Mathematical Modeling

数学建模

同济大学数学科学学院

第四章

简单优化模型

目录/Contents ▌第四章 简单优化模型

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费。该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出。

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次(生产周期)，每次产量多少，使总费用最小。

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。

分析

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元。

- 每天生产一次，每次100件，无贮存费，准备费5000元。

每天费用5000元

- 10天生产一次，每次1000件，贮存费900+800+…+100 =4500元，准备费5000元，总计9500元。

每天费用950元

- 50天生产一次，每次5000件，贮存费4900+4800+…+100 =122500元，准备费5000元，总计127500元。

每天费用2550元

10天生产一次平均每天费用最小吗?

分析

周期短，产量小 ⇨ 贮存费少，准备费多

周期长，产量大 ⇨ 准备费少，贮存费多

存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小

确定目标函数：最小化每天总费用的平均值

模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r;

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2;

3. T 天生产一次（周期）, 每次生产Q件，当贮存量为零时，Q件产品立即到来（生产时间不计）；

4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理。

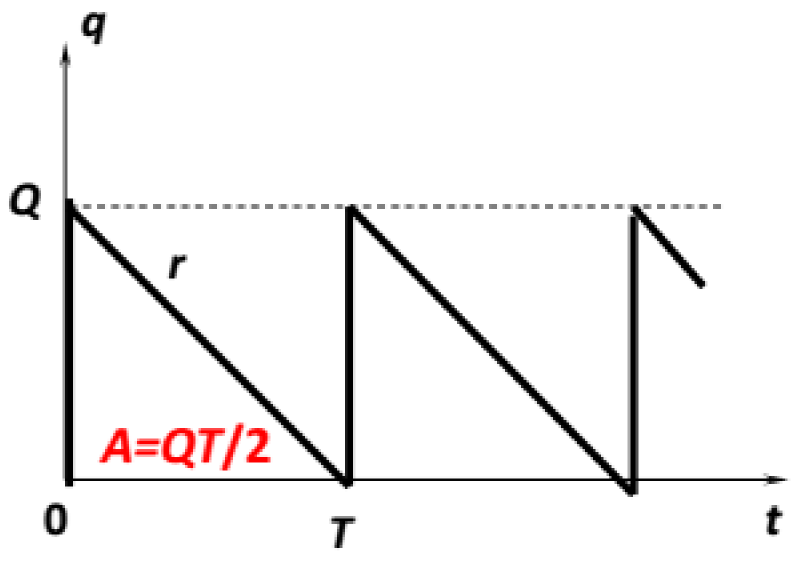
优化模型

设 r, c_1, c_2 已知，求T, Q 使每天总费用的平均值最小。

模型建立：离散问题的连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

t=0 生产 Q 件，$q(0)=Q$, $q(t)$ 以需求速率 r 递减，$q(T)=0$.



$$\boxed{Q = rT}$$

一周期贮存费为 $c_2\int_0^T q(t)dt = c_2 A$

一周期总费用为

$$\tilde{C} = c_1 + c_2\frac{Q}{2}T = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

(目标)平均费用为

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2}$$

模型求解

$$\boxed{\min\ C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}}$$

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型分析

$$c_1\uparrow \Rightarrow T,Q\uparrow \qquad c_2\uparrow \Rightarrow T,Q\downarrow \qquad r\uparrow \Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$$

模型应用

c_1=5000, c_2=1， r=100

***T*=10(天), *Q*=1000(件), *C*=1000(元)**

用于订货、供应、存贮情形

每天需求量 r，每次订货费 c_1,每天每件贮存费 c_2，

T天订货一次(周期), 每次订货Q件，当贮存量降到零时，Q件立即到货。

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

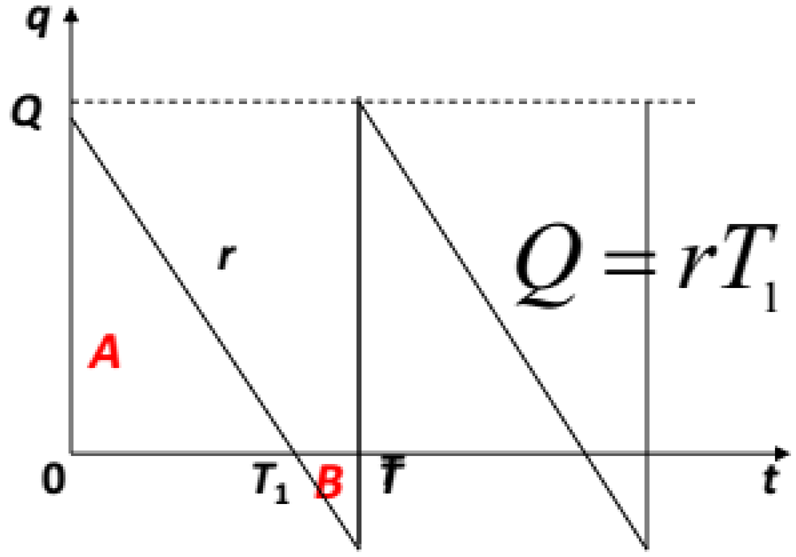
不允许缺货的存贮模型

问题： 为什么不考虑生产费用？什么情况下不考虑？

当贮存量降到零时仍有需求 r, 出现缺货，造成损失

原模型假设：贮存量降到零时 Q 件立即生产出来(或立即到货)

现假设：允许缺货, 每天每件缺货损失费 c_3 , 缺货需补足



周期T, $t=T_1$贮存量降到零

一周期贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 A$

一周期缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|dt = c_3 B$

一周期总费用 $\overline{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$

目标 每天费用平均值

$$\min\ C(T,Q)=\frac{\bar{C}}{T}=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2Q^2}{2rT}+\frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T}=0,\ \frac{\partial C}{\partial Q}=0$$

为与不允许缺货的存贮模型相比，T 记作 T'，Q 记作 Q'

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}} \qquad Q'=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

不允许缺货模型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu = \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$ $\quad T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$

$$\mu > 1 \quad T' > T, \quad Q' < Q \quad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$$

不允许缺货 $\Leftrightarrow$ $c_3 \to \infty \Rightarrow \mu \to 1 \quad T' \to T, \ Q' \to Q$

