langle x| \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{\lambda_n - \Lambda}|y\rangle = \langle x|\hat{G}|y\rangle$$

con $\hat{G} = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle\langle\psi_n|}{\lambda_n - \Lambda}$