Macías Márquez Misael Iván

1. Una partícula se mueve en el plano xy bajo la acción de un campo de energía potencial

$$U(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V & x > 0 \end{cases}$$

   a) Determine al menos dos constantes de movimiento. Argumente su respuesta.
   Sol:
   Dadas las condiciones de nuestro sistema, su lagrangiano es

$$L_{<0} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

   Para $x < 0$ y

$$L_{>0} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V$$

   Para $x > 0$
   Entonces por el ejemplo 2 de la presentación del tema 5 y como ninguna de las lagrangianas depende explícitamente de t, se tiene que su hamiltoniano H es una constante de movimiento.
   Ahora como L tiene simetría de traslación $(L(x+s, y+s, (\dot{x+s}), (\dot{y+s}))) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ para los 2 casos, por el teorema de Noether la cantidad de movimiento total se conserva para toda x.

   b) Si en $t = t_0$ la partícula se encontraba en $(-a, 0)$ y en el $t = t_0 + \tau$, en (a, a), encuentre la posición de la partícula como función del tiempo t
   Sol:
   Aplicando las ecs. de Lagrange a los lagrangianos, llegamos a que

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \dot{x} = \alpha \qquad \dot{y} = \alpha'$$

   con α y α' constantes, que integrando

$$x = \alpha t + c \qquad\qquad y = \alpha' t + c'$$

   y si aplicamos lasa condiciones de los extremos t_0 y $t_0 + \tau$ llegamos a que

$$\alpha = \frac{2a}{\tau} \qquad\qquad \alpha' = \frac{a}{\tau}$$

$$c = -a(1 + \frac{2t_0}{\tau}) \qquad\qquad c' = -\frac{at_0}{\tau}$$

   por lo tanto la posición de la partícula en el tiempo t es

$$x = \frac{2at}{\tau} - a(1 + \frac{2t_0}{\tau})$$

$$y = \frac{at}{\tau} - \frac{at_0}{\tau}$$

2. El lagrangiano de un sistema está dado por

$$L = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + bxy + cy^2)$$

donde m, k son constantes positivas y a, b, c son constantes arbitrarias que están sometidas a la condición $b^2 - ac = 0$.

a) ¿Cuales son las ecuaciones de movimiento?

Sol:

Sustituyendo en la lagrangiana en las ecs. de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(2a\dot{x} + b\dot{y})\right) + \frac{k}{2}(2ax + by) = 0$$

$$(2a\ddot{x} + b\ddot{y}) + \frac{k}{m}(2ax + by) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(2c\dot{y} + b\dot{x})\right) + \frac{k}{2}(2cy + bx) = 0$$

$$(2c\ddot{y} + b\ddot{x}) + \frac{k}{m}(2cy + bx) = 0$$

b) Encuentre una transformación de coordenadas, $x = x(\tilde{x}, \tilde{y})$, $y = y(\tilde{x}, \tilde{y})$, tal que las ecuaciones de movimiento resulten desacopladas en las nuevas coordenadas $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$. ¿Cual es el significado físico de la condición $b^2 - ac = 0$?

Sol:

Sea $\tilde{x} = 2ax + by$ y $\tilde{y} = 2cy + bx$, entonces las ecs. de movimiento son

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0$$

$$\ddot{\tilde{y}} + \frac{k}{m}\tilde{y} = 0$$

la transformación de punto se puede ver como

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que tiene solución si $b^2 - 4ac \neq 0$

c) ¿Qué sistema físico puede ser descrito por este lagrangiano?
Sol:
2 osciladores armónicos distintos

3. Una particula se mueve bajo la acción de la gravedad sobre la cicloide

$$x = a(u + \sin u)$$

$$y = a(1 - \cos u)$$

con $-\pi < u < \pi$, x es la coordenada horizontal y y la vertical

a) Halle el lagrangiano L
Sol:
Sabemos que la lagrangiana se describe como $L = K - U$ con K la energía cinética y U energía potencial, como nuestro sistema se compone de una particula bajo la acción de la gravedad, tenemos que

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

que sustituyendo

$$L = \frac{1}{2}m(a^2(1+\cos u)^2\dot{u}^2 + a^2\sin^2 u\dot{u}^2) - mga(1 - \cos u)$$

$$= \frac{1}{2}a^2m\dot{u}^2(\cancel{(\cos u^2 + \sin^2 u)} + 2\cos u + 1) - mga(1 - \cos u)$$

$$= ma^2(\cancel{\frac{2}{2}}\dot{u}^2(\cos u + 1) - \frac{g}{a}(1 - \cos u))$$

$$L(u, \dot{u}) = ma^2(\cos u(\dot{u}^2 + \frac{g}{a}) + \dot{u}^2 - \frac{g}{a})$$

b) Escriba la ecuación de Lagrange
Sol:
Ahora para la ec. de Lagrange para $L(u, \dot{u})$ es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

y sustituyendo el lagrangiano obtenido en a)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 2ma^2\dot{u}(\cos u + 1) \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = 2ma^2\ddot{u}(\cos u + 1) - 2ma^2\dot{u}^2\sin u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -ma^2\sin u(\dot{u}^2 + \frac{g}{a})$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 2ma^2\ddot{u}(\cos u + 1) - 2ma^2\dot{u}^2 \sin u + ma^2 \sin u(\dot{u}^2 + \frac{g}{a})$$

$$= ma^2(2\ddot{u}(\cos u + 1) - \dot{u}^2 \sin u + \frac{g}{a}\sin u) = 0$$

o bien

$$2\ddot{u}(\cos u + 1) - \dot{u}^2 \sin u + \frac{g}{a}\sin u = 0$$

c) Calcule el hamiltoniano H y argumente por qué H es una constante de movimiento

Sol:

La expresión del hamiltoniano para $L(u, \dot{u})$ es

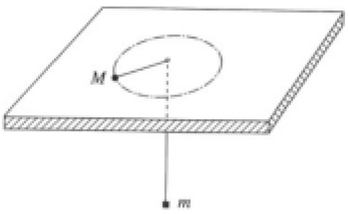
$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\dot{u} - L$$

$$= \cancel{2}ma^2\dot{u}^2(\cos u + 1) - ma^2(\cos u(\cancel{\dot{u}^2} + \frac{g}{a}) + \cancel{\dot{u}^2} - \frac{g}{a})$$

$$H(u, \dot{u}) = ma^2(\dot{u}^2(\cos u + 1) - \frac{g}{a}(\cos u - 1))$$

ahora como vimos en el ejemplo 2 de la presentación de teorema de conservación, si L no depende explícitamente de t entonces su hamiltoniano es una cantidad conservada por lo que el hamiltoniano anterior debe ser una cantidad conservada.

4. Dos partículas de masa m y M están unidas por un hilo que pasa por un agujero practicado en una mesa, tal que M está restringida a moverse (sin fricción) sobre la superficie horizontal de la mes, mientras m cuelga del hilo y sólo se mueve a lo largo de una recta vertical, como se ilustra en la figura. La gravedad actúa en dirección vertical.



a) ¿Cuantos grados de libertad tiene el sistema?¿Cual serian un conjunto de coordenadas generalizadas?

Sol:

Primero coloquemos nuestro origen sobre el agujero, como tenemos 2 partículas y 4 restricciones holonómicas ($z_M = 0$, $x_m = y_m = 0$ y $v_M = -v_m$) entonces los grados de libertad son $f = 3(2) - 4 = 2$.

Un conjunto de coordenadas generalizadas útiles para este problema son las polares (θ, r)

b) Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange del sistema

Sol:

Sea a la longitud del hilo, r la longitud de la masa M al agujero y z la distancia de la masa m al agujero ($a = r + z$), entonces en coordenadas polares/cilíndricas en cartesianas se tiene que

$$x_M = r\cos\theta \qquad\qquad y_M = r\sin\theta$$

$$z_m = -z = (r - a)$$

entonces el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{x}_m^2} + \cancel{\dot{y}_m^2} + \dot{z}_m^2) + \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \cancel{\dot{z}_M^2}) - mg(a - r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M((\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta})^2) - mg(a - r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M((\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mg(a - r)$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(m + M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - mg(a - r)$$

que sustituyendo en las ecs. de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left((m + M)\dot{r}\right) - Mr\dot{\theta}^2 + mg = 0$$

$$(m + M)\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + mg = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

c) ¿Existe alguna coordenada cíclica? En caso que su respuesta sea afirmativa, diga la cantidad correspondiente que se conserva y significado físico

Sol:

Como L no depende de θ, entonces $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ por lo que θ es una variable cíclica, esto también nos dice que $Mr^2\dot{\theta}$ es una cantidad conservada (como se puede ver en la ec. de Lagrange para θ)

Ya que el momento de M es perpendicular a $\mathbf{r}$ por ser un movimiento circular,

$$Mr^2\dot{\theta} = r(Mr\omega) = |\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin\pi/2 = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

Que es el momento angular de M así que la cantidad conservada es el momento angular de la partícula con masa M, que esta cantidad se conserve significa que el torque para la partícula de masa M es nulo.

d) Reducir el problema a una sola ecuación diferencial de segundo orden y obtener una primera integral de la ecuación.

Sol:

Juntando las ecs. de Lagrange

$$(m+M)\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + mg = \frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right)$$

e) Discutir si es posible que la partícula M se mantenga realizando un movimiento circular

Sol:

Para mantener un movimiento circular para la partícula M se debe tener que la fuerza sobre m debido a la gravedad debe ser igual a la fuerza ficticia centrífuga sobre M a causa de la rotación por lo que

$$M\omega^2 r = mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{Mr}}$$