目录/Contents ▌第四章 简单优化模型

问题

饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，估计可使80千克重的生猪体重增加2公斤。

市场价格目前为每千克8元，但是预测每天会降低 0.1元，问生猪应何时出售。

如果估计和预测有误差，对结果有何影响。

分析

投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大

建模、求解

估计$r=2$， $g=0.1$

若当前出售，利润为80×8=640（元）

t天后出售

生猪体重 $w=80+rt$　　销售收入 $R=pw$

出售价格 $p=8-gt$　　资金投入 $C=4t$

利润 $Q=R-C=pw-C$

$$\max\ Q(t)=(8-gt)(80+rt)-4t$$

$$t^*=\frac{4r-40g-2}{rg}=10$$

$Q(10)=660>640$　　10天后出售，可多得利润20元

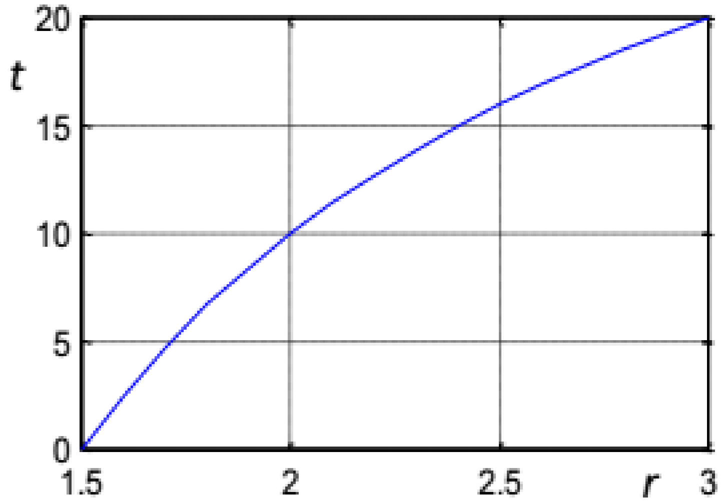
敏感性分析

$$t^{*}=\frac{4r-40g-2}{rg}=10$$

研究 r, g 变化时对模型结果的影响　　估计 r=2，g=0.1

设 g=0.1 不变

$$t=\frac{40r-60}{r},\quad r\geq 1.5$$



$$S(t,r)=\frac{\Delta t/t}{\Delta r/r}\approx\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{r}{t}$$

$$S(t,r)\approx\frac{60}{40r-60}=3$$

生猪每天体重增加量*r* 增加1%，出售时间推迟3%

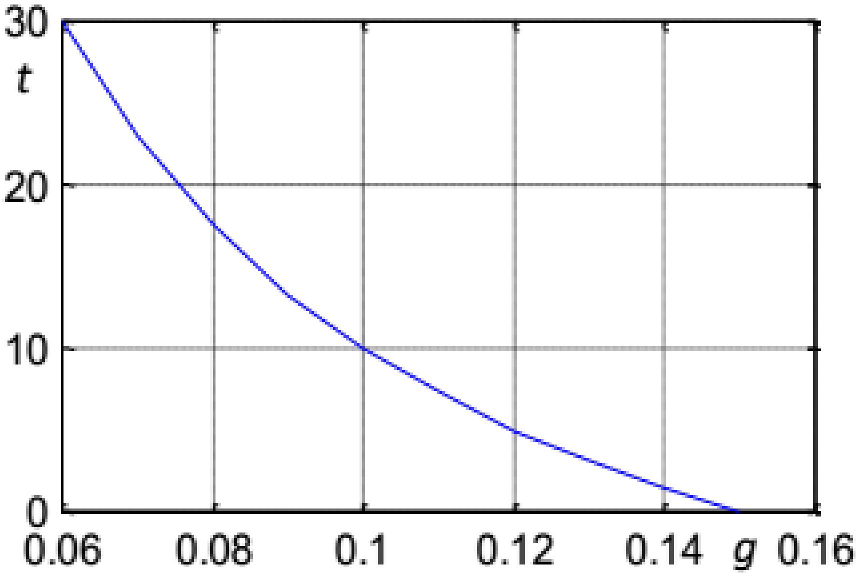
敏感性分析

$$t^* = \frac{4r - 40g - 2}{rg} = 10$$

研究 r, g 变化时对模型结果的影响　　估计 r=2，g=0.1

设 r=2 不变

$$t = \frac{3 - 20g}{g}, \quad 0 \le g \le 0.15$$



$$S(t,g) = \frac{\Delta t / t}{\Delta g / g} \approx \frac{dt}{dg}\frac{g}{t} \quad S(t,g) = -\frac{3}{3-20g}$$

