1 - Coordenadas curvilíneas ortogonales

Matemáticas Avanzadas de la Física

M. en C. Gustavo Contreras Mayén

Índice

1. Coordenadas curvilíneas ortogonales.

1.1. Introducción.

En el espacio euclidiano tridimensional las coordenadas cartesianas se definen en términos de tres familias de planos perpendiculares

$$x = x_0, \;\; y = y_0, \;\; z = z_0$$

Como vemos en la figura 1:

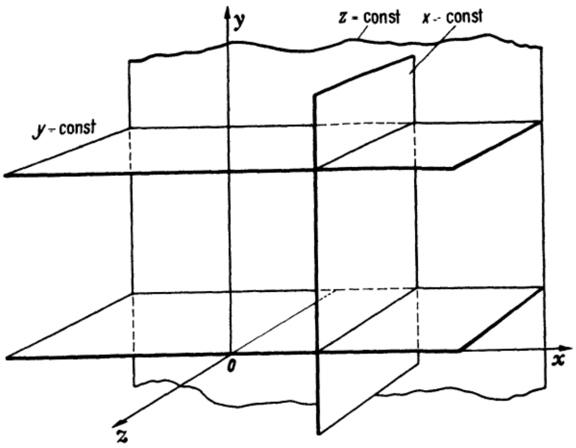

Figura 1: Las superficies coordenadas son los planos $x = \text{cte.}, y = \text{cte.}, z = \text{cte.}$

La intersección de los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ genera una línea recta paralela al eje z que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0)$.

La intersección de los tres planos $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ genera un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0).

Coordenadas esféricas.

Las coordenadas esféricas se definen en términos de tres supeficies: esferas concéntricas, conos con el mismo vértice y planos meridianos.

Un punto tiene coordenadas (r, θ, ϕ) y las tres superficies son perpendiculares en cada punto.

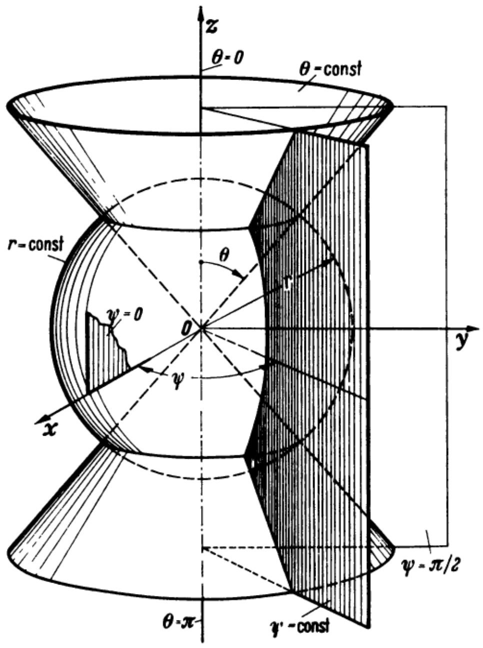

Figura 2: Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Las superficies coordenadas son *esferas* ($r =$ cte.), *conos circulares* ($\theta =$ const), *planos meridianos* ($\phi =$ cte.)

La intersección del cono y la esfera genera una circunferencia a lo largo de la cual varía sólo la coordenada ϕ.

La intersección de la esfera y el plano meridiano genera un arco de meridiano a lo largo del cual sólo θ varía, y la intersección del cono y el plano genera una recta radial a lo largo de la cual sólo r varía.

La conexión entre coordenadas cartesianas y esféricas (regla de transformación) tiene la forma:

$$x = r\,\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Coordenadas cilíndricas.

De manera análoga tenemos que para las coordenadas cilíndricas, se construyen con tres superficies perpendiculares: cilindros concéntricos, planos meridianos y planos horizontales, como se ve en la figura 3.

A cada una se le asocian, las coordenadas (ρ, ϕ, z) respectivamente.

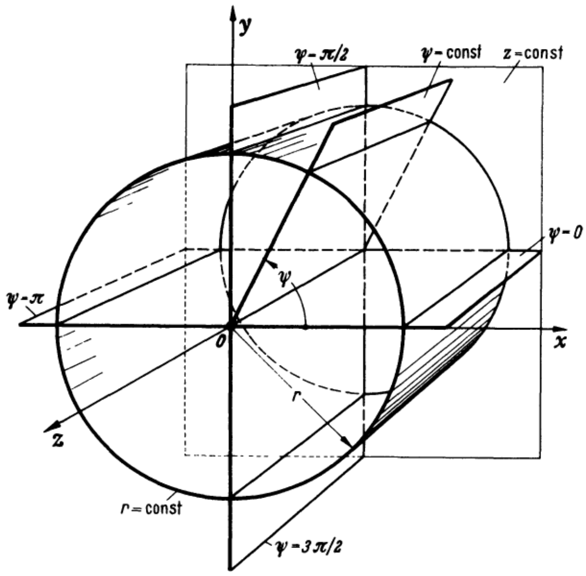

Figura 3: Coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z). Las superficies coordenadas son *cilindros circulares* ($\rho =$ cte.), *planos meriadianos* ($\theta =$ const) que intersectan al eje x, *planos paralelos* ($z =$ cte.)

Las reglas de transformación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas son de la forma:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\phi \\
y &= \rho \sin\phi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

1.2. Coordenadas curvilíneas ortogonales.

Una generalización directa permite pensar en tres familias de superficies, en general curvas, que en cada punto del espacio se intersectan en ángulo recto.

Estas superficies pueden describirse mediante las ecuaciones:

$$u_1 = f_1(x, y, z)$$
$$u_2 = f_2(x, y, z)$$
$$u_3 = f_3(x, y, z)$$

De manera equivalente:

$$x = x(u_i)$$
$$y = y(u_i)$$
$$z = z(u_i)$$

Estas ecuaciones son a la vez las reglas de transformación entre *coordenadas cartesianas* y las *coordenadas curvilíneas ortogonales.*

Las superficies $u_1 =$ cte. y $u_2 =$ cte. se intersectan en una curva a lo largo de la cual solo u_3 varía, esta curva define a la coordenada u_3, como se ve en la figura 4.

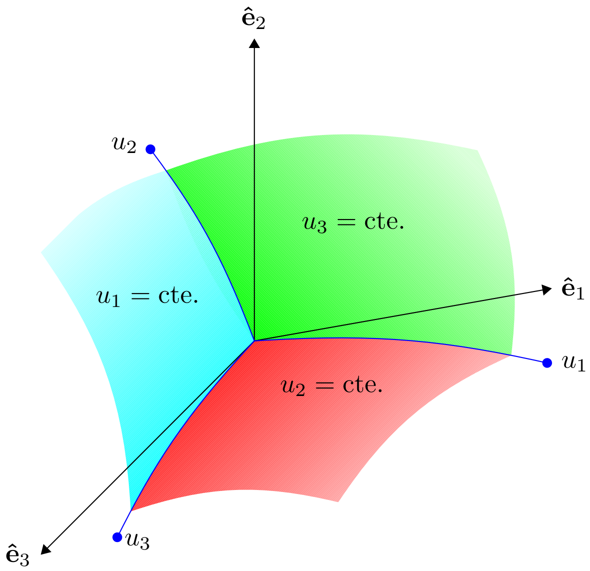

Figura 4: Sistema curvilíneo ortogonal. Los vectores unitarios $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ son tangentes a las superficies.

Análogamente las superficies $u_1 =$ cte. y $u_3 =$ cte. generan la curva u_2; y las superficies $u_2 =$ cte. y $u_3 =$ cte. generan la curva u_1.

La intersección de las tres superficies genera un punto cuyas coordenadas son (u_1, u_2, u_3). Dado un punto (x, y, z) es posible asignarle unívocamente un conjunto (u_1, u_2, u_3) de coordenadas curvilíneas.

El sistema de coordenadas curvilíneas construido con estas superficies, tiene las siguientes características:

1. Los ejes coordenados son en general curvas que se intersectan en ángulo recto, de modo que los vectores unitarios $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, que son tangentes a las curvas, generan una base ortonormal tridimensional.

2. La orientación de la base $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ puede cambiar de punto a punto, preservándose su ortonormalidad.

3. El significado físico de los diferenciales de las coordenadas *no es necesariamente una longitud.* En coordenadas esféricas, tenemos una longitud y dos ángulos.

En el curso nos enfocaremos en el estudio de este tipo de sistemas: coordenados ortogonales, los sistemas coordenados no ortogonales no los revisaremos.

Campo escalar

Un *campo escalar* se define dando un valor numérico en cada punto del espacio.

El valor de una cantidad escalar en un punto definido del espacio es independiente del sistema de coordenadas que se utilice.

Por lo que decimos que si (x, y, z), (ρ, ϕ, z), (r, θ, ϕ) denotan el mismo punto del espacio físico, el valor que en ese punto tome, por ejemplo, la presión atmosférica es el mismo.

Campo vectorial

Los campos vectoriales se definen dando en cada punto del espacio el valor de tres cantidades, conocidas como las *componentes vectoriales.*

Aunque los vectores unitarios y los valores de cada componente sean diferentes en cada sistema de coordenadas, es sin embargo cierto que el vector $\mathbf{A}$ no cambia cuando cambiamos de sistema coordenado.

Por lo que podemos decir que si los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_i$ y $\hat{\mathbf{e}}'_i$, y las componentes A_i y A'_i en dos sistemas coordenados S y S', entonces:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \, \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} A'_i \, \hat{\mathbf{e}}'_i$$

Esto significa que un vector es *invariante* bajo transformaciones de coordenadas.

Los campos escalares son también invariantes bajo transformaciones de coordenadas. En la *teoría de transformación* se revisa estos temas.

Ecuaciones matemáticas

De esta manera es posible escribir ecuaciones cuya forma matemática es la misma en todos los sistemas de coordenadas en el espacio 3D euclidiano.

Por ejemplo, la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

es válida en todos los sistemas coordenados, es decir, es invariante bajo tranformación de coordenadas.

2. Teoría de transformación

En el espacio euclidiano es siempre posible construir un sistema coordenado cartesiano que se extienda indefinidamente.

A partir de él podemos generar múltiples sistemas coordenados, mediante el uso de las superficies $u_i = f(x, y, z)$

Dado que de manera recíproca, (x, y, z) son funciones de u_i, es decir:

$$x = x(u_i)$$
$$y = y(u_i)$$
$$z = z(u_i)$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3 \\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3 \\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3
\end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones son las componentes de la ecuación vectorial:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3 = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\,\mathrm{d}u_i
\end{aligned} \tag{1}$$

En general, el factor $\partial\mathbf{r}/\partial u_i$ en la ec. (1) es un vector *no unitario* que toma en cuenta la variación de $\mathbf{r}$ solo en la dirección de u_i, y es por tanto, tangente a la curva coordenada u_i.

Con el fin de introducir una *base normalizada* $\hat{\mathbf{e}}_i$, es decir, un conjunto de vectores unitarios, escribimos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i\,\hat{\mathbf{e}}_i \tag{2}$$

donde $|\mathbf{e}_i| = 1$ y h_i son funciones de u_i, que llamaremos *factores de escala*.

Se sigue entonces que el diferencial de desplazamiento es:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i\,\hat{\mathbf{e}}_i\,\mathrm{d}u_i$$

Como hicimos la aclaración de trabajar con bases *ortonormales* (perpendiculares y unitarias), podemos escribir:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \tag{3}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces tendremos que

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$$

y además

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = |\hat{\mathbf{e}}_1|^2 = |\hat{\mathbf{e}}_2|^2 = |\hat{\mathbf{e}}_3|^2 = 1$$

Por la ecuación (2), los factores de escala se definen por:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = h_i \tag{4}$$

por lo que es fácil calcular los factores de escala.

En consecuencia los vectores unitarios en coordenadas curvilíneas (ec. 2) se escriben como:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \tag{5}$$

Ejemplo

Como ejemplo haremos el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \varphi)$$

Un punto P puede localizarse mediantes las coordendas cartesianas (x, y, z) y también mediante coordenadas esféricas (r, θ, φ), donde:

$$
\begin{aligned}
-\infty \le x \le \infty & \qquad\qquad\qquad\qquad r \ge 0 \\
-\infty \le y \le \infty & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le \theta \le \pi \\
-\infty \le z \le \infty & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\,\pi
\end{aligned}
$$

Donde:

- $r = |\mathbf{r}|$ es la coordenada radial.
- θ es la coordenada polar.
- φ es la coordenada azimutal.

De la figura (2) la "conexión" (regla de transformación) entre las coordenadas cartesianas y esféricas es:

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\
y &= r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\
z &= r\,\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\
\varphi &= \tan^{-1}(y/x)
\end{aligned}
$$

Entonces el vector de posición es:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y + \hat{\mathbf{k}}\,z \\
&= \hat{\mathbf{i}}\,r\,\sin\theta\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,r\,\sin\theta\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{k}}\,r\cos\theta
\end{aligned} \tag{6}
$$

Por lo que podemos calcular los $\partial\mathbf{r}/\partial u_i$. Entonces tenemos que

$$
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \hat{\mathbf{i}}\,\sin\theta\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\sin\theta\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{k}}\,\cos\theta
$$

Así al calcular la norma

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r}\right| &= \sqrt{\sin^2\theta\,\cos^2\varphi + \sin^2\theta\,\sin^2\varphi + \cos^2\theta} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Entonces por la ec. (4):

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right| = h_i$$

Tendremos el primer factor de escala:

$$h_1 = h_r = 1$$

El segundo factor $\partial \mathbf{r}/\partial \theta$ es:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{i}}\, r\, \cos\theta\, \cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\, r\, \cos\theta\, \sin\varphi - \hat{\mathbf{k}}\, r\, \sin\theta$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}\right| &= \sqrt{r^2(\cos^2\theta\, \cos^2\varphi + \cos^2\theta\, \sin^2\varphi + \sin^2\theta)} \\ &= r\end{aligned}$$

Así: $h_2 = h_\theta = r$

Para el siguiente factor de escala:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\hat{\mathbf{i}}\, r\, \sin\theta\, \sin\varphi + \hat{\mathbf{j}}\, r\, \sin\theta\, \cos\varphi$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}\right| &= \sqrt{r^2(\sin^2\theta\, \sin^2\varphi + \sin^2\theta\, \cos^2\varphi)} \\ &= r\, \sin\theta\end{aligned}$$

Así: $h_3 = h_\varphi = r\, \sin\theta$

Entonces los factores de escala para el sistema coordenado esférico son:

$$\begin{aligned} h_r &= 1 \\ h_\theta &= r \\ h_\varphi &= r\, \sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Al reemplazar los factores de escala en la ec. (5), los vectores unitarios en coordenadas esféricas pueden expresarse en términos de coordenadas cartesianas, como:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_r &= \hat{\mathbf{i}}\,\sin\theta\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\sin\theta\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{k}}\,\cos\theta \\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \hat{\mathbf{i}}\,\cos\theta\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\cos\theta\,\sin\varphi - \hat{\mathbf{k}}\,\sin\theta \\
\hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\hat{\mathbf{i}}\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Donde $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) = (\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$

Las ecs. (8) pueden invertirse algebraicamente para expresar los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ en términos de $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$, tal que:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{e}}_r\,\sin\theta\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\theta\,\cos\theta\,\cos\varphi - \hat{\mathbf{e}}_\varphi\,\sin\varphi \\
\hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{e}}_r\,\sin\theta\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\theta\,\cos\theta\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\varphi\,\cos\varphi \\
\hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{e}}_r\,\cos\theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta\,\sin\theta
\end{aligned}
$$

Ejercicio a cuenta.

