Macías Márquez Misael Iván

1. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre una superficie cónica bajo la acción de la gravedad. El ángulo entre el eje del cono y la generatriz es α.

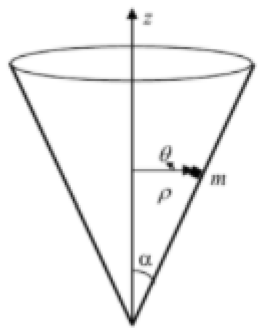


Figura 1. Partícula sobre una superficie cónica.

a) Determine el lagrangiano de la partícula en términos solamente de las coordenadas cilíndricas ρ y θ.

Sol:

El lagangiano en coordenadas cartesianas para este sistema está descrito por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

entonces como el cono en cilíndricas es de la forma $z = \frac{\rho}{\sin\alpha}$ y por la relación de coordenadas $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$, la lagrangiana queda como

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{\rho}\cos\theta - \rho\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{\rho}\sin\theta + \rho\cos\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{\rho}/\sin\alpha)^2] - mg\rho/\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2(\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta} + 1/\sin^2\alpha) + \rho^2\dot{\theta}^2\cancel{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}] - mg\rho/\sin\alpha$$

por lo tanto

$$L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{mg\rho}{\sin\alpha}$$

b) ¿Existe alguna variable cíclica? En caso afirmativo, identifique la correspondiente cantidad física que se conserva. Use este hecho para encontrar la ecuación para ρ.

Sol:

Dado que la lagrangiana no depende explícitamente de θ, θ debe ser una variable cíclica y también $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = p_\theta = m\rho^2\dot{\theta}$ es una cantidad conservada por lo que

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial p_\theta}{\partial\rho}\dot{\rho} + \frac{\partial p_\theta}{\partial\dot{\theta}}\ddot{\theta} = 0$$

$$= 2m\rho\dot{\theta}\dot{\rho} + m\rho^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = (-1/2)\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \qquad \rightarrow \qquad \rho = \dot{\theta}^{-1/2} + c$$

c) Muestre que este problema se reduce al movimiento unidimensional de una partícula en un potencial efectivo $V_{ef}(p)$. Haga un esbozo de $V_{ef}(p)$.

Sol:

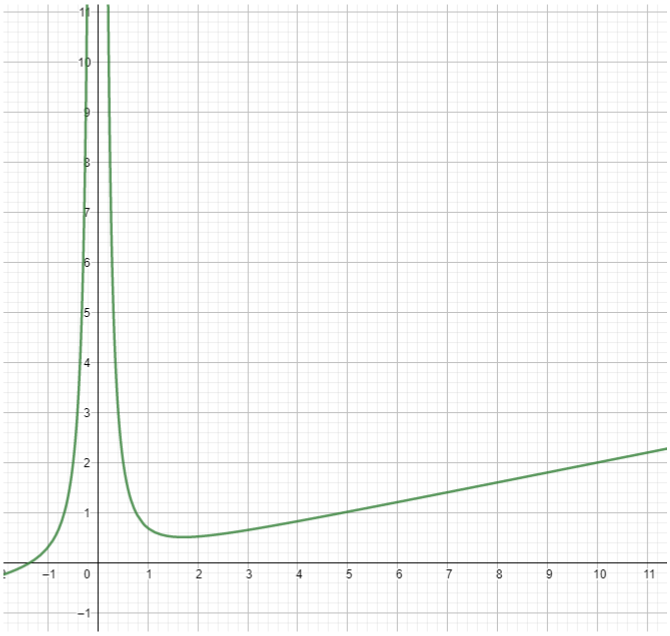
como p_θ es una cantidad conservada, se cumple que $p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} = cte$ por lo que la energía del sistema se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m\rho^2} + \frac{mg\rho}{\sin\alpha}$$

con un potencial efectivo $V_{ef} = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m\rho^2} + \frac{mg\rho}{\sin\alpha}$, y por la conservación de la energía se puede llegar a

$$\theta = \int \frac{p_\theta d\rho}{\rho^2\sqrt{2m(E-V) - p_\theta^2/\rho^2}} + c$$

por lo que se reduce a un problema unidimensional



d) Si la partícula es lanzada horizontalmente con la velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{e}_\theta$ a la altura z_0, muestre que la condición para un movimiento circular es $v_0^2 = gz_0$.

