1. **Sea** $(V, <,>)$ **e.v.p.i /** C**. Dada** $T \in \mathcal{L}(V)$ **autoadjunto. Demostrar que:**

   a) $\|u + iTu\| = \|u - iTu\| \; \forall u \in V$
   SOLUCIÓN:
   Sea $u \in V$

$$\|u + iTu\|^2 =< u + iTu, u + iTu >$$

   y por propiedades del producto interno

$$\|u + iTu\|^2 =< u, u + iTu > + < iTu, u + iTu >$$

$$=< u, u > + < u, iTu > + < iTu, u > + < iTu, iTu >$$

$$= \|u\|^2 + (-i) < u, Tu > +i < Tu, u > +i(-i)\|Tu\|^2$$

$$= \|u\|^2 - i < T^*u, u > +i < Tu, u > +\|Tu\|^2$$

   por hipótesis T es autoadjunto, entonces

$$\|u + iTu\|^2 = \|u\|^2 \cancel{-i < Tu, u > +i < Tu, u >} + \|Tu\|^2$$

$$= \|u\|^2 + \|Tu\|^2 + i < u, Tu > -i < u, Tu >$$

$$= \|u\|^2 + \|Tu\|^2 + i < u, Tu > -i < T^*u, u >$$

$$= \|u\|^2 + \|Tu\|^2 + i < u, Tu > -i < Tu, u >$$

$$=< u, u > + < -iTu, u > + < u, -iTu > +i(-i) < Tu, Tu >$$

$$=< u - iTu, u - iTu >= \|u - iTu\|^2$$

$$\therefore \|u + iTu\| = \|u - iTu\|$$

$\blacksquare$

   b) $u + iTu = v + iTu \leftrightarrow u = v$
   SOLUCIÓN:
   $\leftarrow$) es inmediato que si $u = v$, entonces $u + iTu = v + iTu$
   $\rightarrow$) $u + iTu = v + iTu \rightarrow u = v + i(Tu - Tu) \rightarrow u = v + i(0) = v$

$$\therefore u + iTu = v + iTu \qquad \leftrightarrow \qquad u = v$$

$\blacksquare$

c) $I + iT$ **es no singular. obs** $T \in \mathcal{L}(V)$ **es no singular**
SOLUCIÓN:
Sea $u, v \in V$. Supongamos que $I + iT$ es singular, entonces $I + iT$ es no invertible, entonces $(I + iT)(u)$no es inyectiva, entonces $\exists u, v \in V$ tal que si $(I + iT)(u) = (I + iT)(v) \to u \neq v$ pero por el inciso b) sabemos que eso es falso, por lo tanto $I + iT$ es no singular

■

d) $I - iT$ **es no singular** $\leftrightarrow \text{Ker}(T) = 0_V$
SOLUCIÓN:
$\to$) si $I - iT$ es no singular, entonces $I - iT$ es invertible, entonces $I - iT$ es inyectiva y es inyectiva $\leftrightarrow \text{Ker}(I - iT) = 0_V$, lo que implica que $\text{Ker}(T) = 0_V$
$\leftarrow$) $\text{Ker}(T) = 0_V \to T(0_v) = 0_v \to iT(0_V) = 0_V \to 0_V - iT(0_V) = 0_V \to (I - iT)(0_V) = 0_V \to \text{Ker}(I - iT) = 0_V \leftrightarrow I - iT$ es inyectiva, entonces $I - iT$ es invertible y por lo tanto $I - iT$ es no singular

■

e) **Sea** V **de dimensión finita. Demostrar que** $U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$ **es un operador unitario, llamado la transformación de Cayley de T**
SOLUCIÓN:
Primero necesitamos demostrar que $((I + iT)^{-1})^* = (I - iT)^{-1}$, así que, sea $u, v \in V$

