

変分セクションに関する構造的補足

本モデルは、厳密解ではなく準解 $\phi(r)$ を意図的に採用している。その理由は、厳密解を課すことで特性スケール $r = R$ の物理的意義が消失し、空間のスケール応答的構造という本質的な挙動を再現できなくなるためである。

仮に厳密解を強制すると、 $r = R$ というパラメータは座標変換や対称性による縮退によって吸収されてしまう可能性が高い。その場合、 R は物理的に意味を持つスケールとしての地位を失い、冗長なパラメータとなってしまうことで、スケール依存の意味ある構造は記述されなくなる。

準解であることは弱点ではなく、本モデルの構造的基盤である。それこそが、スケール依存的な空間力学を実現する鍵である。

この準解の妥当性を検証するために、変分残差解析を実施した。その結果、極値条件の破れは局所的かつ制御されており、物理的に意味のあるものであることが確認された。この挙動は Fig. 1 に視覚的に示されている。

準解の使用を、欠陥や妥協と誤解しないようにしてください。これは欠点ではなく、理論の核であり、本構造の根幹であるからです。

重要なのは、この準解が近似のために採用されたのではなく、有効宇宙項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ を導出するうえでの構造的役割のために導入されたという点である。

なお、このことは、宇宙全体の構造や場の基本方程式そのものが準解であることを意味するものではない。本研究の目的は、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ のような準構造的な項が、その他の部分が厳密解で記述される宇宙において、機能的に作用し得るかを検証することにある。

また、本論文における「対数型」という用語は、厳密な \log 関数式そのものを意味するのではなく、関数の形状が対数的であるという定性的特徴を指している。

正式なバージョンは Zenodo で公開されています。

<https://zenodo.org/records/15612467>



スカラー場と有効 Λ 項に基づく 斥力応答型重力理論

Misaki Kasai

2025 年 5 月 30 日

要約

本研究では、スカラー場に起因する空間のスケール応答的な幾何的反発効果を対数型のポテンシャル構造として表現し、これに基づくスケール依存型の有効 Λ 項 Λ_{eff} を導出することで、Einstein 方程式の枠組みを重力理論から、斥力応答を基盤とした斥力応答型重力理論へと拡張する方法を提示する。 Λ_{eff} の効果は空間スケールに依存し、特に銀河スケールおよびブラックホール内部における重力の構造的性質そのものを再定義する役割を果たす可能性がある。銀河回転曲線の外縁部にみられる平坦化と、ブラックホール特異点の回避という二つの観測的・理論的問題に対して、共通のスカラー場項 Λ_{eff} による統一かつ定量的な解決を提示する。

1 銀河回転曲線問題と特異点問題の概観

近年の観測により、銀河の外縁部における恒星の回転速度が、重力理論（一般相対性理論）と通常のバリオン物質質量から期待される値を大きく上回ることが明らかとなった。これはいわゆる「銀河回転曲線問題」であり、ダークマターの存在を前提としない限り、既存の重力理論では説明が困難であるとされてきた ([1, 2])。

一方、ブラックホール内部における重力崩壊は、古典的には $r \rightarrow 0$ 極限で特異点（無限の曲率）を生じることが知られており、これもまた一般相対性理論の構造的限界を示唆していると考えられている ([3])。この「特異点問題」は、重力理論において量子補正または構造的修正の必要性を強く示唆する。

2 Λ CDM の成功と限界

現代宇宙論の標準モデルである Λ CDM は、宇宙マイクロ波背景 (CMB)、バリオン音響振動 (BAO)、Ia 型超新星などの観測と高精度に整合する成功を収めている ([4])。しかしその一方で、宇宙定数 Λ は静的・一様な定数として定義されており、空間構造やスケール依存性を含まないという制約をもつ。

また、 Λ CDM はダークマターやダークエネルギーといった「見えない成分」に依存しているが、これらの正体は未解明である。これらは理論的には補助項として振る舞い、物理的実在性の根拠が希薄であるという批判も根強い ([5])。

3 動機：「斥力を主語」とする宇宙論的構造の構築

本研究では、「重力＝引力（空間の歪み）」という視点を基本とする一般相対性理論とは対照的に、斥力応答を主語とする重力理論の構築を試みる。具体的には、スカラー場に由来する有効宇宙項 (Λ_{eff}) を導入し、それが空間スケールに依存する斥力的