Sol:

2. Para un potencial atractivo $1/r$ de fuerza central mostrar lo siguiente:

a) Dada una órbita circular y una parabólica con el mismo momento angular, la distancia al perihelio de la parábola es la mitad del radio del círculo

Sol:

como vimos, este problema queda descrito con

$$r = \frac{p_\phi}{1 + e\cos\phi}$$

entonces la excentricidad es $e = 0$ para el círculo, que sustituyendo nos da $r' = p_\phi = mr^2\dot{\phi}^2$, ahora para la parábola $e = 1$ por lo que $r = \frac{p_\phi}{1+\cos\phi}$, la distancia al perihelio que está en el origen cuando $\phi = 0$ es $r = p_\phi/2 = r'/2$

b) La velocidad de la partícula en cualquier punto sobre la órbita parabólica es $\sqrt{2}$ veces la velocidad de la partícula sobre la órbita circular (sobre el mismo punto).

Sol:

El vector velocidad en coordenadas polares se escribe como $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$, entonces para el círculo $\dot{r} = 0$ por lo que $v^2 = r^2\dot{\phi}^2$ o bien $v_c = \sqrt{\frac{p_\phi}{m}}$, ahora para la parábola $\dot{r} = p_\phi\frac{\sin\phi}{(1+\cos\phi)^2}$ y entonces

$$v^2 = r^2\dot{\phi}^2\left(\frac{\sin^2\phi}{(1+\cos\phi)^2} + 1\right) = r^2\dot{\phi}^2\left(\frac{\sin^2\phi + (1+\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^2}\right)$$

$$= \frac{2r^2\dot{\phi}^2}{1+\cos\phi} = \frac{2r^3\dot{\phi}^2}{p_\phi} = 2\frac{p_\phi}{m} \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{2}\sqrt{\frac{p_\phi}{m}} = \sqrt{2}v_c$$

3. Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R bajo la influencia de la fuerza atractiva central,

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}e^{-r/a}$$

donde k y a son constantes positivas.

a) Determine la condición que debe cumplir a para el movimiento circular sea estable.

Sol:

Supongamos que el radio de la orbita es r', $f = -\frac{dU}{dr}$ entonces $U = -\frac{k}{r}e^{-r/a}$ por lo la lagrangiana del sistema queda como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}e^{-r/a}$$

de donde obtenemos el potencial efectivo $U_{ef} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a}$, ahora para tener una orbita circular es necesario tener $\frac{dU_{ef}}{dr} = 0$ o bien $e^{-r/a}\frac{r}{a}(1+r/a) = \frac{p_\theta^2}{mka}$, y así tenemos que

$$U_{min} = \frac{p_\theta^2}{2mr'}\frac{a - r'}{a + r'}$$

por lo tanto a debe ser distinto de $-r'$ y 0

b) Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones radiales respecto al movimiento circular

Sol:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}}{m}} = \sqrt{\frac{-ke^{-r/a}}{rm}(\frac{2}{r^2} + \frac{2}{ra} + \frac{1}{a^2})}$$

4. Un péndulo de masa m está suspendido de un bloque de masa M que puede desplazarse sin fricción a lo largo de una recta horizontal

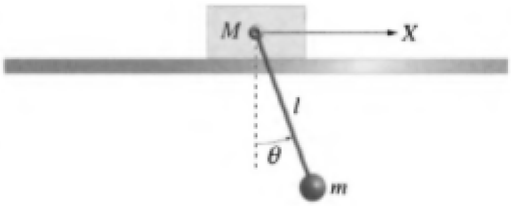


Figura 2. Péndulo atado a un bloque.

a) Determine el lagrangiano de este sistema en términos de las coordenadas x y θ.

Sol:

Las coordenadas del las masas son

$$x_M = x \qquad y_M = 0$$

$$x_m = x + l\sin\theta \qquad y_m = l\cos\theta$$

por lo que el lagrangiano queda como

$$L = K_M + K_m - \cancel{U_M} - U_m$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \cancel{\dot{y}_M^2}) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + mgy_m$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m((\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})^2 + (-l\sin\theta\dot{\theta})^2) + mgl\cos\theta$$

$$\therefore L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgl\cos\theta$$

b) Obtenga el lagrangiano de este sistema en la vecindad de su estado de equilibrio estable.

Sol:

Primero para tener un punto de equilibrio estable, necesitamos un máximo del potencial $U = mgl\cos\theta$ el cual se da para $\theta = 0$ debido a que $\frac{dU}{d\theta} = 0$ para $\theta = 0, \pi$ y $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0$ para $\theta = 0$.

Ahora desarrollando el potencial $U(\theta)$ sobre 0 y usando la aproximación de pequeñas desviaciones, llegamos a

$$L(\theta) = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\theta = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\theta\theta$$

c) Determine la frecuencia de las oscilaciones pequeñas de este sistema.

Sol:

Ya que $k = \frac{d^2U}{d\theta^2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{gl\cos\theta}$$