$$< u, ((I + iT)^{-1})^*(I - iT)v > = < (I + iT)^{-1}u, (I - iT)v >$$

$$= < (I + iT)^{-1}u, (I - iT^*)v > = < (I + iT)^{-1}u, (I + iT)^*v >$$

$$= < \cancel{(I + iT)(I + iT)^{-1}}u, v > = < u, v >$$

ahora si, veamos que U es unitario

$$UU^* = (I - iT)(I + iT)^{-1}((I - iT)(I + iT)^{-1})^*$$

$$= (I - iT)(I + iT)^{-1}(I - iT)^*((I + iT)^{-1})^*$$

$$= (I - iT)\cancel{(I + iT)^{-1}(I + iT)}(I - iT)^{-1}$$

$$= \cancel{(I - iT)(I - iT)^{-1}} = I$$

$$U^*U = ((I - iT)(I + iT)^{-1})^*(I - iT)(I + iT)^{-1}$$

$$= (I - iT)^*((I + iT)^{-1})^*(I - iT)(I + iT)^{-1}$$

$$= (I + iT)\cancel{(I - iT)^{-1}(I - iT)}(I + iT)^{-1}$$

$$= \cancel{(I+iT)(I+iT)^{-1}} = I$$

$\therefore U$ es unitario

■

2. **Sea** $(V, <,>)/\mathbb{K}$ **finito dimensional. Probar**

   a) $H_u : V \to V$ **definido por** $H_u(x) = x - 2 < x, u > u$ **es lineal** $\forall x \in V$
   SOLUCIÖN:
   Para que H_u sea lineal, debemos mostrar que abre sumas y saca escalares, entonces, sea $x, y \in V$ y c un escalar

   $$H_u(x + cy) = (x + cy) - 2 < (x + cy), u > u$$

   que por propiedades del producto interno

   $$H_u(x + cy) := x + cy - 2(< x, u > u + c < y, u > u)$$

   $$= x + cy - 2 < x, u > u - 2c < y, u > u$$

   $$= (x - 2 < x, u > u) + (cy - 2c < y, u > u)$$

   $$= (x - 2 < x, u > u) + c(y - 2 < y, u > u) =: H_u(x) + cH_u(y)$$

   $$\therefore H_u(x) \text{ es lineal } \forall x \in V$$

   ■

   b) $H_u(x) = x \leftrightarrow x \perp u$
   SOLUCIÓN:
   $\rightarrow$) por hipótesis, $H_u(x) := x - 2 < x, u > u = x$, y entonces, $2 < x, u > u = 0_V$, o bien, $< x, u >= 0$ y por lo tanto $x \perp u$
   $\leftarrow$) como $x \perp u \rightarrow < x, u >= 0$, que a su vez se puede escribir como

   $$2 < x, u > u = 0$$

   $$-2 < x, u > u = 0$$

   $$H_u(x) := x - 2 < x, u > u = x$$

   $$\therefore \qquad H_u(x) = x \ \leftrightarrow \ x \perp u$$

   ■

c) $H_u(u) = -u$
SOLUCIÓN:
Supongamos que u es unitario, entonces $(< u, u >= 1)$

$$H_u(u) := u - 2 < u, u > u = u - 2u = -u$$

$\blacksquare$

d) $H_u^* = H_u$ **y** $H_u^2 = I$ ($\therefore H$ **es unitario**)
SOLUCIÓN:
Sea $x, y \in V$

$$< y, H_u(x) >=< y, x - 2 < x, u > u >$$

que por propiedades del producto interno

$$< y, H_u(x) >=< y, x > -2 < y, < x, u > u >$$

$$=< y, x > -2\overline{< x, u >} < y, u >$$

$$=< y, x > -2 < u, x >< y, u >$$

$$< y, x > -2 < y, u >< u, x >$$

$$< y - 2 < y, u > u, x >=< H_u(y), x >=< y, H_u^*(x) >$$

$$\therefore H_u^*(x) = H_u(x)$$

$$H_u^2(x) = H_u(x - 2 < x, u > u)$$

y como H_u es lineal

$$H_u^2(x) = H_u(x) - 2 < x, u > H_u(u)$$

y por el inciso c)

$$H_u^2(x) = (x - 2 < x, u > u) - 2 < x, u > (-u)$$

$$x \cancel{-2 < x, u > u + 2 < x, u > u} = x$$

por lo que H_u^2 es la identidad, de lo demostrado anteriormente, podemos ver que $H_u^2 = H_u H_u^* = H_u^* H_u = I$, o bien H_u es unitario

$\blacksquare$