生猪价格每天的降低量g增加1%，出售时间提前3%。

目录/Contents ▌第四章 简单优化模型

背景 机体提供能量维持血液在血管中的流动

给血管壁以营养　　克服血液流动的阻力

消耗能量取决于血管的几何形状

在长期进化中动物血管的几何形状已经达到能量最小原则

问题 研究在能量最小原则下，血管分支处粗细血管半径比例和分岔角度

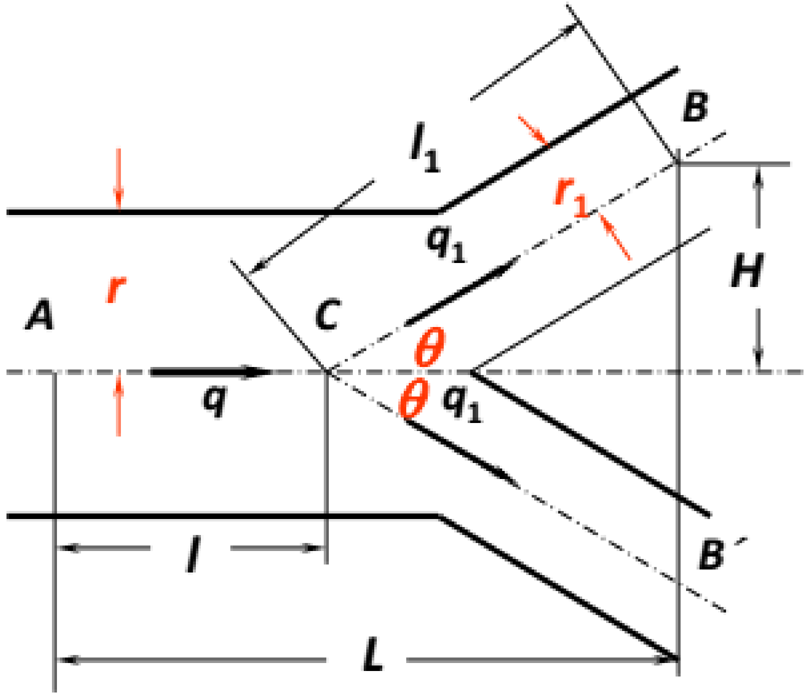
假设 一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面

