1. **Sean** $A, B \in M_{n\times n}(K)$**. Demostrar que si** $(I-AB)$ **es invertible entonces** $I-BA$ **es invertible (hint:**$(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$**).**

   Probar que AB y BA tienen los mismos eigenvalores en K

   SOLUCIÓN:

   Para demostrar que $I-BA$ es invertible, basta con mostrar una matriz que si se multiplica por la derecha o izquierda con $I-BA$ se obtiene la identidad

   Supongamos que $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$(sabemos por hipótesis que $(I-AB)^{-1}$ existe), entonces

$$(I-BA)(I-BA)^{-1} = (I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)$$

   desarrollando el producto

$$= I + B(I-AB)^{-1}A - BA - BAB(I-AB)^{-1}A$$

   ahora factorizando la B por la derecha y A por la izquierda

$$= I + B((I-AB)^{-1} - I - AB(I-AB)^{-1})A$$

   despues reordenando terminso y factorizando $(I-AB)^{-1}$

$$= I + B(-I + (I-AB)^{-1} - AB(I-AB)^{-1})A$$

$$= I + B(-I + \cancel{(I-AB)(I-AB)^{-1}})A$$

$$= I + B(-I+I)A$$

   pero como $-I+I$ es la matriz 0, entonces

$$= I + B(0)A = I \qquad \therefore (I-BA)(I-BA)^{-1} = I$$

   ahora veamos por la izquierda

$$(I-BA)^{-1}(I-BA) = (I+B(I-AB)^{-1}A)(I-BA)$$

   que igual desarrollando

$$= I - BA + B(I-AB)^{-1}A - BAB(I-AB)^{-1}A$$

   hagamos exactamente lo mismo que en el caso anterior

$$= I + B(-I + (I-AB)^{-1} - AB(I-AB)^{-1})A$$

$$= I + B(-I + \cancel{(I - AB)(I - AB)^{-1}})A$$

$$= I + B(-I + I)A = I + B(0)A = I \qquad \therefore (I - BA)^{-1}(I - BA) = I$$

y así confirmamos que existe una inversa y por lo tanto $I - BA$ es invertible bajo el supuesto de que $I - AB$ lo sea ■

Sea λ un valor propio de AB, con vector propio v, entonces

$$ABv = \lambda v$$

$$BABv = B\lambda v$$

$$BA(Bv) = \lambda(Bv)$$

sea $v' = Bv$

$$BAv' = \lambda v'$$

entonces, λ es un valor propio de BA ■

2. **Sea $T : R^3 \to R^3$ el operador lineal dado por**

$$T([x, y, z]) = [2x - y - z, x - z, -x + y + 2z]$$

Hallar una base de R^3 con relación a la cual la matriz de T sea diagonal

SOLUCIÓN:

La matriz de dicha transformación es

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con β como la base canónica de R^3

Ahora calculemos los valores y vectores propios para encontrar una base que diagonalize la matriz de la transformación

$$\det([T]_\beta - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) + ((2-\lambda)-1) - (1-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+1)-\lambda+1+\lambda-1 = -4\lambda+2\lambda^2+2+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda$$

$$= -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

por lo que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$, que sustituyendo

$$([T]_\beta - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ x-y-z \\ -x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y+z \\ y = x-z \end{array} \right.$$

que de aquí podemos sacar los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ahora para λ_2

$$([T]_\beta - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 2-2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ x-2y-z \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -y-z=0 \\ x-2y-z=0 \\ -x+y=0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y=-z \\ z=-2y+x \\ x=y \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y=-z \\ z=-y \\ x=y \end{array} \right.$$

y así, en la base $\beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

comprobemos que la matriz $[T]_{\beta'}$ es diagonal

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$[T]_{\beta'} = Q^{-1}[T]_\beta Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$