Macías Márquez Misael Iván

1. Suponga que un sistema compuesto por dos subsistemas no interactuantes está descrito por un hamiltoniano de la forma $\hat{H} = \hat{H}_1 \times I + I \times \hat{H}_2$, donde I es el operador identidad en cada uno de los subsistemas, los hamiltonianos $\hat{H}_1$ y $\hat{H}_2$ no dependen explícitamente del tiempo y describen por separado a cada uno de estos subsistemas. Muestre que el operador de evolución para el sistema compuesto tiene la forma

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_1(t, t_0) \times \hat{U}_2(t, t_0)$$

donde $\hat{U}_1(t, t_0) = e^{-i\hat{H}_1(t-t_0)\hbar}$ y $\hat{U}_2(t, t_0) = e^{-i\hat{H}_2(t-t_0)/\hbar}$. Muestre explícitamente que este operador satisface todas las propiedades de un operador de evolución para la ecuación de Schrodinger respectiva.

Sol:

Tenemos que $|\psi_j(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}_j(t-t_0)}{\hbar}}|\psi_i(t_0)\rangle$, entonces

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}_1(t-t_0)}{\hbar}}|\psi_1(t_0)\rangle \times e^{-\frac{i\hat{H}_2(t-t_0)}{\hbar}}|\psi_2(t_0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\hat{H}_1(t-t_0)}{\hbar}} \times e^{-\frac{i\hat{H}_2(t-t_0)}{\hbar}}|\psi_1(t_0)\rangle \times |\psi_2(t_0)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

y así

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t, t_0)|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

$$= i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}(\hat{U}_1(t, t_0))\hat{U}_2(t, t_0) + \hat{U}_1(t, t_0)\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_2(t - t_0)\right]|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

$$= i\hbar\left[-\frac{i\hat{H}_1}{\hbar} \times 1\hat{U}_1(t, t_0)\hat{U}_2(t, t_0) + 1 \times \frac{\hat{H}_2}{i\hbar}\hat{U}_1(t - t_0)\hat{U}_2(t - t_0)\right]|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

$$= (\hat{U}_1 \times 1 + 1 \times \hat{U}_2)(\hat{U}_1(t, t_0)\hat{U}_0(t, t_0))|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

$$= \hat{H}\hat{U}(t, t_0)|\psi_1\psi_2\rangle_{t_0}$$

por lo tanto

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}\hat{U}(t, t_0)$$

ahora

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}_1^\dagger(t, t_0)\hat{U}_2^\dagger(t, t_0)$$

entonces

$$\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{U}(t,t_0) = \hat{U}_2^\dagger(t,t_0)\cancel{\hat{U}_1^\dagger(t,t_0)\hat{U}_1(t,t_0)}\hat{U}_2(t,t_0) = \hat{U}_2^\dagger(t,t_0)\hat{U}_2(t,t_0) = 1$$

$$\therefore \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

y ya por último

$$\hat{U}(t_0,t_0) = \hat{U}_1(t_0,t_0) \times \hat{U}_2(t_0,t_0) = 1 \times 1 = 1$$

$$\hat{U}(t,t')\hat{U}(t',t'') = \hat{U}_1(t,t') \times \hat{U}_2(t,t')\hat{U}_1(t',t'') \times \hat{U}_2(t',t'')$$

$$\hat{U}_1(t,t')\hat{U}_1(t',t'') \times \hat{U}_2(t,t')\hat{U}_2(t',t'') = \hat{U}_1(t,t'') \times \hat{U}_2(t,t'') = \hat{U}(t,t'')$$

2. Una partícula de masa m, sujeta a un potencial de oscilador armónico unidimensional en presencia de un campo eléctrico externo constante se encuentra descrita por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - eE\hat{x}$$

con la frecuencia natural ω, la carga e y la magnitud del campo eléctrico E. Encuentre las ecuaciones de movimiento para los operadores $\hat{p}_H(t)$ y $\hat{x}_H(t)$. Resuelva estas ecuaciones en términos de condiciones iniciales generales $\hat{p}_H(0)$ y $\hat{x}_H(0)$.

Sol:

sabemos que y por hipótesis

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{x}_H = [\hat{x}_H, \frac{\hat{p}_H^2}{2m}] = i\hbar\frac{\hat{p}_H}{m}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{p}_H = [\hat{p}_H, \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_H^2 - q\epsilon\hat{x}_H] = -i\hbar m\omega^2\hat{x}_H + i\hbar q\epsilon$$

entonces

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_H = -m\omega^2\frac{d}{dt}\hat{x}_H = -\omega^2\hat{p}_H$$

$$\hat{p}_H(t) = \hat{A}\cos\omega t + \hat{B}\sin\omega t \qquad \text{con } \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = \frac{\partial\hat{B}}{\partial t} = 0$$

y así

$$\hat{x}_H = -\frac{1}{m\omega^2}\frac{d}{dt}\hat{p}_H + \frac{q\epsilon}{m\omega^2} = -\frac{\omega}{m\omega^2}(-\hat{A}\sin\omega t + \hat{B}\cos\omega t) + \frac{q\epsilon}{m\omega^2}$$

si $\hat{p}_H(0) = \hat{A}$ y $\hat{x}_H(0) = -\frac{\hat{B}}{m\omega} + \frac{q\epsilon}{m\omega^2}$

entonces

$$\hat{p}_H(t) = \hat{p}_H(0)\cos\omega t + (\frac{q\epsilon}{\omega} - m\omega\hat{x}_H(0))\sin\omega t$$

y

$$\hat{x}_H(t) = \frac{1}{m\omega}(\hat{p}_H(0)\sin\omega t - (\frac{q\epsilon}{\omega} - m\omega\hat{x}_H(0))\sin\omega t) + \frac{q\epsilon}{m\omega^2}$$