血液流动近似于粘性流体在刚性管道中的运动

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度近似与血管半径成正比

考察血管AC与CB, CB´

$q=2q_1$　　　　$r/r_1,\ \theta?$



假设 粘性流体在刚性管道中运动

$$q=\frac{\pi r^4\Delta p}{8\mu l}$$

ΔP：A,C压力差，

μ： 粘性系数

克服阻力消耗能量

$$E_1=q\Delta p=\frac{8\mu q^2 l}{\pi d^4}$$

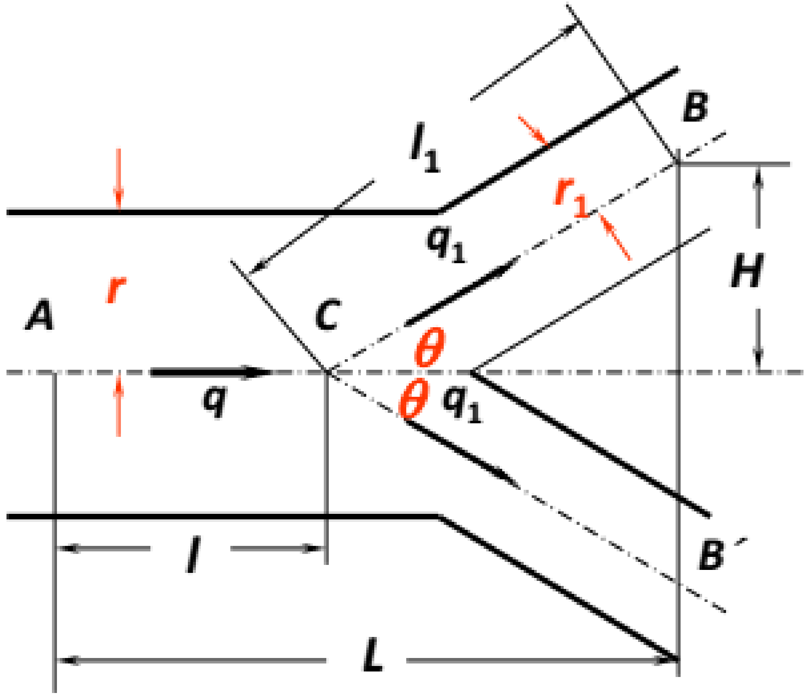
提供营养消耗能量

管壁内表面积 $2\pi rl$

管壁体积$\pi(d^2+2rd)l$,

管壁厚度 d 与 r 成正比

$$E_2=br^{\alpha}l,1\le\alpha\le2$$



分析 粘性流体在刚性管道中运动

$$q=\frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu l}$$

克服阻力消耗能量

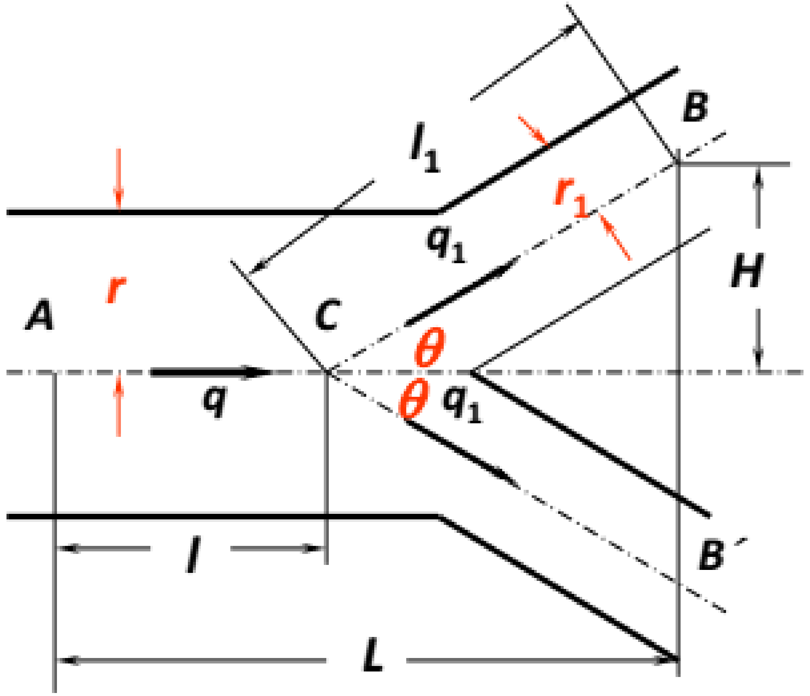
$$E_1=q\Delta p=\frac{8\mu q^2 l}{\pi d^4}$$

机体为血流提供能量

$$E=E_1+E_2$$

$$=(kq^2/r^4+br^\alpha)l$$

$$+(kq_1^2/r_1^4+br_1^\alpha)2l_1$$



$$l=L-H/tg\theta,\quad l_1=L-H/\sin\theta$$

求解 $E(r,r_1,\theta)=(kq^2/r^4+br^\alpha)(L-H/\tan\theta)+$

$$(kq_1^2/r_1^4+br_1^\alpha)2H/\sin\theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial r_1}=0$$

$$b\alpha r^{\alpha-1}-4kq^2/r^5=0$$

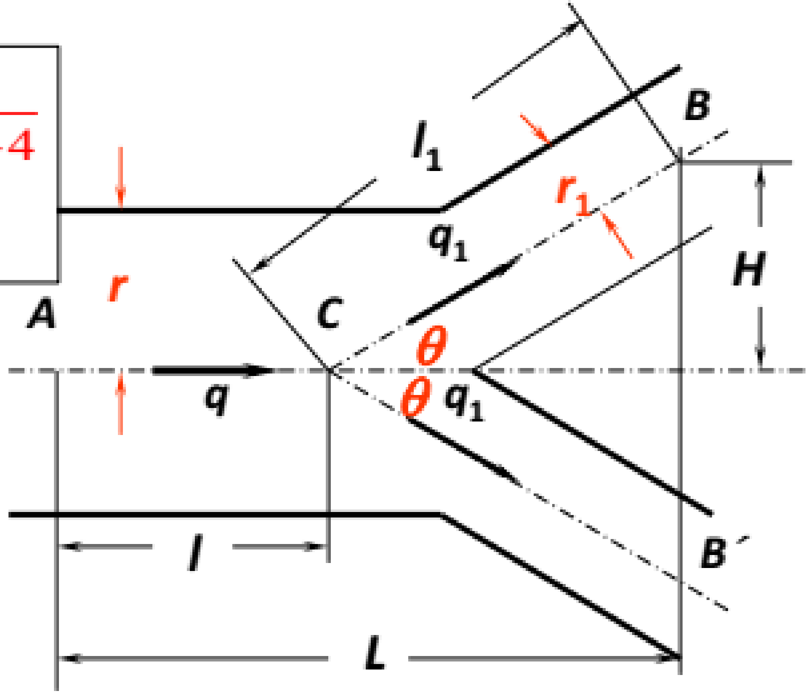
$$b\alpha r_1^{\alpha-1}-4kq^2/r_1^5=0$$