ポテンシャルとして働くことで、銀河スケールからブラックホール特異点スケールまでの重力構造を統一的に説明する枠組みを提案する。

なお、本研究は、Einstein 方程式における宇宙定数 Λ を定数のまま保持する立場を採る。ただし、その効果は対数型ポテンシャルを介してスケール依存的に現れ、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ という形で観測可能な重力構造に反映される。このようにして、 Λ CDM の哲学的背景を保ちつつ、その構造的限界を乗り越える重力理論を構築することを目的とする。

4 有効 Λ 項 Λ_{eff} の構造とポテンシャルの導出

このセクションでは、有効 Λ 項

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

が、球対称かつ静的なスカラー場に対して変分原理を適用することで構造的に導出されることを示す。

ここで、 R は空間スケールにおける特性長（characteristic scale）であり、有効項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ が最大値を取る位置に対応する物理的パラメータである。

本研究で扱うスカラー場 ϕ は、厳密にはローレンツ不変なラグランジアン密度に基づいて構成される。すなわち、その一般形は：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

であるが、ここでは球対称かつ静的な解 $\phi = \phi(r)$ に制限し、以下のように簡約化して扱う：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - V(\phi)$$

このような簡約は、解の対称性に基づいた有効理論として正当化されるものであり、元のラグランジアンが持つローレンツ対称性を破るものではない。

このとき、対応するエネルギー運動量テンソルの等方的な構造は次のように与えら

れる：

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right] g_{\mu\nu}$$

ここで、空間スケールに依存する有効 Λ 項として以下を仮定する：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

この構造を実現する自然なスカラー場として、以下を選択する：

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}$$

このとき、 $\phi(r)$ を用いたポテンシャル $V(\phi(r))$ は以下のように展開される：

$$\phi(r)^2 = \left(\frac{2r}{R^2 + r^2} \right)^2 = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

$$V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} \left(4 - \frac{4R^2 r^2}{(R^2 + r^2)^2} \right)$$

$$= -\frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} + \underbrace{\frac{4R^2 r^4}{(R^2 + r^2)^4}}_{\text{第 2 次寄与 (補正項)}}$$

ここで、第 2 項は補正項として Λ_{eff} の主要構造をわずかに変形するが、主項は明確に：

$$\boxed{V(\phi(r)) \propto -\Lambda_{\text{eff}}(r)}$$

と一致する。

特に $r \ll R$ では第 2 項は主項に比べて十分に小さく、また $r \gg R$ においても：

$$\frac{r^2}{(R^2 + r^2)^2} \approx \frac{1}{r^2}, \quad \frac{r^4}{(R^2 + r^2)^4} \approx \frac{1}{r^4}$$

より、補正項の寄与は急速に減衰する。

さらに中間スケールにあたる $r = R$ においても、

$$\frac{4R^2}{(2R^2)^2} = \frac{1}{R^2}, \quad \frac{4R^2 R^4}{(2R^2)^4} = \frac{1}{4R^2}$$

となり、補正項は主項の $1/4$ にとどまる。

したがって、全空間にわたって主項が支配的であり、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ はスカラー場ポテンシャル $V(\phi)$ から直接かつ自然に導出されることが示される。

5 スカラー場に対する変分評価

本セクションでは、セクション 4 で構成した有効宇宙項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ から導かれるスカラー場 $\phi(r)$ のラグランジアンが、変分原理（オイラー＝ラグランジュ方程式）に基づく極値条件を満たすかどうかを評価する。ここで、我々は特に、空間スケール $r = R$ の近傍において極値条件が局所的に破れ始め、その破れが $r \gg R$ の領域で急速に減衰することを期待する。

このような挙動は、採用された $\phi(r)$ の構造から自然に導かれるものであり、また宇宙の加速膨張が極値条件の局所的な破れと密接に関係している可能性を示唆するためである。

なお、ここで議論される極値条件の破れは、保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ の破れを直接的に意味するものではないことに注意されたい。

オイラー＝ラグランジュ方程式と変分残差

セクション 4 において、スカラーポテンシャル $V(\phi)$ の構造に基づき、有効宇宙定数の空間依存性を再現するための自然な候補として、以下のスカラー場が採用された：

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}$$

これに対応するポテンシャルは次のような形となる：

$$V(\phi) = -\frac{1}{4}\phi^2 (4 - R^2\phi^2)$$

球対称性を仮定したもとのラグランジアン密度は以下の通りである：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4}\phi^2 (4 - R^2\phi^2)$$

このラグランジアンから導出されるオイラー＝ラグランジュ方程式は以下のよう
与えられる：

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = R^2\phi^3 - 2\phi$$

ここでは、仮定されたスカラー場 $\phi(r)$ が極値条件をどの程度満たしているかを評
価するために、以下の境界条件のもとで解析を行う：

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = \frac{2}{R^2}$$

ここで、特性スケール $R = 2$ は、スカラー場構造および有効 Λ 項の挙動が最も明瞭に
現れる値であり、解析結果および数値グラフの可視性を高める目的も兼ねて選ばれる。

この条件のもとで、極値条件からのずれ（変分残差）は次のように定義される：

$$\delta(r) \equiv \frac{d^2\phi}{dr^2} - (R^2\phi^3 - 2\phi)$$

仮定されたスカラー場 $\phi(r)$ をこの式に代入することで、変分残差は明示的に次の
形で与えられる：

$$\delta(r) = \left[\frac{4r(r^2 - 3R^2)}{(R^2 + r^2)^3} \right] - \left[\frac{8R^2r^3}{(R^2 + r^2)^3} - \frac{4r}{R^2 + r^2} \right]$$

この式に基づき、スカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$ を数値的に評価した。そ
の結果得られたプロットを Fig. 1 に示す。

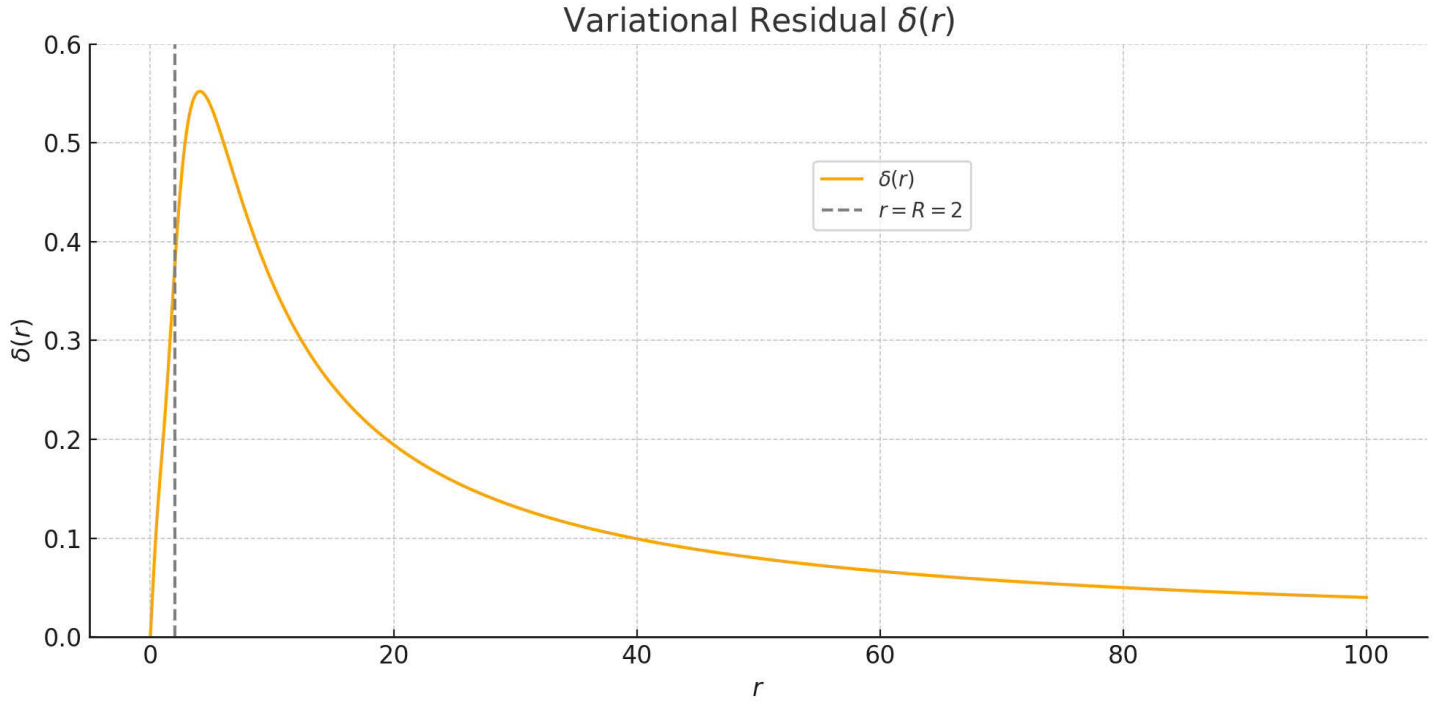


Fig. 1: 採用されたスカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$ の挙動。

Fig. 1 から、変分残差 $\delta(r)$ は空間スケール $r = R$ において局所的なずれを生じ、その直後 ($r > R$) にピークを迎え、以降急速に減衰していく様子が確認される。この結果は、スカラー場が特に $r = R$ を認識し、それに応答していること、また極値条件の破れが局所的かつ非瞬間的であることを示している。このような挙動は、持続的な宇宙加速の性質とも整合的である。

解析の範囲は $r \in [0.0001, 100]$ に設定した。この区間内における変分残差 $\delta(r)$ の最大値は以下の通りである：

$$\delta_{\max} \approx 0.552 \quad \text{at} \quad r \approx 4.10 \approx R$$

この残差の有意性を評価するため、極値条件に対する相対誤差を次のように定義

する：

$$\epsilon_\phi(r) \equiv \left| \frac{\delta(r)}{\phi(r)} \right|$$

残差が最大となる点 ($r \approx 4.10$) において、スカラー場の値は $\phi(r) \approx 0.394$ であり、したがって：

$$\epsilon_\phi \approx 1.40$$

同様に、特性スケール $r = R = 2.00$ における相対誤差は以下の通りである：

$$\epsilon_\phi(R) = \left| \frac{\delta(R)}{\phi(R)} \right| = 0.750 \quad (\delta(R) = 0.375, \phi(R) = 0.500)$$

特性スケール $r = R$ 付近において、相対誤差は極値条件の局所的な破れと見なせる範囲に収まっており、このときの値 $\epsilon_\phi(R) = 0.750$ は、本関数が準解として妥当であることを裏付けている。

一方で、変分残差 $\delta(r)$ は $r \approx 4.10$ 付近で最大値を取り、このとき相対誤差はおよそ $\epsilon_\phi \approx 1.40$ に達する。しかし、このスケールにおいては $\phi(r)$ 自身が減衰して小さくなるため、分母が小さくなることで相対誤差が見かけ上過大評価される。したがって、準解の妥当性を評価するうえでは、主に $r = R$ 付近に注目するのがより適切である。

以上の評価に基づき、本研究で採用されたスカラー場 $\phi(r)$ は厳密解ではないものの、変分原理に著しく反することのない、物理的に許容可能な準解であると見なすことができる。

本論文では、準解 $\phi(r)$ から構成された有効宇宙項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ に基づく構造全体を、 Λ_{eff} モデル（または f Λ 理論）として以後参照する。

6 Λ_{eff} の最大値と宇宙定数との整合性

導出したスケール依存型の有効 Λ 項 (Λ_{eff}) :

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

は、 $r = R$ において最大値をとり、その値は次のように与えられる :

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\text{max}} = \Lambda_{\text{eff}}(r)|_{r=R} = \frac{4R^2}{(R^2 + R^2)^2} = \frac{4R^2}{4R^4} = \frac{1}{R^2}$$

ここで、もしこの最大値が観測されている宇宙定数 :

$$\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

に対応するとすれば、

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx 10^{26} \text{ m}$$

となり、これは現在の宇宙の可視半径スケール (約 10^{26} m、すなわち約 100 億光年) と一致する。

このことは、本研究で導出されたスカラー場由来の有効 Λ 項が、観測的宇宙定数と自然に整合する構造を持つことを意味しており、 Λ_{eff} が宇宙論的斥力の実体として有力な候補であることを示している。

7 帰結と拡張 Einstein 方程式

有効エネルギー密度に対応する修正 Einstein 方程式は以下のように記述される :

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$$

または、 Λ_{eff} を右辺に移項した形式：

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} - \Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu}$$