Considera la transformación de coordenadas:

$$
\begin{aligned}
x &= 2\,u\,v \\
y &= u^2 + v^2 \\
z &= w
\end{aligned}
$$

Demuestra que el nuevo sistema de coordenadas *no* es ortogonal.

3. Derivadas de vectores unitarios

En aplicaciones de análisis vectorial se requiere utilizar las derivadas parciales $\partial\hat{\mathbf{e}}_i/\partial u_j$

Partiendo de

$$
\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_i h_i\,\hat{\mathbf{e}}_i\,\mathrm{d}u_i
$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = h_j\,\hat{\mathbf{e}}_j \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i\,\hat{\mathbf{e}}_i$$

Que al calcular la segunda derivada mixta:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_i}(h_j\,\hat{\mathbf{e}}_j) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_j \partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_j}(h_i\,\hat{\mathbf{e}}_i)$$

Restando estas ecuaciones y teniendo en cuenta que $\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_j}$ es paralelo al vector $\hat{\mathbf{e}}_j$ y $\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_j}{\partial u_i}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{e}}_i$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_j} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_j}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial u_i}$$

que es válida para $i \neq j$

Símbolo de Levi-Civita

Haremos una pausa, para revisar que el símbolo de Levi-Civita se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (3,2,1),(1,3,2),(2,1,3) \\ 0 & \text{de otro modo } i=j, j=k, k=i \end{cases}$$

Una forma algebraica bastante simple que contiene todas las propiedades del símbolo de Levi-Civita es:

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

egresamos al tema, sabemos que:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{2}\sum_{jk} \epsilon_{ijk}\,\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k$$

por lo que al derivar primero, luego ocupar la última ecuación y haciendo álgebra, llegamos a

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_i} = \sum_{jkl} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilj}\,\frac{\hat{\mathbf{e}}_l}{h_k}\,\frac{\partial h_i}{\partial u_k}$$

Utilizando la siguiente propiedad:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}$$

Podemos concluir con el siguiente resultado:

Conclusión de la derivación parcial de vectores unitarios:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial u_i} = -\sum_{k\neq i} \frac{\hat{\mathbf{e}}_k}{h_k}\,\frac{\partial h_i}{\partial u_k}$$

4. Jacobianos y transformaciones.

En componentes, la ec. (1) se escribe como

$$\mathrm{d}x_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_j = \sum_j J_{ij}\,\mathrm{d}u_j \tag{9}$$

Donde

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \tag{10}$$

En forma matricial la ec. (9) se escribe como

$$\mathrm{d}x = \mathbf{J}\,\mathrm{d}u \tag{11}$$

donde $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}u$ son los vectores columna:

$$\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}u = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{J}$ es la matriz de transformación de los diferenciales de coordenadas, cuyos elementos son:

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

El determinante $|\mathbf{J}|$ se le conoce como el *Jacobiano*, que debe de ser no nulo para garantizar que la transformación sea invertible.

Con el vector

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\, x + \mathbf{j}\, y + \mathbf{k}\, z$$

La ec. 5 toma la forma:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\left(\hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial x}{\partial u_i} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial y}{\partial u_i} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial z}{\partial u_i}\right) \tag{12}$$

que es la regla de transformación de vectores unitarios.

Introduciendo al notación $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3) = (\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, escribimos:

$$\mathbf{r} = \sum_j \hat{\epsilon}_j\, x_j$$

Tal que la ec. (5) también se escribe como:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{e}}_j}{h_i}\,\frac{\partial x_j}{\partial u_i} = \sum_j a_{ij}\,\hat{\mathbf{e}}_j \tag{13}$$

Donde se ha definido la cantidad:

$$a_{ji} = \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial x_j}{\partial ui} \tag{14}$$

Introduciendo los vectores columna:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \\ \hat{\epsilon}_3 \end{pmatrix}$$

Considerando los a_{ij} como los elementos de la matriz $\mathbf{A}$ (los a_{ji} son los elementos de la matriz transpuesta)

Entonces podemos escribir la ec. (13) como:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{A}^{\intercal}\,\epsilon \tag{15}$$

donde $\mathbf{A}^{\intercal}$ es la transpuesta de $\mathbf{A}$.