$$\boxed{\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial\theta}=0$$

$$\boxed{\cos\theta=2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4}}$$

$$1\le\alpha\le2$$



$$1.26\le r/r_1\le1.32,\quad 37^0\le\theta\le49^0$$

解释 $1.26 \le r/r_1 \le 1.32, \quad 37^0 \le \theta \le 49^0$

生物学家：结果与观察大致吻合

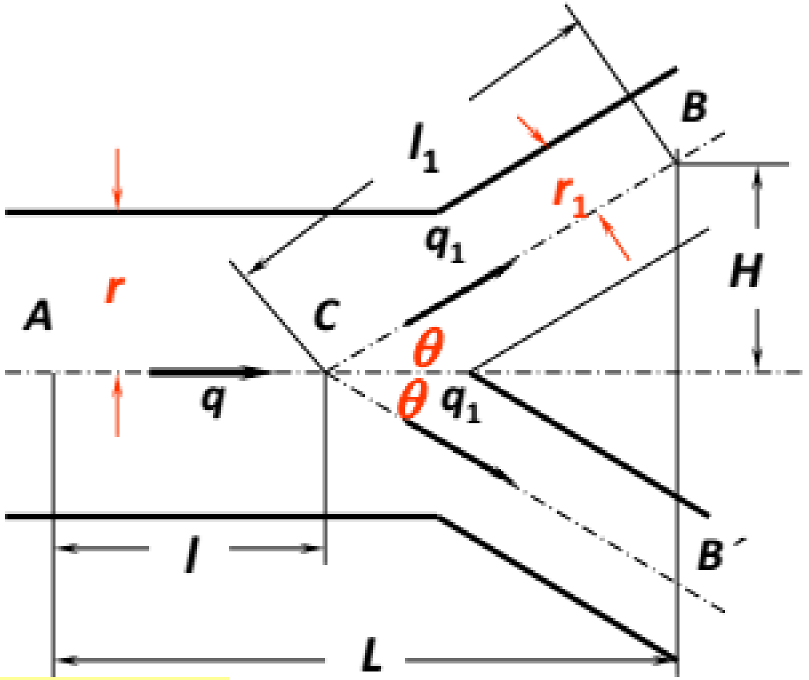
推论 大动脉到毛细血管有 n 次分岔 $n=?$

大动脉半径 r_{max}, 毛细血管半径 r_{min}

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管 $\frac{r_{\max}}{r_{\min}} \approx 1000 \approx 4^5$

$n \approx 5(\alpha+4) \qquad 1 \le \alpha \le 2 \qquad n \approx 25 \sim 30$



血管总条数 $2^n \approx 2^{25} \sim 2^{30} \approx 3\times10^7 \sim 10^9$

存贮模型中，如果存货多时单价可以优惠，模型有什么变化?

血管分支模型有什么不合理之处?

Mathematical Modeling

数学建模

同济大学数学科学学院

学海无涯，祝你成功！

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS