1. Let V be a vector space over F, where $F = R$ or $F = C$, and let W be an inner product space over F with inner product $< \cdot,\cdot >$. If $T : V \to W$ is linear, prove that $< x, y >' =< \mathbf{T}(x), \mathbf{T}(y) >$ defines an inner product on V if and only if $\mathbf{T}$ is one-to-one

   $\to$) Por resultados de lineal 1(teorema 2.4), sabemos que una transformación lineal es inyectiva si $Ker(T) = 0_V$, así, si $T(x) = 0_W$, entonces

   $$< x, x >' :=< T(x), T(x) >=< 0_W, 0_W >$$

   y por el teorema 6.1.c y 6.1.d, $< x, x >' = 0_F$, lo que implica que $x = 0_V$ y por lo tanto $Ker(T) = 0_V$ (T es uno a uno) ■

   $\leftarrow$) por la definición 6.1, $< x, y >'$ es un producto interior en V si cumple con las siguientes 4 propiedades.

   Sea $x, y, z \in V$ y $c \in F$

   $$\star \quad < x + z, y >' :=< T(x + z), T(y) >$$

   y por hipótesis, como T es lineal y $< \cdot,\cdot >$ es un producto interior(este argumento se usa en las otras propiedades),

   $$< T(x) + T(z), T(y) >=< T(x), T(y) > + < T(z), T(y) >:=< x, y >' + < z, y >'$$

   $$\star \quad < cx, y >' :=< T(cx), T(y) >=< cT(x), T(y) >= c < T(x), T(y) >:= c < x, y >'$$

   $$\star \quad \overline{< x, y >'} := \overline{< T(x), T(y) >} =< T(y), T(x) >:=< y, x >'$$

   $$\star \quad < x, x >' :=< T(x), T(x) >$$

   y esto es mayor a 0 ya que T es uno a uno y entonces por el teorema 2.4, $T(x) = 0_W$ con $x = 0_V$ ■

2. Let $V = F^n$, and let $A \in M_{n\times n}(F)$

   a) Prove that $< x, Ay >=< A^*x, y >$ for all $x, y \in V$
   Suponiendo que $< \cdot,\cdot >$ sea un producto interior, por definición

   $$< x, Ay >= (Ay)^*x = y^*A^*x =< A^*x, y > \qquad ■$$

   b) Suppose that for some $B \in M_{n\times n}(F)$, we have $< x, Ay >=< Bx, y >$ for all $x, y \in V$. Prove that $B = A^*$
   Por el inciso a) de este ejercicio y por hipótesis, se tiene que :

   $$< x, Ay >=< A^*x, y >=< Bx, y >$$

   y por el teorema 6.1.e, $A^*x = Bx$ $\forall x \in V$ y por lo tanto $A^* = B$ ■

c) Let α be the standard ordered basis for V. For any orthonormal basis β for V, let Q be the $n \times n$ matrix whose columns are the vectors in β. Prove that $Q^* = Q^{-1}$
Dado que:

$$Q^*Q = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ . \\ . \\ . \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & . & . & . & v_1 \end{pmatrix}$$

y como β es una base ortonormal

$$(Q^*Q)_{ij} = v_i^* v_j =< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

y así, $Q^*Q = I$, por lo tanto $Q^* = Q^{-1}$ ■

d) Define linear operators T and U on V by $T(x) = Ax$ and $U(x) = A^*x$. Show that $[U]_\beta = [T]_\beta^*$ for any orthonormal basis β for V.
Sea α una base ordenada estándar de V , entonces por definición tenemos, $[T]_\alpha = A$ y $[U]_\alpha = A^*$, ahora, por el teorema 2.23 y el inciso anteiror tomando como $Q = [I]_\beta^\alpha$:

$$[U]_\beta = [I]_\alpha^\beta [U]_\alpha [I]_\beta^\alpha = Q^{-1}A^*Q = Q^*A^*Q = (QAQ^*)^* = ([I]_\alpha^\beta [T]_\alpha [I]_\beta^\alpha)^* = [T]_\beta^* \quad ■$$

3. Let V be a inner product space, S and S_0 be subsets of V, and W be a finite-dimensional subspace of V. Prove the following results.

a) $S \subseteq S_0$ implies that $S^\perp \subseteq S_0^\perp$
Sea $x \in S^\perp$, así, por definición x es ortogonal a cualquier elemento de S y a su vez de S_0 por hipótesis, lo que significa que $x \in S_0^\perp$, y por lo tanto $S^\perp \subseteq S_0^\perp$ ■

b) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$; so span $(S) \subseteq (S^\perp)^\perp$
Sea $x \in S$, entonces x es ortogonal a cualquier elemento de $S^\perp$ por definición, por lo que $x \in (S^\perp)^\perp$ ■
Sea $y \in span(S)$ y $z \in S^\perp$, o bien, $y = \sum a_i x_i$ con $x_i \in S$ Y a_i en cual sea el campo de que tenga V, entonces por lo anterior,

$$< y, z >=< \sum a_i x_i, z >= \sum a_i < x_i, z >= \sum a_i(0) = 0$$

$$\therefore span(S) \subseteq (S^\perp)^\perp \quad ■$$

c) $W = (W^\perp)^\perp$. hint: Use excercise 6.
Por el teorema 6.7.c y como$W^\perp \subseteq V$ para cualquier $W \subseteq V$,

$$dim(V) = dim(W) + dim(W^\perp) = dim(W^\perp) + dim((W^\perp)^\perp)$$

lo que significa que $dim(W) = dim((W^\perp)^\perp)$ ypor el teorema 1.11 y lo demostrado en el inciso anterior, $W = (W^\perp)^\perp$ ■

d) $V = W \oplus W^{\perp}$. (See the excercises of section 1.3)
Sea $x \in W \cap W^{\perp}$, esto significa que $< x, x >= 0 = \|x\|^2$ y por lo tanto que $W \cap W^{\perp} = \{0_v\}$, ahora como por el teorema 6.6 tenemos que $V = W + W^{\perp}$ se cumple que $V = W \oplus W^{\perp}$ ■

4. Let V be a finite-dimensional inner product space over F

a) Parseval's identity. Let $v_1, v_2, ..., v_n$ be an orthonormal basis for V. For any $x, y \in V$ prove that

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > \overline{< y, v_i >}$$

Usando el teorema 6.5 podemos reescribir x, y como:

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{n} < y, v_j > v_j$$

entonces, por las propiedades del producto interior tenemos:

$$< x, y >=< \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i, \sum_{j=1}^{n} < y, v_j > v_j >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} << x, v_i > v_i, < y, v_j > v_j >$$

y dado que v_i son elementos de una base ortonormal:

$$= \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > \overline{< y, v_i >} < v_i, v_i >= \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > \overline{< y, v_i >} \qquad ■$$

b) Use (a) to prove that if β is an orthonormal basis for V with inner product $< \cdot, \cdot >$, then for any $x, y \in V$

$$< \phi_\beta(x), \phi_\beta(x) >' =< [x]_\beta, [y]_\beta >' =< x, y >$$

where $< \cdot, \cdot >'$ is the standard inner product on F^n
Dado que la ultima igualdad del ejercicio anterior es el producto usual en F^n, la igualdad de b) se cumple por la de a) usándola al revés ■

5. In each of the following parts,find the orthogonal projection of the given vector on the given subspace W of the inner product space V.

