Macías Márquez Misael Iván

1. Dos partículas de masa m están sujetas a los extremos de una barra rígida sin masa de longitud a. El sistema puede rotar libremente en tres dimensiones respecto al centro de la barra. Encuentre las funciones propias normalizadas y muestre que el espectro de energía tiene el aspecto

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}$$

con n un entero no negativo.

Sol:

2. *a*) Pruebe que para una partícula en un potencial $V(x)$, la ecuación de movimiento para el valor esperado del momento angular es

$$\frac{d}{dt} < \hat{L} >_\psi = < \hat{N} >_\psi$$

Con $\hat{N} = x \times (-\nabla V)$ en la representación de posiciones.

Sol:

$$L_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$$

Primero veamos que

$$[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\hat{L}_i, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}] = \frac{1}{2m}[\hat{L}_i, \hat{p}^2] + [\hat{L}_i, \hat{V}] = [\hat{L}_i, \hat{V}]$$

donde $[\hat{L}_i, \hat{p}^2] = 0$ ya que $\hat{p}$ es vectorial y por tanto el operador escalar $\hat{p}^2$ conmuta con $\hat{L}_i$

$$[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{V}] = \epsilon_{ijk}[\hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{V}]$$

$$= \epsilon_{ijk}\left(\hat{x}_j[\hat{p}_k, \hat{V}] + [\hat{x}_j, \hat{V}]\hat{p}_k\right) = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j [\hat{p}_k, \hat{V}]$$

con $[\hat{p}_k, \hat{V}] = 0$ debido a que $\hat{V}$ depende de las componentes de la posición y $[\hat{x}_i, \hat{x}_i] = 0$, entonces la ecuación de movimiento para el valor esperado del momento angular es

$$\frac{d}{dt} < \hat{L} >_\psi = \frac{1}{i\hbar} < [\hat{L}, \hat{H}] >_\psi + \cancel{< \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} >_\psi}$$

$$= < \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}_i} >_\psi = < \epsilon_{kji} \hat{x}_j (-\frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}_i}) >_\psi = < x \times (-\nabla V) >_\psi$$

donde se usó que $[p_j, \hat{F}(\hat{x})] = i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}_i}$ y la definición del producto cruz en notación de índices.

b) Con esto, muestre que para un potencial esféricamente simétrico se cumple

$$\frac{d}{dt} < \hat{L} >= 0$$

Sol:
por el a) tenemos que

$$\frac{d}{dt} < \hat{L} >_\psi = \frac{1}{i\hbar} < [\hat{L}, \hat{H}] >_\psi + \cancel{< \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} >_\psi}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} < [\hat{L}_i, \hat{V}] >_\psi$$

que por definición $[\hat{V}, \hat{L}_i] = 0$ entonces

$$\frac{d}{dt} < \hat{L} >_\psi = 0$$

3. Suponga que $\hat{A}$ es un operador vectorial.

a) Encuentre las ecuaciones de Heisenberg de cada una de sus componentes para un sistema que esté descrito por el hamiltoniano de un rotor rígido

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{mr^2}$$

con m y r constantes positivas.
Sol:
Supongamos que $\hat{A}$ no depende explícitamente del tiempo, entonces las ecuaciones de Heisenberg quedan como

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_{Hi}, \hat{H}_{Hj}] + \cancel{\left(\frac{\partial \hat{A}_{Hi}}{\partial t}\right)}$$

con $\hat{A}_H = \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$ y $\hat{H}_H = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$

$$\frac{d\hat{A}_{Hi}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{U}^\dagger \hat{A}_i \cancel{\hat{U}\hat{U}^\dagger} \hat{H}_j \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{H} \cancel{\hat{U}\hat{U}^\dagger} \hat{A} \hat{U}) = \frac{1}{i\hbar}\hat{U}^\dagger(\hat{A}_i \hat{H}_j - \hat{H}_j \hat{A}_i)\hat{U}$$

y como $\hat{A}$ es un operador vectorial, se tiene

$$\frac{d\hat{A}_{Hi}}{dt} = \frac{1}{i\hbar mr^2}\hat{U}^\dagger[\hat{A}_i, \hat{L}_j^2]\hat{U} = \frac{1}{i\hbar mr^2}(\hat{L}_j[\hat{A}_i, \hat{L}_j] + [\hat{A}_i, \hat{L}_j]\hat{L}_j)\hat{U}$$

$$= \frac{1}{i\hbar mr^2}\hat{U}^\dagger(\hat{L}_j \epsilon_{ijk} i\hbar \hat{A}_k - \epsilon_{ijk} i\hbar \hat{A}_k \hat{L}_j)\hat{U}$$

$$\frac{\epsilon_{ijk}}{mr^2}\hat{U}^\dagger(\hat{L}_j \hat{A}_k + \hat{A}_k \hat{L}_j)\hat{U}$$

por lo tanto

$$\frac{d\hat{A}_{Hi}}{dt} = \frac{\epsilon_{ijk}}{mr^2}(\hat{L}_j\hat{A}_k + \hat{A}_k\hat{L}_j)_H$$

b) Definiendo $\hat{A}_\pm = \hat{A}_1 \pm i\hat{A}_2$, demuestre

$$[\hat{L}_+, \hat{A}_+] = 0 \qquad [\hat{L}_+, \hat{A}_-] = 2\hbar\hat{A}_3$$

Sol:
Recordemos que para un operador vectorial $\hat{V}$ se tiene $[\hat{V}_i, \hat{L}_j] = \epsilon_{ijk}i\hbar\hat{V}_k$, entonces

$$[\hat{L}_+, \hat{A}_+] = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{A}_1 + i\hat{A}_2) - (\hat{A}_1 + i\hat{A}_2)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y)$$

$$= (\hat{A}_2\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{A}_2) - i(\hat{A}_2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{A}_2) - i(\hat{A}_1\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{A}_1) - (\hat{A}_1\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{A}_1)$$

$$= [\hat{A}_2, \hat{L}_y] - [\hat{A}_1, \hat{L}_x] - i[\hat{A}_2, \hat{L}_x] - i[\hat{A}_1, \hat{L}_y]$$

$$= \cancel{\epsilon_{22k}i\hbar\hat{A}_k} - \cancel{\epsilon_{11k}i\hbar\hat{A}_k} - i\cancel{(\epsilon_{123} + \epsilon_{213})}i\hbar\hat{A}_3 = 0$$

$$[\hat{L}_+, \hat{A}_-] = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{A}_1 - i\hat{A}_2) - (\hat{A}_1 - i\hat{A}_2)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y)$$

$$= i(\hat{A}_2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{A}_2) - (\hat{A}_1\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{A}_1) - i(\hat{A}_1\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{A}_1) - (\hat{A}_2\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{A}_2)$$

$$= i[\hat{A}_2, \hat{L}_x] - [\hat{A}_1, \hat{L}_x] - i[\hat{A}_1, \hat{L}_y] - [\hat{A}_2, \hat{L}_y]$$

$$= i\epsilon_{213}i\hbar\hat{A}_2 - \cancel{\epsilon_{11k}i\hbar\hat{A}_k} - i\epsilon_{123}i\hbar\hat{A}_3 - \cancel{\epsilon_{22k}i\hbar\hat{A}_k} = 2\hbar\hat{A}_3$$

4. Las funciones ϕ_1, ϕ_0 y ϕ_{-1} son funciones propias, normalizadas, del operador $\hat{L}^2$ con valor propio $l(l+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$, y del operador $\hat{L}_z$con valores propios $\hbar$, 0 y $-\hbar$ respectivamente. Encuentre las funciones propias de $\hat{L}_x$, con sus respectivos valores propios, en términos de las funciones ϕ_1, ϕ_0 y ϕ_{-1}.

