NOTACIÓN DE ÍNDICES

M. en C. Abraham Lima Buendia

abraham3081@ciencias.unam.mx

La **notación de índices** es una alternativa para realizar operaciones entre tensores de rango *k*, está notación es compacta, pues los tensores se indican mediante sus componentes, dicha propiedad permite referirnos a los tensores, sin necesidad de usar una base determinada. El objetivo de este material es familiarizarte con esta notación, de ese modo, se partió de ejemplos conocidos por ti, para posteriormente avanzar a operaciones más complejas.

En este material hacemos referencia a **tensores cartesianos**, de esa manera los conceptos de curvatura, variancia, contravarianza y matriz métrica son excluidos, pero serán señalados de forma puntual cuando se requieran en el curso. Por esta razón, se identifica la base vectorial $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ en $\{\hat{x}_{1,} \hat{x}_{2,} \hat{x}_3\}$. Por otra parte, en notación de índices se tiene la siguiente relación:

Escalar a	Sin índices libres	a
Vector $\vec{a}$	Un índice libre	a_i
Matriz $\vec{a}$	Dos índices libres	a_{ij}

En general un tensor de rango *k*, tendrá *k* índices libres, partiendo de esto, es posible reescribir algunas expresiones vectoriales, en la notación de índices.

PRODUCTO ESCALAR

Del curso de geometría analítica se conoce la expresión de este producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$, notemos que el argumento del símbolo de suma, en la expresión anterior, es una cantidad que tiene el mismo índice, a partir de aquí y hasta el final del curso denominaremos se usará la siguiente convención $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$, la cuál es conocida como convención de Einstein.

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial, tiene una expresión que también es conocida:

$$\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} = \hat{x}_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) + \hat{x}_2\left(b_3c_1 - b_1c_3\right) + \hat{x}_2\left(b_1c_2 - b_2c_1\right) \tag{1.1}$$

recordando que en notación de índices cada tensor se expresa mediante sus componentes y dicha expresión debe ser independiente de la base, la Ec.(1.1) tiene una representación dada por:

$$a_i = b_j c_k - b_k c_j \tag{1.2}$$

El signo positivo (negativo) en la Ec.(1.2) se asigna cuando los índices *i,j,k* forman una permutación par (impar) de los números 1,2,3. El tensor de Leví-Civita, posee rango 3 y cumple con la definición antes señalada.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ si } ijk \text{ es una permutación par} \\ -1 \text{ si } ijk \text{ es una permutación impar} \\ 0 \text{ el resto de los casos} \end{cases} \tag{1.3}$$

De ese modo la Ec.(1.2) puede escribirse de la siguiente forma:

$$a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k \tag{1.4}$$

La Ec.(1.4) es una contracción (suma sobre los índices repetidos) de un tensor de rango 3 y dos tensores de rango 1 de esa manera la Ec.(1.4) sólo tiene un índice libre, lo cual concuerda con la Ec.(1.1).

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR Y TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL

En el triple producto escalar se tiene una expresión semejante a la Ec.(1.4):

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1.5}$$

Nota que la Ec.(1.5) no contiene índices libres (devuelve un escalar) y al mismo tiempo pose la antisimetría propia de este producto. En el caso del triple producto vectorial, se tiene una expresión de la siguiente forma:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kmn} a_l b_m c_n \tag{1.6}$$

La Ec.(1.6) puede reducirse para construir una expresión equivalente, para ello se requiere una identidad construida mediante el tensor de Levi Civita

$$\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{mpq} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{lm} & \delta_{lp} & \delta_{lq} \\ \delta_{km} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

Combinando las Ec.(1.6) y Ec.(1.7) se obtienen la siguiente igualdad:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\delta_{lm}\delta_{in}-\delta_{ln}\delta_{im}\right)a_l b_m c_n = c_i a_m b_m - b_i a_l c_l \tag{1.8}$$

Notamos que cada uno de los dos elementos del lado derecho de la Ec.(1.8) pose solo ún índice libre lo que corresponde con una cantidad vectorial, así mismo estos dos términos pueden ser reescritos en notación vectorial como:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)-\vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) \tag{1.9}$$

Aunque la Ec.(1.9) es conocida, la notación de índices ofreció una manera más compacta de realizar la demostración.