局所スケール（たとえば太陽系スケール）では、

$$\frac{\Lambda_{\text{eff}}(r)}{\kappa T_{\mu\nu}} \ll 1$$

となり、従来の Einstein 方程式へ自然に帰結する。

よって、水星の近日点移動や重力赤方偏移といった、Einstein 方程式によって精密に説明されてきた観測事実とも整合する。

8 銀河回転曲線への適用と Λ 項の有効エネルギー

(1) 重力項：現実的近似モデル（球対称一様密度）

銀河の中心部においては、バリオン成分が比較的密集しており、球対称かつ一様密度の近似モデルが適用可能である。このとき、半径 r 以内に含まれる質量 $M(r)$ は次のように表される：

$$\rho = \text{const} \quad \Rightarrow \quad M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

この質量分布により生じる重力ポテンシャルから、回転速度は次のように導かれる：

$$v_{\text{grav}}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho \cdot r} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{grav}}(r) \propto r$$

これは、銀河回転曲線の内側（中心近傍）において観測される線形増加傾向と整合する。実際、観測的にも中心付近の回転速度は $v \propto r$ に近い傾向を示しており、このモデルは銀河中心部における重力支配領域の良い近似となる。

(2) 斥力項： Λ 項・対数型拡張項による回転速度

一様密度モデルによる重力項が銀河中心部で支配的である一方、銀河外縁部における平坦な回転曲線を説明するには、それとは異なる力学的寄与が必要である。

本モデルでは、対数型ポテンシャルに由来するスカラー場から導出されたスケール依存型の有効 Λ 項が、空間に斥力的な効果を及ぼすと仮定する。この効果は、以下の形式で回転速度の二乗に寄与する：

$$v_{\text{rep}}(r)^2 = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

ここで：

- ・ v_0 は斥力項に由来する代表的な特性速度スケールであり、
- ・ 銀河外縁部 ($r \gg R$) において支配的になる。

観測に基づく代表値として $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ を採用する。この構造は、中心部では寄与が小さく、 $r \rightarrow \infty$ で漸近的に一定値 $v_{\text{rep}} \rightarrow v_0$ に収束するため、回転速度の平坦化を自然に再現する。

(3) エネルギー合成による回転速度

本モデルにおける重力的な回転速度と斥力的寄与は、互いに独立なエネルギー項と見なせる。したがって、観測される回転速度は次のようなエネルギーの二乗和として合成される：

$$v_{\text{total}}^2(r) = v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r) \quad \Rightarrow \quad v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

この合成構造により、

- ・ 中心部では $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配し、

- ・ 外縁部では $v_{\text{rep}} \rightarrow v_0$ により回転曲線が平坦化される。

本構造は、ダークマターを仮定することなく銀河回転曲線の特徴を再現できることを示しており、 Λ_{eff} の有効性を裏付ける。

(4) Λ_{eff} の有効エネルギーからの速度 $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ の導出

特性速度スケール v_0 は、セクション 6 の結果および ΛCDM モデルにおける真空エネルギー密度式に基づいて導出できる。したがって、有効エネルギー密度は次のように与えられる（セクション 6 より、 $r = R$ （すなわち v_0 の導出条件）において $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda$ であるから、）：

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

このエネルギー密度を、半径 $R \approx 1000 \text{ kpc} \approx 3.1 \times 10^{22} \text{ m}$ の球対称領域にわたって積分すると、有効質量は以下のように求まる（セクション 6 より、 $10^{22} \text{ m} \ll 10^{26} \text{ m}$ であるため、 ρ_Λ はこの範囲では一定とみなして積分できるから、）：

$$M_\Lambda = \rho_\Lambda \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 10^{42} \text{ kg}.$$

この質量に対応する全エネルギーを運動エネルギーに変換すると、次の関係が得られる（ここでは、 $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ を先に代入し、有効質量 M_Λ を一度全運動エネルギーに変換したとして、そのうちどれだけのエネルギー E が実際に必要となるかを見ることが本当の目的です。そのため、式の展開がやや逆順となっています。）：

$$E = \frac{1}{2} M_\Lambda v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 \approx \sqrt{\frac{2E}{M_\Lambda}} \approx 200 \text{ km/s}.$$

したがって、特性速度スケール $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ は、 Λ_{eff} モデルの枠組みの中で自然に導出される量であり、対応するエネルギー E は観測的に典型的なスケール

$E \sim 10^{52}$ J と整合的である。

また、真空エネルギー全体は $E_\Lambda = M_\Lambda c^2 \approx 10^{59}$ J と見積もられ、 $E \sim 10^{52}$ J はこれと比較して十分に小さく、エネルギー論的一貫性も保たれている。

