1. En una distribución tipo Maxwell la fracción de partículas moviéndose con velocidad v y $v + dv$ es

$$\frac{dN}{N} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} exp(-\frac{mv^2}{2kT})v^2 dv \tag{1}$$

donde N es el número total de partículas. El promedio o valor esperado de v^n se define como $< v^n >= N^{-1} \int v^n dN$ Demuestre que :

$$< v^n >= (\frac{2kT}{m})^{\frac{n}{2}} \frac{(\frac{n+1}{2})!}{(\frac{1}{2})!}$$

de la ec. (1)

$$N^{-1} = \frac{4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} exp(-\frac{mv^2}{2kT})v^2 dv}{dN}$$

así, sustituyendo

$$< v^n >= \frac{4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} exp(-\frac{mv^2}{2kT})v^2 dv}{dN} \int v^n dN$$

si reordenamos y tratamos diferenciales como fracciones xd

$$< v^n >= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int exp(-\frac{mv^2}{2kT})v^{n+2} dv$$

ahora usemos cambio de variable para resolver esa integral

Sea $u^2 = \frac{mv^2}{2kT}$ y $\cancel{2}udu = \cancel{2}\frac{mv}{2kT}dv$, $du = \frac{m}{2kT}dv$, entonces

$$< v^n >= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{m}{2kT})^{-(n+1)} \int e^{-u^2} u^{n+2} du$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} ((\frac{m}{2kT})^{-(n+1)})^{\frac{2}{2}} \int e^{-u^2} u^{n+2} du = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{m}{2kT})^{-(n+3)/2} \int e^{-u^2} u^{n+2} du$$

haciendo otro cambio de variable, $x = u^2$, $dx = 2udu$

$$< v^n >= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{m}{2kT})^{-(n+3)/2} \int e^{-u^2} u^{n+2} du = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{m}{2kT})^{-(n+3)/2} \frac{1}{2} \int e^{-x} x^{(n+1)/2} dx$$

$$= 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{m}{2kT})^{-(n+3)/2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{n+3}{2})$$

$$= 2\pi(\frac{2kT}{m})^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+3}{2})$$

2. Se muestra en la figura (1) parte de una cicloide cuyas ecuaciones parametrícas son:

$$x = a(\theta + sen\theta)$$

$$y = a(1 - cos\theta)$$

Demuestre que el tiempo que tarda una partícula para desliarse sin fricción a lo largo de la curva desde el punto (x_1, y_1) hasta el origen, está dado por

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}}$$

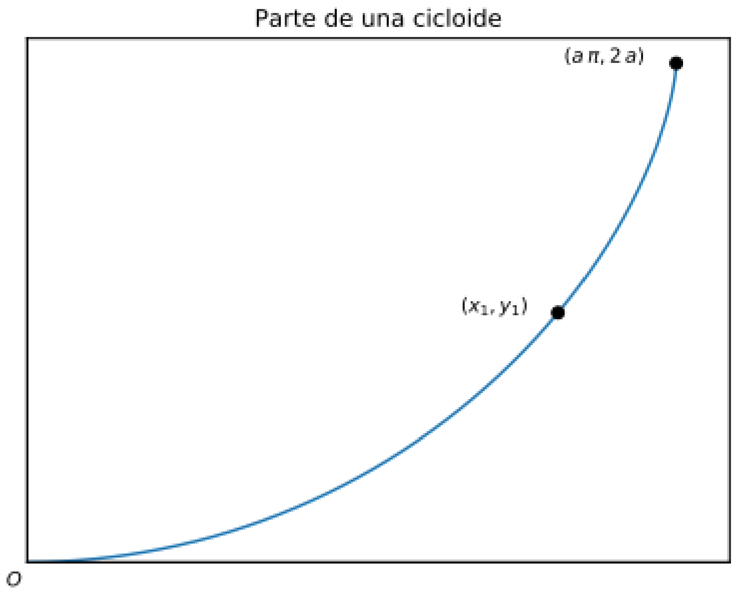

Figura 1

Sugerencia: Duemuetra que la longitud del elemento de arco es

$$ds = \sqrt{\frac{2a}{y}} dy$$

Evalúa la integral para demostrar que el tiempo es independiente de la posición inicial y_1

$$\frac{ds}{dt}^2 = \frac{dx}{d\theta}^2 + \frac{dy}{d\theta}^2 = (a + a\cos\theta)^2 + (a\,\text{sen}\,\theta)^2$$

$$= a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta + a^2\,\text{sen}^2\,\theta = a^2(1 + 2\cos\theta + (\cancel{\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta}))$$

$$= a^2(2 + 2\cos\theta) = 2a^2(1 + \cos\theta)$$

$$ds = \sqrt{2a^2(1 + \cos\theta)} = \sqrt{\frac{2a^2(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{1 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos^2\theta)}{1 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2a^3\,\text{sen}^2\,\theta}{a(1 - \cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{a(1-\cos\theta)}} a \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{2a}{y}} dy$$

$$\cancel{m} g(y_1 - y) = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2}$$

$$v = \sqrt{2g(y_1 - y)} = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} = \frac{\sqrt{\frac{2a}{y}} dy}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}gy(y_1 - y)}} dy$$

$$= \sqrt{\frac{a}{y}} \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}}$$

$$\int dt = \int_0^{y_1} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{y_1} \frac{a \operatorname{sen}\theta d\theta}{\sqrt{a(1-\cos\theta)(y_1 - a(1-\cos\theta))}}$$

$$=$$