Determinación de la aceleración de la gravedad Práctica 1

Misael Iván Macías Márquez
misaelmacias@ciencias.unam.mx
Facultad de Ciencias, UNAM

Viernes 25 de Febrero de 2022
Semestre 2022-1

Resumen: Se determinó la aceleración de la gravedad local haciendo uso de un péndulo armado con material casero. Se midió con un cronómetro el tempo de 20 oscilaciones, se utilizó el modelo del péndulo simple y se le aplicó el método de mínimos cuadrados con los datos obtenidos, la gravedad obtenida fue $(9{,}74 \pm 0{,}03) m/s^2$ dando una incertidumbre relativa del 0,3 % y un error comparado con el valor real de 1,7 veces la incertidumbre absoluta que al ser menor a 2 se puede considerar un resultado satisfactorio.

Introducción

Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida de un punto O por una cuerda de longitud l y de masa despreciable, si la masa se lleva a un punto tal que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical y se suelta, esta comenzará a oscilar entre el punto inicial y su simétrico respecto la vertical[1].

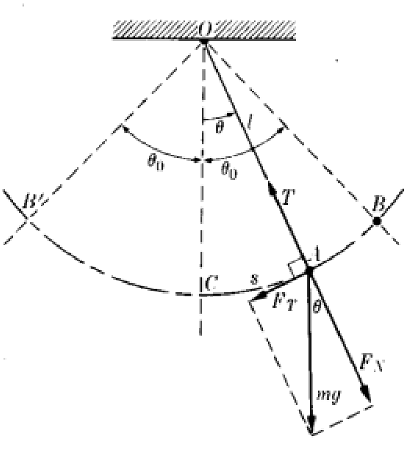

Figura 1: Diagrama péndulo simple [1]

Las fuerzas que actúa sobre la partícula son su peso mg y la tensión T y como se puede ver en la figura (1), la fuerza tangencial es $F_T = -mg \sin\theta$, la ecuación diferencial que describe este fenómeno es[1]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

pero suponiendo que el ángulo θ sea lo suficientemente pequeño para poder aproximar $\sin\theta \approx \theta$, se tiene[1]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2}$$

lo que es muy parecido a la ecuación diferencial para el movimiento armónico simple con $\omega^2 = \frac{g}{l}$ y dado que el período en función de la frecuencia angular es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, entonces $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$, o bien despejando g

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{3}$$

Desarrollo experimental

Como se puede ver en la figura 2, se colocó sobre un soporte metálico de una repisa para pared, sobre el soporte se introdujo una hoja de papel pegada a un pedazo de folder para mantenerse rígida, con ayuda de un transportador se marcaron los ángulos $\pm\theta$, se ajusto el hilo cáñamo sobre el soporte y en el extremo suelto del hilo se sujetó un tornillo de masa m de tal forma que su eje de simetría vertical coincidiera con la vertical del péndulo.

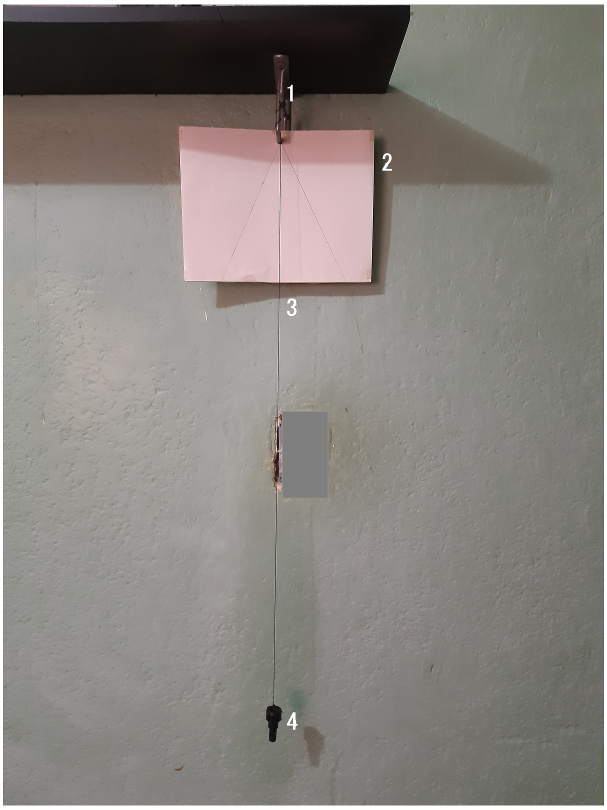

Figura 2: Arreglo Experimental: (1) Soporte de repisa,(2) Papel con marca de ángulos, (3) Hilo cáñamo, (4) Tornillo

Antes de que el péndulo comenzara a oscilar,Primero se midió el tiempo de reacción con el cronómetro, para esto se realizaron 10 intentos de detener el cronómetro justo a los 3 segundos de haberlo iniciado y de estos se tomo el promedio de la diferencia como el tiempo de reacción.

Con una cinta métrica se midió la longitud del hilo desde su origen hasta el centro de masa aproximado del tornillo y después se realizaron 5 mediciones de tiempo para 20 oscilaciones (T) colocando el tornillo en el ángulo θ de lado derecho. Esto se repitió para las longitudes de $0{,}1m$, $0{,}2m$, $0{,}3m$, $0{,}4m$, $0{,}5m$, $0{,}6m$, $0{,}7m$, $0{,}8m$, $0{,}9m$ y $1m$.

Resultados y Análisis

Los valores que tomaron las variables descritas en el desarrollo experimental a excepción de los tiempos, períodos y longitudes (ver Apéndice).

$$\theta = (25 \pm 1)^{\circ}C \qquad m = (76 \pm 1)g$$

Las longitudes de los péndulos se reportaron con una incertidumbre del 5 % debido a problemas de definición tanto del origen del péndulo como del centro de masa del tornillo.

[1]Nótese que el 0 entra en este intervalo

En el caso de los tiempos de reacción (ver apéndice), la incertidumbre absoluta está dada por tanto el tiempo de reacción $\sigma_{def} = 0{,}092s$ y la escala mínima del cronómetro $\sigma_{ap} = 0{,}001s$ por lo que la incertidumbre absoluta es:

$$\delta t = \sqrt{\sigma_{def}^2 + \sigma_{ap}^2} = 0{,}092s$$

y dado que en este tiempo sucedieron 20 periodos, propagando la incertidumbre tenemos que:

$$\delta T = \frac{\delta t}{20} = 0{,}005s$$

Entonces tomando el tiempo promedio para cada péndulo y sumando por cuadraturas cada incertidumbre presente, se llega a que la incertidumbre de los promedios de periodos es $\delta\hat{T} = 0{,}006$.

Para determinar g se linealizó la ecuación (3) de la siguiente forma

$$l = \left(\frac{g}{4\pi^2}\right)\hat{T}^2 \tag{4}$$

por lo que al propagar la incertidumbre de $\hat{T}^2$ tenemos una relativa de 1,2 %, usando el método de mínimos cuadrados se puede determinar la pendiente

$$\frac{g}{4\pi^2}$$

Los datos graficados en la figura 3 se pueden consultar en los apéndices.

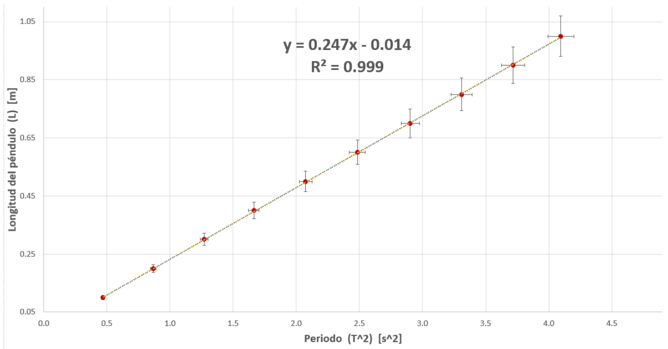

Figura 3: Gráfica del ajuste por mínimos cuadrados y datos de mediciones linealizadas según la ecuación (4)

La pendiente y ordenada al origen resultantes son:

$$m = (0{,}247 \pm 0{,}001)m/s^2$$

$$b = (0{,}014 \pm 0{,}02)^{1}m$$

por lo tanto despejando a g y propagando la incertidumbre,

$$g = 4\pi^2 m$$

$$\delta g = 4\pi^2 \delta m$$

obtenemos un valor para la aceleración de la gravedad de:

$$g = (9{,}74 \pm 0{,}03) m/s^2$$

Conclusiones

El arreglo experimental usado aunque mostró algunas dificultades, considero fue suficiente para tener una buena medición de la aceleración de la gravedad ya que el error del valor real[2] y la medición fue de $0{,}05 m/s^2$ o 1,7 veces la incertidumbre absoluta de g medida, además de tener una incertidumbre relativa de 0,3 %, por lo tanto el resultado es satisfactorio.

Referencias

[1] Alonso, Marcelo y Edward J. Finn. FISICA Vol I: MECANICA. Ciudad de México: Fondo Educativo Interamericano, 1971.

[2] Oda, Berta. Introducción al análisis gráfico de datos experimentales. 3a ed. Ciudad de México: las prensas de ciencias, 2017.

[3] Ramos, R., et al., ESTUDIO GEOESTADÍSTICO PARA OBTENER LA GRAVEDAD LOCAL, PENDIENTE Y CÁLCULO HIDROLÓGICO DE LAS BARRANCAS XALTELULCO, TEPELONCOCONE, TENEPANCO, COLORADA Y QUIMICHULE DEL VOLCÁN POPOCATÉPETL. Puebla, 2012.

Apéndices

Notación

x_i, y_i = mediciones realizadas
N = número de repeticiones
m = pendiente (usada en el método de mínimos cuadrados)
b = ordenada al origen (usada en el método de mínimos cuadrados)
$\hat{x}$ = promedio de mediciones x_i
S_x = desviación estándar para los valores x_i
σ_{est} = incertidumbre estadística
σ_{ap} = incertidumbre de apreciación
σ_{def} = incertidumbre de definición
δ = incertidumbre absoluta (obtenida por suma por cuadraturas de las incertidumbres encontradas)

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2}{N-1}}$$

$$\sigma_{est} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (mx_i + b)]$$

$$\chi_N = \sqrt{\frac{\chi^2}{N-2}}$$

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2$$

Tiempos de reacción

tiempo de reacción [s]	diferencia [s]
3.010	0.010
3.021	0.021
2.770	0.230
3.094	0.094
2.825	0.175
2.976	0.024
3.118	0.118
3.103	0.103
2.905	0.095
3.024	0.024

$\hat{x} = 0{,}089s \quad S_x = 0{,}073 \quad \sigma_{est} = 0{,}023 \quad \delta = 0{,}092$

Tabla 1: Tiempos Medidos

tiempo (t) ± 0.089 [s] 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
40.418	2.021
40.442	2.022
40.427	2.021
40.593	2.030
40.477	2.024

Tabla 2: péndulo de $(1 \pm 0{,}05)m$

$\hat{T} = 2{,}024s \quad S_T = 0{,}004s \quad \sigma_{est} = 0{,}002s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

[2]Calculado con la ecuación (4) presente en [3] usando datos recabados en Google Maps

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
38.555	1.928
38.395	1.920
38.545	1.927
38.633	1.932
38.694	1.935

Tabla 3: péndulo de $(0{,}9 \pm 0{,}045)m$

$\hat{T} = 1{,}928s \quad S_T = 0{,}006s \quad \sigma_{est} = 0{,}003s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
36.361	1.808
36.450	1.823
36.239	1.812
36.467	1.823
36.407	1.820

Tabla 4: péndulo de $(0{,}8 \pm 0{,}04)m$

$\hat{T} = 1{,}819s \quad S_T = 0{,}005s \quad \sigma_{est} = 0{,}002s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
34.192	1.710
34.088	1.704
33.925	1.696
34.119	1.706
34.020	1.701

Tabla 5: péndulo de $(0{,}7 \pm 0{,}035)m$

$\hat{T} = 1{,}703s \quad S_T = 0{,}005s \quad \sigma_{est} = 0{,}002s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
31.496	1.575
31.450	1.573
31.559	1.578
31.603	1.580
31.477	1.574

Tabla 6: péndulo de $(0{,}6 \pm 0{,}03)m$

$\hat{T} = 1{,}576s \quad S_T = 0{,}003s \quad \sigma_{est} = 0{,}001s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
28.718	1.436
28.873	1.444
28.807	1.440
28.905	1.445
28.723	1.436

Tabla 6: péndulo de $(0{,}5 \pm 0{,}25)m$

$\hat{T} = 1{,}440s \quad S_T = 0{,}004s \quad \sigma_{est} = 0{,}002s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
25.785	1.289
25.901	1.295
25.928	1.296
25.708	1.285
25.671	1.284

Tabla 7: péndulo de $(0{,}4 \pm 0{,}02)m$

$\hat{T} = 1{,}290s \quad S_T = 0{,}006s \quad \sigma_{est} = 0{,}003s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
22.588	1.129
22.561	1.128
22.482	1.124
22.493	1.125
22.610	1.131

Tabla 8: péndulo de $(0{,}3 \pm 0{,}015)m$

$\hat{T} = 1{,}127s \quad S_T = 0{,}003s \quad \sigma_{est} = 0{,}001s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
18.525	0.926
18.631	0.932
18.726	0.936
18.628	0.931
18.661	0.933

Tabla 9: péndulo de $(0{,}2 \pm 0{,}01)m$

$\hat{T} = 0{,}932s \quad S_T = 0{,}004s \quad \sigma_{est} = 0{,}002s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

tiempo (t) $\pm 0{,}089[s]$ 20 oscilaciones	período (T) $\pm 0{,}005[s]$
13.549	0.677
13.621	0.681
13.774	0.689
13.797	0.690
13.825	0.691

Tabla 10: péndulo de $(0{,}1 \pm 0{,}005)m$

$\hat{T} = 0{,}686s \quad S_T = 0{,}006s \quad \sigma_{est} = 0{,}003s \quad \sigma_{ap} = 0{,}001s$

Ajuste por Mínimos Cuadrados

Al linealizar los datos tenemos que los puntos a ajustar son:

período $[\mathrm{T}^2] \pm 1{,}2\,\%[s^2]$	longitud (l) $\pm 5\,\%[m]$
4,095	0,1
3,718	0,2
3,310	0,3
2,902	0,4
2,483	0,5
2,074	0,6
1,664	0,7
1,271	0,8
0,868	0,9
0,470	1

tabla 11: puntos ajustados por mínimos cuadrados

El ajuste de este método se puede realizar fácilmente en Excel usando el comando 'ESTIMACION.LINEAL()' aunque las formulas y sus correspondientes incertidumbres [2] se muestran a continuación:

$$m = \frac{N\sum T_i^2 l_i - \sum T_i^2 \sum l_i^2}{N\sum (T_i^2)^2 - (\sum T_i^2)^2}$$

$$b = \frac{\sum (T_i^2)^2 \sum l_i - \sum T_i^2 \sum T_i^2 l_i}{N\sum (T_i^2)^2 - (\sum T_i^2)^2}$$

con incertidumbres

$$\delta m = \chi_N \sqrt{\frac{\sum (T_i^2)^2}{\Delta}}$$

$$\delta b = \chi_N \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Calculo del valor real de la aceleración de gravedad Local

La ecuación que nos permite conocer de forma precisa (con una incertidumbre relativa del 0,1 %) la aceleración de la gravedad según la latitud y altitud es [3]:

$$g = g_e(1 + f_1 \sin^2\theta + f_2 \sin^2(2\theta)) - 3{,}086 \times 10^{-6} h \quad (5)$$

donde

- g_e es la gravedad en el ecuador ($9{,}780318 m/s^2$)
- f_1 es el aplastamiento gravitacional (0,005302)
- θ es la latitud en grados (19,28°)
- f_2 (0,000006)
- h es la altitud sobre el nivel del mar en metros (2230)

por lo que sustituyendo obtenemos una gravedad local de:

$$g = (9{,}79 \pm 0{,}01) m/s^2$$