1. **Sea $(V, <, >)$ e.v.p.i finito dimensional. Dado $T \in \mathcal{L}(V)$ normal, demostrar que T es autoadjunto $\leftrightarrow TT^* = T^*T$ i.e. T es normal**

   $\rightarrow$) por hipótesis $TT = TT^*$ y también $TT = T^*T$, por lo que $TT^* = T^*T$ i.e. por definición T es normal

   $\leftarrow$) Supongamos que $T^2 = T$ y $TT^* = T^*T$, entonces

$$(T - T^*T)^*(T - T^*T) = (T^* - T^{**}T^*)(T - T^*T)$$

$$(T^* - TT^*)(T - T^*T) = T^*T - T^*T^*T - TT^*T + TT^*T^*T$$

$$T^*T - T^{*2}T - TT^*T + TT^{*2}T$$

   y por hipótesis $T^{2*} = T^* \rightarrow T^{*2} = T^*$

$$T^*T - T^{*2}T - TT^*T + TT^{*2}T = T^*T - T^*T - TT^*T + TT^*T = 0$$

   por lo tanto $T - T^*T = 0$ o bien, $T = T^*T$ y también $T^* = T^{**}T^* = TT^* = T^*T$

$$\therefore T = T^*$$

$\blacksquare$

2. **Sea $(V, <, >)$ e.v.p.i finito dimensional. Dado $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Probar que:**

   a) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$
   $\subseteq$) Sea $v \in \mathrm{Ker}(T)$, entonces $T(v) = 0_V$, que en su representación matricial

$$Tv = 0_V$$

$$T^*Tv = T^*0_V = 0_V$$

   y como T es normal, entonces por definición $TT^* = T^*T$

$$TT^*v = 0_V$$

$$(T^{-1}T)T^*v = T^{-1}0_V = 0_V$$

$$IT^*v = T^*v = 0_V$$

$$T^*(v) = 0_V$$

   entonces

$$v \in \mathrm{Ker}(T^*) \therefore \mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^*)$$

$\supseteq$) Sea $v \in \mathrm{Ker}(T^*)$, entonces $T^*(v) = 0_V$, que en su representación matricial

$$T^* v = 0_V$$

$$TT^* v = T0_V = 0_V$$

y como T es normal

$$T^*Tv = 0_V$$

$$((T^*)^{-1}T^*)T^v = (T^*)^{-1}0_V = 0_V$$

$$ITv = Tv = 0_V$$

$$T(v) = 0_V$$

entonces

$$v \in \mathrm{Ker}(T) \therefore \mathrm{Ker}(T^*) \subset \mathrm{Ker}(T)$$

y así, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$

■

b) $\mathrm{R}(T) = \mathrm{R}(T^*)$
Por el teorema 2.5 y como $T : V \to V$, $T^* : V \to V$,

$$N(T) + R(T) = \dim(V) = N(T^*) + R(T^*)$$

pero por el inciso anterior

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*) \to N(T) = N(T^*)$$

$$\therefore R(T) = R(T^*)$$

■