Macías Márquez Misael Iván

1. Antes de publicar la ecuación que lleva su nombre, Schrodinger consideró la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi$$

para describir una partícula de masa m. Muestre que la energía asociada a una solución de tipo onda plana de esta ecuación es consistente con la relación de dispersión para una partícula relativista

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

Sol:

Primero desarrollemos la ecuación para una partícula de masa m

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\Psi$$

$$(i\hbar)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = (i\hbar c)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + (-i^2)\frac{\cancel{\hbar^2}m^2c^4}{\cancel{\hbar^2}}\Psi$$

$$(i\hbar)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = (i\hbar c)^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + m^2c^4\Psi$$

ahora la solución para una onda plana está descrita como

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

por lo tanto

$$(i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = (i\hbar c)^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} + m^2c^4\Psi$$

$$(i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\Psi\tilde{(p)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}) = (i\hbar c)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}) + m^2c^4\Psi$$

$$(i\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)\left(\frac{i^2E^2}{\hbar^2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = (i\hbar c)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)\left(\frac{i^2p^2}{\hbar^2}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}+m^2c^4\Psi$$

$$\cancel{(i\hbar)^2\left(\frac{i^2}{\hbar^2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)E^2e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = \cancel{(i\hbar)^2\left(\frac{i^2}{\hbar^2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)p^2c^2e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}+m^2c^4\Psi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)E^2e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)p^2c^2e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)m^2c^4e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)E^2e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\tilde{\Psi}(p)(p^2c^2+m^2c^4)e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

$$\therefore E^2 = p^2c^2+m^2c^4$$

por lo que la energía asociada es consistente con la relación de dispersión relativista

2. Suponga que $\psi(x,t)$ es una solución de la ecuación de Schrodinger libre en una dimensión, tal que

$$\psi(x,0) = Ae^{x^2/2a^2}$$

con A y a constantes reales

a) Encuentre $\tilde{\psi}(k,0)$
Sol:

$$\tilde{\psi}(k,0) = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi(x,0)e^{ikx} = A\left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{(x^2/2a^2)+ikx}$$

$$= A\left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}e^{2a^2k^2}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{(1/2a^2)(x^2+4a^2ikx+4a^4i^2k^2)} = A\left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}e^{2a^2k^2}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{(1/2a^2)(x+2a^2ik)^2}$$

si hacemos el cambio de variable $\sqrt{2}az = x+2a^2ik$ y por la integral de Gauss

$$\tilde{\psi}(k,0) = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/2}Aae^{2a^2k^2}\int_{-\infty}^{\infty}dze^{z^2} = \left(\frac{\hbar}{\pi}\right)^{1/2}Aae^{2a^2k^2}\sqrt{\pi} = Aa\sqrt{\hbar}e^{2a^2k^2}$$

b) Encuentre $\tilde{\psi}(k,t)$
Sol:

$$\tilde{\psi}(k,t) = \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi(x,0)e^{ikx}e^{-i\omega t}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2}Ae^{i\omega t+a^2k^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{(1/2a^2)(x^2+2a^2ikx+a^4i^2k^2)}$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^{1/2} Ae^{i\omega t + a^2k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{(1/2a^2)(x+a^2ik)^2}$$

sea $\sqrt{2}az = x + a^2ik$

$$= \left(\frac{a^2\hbar}{\pi}\right)^{1/2} Ae^{i\omega t + a^2k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{z^2} = \left(\frac{a^2\hbar}{\pi}\right)^{1/2} Ae^{i\omega t + a^2k^2/2}\sqrt{\pi}$$

$$= \left(a^2\hbar\right)^{1/2} Ae^{i\omega t + a^2k^2/2}$$

c) Encuentre $\psi(x,t)$

Sol:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{\psi}(k,0)e^{-ikx}e^{-i\omega t}$$

y usando $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Aa \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{2a^2k^2 - ikx} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Aae^{x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})(k^2(2ikx/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})) + i^2x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Aae^{-i\omega t} e^{x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{(2a^2)(x - (ik/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})))^2}$$

y usando $z = \sqrt{2}a(x - ik/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m}))$

$$\psi(x,t) = -\frac{(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})}{2i\sqrt{\pi}} Ae^{(x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{z^2} = -\frac{(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})}{2i\sqrt{\pi}} Ae^{(x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2)}\sqrt{\pi}$$

$$= -\frac{(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})}{2i} Ae^{(x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2)} = (\frac{\hbar t}{4m} + ia^2) Ae^{(x^2/(2a^2 - \frac{i\hbar t}{2m})^2)}$$

d) Encuentre el valor de A para que la función $\psi(x,t)$ esté normalizada, es decir, para que se satisfaga la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x,t)|^2 = 1$$

Sol:

sea $a_1 = 4a^2 - \frac{\hbar^2t^2}{4m^2} + i\frac{\hbar t}{m}$ y $a_2 = |a_1|^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\hbar At}{4m}\right)^2 e^{2x^2a_1/a_2} = \left(\frac{\hbar At}{4m}\right)^2 \sqrt{\frac{a_2}{2a_1}}\sqrt{\pi} = 1$$

$$\therefore \qquad A = \left(\frac{2a_1}{a_2\pi}\right)^{1/4} \frac{4m}{\hbar t}$$

sé que estoy mal pero no me dio tiempo de encontrar el error :C

3. Muestre que dadas dos soluciones normalizables, generales en lo demás, de la ecuación de Schrodinger en una dimensión, $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$, se cumple

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t) = 0$$

Sol:

Como son soluciones de la ecuación de Schrodinger, se debe cumplir

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^*(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1^*(x,t) + V\Psi_1^*(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2(x,t) + V\Psi_2(x,t)$$

ahora desarrollando la integral

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi_1^*(x,t)\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_2(x,t))$$

y sustituyendo

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx(\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1^*(x,t) - \frac{V}{i\hbar}\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi_1^*(x,t)(-\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_2(x,t) + \frac{V}{i\hbar}\Psi_2^*(x,t))$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_2(x,t))\Psi_1^*(x,t)\right)\right.$$

$$\left. + \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} dxV\Psi_2(x,t)\Psi_1^*(x,t) - V\Psi_2(x,t)\Psi_1^*(x,t)}\right]$$

ahora sustituyendo lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_2(x,t))\Psi_1^*(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_2(x,t))\Psi_1^*(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_1^*$$

se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi_1^*(x,t)\Psi_2(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left((\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_1^*(x,t))\Psi_2(x,t)) - \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_2)\Psi_2(x,t\right.$$

$$-(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_2(x,t))\Psi_1^*(x,t)) - \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_1^*)\Psi_1^*(x,t)\Big)$$

y de aquí ya no supe como seguir

4. Muestre que dadas dos soluciones de la ecuación de Schrodinger, $\Psi_1(\overline{x},t)$ y $\Psi_2(\overline{x},t)$, la relación

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^*\Psi_2 + \frac{\hbar}{2mi}\nabla\cdot(\Psi_1^*\Psi_2 - \Psi_2\nabla\Psi_1^*) = 0$$

se satisface

Sol:

Como Ψ_1 y Ψ_2 son soluciones, se debe tener que

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_1^* + V\Psi_1^* \tag{1}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi_2 + V\Psi_2 \tag{2}$$

ahora multiplicando (1) por Ψ_2 y (2) por Ψ_1^* y restando ambas

$$i\hbar\Psi_1^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2 + i\hbar\Psi_2\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_1^*\nabla^2\Psi_2\cancel{+V\Psi_1^*\Psi_2} + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi_2\nabla^2\Psi_1^*\cancel{-V\Psi_2\Psi_1^*}$$

que factorizando y por regla de la cadena es

$$i\cancel{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*\Psi_2) = -\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m}(\Psi_1^*\nabla^2\Psi_2 - \Psi_2\nabla^2\Psi_1^*) \tag{3}$$

por regla de la cadena para el producto punto se tiene

$$\Psi_1^*\nabla^2\Psi_2 = \Psi_1^*\nabla^2\Psi_2 + (\nabla\Psi_1^*)\cdot(\nabla\Psi_2) - (\nabla\Psi_1^*)\cdot(\nabla\Psi_2)$$

$$= \nabla\cdot(\Psi_1^*\nabla\Psi_2) - (\nabla\Psi_1^*)\cdot(\nabla\Psi_2)$$

$$\Psi_2\nabla^2\Psi_1^* = \nabla\cdot(\Psi_2\nabla\Psi_1^*) - (\nabla\Psi_2)\cdot(\nabla\Psi_1^*)$$

por lo tanto (1) queda como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*\Psi_2) = -\frac{\hbar}{2m}(\nabla\cdot(\Psi_1^*\nabla\Psi_2)\cancel{-(\nabla\Psi_1^*)\cdot(\nabla\Psi_2)} - \nabla\cdot(\Psi_2\nabla\Psi_1^*)\cancel{+(\nabla\Psi_2)\cdot(\nabla\Psi_1^*)})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*\Psi_2) = -\frac{\hbar}{2im}\nabla\cdot(\Psi_1^*\nabla\Psi_2 - \Psi_2\nabla\Psi_1^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1^*\Psi_2) + \frac{\hbar}{2im}\nabla\cdot(\Psi_1^*\nabla\Psi_2 - \Psi_2\nabla\Psi_1^*) = 0$$

5. Dada la solución a la ecuación de Schrodinger en una dimensión $\psi(x,t)$, muestre que la probabilidad definida

$$P(a,b) = \int_a^b dx \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

con $a < b$ reales, es una cantidad que en general no se conserva. Escriba una expresión para $\frac{d}{dt}P(a,b)$ en términos de la corriente de probabilidad

Sol:

$$\frac{d}{dt}P(a,b) = \frac{d}{dt}\int_a^b dx\psi^*(x,t)\psi(x,t) = \int_a^b dx\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}\psi(x,t) + \int_a^b dx\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \quad (4)$$

ahora como ψ es solución de la ec. de libre entonces se debe satisfacer

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x,t)$$

y sustituyendo en (4)

$$\frac{d}{dt}P(a,b) = \int_a^b dx\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi^*(x,t))\psi(x,t) - \int_a^b dx\psi^*(x,t)\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi(x,t))$$

por la regla del producto se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)) = \frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) + \psi^*(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t) + \psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x,t)$$

que sustituyendo nuevamente

$$\frac{d}{dt}P(a,b) = \frac{\hbar}{2im}\left[\int_a^b dx(\frac{\partial}{\partial x}(\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)) - \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}}\psi^*(x,t))\right.$$

$$\left. - \int_a^b dx(\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)) - \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,t))\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\int_a^b dx\left((\frac{\partial}{\partial x}(\psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)) - \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t))\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \left(\psi(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \psi^*(x,t)) - \psi^*(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \right) |_a^b$$

como esta expresi'on no se anula para cualquier solución de la ecuación de Schrodinger evaluada de $-\infty$ a ∞ entonces

$$\frac{d}{dt} P(a,b) \neq 0$$