De acuerdo a las ecs. (10) y (14) que.

$$J_{ji} = a_{ji}\,h_i$$

Que en términos de matrices:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}\,\mathbf{H} \tag{16}$$

Donde

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

4.1. Invarianza bajo trasformaciones.

Un postulado básico de la teoría de transformación asegura que la invarianza bajo transformación de coordenadas del elemento de línea $\mathrm{d}\mathbf{r}$, y en general de cualquier vector. Por lo que los módulos de los vectores, son también invariantes.

Es cierto que en coordenadas cartesianas

$$\mathrm{d}l^2 = \sum_i \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}_{x_i}$$

y en coordenadas curvilíneas:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \sum_{jk} h_j\,h_k\,\hat{\mathbf{e}}_j\cdot\hat{\mathbf{e}}_k\,\mathrm{d}u_j\,\mathrm{d}u_k =$$

$$= \sum_{jk} h_j\,h_k\,\mathrm{d}u_j\,\mathrm{d}u_k\,\delta jk$$

La invarianza de $\mathrm{d}l^2$ asegura que su valor es el mismo en el sistema coordenado original y en el nuevo, es decir: al igualar el elemento de desplazamiento:

$$\sum_i \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}_{x_i} = \sum_{jk} h_j\,h_k\,\mathrm{d}u_j\,\mathrm{d}u_k\,\delta jk$$

Por la ec. (10), se tiene

$$\mathrm{d}x_i = \sum_j J_{ij}\,\mathrm{d}u_j$$

Se sigue con:

$$\sum_{ijk} J_{ij}\, J_{ik}\; \mathrm{d}u_j\, \mathrm{d}_{u_k} = \sum_{jk} h_j\, h_k\, \mathrm{d}u_j\, \mathrm{d}u_k\, \delta jk$$

de donde

$$\sum_i J_{ij}\, J_{ik} = h_j^2\, \delta_{jk}$$

Que en forma matricial se escribe como

$$\mathbf{J}^\intercal\, \mathbf{J} = \mathbf{H}^2$$

siendo la matriz $\mathbf{J}^\intercal$, la matriz transpuesta de $\mathbf{J}$. Siendo $\mathbf{J}^\intercal$ la matriz transpuesta de $\mathbf{J}$.

De las expresiones

$$\mathbf{J}^\intercal\, \mathbf{J} = \mathbf{H}^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \mathbf{A}\, \mathbf{H}$$

se tiene que

$$\mathbf{A}^\intercal\, \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{18}$$

De modo que la matriz $\mathbf{A}$ es *ortogonal*: $\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}^{-1}$. De la ec. (18) se sigue que $|\mathbf{A}| = \pm 1$.

Los tipos posibles de transformación son:

1. De un S cartesiano a otro S' *rotado, reflejado o invertido.*

2. De un S cartesiano a uno *curvilíneo.*

En el caso de una rotación, o del paso de coordenadas cartesianas a curvilíneas, puesto que la matriz de transformación ha de contener la identidad, entonces $|\mathbf{A}| = +1$.

Para el caso de la reflexión e inversión, se tiene $|\mathbf{A}| = -1$.

Veamos que

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} =$$

$$= h_1\, h_2\, h_3\, \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

es diferente de cero, ya que $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ son no coplanares.

De hecho, puesto que

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = 1$$

Se sigue que

$$|\mathbf{J}| = h_1\, h_2\, h_3$$

En el siguiente material de trabajo abordaremos la construcción de los elementos de línea, superficie y volumen en los sistemas coordenados curvilíneos.