Macías Márquez Misael Iván

1. Sea la función $y = \frac{C}{x^m}$. Donde $C$ y $m$ son constantes, mientras que $x$ y $y$ mediciones experimentales con incertidumbres absolutas $\Delta x$ y $\Delta y$ respectivamente.

   *a*) ¿Cómo se puede linealizar dicha ecuación de forma que la pendiente esté relacionada con el exponente?

   **Sol:**

   Primero multipliquemos la igualdad por $C$,

   $$\frac{y}{C} = \frac{1}{x^m}$$

   ahora aplicando logaritmos y usando propiedades de los mismos,

   $$\ln\frac{y}{C} = \ln\frac{1}{x^m} = \cancel{\ln 1} - \ln x^m = -m\ln x$$

   *b*) Para graficar la linealización, ¿Cuáles serían las nuevas variables dependiente e independiente?, y ¿Cuáles sus respectivas incertidumbres?

   **Sol:**

   Se tiene una ecuación de la forma $y' = m'x' + b'$ donde la variable dependiente es :

   $$y' = \ln\frac{y}{C} \qquad \text{con incertidumbre} \qquad \delta y' = \sqrt{\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \delta y^2} = \frac{\delta y}{\cancel{C}\frac{y}{\cancel{C}}}$$

   la independiente:

   $$x' = \ln x \qquad \text{con incertidumbre} \qquad \delta x' = \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \delta x^2} = \frac{\delta x}{x}$$

   y con pendiente y ordenada al origen:

   $$m' = m \qquad\qquad b' = 0$$

   respectivamente.

   *c*) Si estamos interesados en encontrar el valor del exponente ($m$) y su incertidumbre nominal a partir de $x$ y $y$, ¿Cuál es la fórmula de propagación correspondiente?

   **Sol:**

   Como vimos en las notas pasadas, la incertidumbre para la pendiente ajustada por mínimos cuadrados es:

   $$\delta m = \chi_N\sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

   con

   $$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \qquad \chi_N = \frac{\sum_{i=1}^{N}[y_i - (mx_i)]^2}{\sqrt{N-2}}$$

   donde $N$ es el número total de observaciones ($y_i$, $x_i$)

2. Sea la función $I = I_0 \cos(A\theta)$. Donde $I$ y $\theta$ son mediciones experimentales, e $I_0$ y $A$ son constantes.

   *a*) Linealizar la ecuación de forma que la pendiente esté relacionada con $A$.
   **Sol:**
   Dividamos la ecuación por $I_0$,

$$\frac{I}{I_0} = \cos(A\theta)$$

   y aplicando el inverso del coseno,

$$\cos^{-1}\left(\frac{I}{I_0}\right) = A\theta$$

   *b*) ¿Cuáles son las nuevas variables dependiente e independiente y sus respectivas incertidumbres?
   **Sol:**
   De nuevo se tiene una ec. de la forma $y' = mx' + b$ donde la variable dependiente es:

$$y' = \cos^{-1}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{con incertidumbre} \qquad \delta y' = \sqrt{\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 \delta y^2} = \frac{\delta y}{\sqrt{I_0^2 - I^2}}$$

   la independiente:

$$x' = \theta \qquad \text{con incertidumbre} \qquad \delta x' = \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \theta}\right)^2 \delta\theta^2} = \delta\theta$$

   *c*) Si estamos interesados en encontrar el valor de $A$ y su incertidumbre nominal a partir de las mediciones de $I$ y $\theta$, ¿Cuál es la fórmula de propagación correspondiente?
   **Sol:** Igual que en el problema anterior, la incertidumbre nominal de la pendiente ajustada es:

$$\delta m = \chi_N \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

   con

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N}\theta_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}\theta_i\right)^2 \qquad \chi_N = \frac{\sum_{i=1}^{N}[I_i - (A\theta_i)]^2}{\sqrt{N-2}}$$

   donde $N$ es el número total de observaciones $(I_i, \theta_i)$

3. Un láser puede ser aproximado como un haz colimado; sin embargo, en la práctica, hasta los mejores láseres presentan cierto grado de divergencia.

   Consideremos un láser que emite un flujo de $\phi = 5mW$ en un haz con un ángulo de divergencia $\alpha = 1{,}3mrad$. La cavidad del láser está diseñada de forma que tiene una ventana de salida circular con área $\Delta A_s = 2{,}5 \times 10^{-3}cm$.

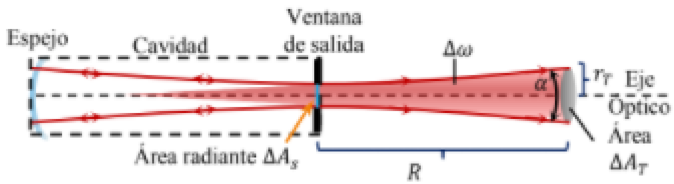


Figura 3.10. Esquema de la emisión de un haz láser.