a) $V = R^2$, $u = (2, 6)$,and $W = \{(x, y) : y = 4x\}$
Usando el teorema 6.6, y tomando como base ortonormal de W a $\{\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4)\}$

$$< u, \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4) > \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4) = \frac{1}{17} < (2, 6), (1, 4) > (1, 4) = \frac{2 + (6 * 4)}{17}(1, 4) = \frac{26}{17}(1, 4)$$

b) $V = R^3$, $u = (2,1,3)$, and $W = \{(x,y,z) : x + 3y - 2z = 0\}$
Usando el teorema 6.6, y tomando como base ortonormal de W a $\{\frac{2}{\sqrt{5}}(1,0,\frac{1}{2}), \frac{2}{\sqrt{13}}(0,1,\frac{3}{2})\}$

$$< u, \frac{2}{\sqrt{5}}(1,0,\frac{1}{2}) > \frac{2}{\sqrt{5}}(1,0,\frac{1}{2}) = \frac{4}{5} < (2,1,3),(1,0,\frac{1}{2}) > (1,0,\frac{1}{2}) = \frac{4(2+(3/2))}{5}(1,0,\frac{1}{2})$$

$$= \frac{14}{5}(1,0,\frac{1}{2})$$

$$< u, \frac{2}{\sqrt{13}}(0,1,\frac{3}{2}) > \frac{2}{\sqrt{13}}(0,1,\frac{3}{2}) = \frac{4}{13} < (2,1,3),(0,1,\frac{3}{2}) > (0,1,\frac{3}{2}) = \frac{4(1+(6/2))}{13}(0,1,\frac{3}{2})$$

$$= \frac{16}{13}(0,1,\frac{3}{2})$$

entonces la proyección es:

$$\frac{16}{13}(0,1,\frac{3}{2}) + \frac{14}{5}(1,0,\frac{1}{2}) = (\frac{14}{5}, \frac{16}{13}, \frac{211}{65})$$

c) $V = P_2(R)$ with the inner product $< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $h(x) = 4 + 3x - 2x^2$, and $W = P_1(R)$
Usando el teorema 6.6, y tomando como base ortonormal de W a $\{1, \sqrt{3}x\}$

$$< h(x), 1 > 1 =< 4+3x-2x^2, 1 > 1 = \int_0^1 (4+3t-2t^2)(1)dt = 4\int_0^1 dt + 3\int_0^1 tdt - 2\int_0^1 t^2 dt$$

$$= 4 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{29}{6}$$

$$< h(x), \sqrt{3}x >= \int_0^1 (4+3t-2t^2)\sqrt{3}tdt$$

$$= \sqrt{3}\left[4\int_0^1 tdt + 3\int_0^1 t^2 dt - 2\int_0^1 t^3 dt\right]$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{4}{2} + \frac{3}{3} - \frac{2}{4}\right] = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

entonces la proyección es:

$$\frac{29}{6} + \frac{15}{2}x$$

6. In each part of excercise 19, find the distance from the given vector to the subspace W

   Usando las proyecciones del ejercicio anterior podemos medir la distancia entre los vectores dados y su subespacio de la siguiente forma:

$$\|(2,6)-\frac{26}{17}(1,4)\| = \sqrt{<(2,6)-\frac{26}{17}(1,4),(2,6)-\frac{26}{17}(1,4)>}$$

$$\sqrt{<(\frac{8}{17},\frac{-2}{17}),(\frac{8}{17},\frac{-2}{17})>} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\|(2,1,3)-(\frac{14}{5},\frac{16}{13},\frac{211}{65})\| = \sqrt{<(-\frac{14}{5},-\frac{3}{13},-\frac{16}{65}),(-\frac{14}{5},-\frac{3}{13},-\frac{16}{65})>} = \sqrt{\frac{517}{65}}$$

$$\|(-2x^2+3x+4)-(\frac{29}{6}+\frac{15}{2}x)\|$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \int_0^1 dt + 2\frac{9}{2}\frac{5}{6}\int_0^1 tdt + (4\frac{5}{6}+\frac{9}{2})\int_0^1 t^2dt + 4\frac{9}{2}\int_0^1 t^3dt + 4\int_0^1 t^4dt$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{9}{2}\frac{5}{6} + (4\frac{5}{18}+\frac{9}{6}) + \frac{9}{2} + \frac{4}{5} = \frac{556}{45}$$