3. Muestre que si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son constantes de movimiento entonces

   a) Si el espectro del hamiltoniano es no degenerado, entonces $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.
   Sol:
   Por hipótesis $[\hat{A}, \hat{H}] = [\hat{B}, \hat{H}] = 0$ y

   $$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$$

   así que aplicando $\hat{A}$

   $$\hat{A}\hat{H}|E_n\rangle = E_n\hat{A}|E_n\rangle$$

   $$\hat{H}(\hat{A}|E_n\rangle) = E_n(\hat{A}|E_n\rangle)$$

   entonces como $\hat{A}|E_n\rangle$ es estado propio de $\hat{H}$ con el valor propio E_n, no le queda más que ser proporcional al estado $|E_n\rangle$, o bien $\hat{A}|E_n\rangle = a_n|E_n\rangle$
   Por la misma razón $\hat{B}|E_n\rangle = b_n|E_n\rangle$
   entonces

   $$[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle = \sum_n C_n[\hat{A}, \hat{B}]|E_n\rangle = \sum_n(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|E_n\rangle$$

   $$= \sum_n C_n(a_nb_n - b_na_n)|E_n\rangle = 0$$

   por lo tanto $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

   b) Si $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ entonces $i[\hat{A}, \hat{B}]$ es una constante de movimiento
   Sol:

   $$[\hat{H}, \hat{C}] = [\hat{H}, i\hat{A}\hat{B}] - [\hat{H}, i\hat{B}\hat{A}]$$

   $$= i\hat{A}[\hat{H}, \hat{B}] + i[\hat{H}, \hat{A}]\hat{B} - i\hat{B}[\hat{H}, \hat{A}] - i[\hat{H}, \hat{B}]\hat{A} = 0$$

c) Si $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ entonces el hamiltoniano debe tener valores propios degenerados.
Sol:
Como $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ y $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$ entonces $\hat{C}^\dagger = \hat{C}$, y así

$$\hat{C}\hat{H}|E_n\rangle = E_n(\hat{C}|E_n\rangle) = \hat{H}(\hat{C}|E_n\rangle)$$

y si el espectro es no degenerado

$$\hat{C}|E_n\rangle = C_n|E_n\rangle = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|E_n\rangle = i(a_n b_n - b_n a_n)|E_n\rangle = 0$$

lo que es una contradicción, entonces $\hat{C}|E_n\rangle = \sum_n d_n|E_n\rangle \neq C_n|E_n\rangle$, y como nos dice que existe un estado $\sum_n d_n|E_n\rangle$ distinto de $|E_n\rangle$ con el mismo valor propio E_n el espectro es degenerado.

4. Considere un hamiltoniano de la forma $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, con los estados $|n\rangle$ y energías propias $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ con $n = 0, 1, ...$ y los operadores

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

cumplen con las reglas de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

a) Escriba y resuelva la ecuación de Heisenberg para los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ con las condiciones iniciales generales $\hat{a}_H(0)$, $\hat{a}_H^\dagger(0)$.
Sol:
Noten $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ entonces $[\hat{a}_H, \hat{a}_H^\dagger] = 1$ y así

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{a}_H = [\hat{a}_H, \hat{H}_H] = [\hat{a}_H, \hbar\omega\hat{a}_H^\dagger\hat{a}_H] = \hbar\omega\{\hat{a}_H^\dagger[\hat{a}_H, \hat{a}_H] + [\hat{a}_H, \hat{a}_H^\dagger]\}$$

$$= \hbar\omega\hat{a}_H$$

entonces

$$\hat{a}_H(t) = \hat{a}_H(0)e^{-i\omega t} = a_0 e^{-i\omega t}$$

ahora

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{a}_H^\dagger = [\hat{a}_H^\dagger, \hat{H}_H] = [\hat{a}_H^\dagger, \hbar\omega\hat{a}_H^\dagger\hat{a}_H] = \hbar\omega\{\hat{a}_H^\dagger[\hat{a}_H^\dagger, \hat{a}_H] + [\hat{a}_H^\dagger, \hat{a}_H^\dagger]\hat{a}_H\} = -\hbar\omega\hat{a}_H$$

entonces

$$\hat{a}_H^\dagger(t) = \hat{a}_0^\dagger e^{i\omega t}$$

b) Calcule $\langle\psi_H|\hat{x}_H(t)|\psi_H\rangle$ si $|\psi_H\rangle = |1\rangle$

Sol:

c) CAlcule $\langle\psi_H|\hat{x}_H(t)|\psi_H\rangle$ si $|\psi_H\rangle = e^{-\frac{il\hat{p}}{\hbar}}|0\rangle$, con l una constante real.¿Qué significado tiene el operador $e^{-\frac{il\hat{p}}{\hbar}}$? Tal vez la siguiente identidad sea útil

$$e^{\frac{il\hat{p}}{\hbar}}\hat{a}e^{-\frac{il\hat{p}}{\hbar}} = \hat{a} + l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

Sol: