Macías Márquez Misael Iván

1. Una partícula de masa m dentro de un pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -L \\ 0 & -L \leq x \leq L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

al tiempo $t = 0$ se encuentra en el estado

$$\psi(x,0) = \frac{2}{\sqrt{5L}} \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\frac{\pi x}{2L}$$

a) Calcule la función de onda al tiempo t.
Sol:
Como se vio en clase las soluciones a la ec. de valores propios para ese potencial son: $\sin\frac{px}{\hbar}$ y $\cos\frac{px}{\hbar}$
Ahora obtengamos los coeficientes necesarios para tener a $\psi(x,t)$

$$C_N =< \phi_{E_N}, \psi(x,0) >= \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{E_N} \psi(x,0)$$

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin\frac{p_1 x}{\hbar} \frac{2}{\sqrt{5L}} \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5L}} \left[\int_{-L}^{L} dx \sin\frac{p_1 x}{\hbar} \cos\frac{\pi x}{2L} - \int_{-L}^{L} dx \sin\frac{p_1 x}{\hbar} \sin\frac{\pi x}{2L} \cos\frac{\pi x}{2L}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5L}} \left[\left(-\frac{\pi(\sin\frac{p_1 x}{\hbar}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{p_1}{\hbar}\cos\frac{p_1 x}{\hbar}\cos\frac{\pi x}{2L})}{2L(\frac{p_1^2}{\hbar^2} - \frac{\pi^2}{4L^2})}\right)\Big|_{-L}^{L}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{4}(\frac{\sin(x(\frac{p_1}{\hbar} - \frac{\pi}{L}))}{\frac{p_1}{\hbar} - \frac{\pi}{L}} - \frac{\sin(x(\frac{p_1}{\hbar} + \frac{\pi}{L}))}{\frac{p_1}{\hbar} + \frac{\pi}{L}})\right)\Big|_{-L}^{L}\right]$$

$$= \frac{3\pi^3 \sin\frac{p_1 L}{\hbar}}{\sqrt{20L^7}} (\frac{p_1^4}{\hbar^4} - \frac{5\pi^2 p_1^2}{4\hbar^2 L^2} + \frac{\pi^4}{4L^4})^{-1}$$

$$C_2 =< \phi_{E_2}, \psi(x,0) >= \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{E_2} \psi(x,0)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos\frac{p_2 x}{\hbar} \frac{2}{\sqrt{5L}} \left(1 - \sin\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\frac{\pi x}{2L}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5L}} \left[\int_{-L}^{L} dx \cos\frac{p_2 x}{\hbar} \cos\frac{\pi x}{2L} - \int_{-L}^{L} dx \cos\frac{p_2 x}{\hbar} \sin\frac{\pi x}{2L} \cos\frac{\pi x}{2L}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5L}} \left[\left(\frac{\frac{p_2}{\hbar}\sin\frac{p_2 x}{\hbar}\cos\frac{\pi x}{2L} - \frac{\pi}{2L}\cos\frac{p_2 x}{\hbar}\sin\frac{\pi x}{2L}}{\frac{p_2^2}{\hbar^2} - \frac{\pi^2}{4L^2}}\right)\Big|_{-L}^{L}\right.$$

$$-\left(\frac{1}{4}(\frac{\cos\left(x(\frac{p_2}{\hbar}-\frac{\pi}{L})\right)}{\frac{p_2}{\hbar}-\frac{\pi}{L}}-\frac{\cos\left(x(\frac{p_2}{\hbar}+\frac{\pi}{L})\right)}{\frac{p_2}{\hbar}+\frac{\pi}{L}})\right)|_{-L}^{L}\Bigg]$$

$$=\frac{-2\pi\cos\frac{p_2L}{\hbar}}{\sqrt{5L^3}\left(\frac{p_2^2}{\hbar^2}-\frac{\pi^2}{4L^2}\right)}$$

entonces

$$\psi(x,t)=\sum_{N=1}^{2}C_Ne^{-\frac{iE_Nt}{\hbar}}\phi_N$$

$$=\frac{3\pi^3\sin\frac{p_1L}{\hbar}}{\sqrt{20L^7}}(\frac{p_1^4}{\hbar^4}-\frac{5\pi^2p_1^2}{4\hbar^2L^2}+\frac{\pi^4}{4L^4})^{-1}e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\sin\frac{p_1x}{\hbar}+\frac{-2\pi\cos\frac{p_2L}{\hbar}}{\sqrt{5L^3}\left(\frac{p_2^2}{\hbar^2}-\frac{\pi^2}{4L^2}\right)}e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\cos\frac{px}{\hbar}$$

b) Calcule la energía del sistema al tiempo t.
Sol:
por la ec. (9)

$$<\hat{H}>_\psi=\sum_N|C_N|^2E_N$$

$$|\frac{3\pi^3\sin\frac{p_1L}{\hbar}}{\sqrt{20L^7}}(\frac{p_1^4}{\hbar^4}-\frac{5\pi^2p_1^2}{4\hbar^2L^2}+\frac{\pi^4}{4L^4})^{-1}|^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}+|\frac{-2\pi\cos\frac{p_2L}{\hbar}}{\sqrt{5L^3}\left(\frac{p_2^2}{\hbar^2}-\frac{\pi^2}{4L^2}\right)}|^2\frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

2. Considere una partícula de masa m que se mueve en una dimensión sometida a la influencia de un potencial $V(x)=-a\delta(x)$, con $a>0$.

a) Encuentre el estado propio ligado ψ_a, así como su energía, del hamiltoniano asociado.
Sol:
Dadas las condiciones, la ecuación a resolver es

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_a(x)=-|E|\psi_a(x)$$

y como se vio en clase la solución se expresa como

$$\psi_a=\begin{cases}Ae^{qx} & x<0\\ Be^{-qx} & x\geq 0\end{cases}$$

Con $q=\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$, también para cumplir la condición de continuidad, se debe tener que $A=B$
Ahora por la condición de discontinuidad, se debe satisfacer

$$\frac{d\psi_a(0+)}{dx}-\frac{d\psi_a(0-)}{dx}=-\frac{2m}{\hbar^2}\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}dxa\delta(x)\psi_a(x)=-\frac{2ma}{\hbar^2}\sqrt{q}$$

y evaluando

$$-2q^{3/2} = -\frac{2ma}{\hbar^2}\sqrt{q}$$

$$q = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} = -\frac{ma}{\hbar^2} \qquad \rightarrow \qquad |E| = \frac{ma^2}{2\hbar^2} \qquad \rightarrow \qquad E = -\frac{ma^2}{2\hbar^2}$$

que sustituyendo en ψ_a

$$\psi_a = \begin{cases} \sqrt{\frac{ma}{\hbar^2}}e^{\frac{max}{\hbar^2}} & x < 0 \\ \sqrt{\frac{ma}{\hbar^2}}e^{-\frac{max}{\hbar^2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

b) Suponga que la partícula se encuentra en el estado ligado ψ_a y la intensidad del potencial cambia súbitamente de a a $b > 0$. ¿Cual es la probabilidad de que la partícula se quede en el estado ψ_a?

Sol:

La probabilidad de que la particula se quede en el estado ψ_a despues del cambio brusco de potencial es

$$|<\psi_a, \psi_b>|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a^* \psi_b\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{0} \frac{m\sqrt{ab}}{\hbar^2} e^{\frac{max}{\hbar^2}} e^{\frac{mbx}{\hbar^2}} dx + \int_0^{\infty} dx \frac{m\sqrt{ab}}{\hbar^2} e^{-\frac{max}{\hbar^2}} e^{-\frac{mbx}{\hbar^2}}\right|^2$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{0} \frac{m\sqrt{ab}}{\hbar^2} e^{\frac{mx}{\hbar^2}(a+b)} dx + \int_0^{\infty} dx \frac{m\sqrt{ab}}{\hbar^2} e^{-\frac{mx}{\hbar^2}(a+b)}\right|^2$$

$$= \frac{m^2 ab}{\hbar^4}\left|\frac{e^{\frac{mx}{\hbar^2}(a+b)}}{\frac{m}{\hbar^2}(a+b)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-\frac{mx}{\hbar^2}(a+b)}}{-\frac{m}{\hbar^2}(a+b)}\Big|_0^{\infty}\right|^2$$

$$= \frac{\cancel{m^2} ab}{\cancel{\hbar^4}} \frac{4\cancel{\hbar^4}}{\cancel{m^2}(a+b)^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2}$$

3. Considere un potencial de tipo escalón

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Muestre que la función de onda $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px} + Be^{-\frac{i}{\hbar}px}$ definida para $x < 0$, con B constante, tiene asociada de corriente incidente j_i y otra reflejada j_r, sin que exista ningún término de interferencia entre las componentes de la onda incidente y reflejada, es decir

$$j = j_i + j_r$$

Sol:

Sea $\psi_i = e^{\frac{i}{\hbar}px}$ y $\psi_r = Be^{-\frac{i}{\hbar}px}$

entonces

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left((e^{-\frac{i}{\hbar}px} - B^* e^{\frac{i}{\hbar}px})(\frac{i}{\hbar}pe^{\frac{i}{\hbar}px} + \frac{iB}{\hbar}pe^{-\frac{i}{\hbar}px}) - (e^{\frac{i}{\hbar}px} - Be^{-\frac{i}{\hbar}px})(-\frac{i}{\hbar}pe^{-\frac{i}{\hbar}px} - \frac{iB^*}{\hbar}pe^{\frac{i}{\hbar}px})\right)$$

$$= \frac{p}{2m}\left(1 + \cancel{Be^{-\frac{2i}{\hbar}px}} - \cancel{B^* e^{\frac{2i}{\hbar}px}} - |B|^2 + 1 + \cancel{B^* e^{\frac{2i}{\hbar}px}} - \cancel{Be^{-\frac{2i}{\hbar}px}} - |B|^2\right)$$

$$= \frac{p}{m}(1 - |B|^2)$$

ahora para las ψ_i y ψ_r se tiene

$$j_i = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_i^*\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \psi_i\frac{\partial \psi_i^*}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}px}\frac{i}{\hbar}pe^{\frac{i}{\hbar}px} - e^{\frac{i}{\hbar}px}(-\frac{i}{\hbar}pe^{-\frac{i}{\hbar}px})\right)$$

$$= \frac{p}{2m}\cancel{\left(e^{-\frac{i}{\hbar}px}e^{\frac{i}{\hbar}px} + e^{\frac{i}{\hbar}px}e^{-\frac{i}{\hbar}px}\right)} = \frac{p}{m}$$

$$j_r = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_r^*\frac{\partial \psi_r}{\partial x} - \psi_r\frac{\partial \psi_r^*}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\left(B^* e^{\frac{i}{\hbar}px}(-\frac{iB}{\hbar}pe^{-\frac{i}{\hbar}px}) - Be^{-\frac{i}{\hbar}px}\frac{i}{\hbar}pB^* e^{\frac{i}{\hbar}px}\right)$$

$$= -\frac{p}{2m}\left(2|B|^2\right) = -\frac{p|B|^2}{m}$$

por lo tanto

$$j = j_i + j_r$$

b) Suponga que una partícula de masa m y energía $E < V_0$, se propaga desde $-\infty$ hacia el escalón de potencial y está representada por la función de onda anterior con $p = \sqrt{2mE}$, ¿Cuánto vale la corriente de probabilidad transmitida a la región $x > 0$?

Sol:

Dadas las condiciones, la ecuación de valores propios es

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx}\psi(x) = -|E - V_0|\psi(x)$$

que tiene como solución

$$\psi(x) = Te^{-px}$$

con $p=\sqrt{\frac{2m|E-V_0|}{\hbar^2}}$
Entonces la corriente de probabilidad es

$$j=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\left(-T^*e^{-px}Ape^{-px}+Te^{-px}A^*pe^{-px}\right)$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\left(|T|^2e^{-2px}-|T|^2e^{-2px}\right)=0$$

c) También, muestre que la componente de la función de onda asociada a las partículas reflejadas es de la forma $e^{-i\left(\frac{px}{\hbar}+\theta\right)}$. Encuentre θ en términos de E y V_0
Sol:
Por la condición de continuidad de la solución del ejercicio anterior, se tiene que

$$1+B=T \qquad \frac{ip}{\hbar}(1-B)=-pT$$

o bien

$$pT-pT=p+pB-\frac{ip}{\hbar}(1-B)=0$$

y despejando B

$$B=\frac{\frac{ip}{\hbar}-p}{p+\frac{ip}{\hbar}}=\frac{\frac{ip}{\hbar}-p}{p+\frac{ip}{\hbar}}\frac{p-\frac{ip}{\hbar}}{p-\frac{ip}{\hbar}}=\frac{\frac{p^2}{\hbar^2}-2\frac{ip^2}{\hbar}-p^2}{p^2+\frac{p^2}{\hbar^2}}=\frac{\frac{1}{\hbar^2}-\frac{2i}{\hbar}-1}{1+\frac{1}{\hbar^2}}$$

y ya no supe que hacer

4. En los problemas de dispersión por potenciales localizados, los elementos S_{lm} de la matriz de dispersión relacionan las amplitudes de las ondas dispersadas con las amplitudes de las ondas incidentes. Para problemas unidimensionales, si el estado la izquierda del potencial es

$$Ae^{\frac{i}{\hbar}px}+Be^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

y a la derecha está descrito por la expresión

$$Ce^{\frac{i}{\hbar}px}+De^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

entonces los elementos S_{lm} de la matriz de dispersión se definen por medio de la relación

$$\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\D\end{pmatrix}$$

Muestre que la matriz S es unitaria

Sol:

Recordemos que si una matriz cumple con $A^\dagger = A^{-1}$, entonces es unitaria

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

pero como

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^\dagger$$

entonces

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

que por la condición de conservación de normalización

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

ahora como $\dagger$ denota la matriz/operador adjunto, se pude ver que el lado izquierdo de la igualdad anterior es un escalar por lo que debe ser igual en el lado derecho por lo que

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto S es unitaria

5. Considere una partícula de masa m dentro del potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq a \\ V_0 & x > a \end{cases}$$

Con $a > 0$ y $V_0 > 0$ constantes. Muestre que las energías de los estados ligados se determinan por la ecuación

$$\tan \frac{\sqrt{2mE}a}{\hbar} = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

Sol:

6. Encuentre la matriz de dispersión para el potencial

$$V(x) = v_0\delta(x-b)$$

con las constantes $b > 0$ y $v_0 < 0$.

Sol:

Como tenemos un potencial delta de dirac, la solución es

$$\phi_E = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < b \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & x > b \end{cases}$$

entonces la condición de continuidad y discontinuidad de la derivada en b nos da

$$Ae^{ikb} + Be^{-ikb} = Ce^{ikb} + De^{-ikb}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}ik(Ae^{ikb} - Be^{-ikb} - Ce^{ikb} + De^{-ikb}) = -v_0(Ae^{ikb} + Be^{-ikb})$$

ahora multiplicando la de continuidad por $\frac{\hbar^2}{2m}ik + v_0$ y sumando a la de discontinuidad

$$(\frac{\hbar^2}{2m}ik + v_0)(Ae^{ikb} + \cancel{Be^{-ikb}}) + \frac{\hbar^2}{2m}ik(Ae^{ikb} - \cancel{Be^{-ikb}} - Ce^{ikb} + \cancel{De^{-ikb}})$$

$$= (\frac{\hbar^2}{2m}ik + v_0)(Ce^{ikb} + \cancel{De^{-ikb}}) + v_0(Ae^{ikb} + \cancel{Be^{-ikb}})$$

$$A(\frac{\hbar^2}{m}ike^{ikb}) - Dv_0e^{-ikb} = C(\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0)e^{ikb}$$

o bien

$$C = A\frac{\frac{\hbar^2}{m}ik}{(\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0)} - D\frac{v_0}{(\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0)}e^{-2ikb} \tag{1}$$

ahora desarrollando la ec. de discontinuidad y sumandole la misma

$$A(\frac{\hbar^2}{2m}ik - v_0)e^{ikb} + B(-\frac{\hbar^2}{2m}ik - v_0)e^{-ikb} = \frac{\hbar^2}{2m}ik(Ce^{ikb} + De^{-ikb})$$

$$A(\frac{\hbar^2}{2m}ik - v_0)e^{ikb} + B(-\frac{\hbar^2}{2m}ik - v_0)e^{-ikb} - \frac{\hbar^2}{2m}ik(Ae^{ikb} - Be^{-ikb} - Ce^{ikb} + De^{-ikb})$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}ik(Ce^{ikb} + De^{-ikb}) - v_0(Ae^{ikb} + Be^{-ikb})$$

$$B(\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0)e^{-ikb} = -Av_0e^{ikb} + \frac{\hbar^2}{m}ikDe^{-ikb}$$

$$B = -A\frac{v_0e^{2ikb}}{\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0} + D\frac{\frac{\hbar^2}{m}ik}{\frac{\hbar^2}{m}ik + v_0} \tag{2}$$

por lo tanto usando (1) y (2)

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\hbar^2}{m}ik}{(\frac{\hbar^2}{m}ik+v_0)} & -\frac{v_0}{(\frac{\hbar^2}{m}ik+v_0)}e^{-2ikb} \\ -\frac{v_0e^{2ikb}}{\frac{\hbar^2}{m}ik+v_0} & \frac{\frac{\hbar^2}{m}ik}{\frac{\hbar^2}{m}ik+v_0} \end{pmatrix}$$