

変分セクションに関する構造的補足

本モデルは、厳密解ではなく準解 $\phi(r)$ を意図的に採用している。その理由は、厳密解を課すことで特性スケール $r = R$ の物理的意義が消失し、空間のスケール応答的構造という本質的な挙動を再現できなくなるためである。

仮に厳密解を強制すると、 $r = R$ というスケールは座標変換や対称性に基づく縮退によって吸収されてしまう可能性が高い。その場合、 R は物理的に意味を持つスケールとしての地位を失い、冗長なパラメータとなることで、スケール依存の意味ある構造は記述されなくなる。

準解であることは弱点ではなく、本モデルの構造的基盤である。それこそが、スケール依存的な空間力学を実現する鍵である。

この準解の妥当性を検証するために、変分残差解析を実施した。その結果、極値条件の破れは局所的かつ制御されており、物理的に意味のあるものであることが確認された。この挙動は Fig. 1 に視覚的に示されている。

準解の使用を、欠陥や妥協と誤解しないようにしてください。これは欠点ではなく、理論の核であり、本構造の根幹であるからです。

重要なのは、この準解が近似のために採用されたのではなく、有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ を導出するうえでの構造的役割のために導入されたという点である。

なお、このことは、宇宙全体の構造や場の基本方程式そのものが準解であることを意味するものではない。

本研究の目的は、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ のような準解構造が、その他の部分が厳密解で記述される宇宙において、機能的に作用し得るかを検証することにある。

また、本論文における「対数型」という用語は、厳密な log 関数式そのものを意味するのではなく、関数の形状が対数的であるという定性的特徴を指している。

正式なバージョンは Zenodo で公開されています。

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17447350>

スカラー場と有効 Λ 項に基づく斥力応答型重力理論

Misaki Kasai

2025 年 5 月 30 日

概要

本研究では、スカラー場に起因する空間のスケール応答的な幾何学的斥力効果をもたらす有効 Λ 項 Λ_{eff} を導出することで、Einstein 方程式の枠組みを重力理論から、斥力応答を基盤とした斥力応答型重力理論へと拡張する方法を提示する。 Λ_{eff} の効果は空間スケールに依存し、特に銀河スケールおよびブラックホール内部における重力の構造的性質そのものを再定義する役割を果たす可能性がある。銀河回転曲線の外縁部にみられる平坦化と、ブラックホール特異点の回避という二つの観測的・理論的问题に対して、共通のスカラー場項 Λ_{eff} による統一的かつ定量的な解決を提示する。

1 銀河回転曲線問題と特異点問題の概観

近年の観測により、銀河の外縁部における恒星の回転速度が、重力理論（一般相対性理論）と通常のバリオン物質量から期待される値を大きく上回ることが明らかとなった。これはいわゆる「銀河回転曲線問題」であり、ダークマターの存在を前提としない限り、既存の重力理論では説明が困難であるとされてきた [1, 2]。

一方、ブラックホール内部における重力崩壊は、古典的には $r \rightarrow 0$ 極限で特異点（無限の曲率）を生じることが知られており、これもまた一般相対性理論の構造的限界を示唆していると考えられている [3]。この「特異点問題」は、重力理論において量子補正または構造的修正の必要性を強く示唆する。

2 Λ CDM の成功と限界

現代宇宙論の標準モデルである Λ CDM は、宇宙マイクロ波背景（CMB）、バリオン音響振動（BAO）、Ia 型超新星などの観測と高精度に整合する成功を収めている [4]。しかしその一方で、宇宙定数 Λ は静的・一様な定数として定義されており、空間構造やスケール依存性を含まないという制約をもつ。

また、 Λ CDM はダークマターやダークエネルギーといった「見えない成分」に依存しているが、これらの正体は未解明である。これらは理論的には補助項として振る舞い、物理的実在性の根拠が希薄であるという批判も根強い [5]。

3 動機：主語としての斥力

本研究では、「重力=引力（空間の歪み）」という視点を基本とする一般相対性理論とは対照的に、斥力応答を主語とする重力理論の構築を試みる。具体的には、スカラー場に由来する有効 Λ 項 Λ_{eff} を導入し、空間スケールに依存する幾何学的斥力として機能することで、銀河スケールからブラックホール特異点スケールまでの重力構造を統一的に説明する枠組みを提案する。

なお、本研究は、Einstein 方程式における宇宙定数 Λ を定数のまま保持する立場を探る。ただし、その効果は、スカラー場 $\phi(r)$ の対数型構造を通じてスケール依存的に現れ、観測可能な重力構造として $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ に反映される。このようにして、 Λ CDM の哲学的背景を保ちつつ、その構造的限界を乗り越える重力理論を構築することを目的とする。