*a*) Determinar el ángulo sólido $\Delta\omega$ a partir de las variables mostradas en la figura, y calcular su valor. Se puede hacer uso de aproximaciones de ángulo pequeño.

**Sol:**

Otra expresión para el ángulo sólido que depende solamente de en este caso $\alpha$ es:

$$\Delta\omega = 2\pi(1 - \cos(\alpha/2))$$

y suponiendo que $\alpha \ll 1$ y usando la aproximación de segundo orden para coseno,

$$\Delta\omega = 2\pi(\cancel{(1-1)} + \frac{\alpha^2}{4}) = \pi\alpha^2/4 = 1{,}327 \times 10^{-6} sr$$

*b*) Determinar la radiancia de salida del láser en unidades de $\left[\frac{W}{cm^2 sr}\right]$ y la irradiancia que cruza la ventana de salida en $\left[\frac{W}{cm^2}\right]$.

**Sol:** Como la salida del láser se puede aproximar como un haz colimado, entonces la irradiancia se puede escribir como:

$$I = \frac{\Phi}{\Delta\omega \Delta A_s} = 1507159 \frac{W}{cm^2 sr}$$

Al tener un flujo homogéneo, la irradiancia se puede describir solamente por el flujo y el área:

$$I = \frac{\Phi}{\Delta A_s} = \frac{5 \times 10^{-3} W}{2{,}5 \times 10^{-3} cm^2} = 2 \frac{W}{cm^2}$$

*c*) Si se tiene un radiómetro con área circular de $A_F = 5{,}244 mm^2$. ¿Cuál será la distancia máxima desde la ventana de salida en la que el láser pueda ser considerado como haz colimado? Argumentar la respuesta. Pista: Debido a la divergencia del haz desde su ventana de salida, se puede aproximar como proveniente de una fuente puntual detrás de la ventana y que solo emite luz en un ángulo sólido $\Delta\omega$. Considerar la relación de flujo de energía con las distintas áreas involucradas.

**Sol:**

Al ser $A_F$ circular,

$$A_F = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A_f}{\pi}}$$

entonces tenemos un triangulo rectángulo donde el cateto opuesto es $r$, el cateto adyacente es la distancia de la ventana al radiómetro $R$ y el ángulo es $\alpha/2$ y así:

$$\operatorname{tg}\alpha/2 = \frac{r}{R} \quad \rightarrow \quad R = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha/2} = \sqrt{\frac{A_F}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha/2}} = 1988mm$$

4. Suponga que se tiene un radiómetro con un área de $5{,}24mm^2$ a una distancia de $1m$ de una fuente puntual con una potencia de $100W$, calcular lo siguiente:

   *a*) La intensidad radiante total emitida por la fuente.
   **Sol:**
   Suponiendo que se tenga un frente de onda esférico, la intensidad radiante total es:

   $$E = \frac{\Phi}{\Delta\omega} = \frac{\Phi}{\frac{A_S}{R^2}} = \frac{100W}{4\pi\cancel{(R^2/R^2)}}sr \approx 7{,}96\frac{W}{sr}$$

   *b*) La fracción del flujo de radiación que llega al radiómetro.
   Por el inciso anterior,

   $$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = \frac{100}{4\pi}\frac{W}{sr}$$

   $$d\Phi = \frac{100}{4\pi}\frac{W}{sr}d\omega$$

   que integrando,

   $$\Phi = \frac{100}{4r^2\pi}\frac{W}{sr}\iint r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

   y como el area del radiómetro es de $5{,}24 \times 10^{-6}m^2$ y está a una distancia de $1m$,

   $$\Phi = \frac{100}{4(1m)^2\pi}\frac{W}{sr}(5{,}24 \times 10^{-6}m^2) = 4{,}17 \times 10^{-5}W$$

   **Sol:**

   *c*) La irradiancia medida por el fotodiodo en $W/m^2$
   **Sol:**
   Al tenerse una fuente puntual, la irradiancia depende solo del flujo $\Phi$ y área así que:

   $$I = \frac{\Phi}{A} = \frac{4{,}17 \times 10^{-5}W}{5{,}24 \times 10^{-6}m^2} = 7{,}96\frac{W}{m^2}$$

   *d*) Repetir lo anterior cuando el radiómetro está a $2m$ de la fuente.
   **Sol:**
   En este caso el flujo es:

   $$\Phi = \frac{100}{4(2m)^2\pi}\frac{W}{sr}(5{,}24 \times 10^{-6}m^2) = 1{,}04 \times 10^{-5}W$$

   entonces la irradiancia es:

   $$I = \frac{\Phi}{A} = \frac{1{,}04 \times 10^{-5}W}{5{,}24 \times 10^{-6}m^2} = 1{,}98\frac{W}{m^2}$$