   Sol:

5. Considere el operador $e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}$. Si lo aplica a un estado propio de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_x$ con $l = 1$, pruebe que el estado resultante es estado propio de $\hat{L}_z$. ¿Qué interpretación tiene el operador $e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}$? Además pruebe las siguientes identidades

$$e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}_z e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar} = -\hat{L}_x$$

$$e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}_x e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar} = \hat{L}_z$$

   Sol:

Primero probemos las identidades, Sea $A(\theta) = e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}\hat{L}_x e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar}$ y $B = e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}\hat{L}_z e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar}$, entonces

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{i}{\hbar}(e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}(\hat{L}_y\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_y)e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar}) = -\epsilon_{213}e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}\hat{L}_z e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar} = B$$

$$\frac{dB}{d\theta} = \frac{i}{\hbar}(e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}(\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar}) = -\epsilon_{231}e^{i\theta\hat{L}_y/\hbar}\hat{L}_x e^{-i\theta\hat{L}_y/\hbar} = -A$$

y por las condiciones iniciales para $\theta = 0$, las soluciones son

$$A = \hat{L}_x \cos\theta + \hat{L}_z \sin\theta \qquad B = -\hat{L}_x \sin\theta + \hat{L}_z \cos\theta$$

$$\therefore \qquad e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}_z e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar} = -\hat{L}_x$$

$$e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}_x e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar} = \hat{L}_z$$

para $\theta = \pi/2$.

Ahora para el primer problema, por hipótesis se tiene que

$$\hat{L}^2\psi_m = 2\hbar\psi_m$$

$$\hat{L}_x\psi_m = m\hbar\psi_m$$

aplicando $e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}$, $e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar}$ y reagrupando

$$e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}^2 e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar}(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m) = 2\hbar(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m)$$

$$e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\hat{L}_x e^{-i\pi\hat{L}_y/2\hbar}(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m) = m\hbar(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m)$$

como $\hat{L}^2$ conmuta con las componentes de $\hat{L}$ y por la propiedad demostrada anteriormente

$$\hat{L}^2(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m) = 2\hbar(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m)$$

$$\hat{L}_z(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m) = m\hbar(e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}\psi_m)$$

por lo tanto el estado propio resultando es función propia de $\hat{L}_z$, $e^{i\pi\hat{L}_y/2\hbar}$ es una rotación de $\pi/2$ respecto al eje y.

6. Para un vector unitario **n** que apunta en una dirección general, muestre las siguientes propiedades

$$[\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}},\mathbf{x}] = i\hbar(\mathbf{n}\times\mathbf{x})$$

Sol:

Sea $\mathbf{n} = \sum n_i\hat{e}_i$, entonces

$$[n_i\hat{L}_i,\hat{p}_j] = -i\hbar n_i\epsilon_{ijk}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}x_l - x_l\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

$$= -i\hbar\epsilon_{ijk}n_ix_j = -i\hbar(\mathbf{n}\times\mathbf{x})_j$$

y así

$$[\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}},\mathbf{x}] = i\hbar(\mathbf{n}\times\mathbf{x})$$

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{L},\mathbf{p}] = -i\hbar(\mathbf{n}\times\mathbf{p})$$

Sol:

$$[n_i\hat{L}_i,\hat{p_j}] = -i\hbar n_i\left(\hat{L}_i\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{L}_i\right)$$

$$= -\hbar^2\epsilon_{jik}n_i\frac{\partial}{\partial x_k} = -\hbar\epsilon_{jik}n_i\hat{p}_k = -i\hbar(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{L}})_j$$

por lo tanto

$$[\mathbf{n}\cdot\mathbf{L},\mathbf{p}] = -i\hbar(\mathbf{n}\times\mathbf{p})$$

$$[\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{L}}] = -i\hbar(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{L}})$$

Sol:

$$n_i[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = -i\hbar\epsilon_{jik}n_i\hat{L}_k = -i\hbar(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{L}})_j$$

por lo tanto

$$[\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{L}}] = -i\hbar(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{L}})$$