4 スカラー場と有効 Λ 項 Λ_{eff}

このセクションでは、有効 Λ 項

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

が、球対称かつ静的なスカラー場に対して変分原理を適用することで構造的に導出されることを示す。

ここで、 R は空間スケールにおける特性長（characteristic scale）であり、 R および r は観測と突合されるまでは無次元量として扱われる。

初めに、スカラー場に対する標準的なローレンツ不变なラグランジアン密度を考える。すなわち、その一般形は：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

ここで、幾何学的有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ の空間的等方性を保証し、特性スケール R を保持するために、場の構成は球対称かつ静的、すなわち $\phi = \phi(r)$ に制限する。もし異方性を含めた場合、スケール R は座標変換によって吸収され、その物理的意味を失ってしまうためである。したがって、ラグランジアンは次の形をとる：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - V(\phi(r))$$

この定式化は、標準的なラグランジアン構造のローレンツ不变性を破ることを意味するものではない。

ここで、異方性が排除された等方的な幾何学的斥力テンソルは次のように定義される：

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \equiv \Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu}$$

この構造を実現する自然なスカラー場として、以下を選択する：

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}$$

このとき、 $\phi(r)$ を用いたポテンシャル $V(\phi(r))$ は以下のように展開される：

$$\begin{aligned} \phi(r)^2 &= \left(\frac{2r}{R^2 + r^2}\right)^2 = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} \\ V(\phi(r)) &= -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} \left(4 - \frac{4R^2 r^2}{(R^2 + r^2)^2}\right) \\ &= \underbrace{-\frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}}_{\text{主項}} + \underbrace{\frac{4R^2 r^4}{(R^2 + r^2)^4}}_{\text{第二項 (補正項)}} \end{aligned}$$

ここで、第二項は補正項として主要構造をわずかに変形するが、主項は明確に：

$$V(\phi(r)) \propto -\Lambda_{\text{eff}}(r), \quad \Lambda_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

特に $r \ll R$ では第二項は主項に比べて十分に小さく、また $r \gg R$ においても：

$$\underbrace{\frac{r^2}{(R^2 + r^2)^2} \sim \frac{1}{r^2}}_{\text{主項}}, \quad \underbrace{\frac{r^4}{(R^2 + r^2)^4} \sim \frac{1}{r^4}}_{\text{第二項 (補正項)}}$$

となり、補正項の寄与は急速に減衰する。

さらに中間スケールにあたる $r = R$ においても、

$$\underbrace{\frac{4R^2}{(2R^2)^2} = \frac{1}{R^2}}_{\text{主項}}, \quad \underbrace{\frac{4R^2 R^4}{(2R^2)^4} = \frac{1}{4R^2}}_{\text{第二項 (補正項)}}$$

より、補正項は主項の $1/4$ にとどまる。

したがって、空間の全領域にわたって主項が支配的であることから、 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ はスカラー場ポテンシャル $V(\phi(r))$ から直接かつ自然に導出されることが示される。

5 スカラー場に対する変分評価

本セクションでは、セクション 4 で構成した有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ から導かれるスカラー場 $\phi(r)$ のラグランジアンが、変分原理（オイラー=ラグランジュ方程式）に基づく極値条件を満たすかどうかを評価する。ここで、我々は特に、空間スケール $r = R$ の近傍において極値条件が局所的に破れ始め、その破れが $r \gg R$ の領域で急速に減衰することを期待する。

このような挙動は、採用された $\phi(r)$ の構造から自然に予測されるものであり、特性スケール R が消えずに保持されている確認になると同時に、宇宙の加速膨張が極値条件の局所的な破れと密接に関係している可能性を示唆するためである。

なお、ここで議論される極値条件の破れは、保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ の破れを直接的に意味するものではないことに注意されたい。

セクション 4 より、スカラー場とそれに対応するポテンシャルは：

$$\phi(r) = \frac{2r}{R^2 + r^2}, \quad V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2)$$

よって、静的・球対称のもとでのラグランジアン密度は：

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi(r)) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2)$$

したがって、このラグランジアンから導出されるオイラー=ラグランジュ方程式は以下のように与えられる：

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = R^2\phi^3 - 2\phi$$

この条件のもとで、極値条件からのずれ（変分残差）は次のように定義される：

$$\delta(r) \equiv \frac{d^2\phi}{dr^2} - (R^2\phi^3 - 2\phi)$$

スカラー場 $\phi(r)$ をこの式に代入すると、変分残差は明示的に次の形で与えられる：

$$\delta(r) = \left[\frac{4r(r^2 - 3R^2)}{(R^2 + r^2)^3} \right] - \left[\frac{8R^2r^3}{(R^2 + r^2)^3} - \frac{4r}{R^2 + r^2} \right]$$

ここで、特性スケール $R = 2$ は、スカラー場構造および有効 Λ 項の挙動が最も明瞭に現れる値であり、解析結果および数値グラフの可視性を高める目的も兼ねて選ばれる。この条件に基づき、スカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$ を数値的に評価した。その結果得られたプロットを Fig. 1 に示す。

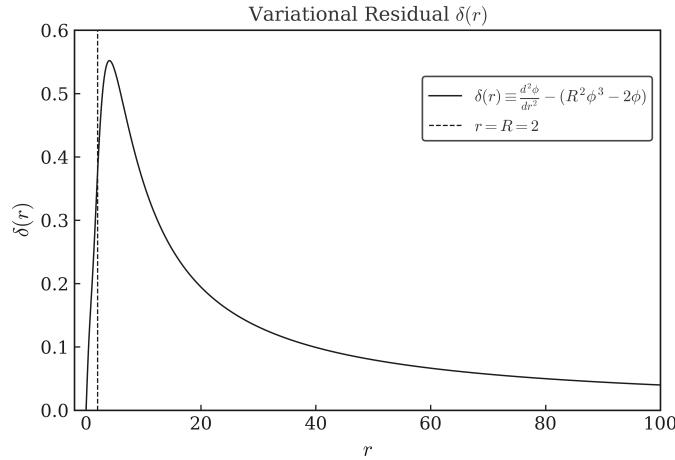


Fig. 1: スカラー場 $\phi(r)$ に対する変分残差 $\delta(r)$

Fig. 1 から、変分残差 $\delta(r)$ は空間スケール $r = R$ において局所的なずれを生じ、その後 $r > R$ にピークを迎え、以降急速に減衰していく様子が確認される。この結果は、スカラー場が特に $r = R$ を認識し、それに応答していること、また極値条件の破れが局所的かつ非瞬間的であることを示している。このような挙動は、持続的な加速膨張の性質とも整合的である。

解析の範囲は $r \in [0.0001, 100]$ に設定した。この区間内における変分残差 $\delta(r)$ の最大値は以下の通りである：

$$\delta_{\max} \approx 0.552 \quad \text{at} \quad r \approx 4.10$$

この残差の有意性を評価するため、極値条件に対する相対誤差を次のように定義する：

$$\epsilon_\phi(r) \equiv \left| \frac{\delta(r)}{\phi(r)} \right|$$

残差が最大となる点 ($r \approx 4.10$)において、スカラー場の値は $\phi(r) \approx 0.394$ である。したがって：

$$\epsilon_\phi \approx 1.40$$

同様に、特性スケール $r = R = 2$ における相対誤差は以下の通りである：

$$\epsilon_\phi(R) = \left| \frac{\delta(R)}{\phi(R)} \right| = 0.750 \quad (\delta(R) = 0.375, \phi(R) = 0.500)$$

特性スケール $r = R$ 付近において、相対誤差は極値条件の局所的な破れと見なせる範囲に収まっている。このときの値 $\epsilon_\phi(R) = 0.750$ は、本関数が準解として妥当であることを裏付けている。

一方で、変分残差 $\delta(r)$ は $r \approx 4.10$ 付近で最大値を取り、このとき相対誤差はおよそ $\epsilon_\phi \approx 1.40$ に達する。しかし、このスケールにおいては $\phi(r)$ 自身が減衰して小さくなるため、分母が小さくなることで相対誤差が見かけ上過大評価される。したがって、準解の妥当性を評価するうえでは、主に $r = R$ 付近に注目するのがより適切である。

以上の評価に基づき、本研究で採用されたスカラー場 $\phi(r)$ は、等方性により保証された特性スケール R を吸収してしまうような厳密解の代わりに、 R を保持しながら変分原理に著しく反することのない準解として定式化され、同時に極値条件の局所的破れ $\delta(r)$ は、スカラー場 $\phi(r)$ 励起のための必要条件であることがわかる。

本論文では、準解 $\phi(r)$ から構成された有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ に基づく構造全体を、 Λ_{eff} モデル（または $f\Lambda$ 理論）として以後参照する。

6 観測値 Λ との整合性

導出したスケール依存型の有効 Λ 項：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

は、 $r = R$ において最大値をとり、その値は次のように与えられる：

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\max} = \Lambda_{\text{eff}}(r)|_{r=R} = \frac{4R^2}{(R^2 + R^2)^2} = \frac{4R^2}{4R^4} = \frac{1}{R^2}$$

ここで、この最大値を観測されている宇宙定数：

$$\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

として同定すれば、

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx 10^{26} \text{ m}$$

となり、これは宇宙論スケール、 $\sim 10^{26} \text{ m}$ と一致する。

したがって、宇宙論スケールの特性スケールとして、 $R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \equiv R_c$ が自然に定義される。

このことは、本研究で導出されたスカラー場由来の有効 Λ 項が、観測的宇宙定数と自然に整合する構造を持つことを意味しており、 Λ_{eff} が宇宙論的斥力の実体として有力な候補であることを示している。

7 拡張 Einstein 方程式

拡張 Einstein 方程式は、以下のとおり記述される：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$$

$r \ll R_c$ となる局所スケール（たとえば太陽系スケール）では、

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$$

となり、従来の Einstein 方程式へ自然に帰結する。

よって、水星の近日点移動や重力赤方偏移といった、Einstein 方程式によって精密に説明されて

きた観測事実とも整合する。

また、有効 Λ 項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ は次のように書き換えることができる：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2} = \frac{1}{R^2} F\left(\frac{r}{R}\right), \quad F(x) = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \equiv \frac{r}{R}$$

ここで、先ほどの拡張 Einstein 方程式に Bianchi 恒等式を適用すると、幾何学-物質間のエネルギー交換（すなわち局所的な非保存）を表す交換流 J を明示的な形で定義することができる。静的かつ球対称な条件においては、半径方向のみが残るから、

$$J_\nu \equiv \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} = \frac{1}{\kappa} \partial_\nu \Lambda_{\text{eff}}, \quad J_r = \frac{1}{\kappa R^3} \frac{dF}{dx}$$

すなわち、局所的な保存則は破れるが、半径方向および体積全体の流束は：

$$\int_0^\infty J_r dr = 0, \quad \Phi(r) = 4\pi r^2 J_r \Rightarrow \Phi(0) = \Phi(\infty) = 0$$

となり、幾何学-物質間のエネルギー交換は空間全体で厳密に釣り合い、大域的なエネルギー保存が保証される。

さらに、局所的非保存を表す交換流 J_r が無視できるほど小さくなるような宇宙論スケール $r \sim R_c \sim 10^{26} \text{ m}$ では、

$$\left| \frac{d\Lambda_{\text{eff}}}{dr} \right| \sim 10^{-78} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \Lambda_{\text{eff}} \approx \text{const.}$$

となり、Friedmann 方程式が自然に再現される：

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

8 銀河回転曲線への適用

8.1 重力項：現実的線形近似モデル

銀河の中心部においては、バリオン成分が比較的密集しており、球対称かつ一様密度の近似モデルが適用可能である。このとき、半径 r 内に含まれる質量 $M(r)$ は次のように表される：

$$\rho = \text{const} \Rightarrow M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

この質量分布により生じる重力ポテンシャルから、回転速度は次のように導かれる：

$$v_{\text{grav}}^2(r) = \frac{GM(r)}{r} = \frac{G}{r} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) = \frac{4}{3}\pi G \rho r^2, \Rightarrow v_{\text{grav}} \propto r$$

これは、銀河回転曲線の内側（中心近傍）における線形増加傾向と整合する。実際、観測的にも中心付近の回転速度は $v \propto r$ に近い傾向を示しており、このモデルは銀河中心部における重力支配領域の良い近似となる。

8.2 斥力項：回転速度と平坦化

一様密度モデルによる重力項が銀河中心部で支配的である一方、銀河外縁部における平坦な回転曲線を説明するには、それとは異なる力学的寄与が必要である。

$$v_{\text{rep}}^2(r) = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

ここで：

- v_0 は斥力項に由来する代表的な特性速度スケール（単位：m/s）であり、
- 銀河外縁部 ($r > R$) において支配的になる。

観測に基づく代表値として $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ を採用する。この構造は、中心部では寄与が小さく、 $r \rightarrow \infty$ で漸近的に一定値 $v_{\text{rep}} \rightarrow \sqrt{2}v_0$ に収束するため、回転速度の平坦化を自然に再現する。

8.3 エネルギー合成による回転速度

本モデルにおける重力的な回転速度と斥力的寄与は、互いに独立なエネルギー項と見なせる。

したがって、観測される回転速度は次のようなエネルギーの二乗和として合成される：

$$v_{\text{total}}^2(r) = v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r) \Rightarrow v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

この合成構造により、

- 中心部では $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配し、
- 外縁部では $v_{\text{rep}} \rightarrow \sqrt{2}v_0$ により回転曲線が平坦化される。

したがって、本構造はダークマターを仮定することなく銀河回転曲線の特徴を再現できること

を示しており、 Λ_{eff} の有効性を裏付ける。

8.4 Λ_{eff} の有効エネルギーからの速度 $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ の導出

特性速度スケール $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ は、セクション 6 の結果および ΛCDM モデルにおける真空エネルギー密度式に基づいて導出できる。したがって、幾何学的有効斥力エネルギー密度は次のように与えられる（セクション 6 より、 $r = R_c$ において $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda$ であるから、）：

$$\rho_{\Lambda_{\text{eff}}}(R_c) = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

この有効エネルギー密度を、半径 $R \approx 1000 \text{ kpc} \approx 3.1 \times 10^{22} \text{ m}$ の球対称領域にわたって積分すると、有効質量は以下のように求まる（セクション 6 より、 $10^{22} \text{ m} \ll 10^{26} \text{ m}$ であるため、 ρ_Λ はこの範囲では一定とみなして積分できるから、）：

$$M_\Lambda = \rho_\Lambda \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 10^{42} \text{ kg}$$

この有効質量に対応するエネルギーの一部が運動エネルギーに変換されるとすると、次の関係が得られる：

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M_\Lambda v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 \approx 200 \text{ km/s} \approx \sqrt{\frac{2E_{\text{rot}}}{M_\Lambda}}$$

したがって、特性速度スケール $v_0 \approx 200 \text{ km/s}$ は、 Λ_{eff} モデルの枠組みの中で自然に導出される量であり、対応するエネルギー $E_{\text{rot}} \approx 2 \times 10^{52} \text{ J}$ は観測的に典型的なスケール $E_{\text{obs}} \sim 10^{52} \text{ J}$ と整合的である。

また、幾何学的な斥力エネルギー全体は $E_\Lambda = M_\Lambda c^2 \approx 10^{59} \text{ J}$ と見積もられ、 $E_{\text{rot}} \approx 2 \times 10^{52} \text{ J}$ はこれと比較して十分に小さく、エネルギー論的一貫性も保たれている。

これらの結果は、スカラー場から導出されたスケール依存項 $\Lambda_{\text{eff}}(r)$ が、物理的に妥当な幾何学的斥力項として機能しうることを定量的に裏付けるものである。

8.5 物理的意味：領域ごとの支配構造

- 中心部 ($r < R$) :

重力項 $v_{\text{grav}} \propto r$ が支配的

- 中間領域 ($r \approx R$) :

斥力項 v_{rep} が優勢となり始める

- 外縁部 ($r > R$) :

斥力項が支配的となり、回転速度は漸近的に平坦になる。これは、 Λ_{eff} の対数型構造とスケール依存性を反映している。

使用する代表パラメータとプロット条件

- 万有引力定数 : $G = 4.302 \times 10^{-6} \text{ kpc} \cdot (\text{km/s})^2 / M_{\odot}$
- 質量平均密度 : $\rho = 10^6 M_{\odot} / \text{kpc}^3$
- 各銀河の特性スケール (代表値) : $R = 5 \text{ kpc}$
- 各銀河の特性速度スケール (代表値) : $v_0 = 200 \text{ km/s}$
- 計算対象の半径範囲 : $r = 0.1 \sim 20 \text{ kpc}$

以上の代表値を用い、先に導出した回転速度の合成式 :

$$v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}$$

に基づき、銀河スケールでの回転速度プロファイルを数値的にプロットしたものが Fig. 2 である。

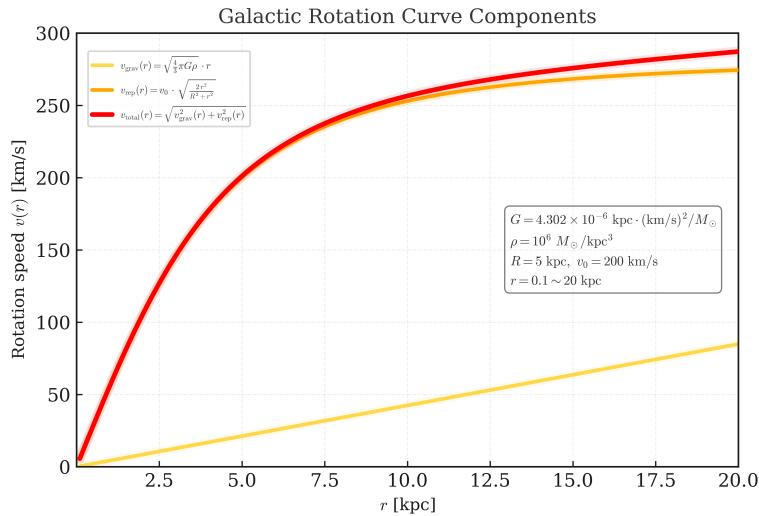


Fig. 2: 銀河回転曲線に対する重力項・斥力項・合成速度の理論モデルに基づく数値プロット。

ところが、Fig. 2 に示す数値シミュレーションの結果から明らかなように、中心部 ($r < R$) において重力項が支配的となることが期待されていたにもかかわらず、全スケールにわたり斥力項が重力項を上回る振る舞いが定量的に確認された。すなわち、銀河内の回転速度は実効的に、スカラー場由来の Λ 項によって支配されていることが明らかとなった。

この結果は、銀河外縁部における回転速度の平坦性のみならず、中心領域においても、銀河の特性スケール $R \sim \text{kpc} \equiv R_g$ によって特徴づけられる斥力項が顕著に寄与していることを示しており、対数型斥力項のスケール支配性が想定を超えて広範囲に及ぶ可能性を強く裏付けるものである。

したがって、銀河回転曲線は、以下の斥力項によって系統的に再現されることがわかる：

$$v_{\text{rep}}(r) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2r^2}{R^2 + r^2}}$$

9 ブラックホール特異点の回避と臨界半径

スカラー場 $\phi(r)$ から導かれる斥力加速度は：

$$a_{\text{rep}}(r) = c_0 \cdot \phi(r) = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2}$$

ここで、 c_0 は斥力ポテンシャル係数（単位： m^2/s^2 ）であり、斥力場における空間的な特性エネルギースケールを表す。なお、この加速度式は、円運動条件 $a = \frac{v^2}{r}$ を通じて、セクション 8.2 で定義された回転速度式と一意に対応している。

$$a_{\text{rep}}(r) = \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2} \quad \stackrel{c_0=v_0^2}{\iff} \quad v_{\text{rep}}^2(r) = \frac{2v_0^2 r^2}{R^2 + r^2} = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

ブラックホール内部においては、斥力加速度が重力加速度と釣り合うと考えられるため、その釣り合い条件は次式で与えられる：

$$a_{\text{rep}}(r) = g(r) \Rightarrow \frac{2c_0 r}{R^2 + r^2} = \frac{GM}{r^2}$$

ここで、 M はブラックホールの質量を表す。

$a_{\text{rep}}(r)$ が極大値 a_{rep}^{\max} をとる点 $r = R = r_{\text{crit}}$ において、

$$\frac{c_0}{r_{\text{crit}}} = \frac{GM}{r_{\text{crit}}^2} \Rightarrow c_0 = \frac{GM}{r_{\text{crit}}}$$

また、このとき、臨界半径における斥力エネルギーは、

$$E_{\text{rep}} = M \cdot c_0 = \frac{GM^2}{r_{\text{crit}}}$$

一方、ブラックホールの全質量エネルギーは、

$$E_{\text{BH}} = Mc^2$$

ここで、静的・球対称において、空間の斥力応答はブラックホール自身の質量エネルギーに基づくとすれば、この系は閉じた系としてエネルギー保存則が適用でき、ブラックホール内部に蓄積される斥力エネルギーが、ブラックホール全体の質量エネルギーを超えることはない。よって、両者が等しいとおいて臨界半径を導くと、

$$E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}} \Rightarrow \frac{GM^2}{r_{\text{crit}}} = Mc^2 \Rightarrow r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$$

が得られ、これは、シュワルツシルト半径のちょうど半分に一致する：

$$r_{\text{crit}} = \frac{1}{2} r_s, \quad \text{ここで } r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

よって、ブラックホールの特性スケール $R = \frac{1}{2} r_s \equiv R_{\text{BH}}$ が自然に定義される。

また、 $M \cdot c_0 = Mc^2$ ($E_{\text{rep}} = E_{\text{BH}}$) より、臨界半径において $c_0 = c^2$ 。したがって、特異点はエネルギー保存則と光速上限により禁止される。

のことから、特異点は外部からのカットオフなしに、理論内部に存在する空間の斥力構造そのものによって自律的に回避されることがわかる。

さらに幾何学的な帰結として、ブラックホールシャドウは、臨界半径 $r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$ によって特徴づけられ、その光子球の半径は：

$$r_{\text{ph}} = \frac{3}{2} r_s = 3 r_{\text{crit}}$$

重力レンズ効果を考慮したシャドウ半径は：

$$b_c = \frac{r_{\text{ph}}}{\sqrt{1 - \frac{2r_{\text{crit}}}{r_{\text{ph}}}}} = 3\sqrt{3} r_{\text{crit}}$$

よって、シャドウの直径は：

$$D = 2b_c = 6\sqrt{3} r_{\text{crit}}$$

したがって、次の無次元比が得られる：

$$\frac{D}{r_{\text{crit}}} = 6\sqrt{3} \approx 10.4$$

この値は正規化なしにあらゆるブラックホールに適用できる普遍的な値であり、イベントホライズンテレスコープ (EHT) による観測値、M87* (約 11.0) および Sgr A* (約 10.0) とよく一致する。

また、臨界半径 r_{crit} における斥力加速度を a_{rep}^{\max} とおけば、臨界半径において $c_0 = c^2$ であるから、

$$a_{\text{rep}}^{\max} = \frac{c^2}{r_{\text{crit}}}$$

ここで、 $r_{\text{crit}} = \frac{GM}{c^2}$ を代入すれば、

$$a_{\text{rep}}^{\max} = \frac{c^2}{\frac{GM}{c^2}} = \frac{c^4}{GM}$$

したがって、ブラックホール内部において、斥力加速度・重力加速度とともに、この値を超えることはない。

ここで、 a_{rep}^{\max} をプランク加速度

$$a_P \equiv \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}$$

に等しいとおけば、

$$\frac{c^4}{GM} = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}} \implies M = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

が得られ、これはプランク質量 $m_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ と一致する。

すなわち、ブラックホールがたとえプランクスケールにまで圧縮されたとしても、その質量はこ

の基本的限界（プランク質量）を超えることはできないことがわかる。

10 ヒッグス機構との一致

本セクションでは、セクション4で定義された Λ_{eff} モデルのスカラー場ポテンシャル：

$$V(\phi(r)) = -\frac{1}{4} \cdot \phi^2 (4 - R^2 \phi^2) = -\phi^2 + \frac{1}{4} R^2 \phi^4$$

が、ヒッグス機構における質量生成構造と直接的に対応していることを示す。

Λ_{eff} モデルのポテンシャル $V(\phi(r))$ から真空期待値(VEV)を得るために、 ϕ について微分すると、

$$\frac{dV(\phi(r))}{d\phi} = 0 \Rightarrow \phi(-2 + R^2 \phi^2) = 0$$

その解は：

$$\phi = 0 \quad \text{または} \quad \phi = \pm \frac{\sqrt{2}}{R}$$

したがって、自明な解 $\phi = 0$ を除外すれば、 Λ_{eff} モデルにおける真空期待値：

$$v = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \phi = \pm v$$

が得られる。観測から定められたヒッグス場の真空期待値 $v \approx 246 \text{ GeV}$ を代入すれば、

$$R = \frac{\sqrt{2}}{v} = \frac{\sqrt{2}}{246 \text{ GeV}} \approx 5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$$

自然単位系($\hbar = c = 1$)において、 $1 \text{ GeV}^{-1} \approx 1.97 \times 10^{-16} \text{ m}$ であるから、

$$R \approx 5.75 \times 10^{-3} \times 1.97 \times 10^{-16} \text{ m} \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m}$$

この値は、LHC実験においてヒッグス粒子が発見された電弱距離スケール $\sim 10^{-18} \text{ m}$ と一致する。よって、 $R = \frac{\sqrt{2}}{v} \equiv R_h$ が自然に定義される。ここで、Yukawa結合は、

$$y_f = \frac{R_h}{R_f}, \quad R_f \equiv \frac{1}{m_f}$$

と書き換えることができ、両辺に對数を取れば、スケール空間における距離として以下のように

表すことができる：

$$\log y_f = \Delta\nu, \quad \Delta\nu \equiv \log R_h - \log R_f$$

ここで、標準模型におけるヒッグスボテンシャルは：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad m_h^2 = 2\lambda v^2$$

これらの関係式を明示的に代入すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\frac{1}{4}m_h^2\phi^2 + \frac{m_h^2}{8v^2}\phi^4$$

これを細分化すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\left(\frac{m_h}{2}\right)^2\phi^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{v}\right)^2\left(\frac{m_h}{2}\right)^2\phi^4$$

ここで、

$$\frac{m_h}{2} \equiv \check{m}$$

とおいて、前述の関係式 $R_h = \frac{\sqrt{2}}{v}$ を代入すると：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\check{m}^2\phi^2 + \frac{1}{4}R_h^2\check{m}^2\phi^4$$

整理すれば：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = \check{m}^2\left(-\phi^2 + \frac{1}{4}R_h^2\phi^4\right)$$

したがって、質量次元付与と質量無次元化を橋渡しする自然な選択として $\check{m} = 1$ が導かれる。

ここで、自然単位系として $\hbar = c = \check{m} = 1$ を採用し、 $R_h = \frac{\sqrt{2}}{v}$ を一般の特性スケール R に置き換えれば、質量無次元化された普遍的なスカラー場ボテンシャル：

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = -\phi^2 + \frac{1}{4}R^2\phi^4$$

が得られる。これは Λ_{eff} モデルのボテンシャル $V(\phi(r)) = -\phi^2 + \frac{1}{4}R^2\phi^4$ と完全に一致する。

ここで、ヒッグススケールにおける特性質量スケール \check{m} を用いると、自己結合定数は、

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} \equiv R_h^2 \check{m}^2$$

と表せる。 $\hbar = c = 1$, $\check{m} \neq 1$ を採用すれば、 $R_h \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m} \approx 5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$, $\check{m} = \frac{m_h}{2} \approx 62.5 \text{ GeV}$ であるから、

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} \approx (5.75 \times 10^{-3} \text{ GeV}^{-1})^2 \cdot (62.5 \text{ GeV})^2 \approx 0.129$$

が得られる。これは標準模型におけるヒッグス自己結合定数 $\lambda \approx 0.129$ と一致する。

本セクションにおけるこれらの結果は、質量生成が、幾何学的な斥力応答によって駆動されていることを示している。

ダブルヒッグス (hh) 生成は可能か？

単一のヒッグス粒子 (h) の生成は、特性長さスケール R_h に対応する領域内で、2つの半質量量子状態 $|m_h/2\rangle_{1,2}$ の重ね合せにより起こる：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|m_h/2\rangle_1 + |m_h/2\rangle_2) \Rightarrow |h\rangle$$

この重ね合わせは、次の関係式に反映される：

$$\lambda_{\Lambda_{\text{eff}}} = R_h^2 \left(\frac{m_h}{2} \right)^2$$

これに対して、ダブルヒッグス (hh) の生成は、2つの独立したヒッグス重ね合わせ状態によって表される：

$$|hh\rangle = |h\rangle \otimes |h\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (|m_h/2\rangle_1 + |m_h/2\rangle_2) \otimes (|m_h/2\rangle_3 + |m_h/2\rangle_4)$$

しかし、特性長さスケール $R_h \approx 1.13 \times 10^{-18} \text{ m}$ に対応するエネルギー階級は、 $1/R_h \approx 174 \text{ GeV}$ であるため、総エネルギー $\approx 250 \text{ GeV}$ をもつ4つの半質量を同一の R_h スケール領域内に局在させようとすると、

$$E_{hh} \equiv 4 \cdot \left(\frac{m_h}{2} \right) \approx 250 \text{ GeV} > E_{R_h} \equiv \frac{1}{R_h} \approx 174 \text{ GeV}$$

となり、閉じ込め可能なエネルギー階級の限界を超えることになる。

したがって、半質量の4点重ね合わせ、すなわちダブルヒッグス生成は、 R_h スケールの閉じ込め限界によりエネルギー的に禁止される。

11 考察と結論

本研究では、特性スケール R を保持しながら変分原理とも整合する準解として定式化されたスカラー場 $\phi(r)$ から、スケール依存性を持つ以下の有効 Λ 項を導出した：

$$\Lambda_{\text{eff}}(r) = \frac{4r^2}{(R^2 + r^2)^2}$$

これは以下の三つの側面において有効に機能する：

1. 宇宙論との整合性

有効 Λ 項 Λ_{eff} は $r = R$ において最大値を取り、

$$\Lambda_{\text{eff}}^{\max} = \frac{1}{R^2}$$

となる。これを観測されている宇宙定数 Λ として同定すると、 $R \approx 10^{26} \text{ m}$ が得られ、これは宇宙論スケール $\sim 10^{26} \text{ m}$ と一致する。

2. 銀河回転曲線の再現

Λ_{eff} に基づく斥力項を用いた回転速度の合成式：

$$v_{\text{total}}(r) = \sqrt{v_{\text{grav}}^2(r) + v_{\text{rep}}^2(r)}, \quad v_{\text{grav}}^2(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r^2, \quad v_{\text{rep}}^2(r) = v_0^2 \cdot \frac{2r^2}{R^2 + r^2}$$

が、現実的な質量密度モデルおよび代表的なパラメータを用いた数値評価により、この構造が銀河における観測上の平坦な回転速度分布を再現することが示された。また、その結果、銀河全域にわたって、 Λ_{eff} に基づく幾何学的斥力項が、重力項よりも優勢であることが確認された。

したがって、銀河の回転曲線は以下の斥力項によって系統的に特徴づけられる：

$$v_{\text{rep}}(r) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2r^2}{R^2 + r^2}}$$

3. 特異点回避の可能性

斥力エネルギーがブラックホールの質量エネルギーに等しくなる条件を導出することで、それ以上の重力崩壊がエネルギー保存則と光速上限のダブルロックにより禁止される臨界

半径 $r_{\text{crit}} = \frac{1}{2} r_s$ を得た。この結果は、外部からのカットオフを必要とせず、空間が持つ幾何学的な斥力構造により特異点が必然的に回避されることを示している。

以上の結果から、 Λ_{eff} モデルは、宇宙論的スケールから銀河構造、さらにはブラックホール内部に至るまで、広範な重力現象を一貫して記述可能な、整合的かつ有効な理論的枠組みを提供することが確認された。

本モデルの理論的発展と、観測的・実証的検証は、今後の中心的課題であり続ける。その第一歩として、本スカラーポテンシャル構造の枠組みの中で、ヒッグス機構との一致を確認した。

参考文献

- [1] Vera C. Rubin and W. Kent Ford. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophysical Journal*, 159:379, 1980.
- [2] Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation Curves of Spiral Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39:137–174, 2001.
- [3] Roger Penrose. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57–59, 1965.
- [4] Planck Collaboration. Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters. *arXiv preprint*, 2018.
- [5] T. Padmanabhan. Cosmological Constant—The Weight of the Vacuum. *Physics Reports*, 380(5-6):235–320, 2003.