1. **Sea** $(V, <, >)$ **con** $x, y \in V$ **dados, definimos** $T : V \to V$ $T(v) =< v, x > y$

   a) **Probar que** $T \in \mathcal{L}(V)$
   SOLUCIÓN:
   Dado que $\mathcal{L}(V)$ es el espacio de transformaciones lineales de V a V, entonces debemos demostrar que T es una transformación lineal:
   Sea $v, w \in V$ y $c \in K$

   $$T(v + w) :=< v + w, x > y$$

   $$T(cv) :=< cv, x > y$$

   y por propiedades del producto interno

   $$T(v + w) := (< v, x > + < w, x >)y =< v, x > y+ < w, x > y =: T(v) + T(w)$$

   $$T(cv) := c(< v, x > y) =: cT(v)$$

   y así T es una transformación lineal en V y por lo tanto $T \in \mathcal{L}(V)$ ■

   b) **Demostrar que** $\exists T^* \in \mathcal{L}(V)$ **y dar explícitamente a** T^*
   SOLUCIÓN:
   Por el teorema 6.9 del Friedberg podemos asegurar que existe la transformación lineal de V a V T^* ■
   Tambien nos puede ayudar a encontrar explicitamente T^*, entonces

   $$< T(v), w >=< v, T^*(w) >$$

   y por definición

   $$<< v, x > y, w >=< v, T^*(w) >$$

   ahora como el producto interno saca escalares

   $$< v, x >< y, w >=< v, T^*(w) >$$

   y también los mete en el segundo término pero conjugados

   $$< v, \overline{< y, w >}x >=< v, T^*(w) >$$

   $$\therefore T^*(w) = \overline{< y, w >}x$$

2. **Sean** $(V, <, >)$ **e.v.p.i finito dimensional, dado** $T \in \mathcal{L}(V)$**. Probar que**

a) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Img}(T)^{\perp}$
SOLUCIÓN:
Sea $v, w \in V$, por el teorema 6.9 se tiene que

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >$$

ahora. supongamos que $w \in Ker(T^*)$, entonces

$$< v, T^*(w) >=< v, 0_V >$$

y por propiedades del producto interior

$$< v, T^*(w) >= 0$$

pero entonces por el teorema 6.9

$$< T(v), w >= 0$$

y así, por definición, $w \in \mathrm{Img}(T)^{\perp}$, o bien $\mathrm{Ker}(T^*) \subset \mathrm{Img}(T)^{\perp}$
ahora, supongamos que $w \in \mathrm{Img}(T)^{\perp}$, entonces, por definición

$$< T(v), w >= 0$$

pero por el teorema 6.9

$$< v, T^*(w) >= 0$$

y como v es arbitrario,necesariamente $T^*(w) = 0_V$, o bien $\mathrm{Img}(T)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(T^*)$

$$\therefore \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Img}(T)^{\perp}$$

■

b) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Img}(T^*)^{\perp}$
SOLUCIÓN:
Sea $v, w \in V$, por el teorema 6.9 se tiene que

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >$$

ahora. supongamos que $v \in Ker(T)$, entonces

$$< T(v), w >=< 0_V, w >$$

y por propiedades del producto interior

$$< T(v), w >= 0$$

pero entonces por el teorema 6.9

$$< v, T^*(w) >= 0$$

y así, por definición, $v \in \text{Img}(T^*)^\perp$, o bien $\text{Ker}(T) \subset \text{Img}(T^*)^\perp$
ahora, supongamos que $v \in \text{Img}(T^*)^\perp$, entonces, por definición

$$< v, T^*(w) >= 0$$

pero por el teorema 6.9

$$< T(v), w >= 0$$

y como w es arbitrario,necesariamente $T(v) = 0_V$, o bien $\text{Img}(T^{*\perp}) \subset \text{Ker}(T)$

$$\therefore \text{Ker}(T) = \text{Img}(T^*)^\perp$$

■

c) $\text{Img}(T) = \text{Ker}(T^*)^\perp$
SOLUCIÓN:
Sea $v, w \in V$, por el teorema 6.9 se tiene que

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >$$

ahora, supongamos que $w \in \text{Ker}(T^*)$, entonces por el teorema 6.9

$$< v, T^*(w) >=< v, 0_V >=< T(v), w >$$

y por propiedades del producto interior

$$< T(v), w >= 0$$

entonces $w \in \text{Img}(T)^\perp$, o bien $\text{Ker}(T^*) \subset \text{Img}(T)^\perp \to \text{Ker}(T^*)^\perp \subset \text{Img}(T)$
ahora, supongamos que $w \in \text{Img}(T)^\perp$, entonces por el teorema 6.9

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >= 0$$

y como v es arbitrario, entonces $T^*(w) = 0$, lo que significa $w \in \text{Ker}(T^*)$
o bien $\text{Img}(T)^\perp \subset \text{Ker}(T^*) \to \text{Img}(T) \subset \text{Ker}(T^*)^\perp$

$$\therefore \text{Img}(T) = \text{Ker}(T^*)^\perp$$

■

d) $\text{Img}(T^*) = \text{Ker}(T)^\perp$
SOLUCIÓN:
Sea $v, w \in V$, por el teorema 6.9 se tiene que

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >$$

ahora. supongamos que $w \in Ker(T)$, entonces por el teorema 6.9

$$< T(v), w >=< v, T^*(w) >= 0$$

entonces, $v \in \mathrm{Img}(T^*)^{\perp}$, o bien
$\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Img}(T^*)^{\perp} \rightarrow \mathrm{Ker}(T)^{\perp} \subset (\mathrm{Img}(T^*)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Img}(T^*)$
ahora, supongamos que $v \in \mathrm{Img}(T^*)^{\perp}$, entonces por el teorama 6.9

$$< v, T^*(w) >=< T(v), w >= 0$$

y como w es arbitrario, entonces $T(v) = 0$, lo que significa $v \in \mathrm{Ker}(T)$,o bien
$\mathrm{Img}(T^*)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(T) \rightarrow \mathrm{Img}(T^*) \subset \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$

$$\therefore \mathrm{Img}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$$

$\blacksquare$