GRADIENTE, ROTACIONAL Y DIVERGENCIA

En coordenadas cartesianas, los operadores mencionados en el título tienen la representación siguiente en la notación de índices:

Gradiente $\nabla\psi$	Un índice libre	$\partial_i\psi$
Rotacional $\nabla\times\vec{V}$	Un índice libre	$\varepsilon_{ijk}\partial_j V_k$
Divergencia $\nabla\cdot\vec{V}$	Sin índices libres	$\partial_i V_i$
Laplaciano $\nabla^2\psi$	Sin índices libres	$\partial_i\partial_i V$

En la tabla anterior ψ representa una función escalar, mientras que $\vec{V}$ corresponde a un campo vectorial. A manera de ejemplo, se obtendrá la ecuación de onda parar los campos eléctrico y magnético usando las ecuaciones de maxwell en ausencia de fuentes, para la demostración se usan el sistema cgs:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E} \quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ &\nabla\cdot\vec{B} \quad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Al tomar el rotacional en la ley de Ampere y en la ley de Faraday de la Ec.(1.10), se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}\\ &\nabla\times\nabla\times\vec{B}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}\end{aligned} \tag{1.11}$$

Para reducir la Ec.(1.11) obtendremos una expresión equivalente a los dos rotacionales aplicados a un campo vectorial $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l F_m=\left(\delta_{i,l}\delta_{j,m}-\delta_{i,m}\delta_{j,l}\right)\partial_j\partial_l F_m=\\&\delta_{i,l}\delta_{j,m}\partial_j\partial_l F_m-\delta_{i,m}\delta_{j,l}\partial_j\partial_l F_m=\partial_i\partial_m F_m-\partial_l\partial_l F_i=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}\end{aligned}\tag{1.12}$$

El último paso de la Ec.(1.12) se sigue de analizar la cantidad de índices libres y siguiendo las expresiones del producto punto y las definiciones de los operadores diferenciales, combinando las Ec.(1.10) a Ec.(1.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}\\\nabla^2\vec{B}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}\end{aligned}\tag{1.13}$$

La notación de índices puede aplicarse a más ramas de la física por ejemplo la mecánica cuántica, el siguiente apartado muestra un ejemplo en mecánica cuántica. Las definiciones y conceptos físicos serán explicados más adelante en el curso, de momento este material se centra en la parte operacional.

OPERADOR MOMENTO ANGULAR

En mecánica cuántica el operador momento angular está definido por $\vec{L}=-i\hbar\vec{r}\times\nabla$, a continuación, se escribe este operador en notación de índices:

$$L_j=-i\hbar\varepsilon_{jkm}x_k\partial_m\tag{1.14}$$

El conmutador de dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se define por $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$, esta propiedad nos permite definir el algebra de estos operadores $[L_k,L_m]$, el cálculo se desarrolla asumiendo que *j,k,m* es una permutación par de los números 1,2,3, las entradas vectoriales del conmutador son:

$$\begin{aligned}L_k&=-i\hbar\varepsilon_{kmj}x_m\partial_j\\L_m&=-i\hbar\varepsilon_{mjk}x_j\partial_k\end{aligned}\tag{1.15}$$

Evaluando el conmutador:

$$
\begin{aligned}
&\left\{L_k L_m - L_m L_k\right\}\psi = \left(i\hbar\right)^2 \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{jkm}\left\{x_m\partial_j x_j\partial_k\psi - x_j\partial_k x_m\partial_j\psi\right\} = \\
&\left(i\hbar\right)^2 \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{jkm}\left\{x_m x_j\partial_j\partial_k\psi + x_m\partial_k\psi - x_j x_m\partial_k\partial_j\psi - \delta_{k,m}x_j\partial_j\psi\right\} = \\
&\left(i\hbar\right)^2 \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{jkm}x_m\partial_k\psi - \cancel{\left(i\hbar\right)^2 \varepsilon_{jmm}\varepsilon_{jmm}x_j\partial_j\psi} = \\
&i\hbar\varepsilon_{jkm}\left\{i\hbar\varepsilon_{jkm}x_m\partial_k\psi\right\} = i\hbar\varepsilon_{jkm}L_j
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

La Ec.(1.16) define las propiedades operativas de este operador que serán de utilidad en el tema 4 del curso, el término cancelado en la Ec.(1.16), se deriva de las propiedades del tensor de Levi Civita,