これらの結果は、スカラー場から導出されたスケール依存項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ が、物理的に妥当な有効宇宙斥力項として機能しうることを定量的に裏付けるものである。

(5) 物理的意味：領域ごとの支配構造

- ・ 中心部 ($r < R$) :

重力項 $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配的

- ・ 中間領域 ($r \approx R$) :

斥力項 v_{rep} が優勢となり、回転速度は平坦化する

- ・ 外縁部 ($r > R$) :

回転速度は緩やかに減衰あるいは再上昇

(対数型構造や $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ のスケール依存性に由来)

使用した代表パラメータとプロット条件

- ・ 万有引力定数 :

$$G = 4.302 \times 10^{-6} \text{ kpc} \cdot (\text{km/s})^2 / M_\odot$$

- ・ 質量密度 (銀河全体の平均) :

$$\rho = 10^6 M_\odot / \text{kpc}^3$$

- ・ スケールパラメータ :

$$R = 5 \text{ kpc}$$

- ・ 特性速度スケール :

$$v_0 = 200 \text{ km/s}$$

- ・ 計算対象の半径範囲 :

$$r = 0.1 \sim 20 \text{ kpc}$$

以上の代表値を用い、先に導出した回転速度の合成式：

$$v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

に基づき、銀河スケールでの回転速度プロファイルを数値的にプロットしたものが Fig. 2 である。

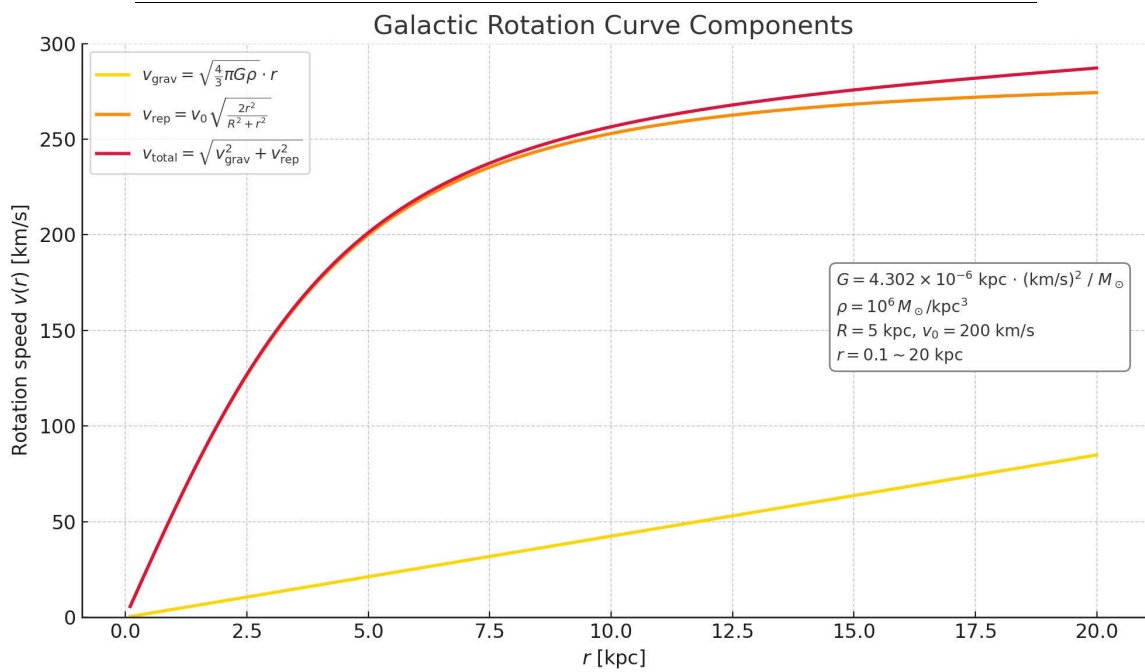


Fig. 2: 銀河回転曲線に対する重力項・斥力項・合成速度の理論モデルに基づく数値プロット。

ところが、Fig. 2 に示す数値シミュレーションの結果から明らかなように、中心部 ($r < R$) において重力項が支配的となることが期待されていたにもかかわらず、全スケールにわたり斥力項が重力項を上回る振る舞いが定量的に確認された。すなわち、銀河内の回転速度は実効的に、スカラー場由来の Λ 項によって支配されていることが明らかとなった。

この結果は、銀河外縁部における回転速度の平坦性のみならず、中心領域においても斥力項が顕著に寄与していることを示しており、対数型斥力項のスケール支配性が想定を超えて広範囲に及ぶ可能性を強く裏付けるものである。

9 ブラックホール特異点回避の条件

- ・ 斥力項：準解スカラー場 $\phi(r)$ に由来するスケール依存型の斥力として、以下の加速度項が得られる：

$$a(r) = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2}$$

ここで、 c_0 は斥力ポテンシャル係数（単位： m^2/s^2 ）であり、空間の斥力応答エネルギースケールを表す。

- ・ 仮定：ブラックホール内部では、斥力加速度が球対称的に作用し、特異点に到達する直前で重力加速度と釣り合うものと仮定する。
- ・ 重力と斥力の釣り合い条件：この仮定のもと、釣り合い条件は以下のように表される：

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2}$$

ここで、 M はブラックホールの質量を表す。

- ・ $R = r$ の採用： $R = r$ を特性スケールとして採用すると、釣り合い条件は次のようになる：

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{c_0}{r} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{GM}{r}$$

- ・ 特異点回避のための臨界条件：ブラックホールの質量エネルギーと斥力エネルギーが等しくなる臨界半径 r_{crit} を定義する。

ここで、斥力エネルギーは次のように与えられる：

$$E_{\text{rep}} = M \cdot c_0 = \frac{GM^2}{r}$$

また、ブラックホールの質量エネルギーは以下の通りである：

$$E_{\text{BH}} = Mc^2$$

本モデルでは、空間の斥力応答はブラックホール自身の質量エネルギーに基づくとして仮定する。したがって、この系は閉じた系としてエネルギー保存則が適用でき、ブラックホール内部に蓄積される斥力エネルギーが、ブラックホール全体の質量エネルギーを超えることはない。よって、両者が等しいとおいて臨界半径を導くと、以下のようになる：

$$E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM^2}{r_{\text{crit}}} = Mc^2 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$$

この結果は、ブラックホールの崩壊が自然に有限スケールで停止することを意味しており、そのスケールは質量 M 、重力定数 G 、および光速 c のみで決定され、その臨界半径はシュワルツシルト半径 r_s のちょうど半分に一致する：

$$r_{\text{crit}} = \frac{1}{2}r_s, \quad \text{ここで} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

したがって、特異点は外部からのカットオフなしに、理論内部に存在する空間の斥力構造そのものによって自律的に回避される。 $(Mc_0 = Mc^2 \ (E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}}))$ より、臨界半径において $c_0 = c^2$ 。よって、特異点はエネルギー保存則と光速上限により禁止される。)

10 ヒッグス機構との一致

本セクションでは、セクション 4 で定義されたポテンシャル

$$V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\phi^2 + \frac{1}{4} R^2 \phi^4$$

から導かれる真空期待値および質量項が、標準模型におけるヒッグス機構と一致することを示す。

標準模型において、ヒッグス機構に対応する有効ポテンシャルは次のように与えられる：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

この構造における真空期待値 v は、極値条件から決定される：

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

真空期待値

Λ_{eff} モデルにおけるポテンシャル $V(\phi(r))$ を微分すると：

$$\frac{dV}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(-2 + R^2\phi^2) = 0$$

したがって、得られる解は以下の通りである：

$$\phi = 0 \quad \text{または} \quad \phi = \pm \frac{\sqrt{2}}{R}$$

よって、自明な解 $\phi = 0$ を除外すれば、 Λ_{eff} モデルにおける真空期待値は：

$$v = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \phi = \pm v$$

ここで整合性を確認するため、 $V(\phi(r))$ と $V_{\text{Higgs}}(\phi)$ における 2 次および 4 次の係数を比較すると、次の関係が得られる：

$$-\phi^2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = 2$$

$$\frac{1}{4}R^2\phi^4 \leftrightarrow \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = R^2$$

したがって、標準模型におけるポテンシャルの最小値の位置は以下の通り：

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \pm \sqrt{\frac{2}{R^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{R}$$

よって、真空期待値は：

$$v = \frac{\sqrt{2}}{R}$$

このように、真空期待値 v は両モデルにおいて一致する。

質量項

整理のため、先に導入したポテンシャル $V(\phi(r))$ を再掲する：

$$V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\phi^2 + \frac{1}{4} R^2 \phi^4$$

物理的な質量項 m^2 を抽出するために、ポテンシャル $V(\phi(r))$ の 2 階微分を計算し、 $\phi = 0$ における値を評価する。

ステップ 1：1 階微分

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(-\phi^2 + \frac{1}{4} R^2 \phi^4 \right) = -2\phi + R^2 \phi^3$$

ステップ 2：2 階微分

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} (-2\phi + R^2 \phi^3) = -2 + 3R^2 \phi^2$$

ステップ 3： $\phi = 0$ における評価

$$\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = -2 + 3R^2 \cdot 0^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = -2$$

比較のため、標準模型におけるヒッグスポテンシャルを再掲する：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

ここで、2 次項（すなわち質量項）の係数は：

$$m^2 = -\mu^2$$

先に得られた結果 $\mu^2 = 2$ を代入すると：

$$m^2 = -2$$

したがって、両モデルにおける質量項は一致する。

以上より、本モデルのポテンシャル $V(\phi(r))$ から導かれる真空期待値および質量項は、標準模型におけるヒッグス機構と完全に一致する。（上で導出された真空期待値の式に観測値 $v = 246 \text{ GeV}$ を代入できる。すると、対応する特性スケール R は以下のように求まる：

$$v = \frac{\sqrt{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{2}}{v} = \frac{\sqrt{2}}{246 \text{ GeV}} \approx 5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$$

ここで、自然単位系（ $\hbar = c = 1$ ）において、 $1 \text{ GeV}^{-1} \approx 1.97 \times 10^{-16} \text{ m}$ を用いて換算すると：

$$R \approx 5.75 \times 10^{-3} \times 1.97 \times 10^{-16} \text{ m} \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m}$$

と定まる。この値は、LHC 実験においてヒッグス粒子が発見された電弱距離スケール $\approx 10^{-18} \text{ m}$ と一致する。）

11 考察と結論

本研究では、変分原理に基づき意図的に準解として構成したスカラー場 $\phi(r)$ から、以下のスケール依存型の有効宇宙項を導出した：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2},$$

これは以下の三つの側面において有効に機能する：

1. 宇宙論との整合性：

有効項 Λ_{eff} は $r = R$ において最大値を取り、

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\text{max}} = \frac{1}{R^2}$$

となる。これを観測されている宇宙定数と同一視すると、 $R \sim 10^{26} \text{ m}$ が得られ、これは可視宇宙のスケール $\sim 10^{26} \text{ m}$ と一致する。

2. 銀河回転曲線の再現：

Λ_{eff} に基づく斥力項を用いて、回転速度の合成式として以下を構成した：

$$v_{\text{total}}^2(r) = v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r).$$

現実的な質量密度モデルおよび代表的なパラメータを用いた数値評価により、この構造が銀河における観測上の平坦な回転速度分布を再現できることが確認された。

3. 特異点回避の可能性：

反発エネルギーがブラックホールの質量エネルギーに等しくなる条件を導出することで、重力崩壊がエネルギー的に禁止される臨界半径 $r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$ を得た。この結果は、外部からのカットオフを必要とせず、提案されたモデル内部の動力学において自然に特異点が回避されることを示唆している。

以上の結果から、 Λ_{eff} モデルは、宇宙論的スケールから銀河構造、さらにはブラックホール内部に至るまで、広範な重力現象を一貫して記述可能な、整合的かつ有効な理論的枠組みを提供することが確認された。

Λ_{eff} の寄与は、従来の引力とは逆方向の幾何学的効果として現れ、宇宙の加速膨張および銀河回転曲線の平坦化という両現象において重要な役割を果たす。

さらに、この幾何学的反発効果は、空間構造に内在する反重力的応答として、曲率特異点の形成を自然に防ぐ機構としても現れる。

本モデルの予測精度に関する定量的評価と観測データとの整合性検証は、今後の理論発展および実験的検証において中心課題であり続ける。その第一歩として、本スカラーポテンシャル構造の枠組みの中で、ヒッグス機構との一致を確認した。

参考文献

- [1] Vera C. Rubin and W. Kent Ford. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophysical Journal*, 159:379, 1980.
- [2] Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39:137–174, 2001.
- [3] Roger Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57–59, 1965.
- [4] Planck Collaboration. Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters. arXiv preprint, 2018.
- [5] T. Padmanabhan. Cosmological Constant—The Weight of the Vacuum. *Physics Reports*, 380(5-6):235–320, 2003.