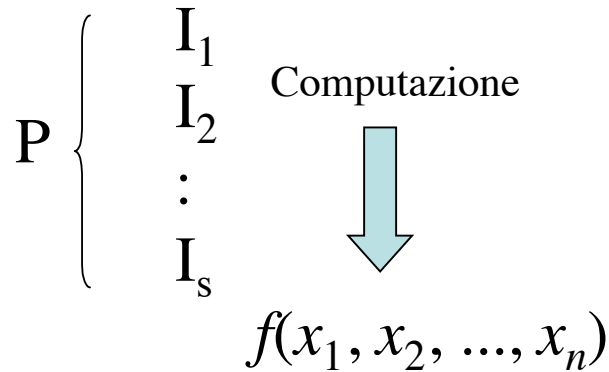
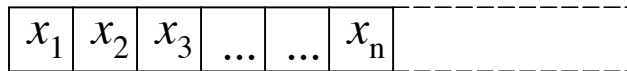
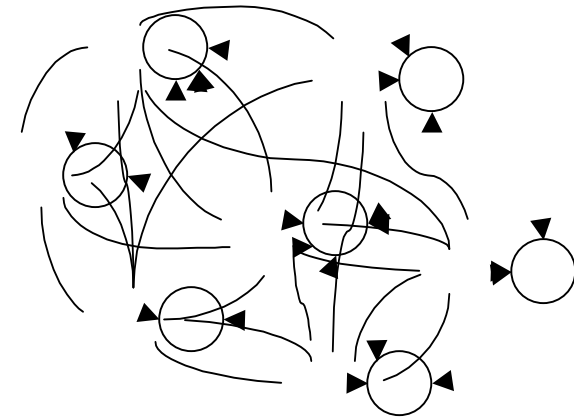


Reti neurali: un modo diverso per concepire la computazione



Complessità computazionale
(temporale)



Complessità strutturale
(circuitale)

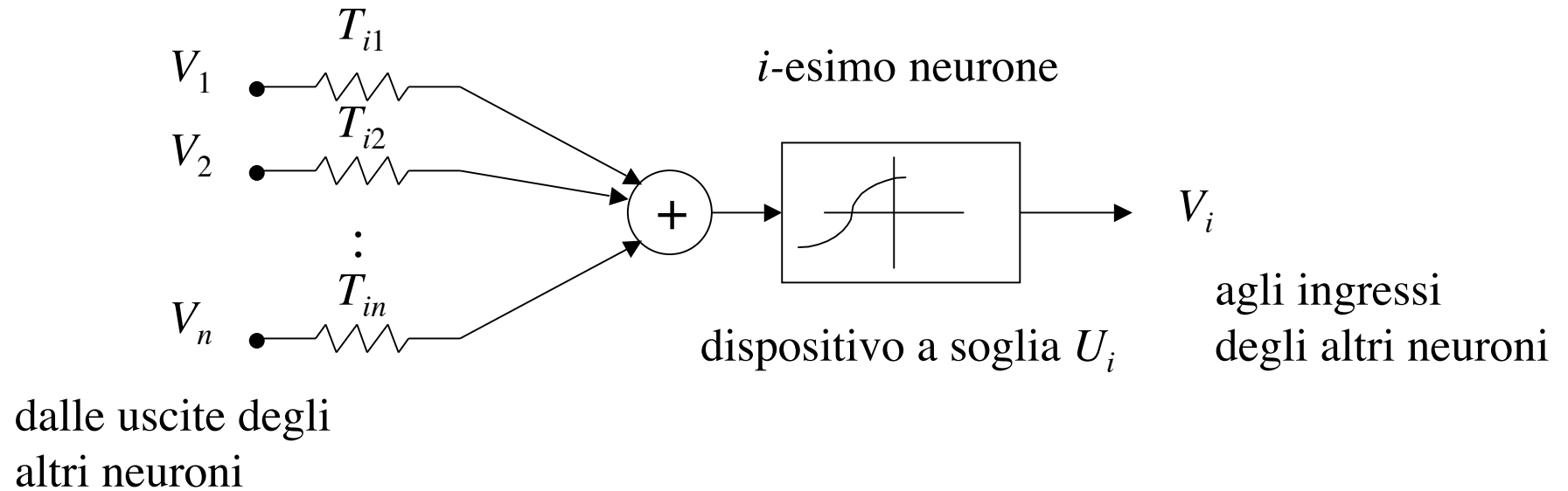
La computazione è di tipo *collettivo* ed emerge come proprietà dell'evoluzione dinamica della rete.

Ogni decisore locale (neurone) non ha visibilità della computazione globale

Ogni decisore locale concorre alla soluzione globale in modo sfumato

La rete è *robusta* rispetto a malfunzionamenti locali

Rete (discreta) di Hopfield

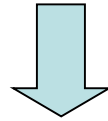


$$V_i \text{ diventa } 1 \text{ se } \sum_{i \neq j} T_{ij} V_j > U_i$$

$$V_i \text{ diventa } 0 \text{ se } \sum_{i \neq j} T_{ij} V_j < U_i$$

V_i diventa 1 se $\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j > U_i$ ($\Delta V_i > 0$)

V_i diventa 0 se $\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j < U_i$ ($\Delta V_i < 0$)



$$\Delta E = -\Delta V_i (\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j - U_i) < 0$$

perché

se $\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j - U_i > 0$ allora $\Delta V_i > 0$

se $\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j - U_i < 0$ allora $\Delta V_i < 0$

$$\Delta E = -\Delta V_i \left(\overbrace{\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j}^{\text{attivazione}} - U_i \right)$$

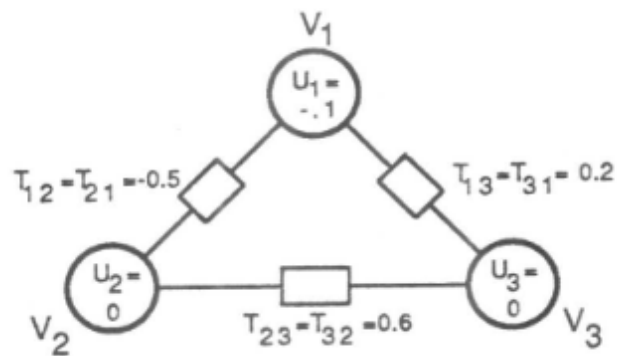
$$E_i = -V_i \left(\sum_{j \neq i} T_{ij} V_j - U_i \right) \quad \text{energia del neurone } i\text{-esimo}$$

$$\boxed{T_{ij} = T_{ji}} \quad \text{ipotesi di interazione simmetrica tra neuroni}$$

$$E = -1/2 \sum_{ij} T_{ij} V_i V_j + \sum_{ij} V_i U_i$$

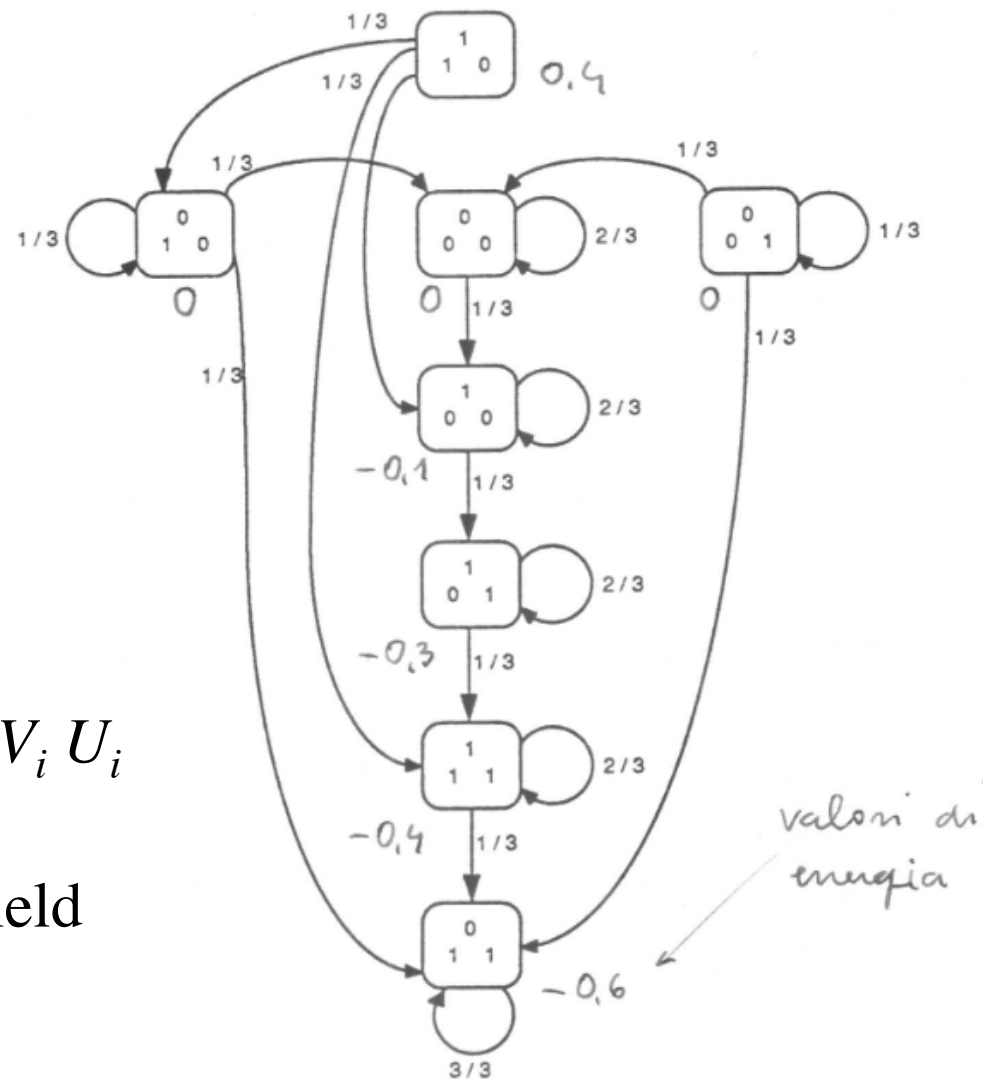
energia della rete di Hopfield

l'energia decresce sempre durante l'evoluzione della rete fino a raggiungere un minimo

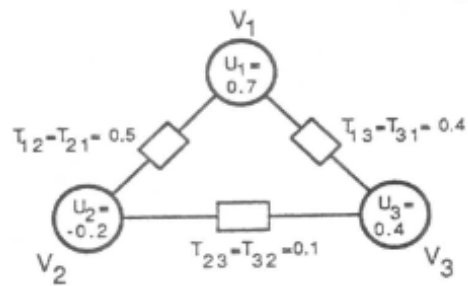


$$E = -1/2 \sum_{ij} T_{ij} V_i V_j + \sum_{ij} V_i U_i$$

energia della rete di Hopfield



In ogni istante discreto ogni neurone ha la stessa probabilità di essere eccitato (firing), il che consiste nella verifica della compatibilità del suo valore di uscita sulla base della somma pesata degli ingressi



$V_1 = 0$ stabile

$$T_{12} V_2 + T_{13} V_3 - U_1 < 0$$

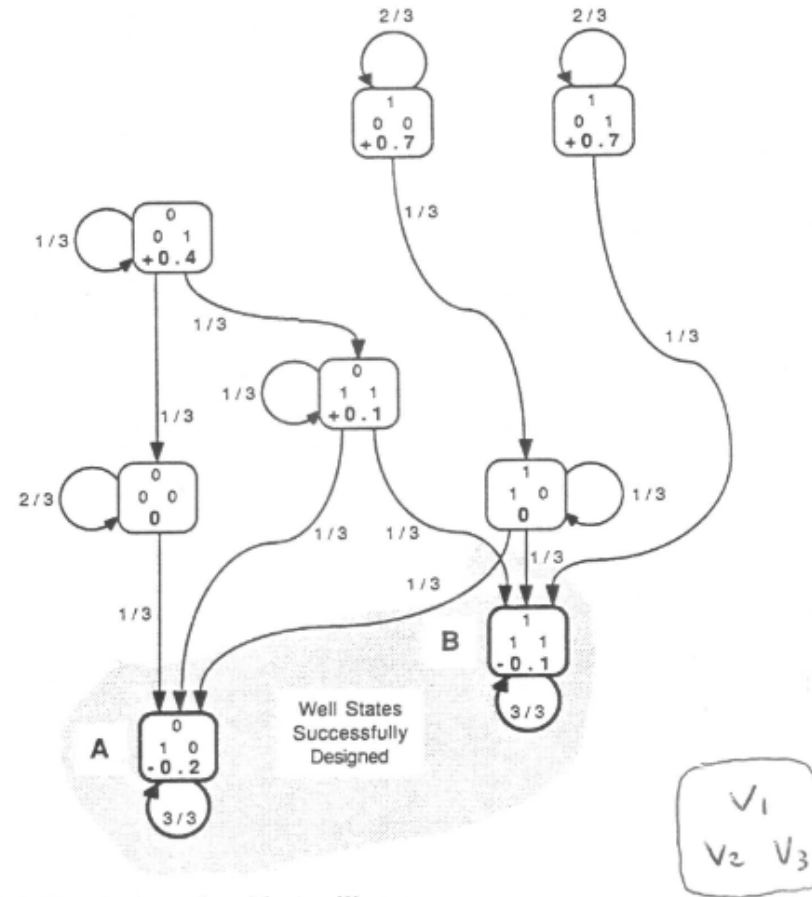
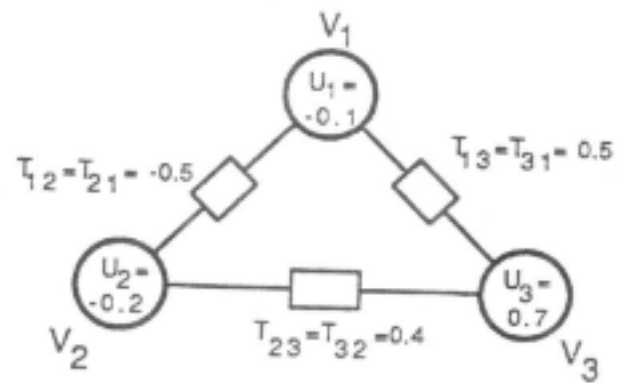
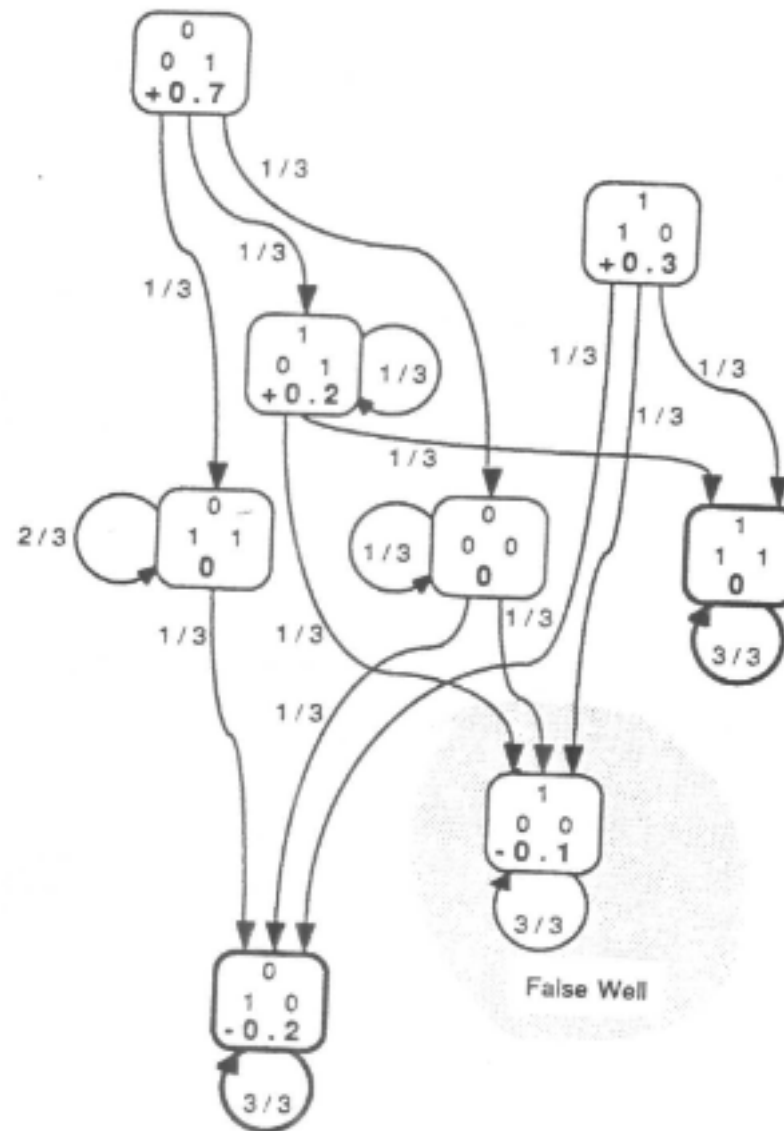


Fig. 6.3 The design of stable 'well' states.

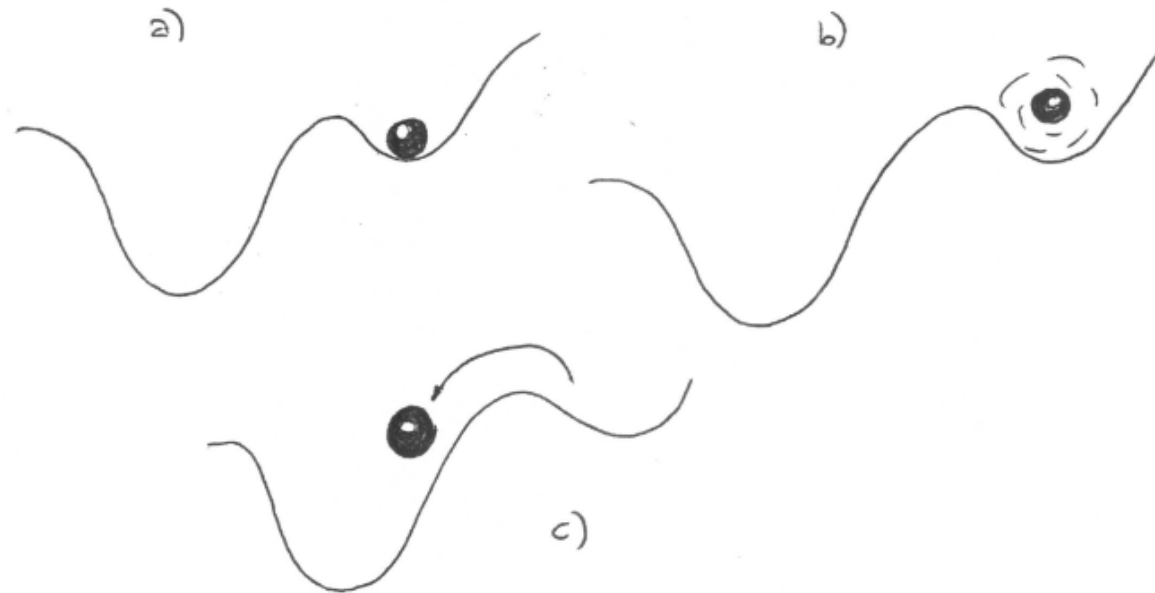
$$\left\{ \begin{array}{l} T_{12} - U_1 < 0 \\ U_2 < 0 \\ T_{23} - U_3 < 0 \end{array} \right. \quad \text{imposizione A stato stabile} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{12} + T_{13} - U_1 > 0 \\ T_{12} + T_{23} - U_2 > 0 \\ T_{23} + T_{13} - U_3 > 0 \end{array} \right. \quad \text{imposizione B stato stabile}$$



problema dei falsi minimi
(o minimi locali)



Boltzmann machine



Riscaldiamo
probabilisticamente
la rete

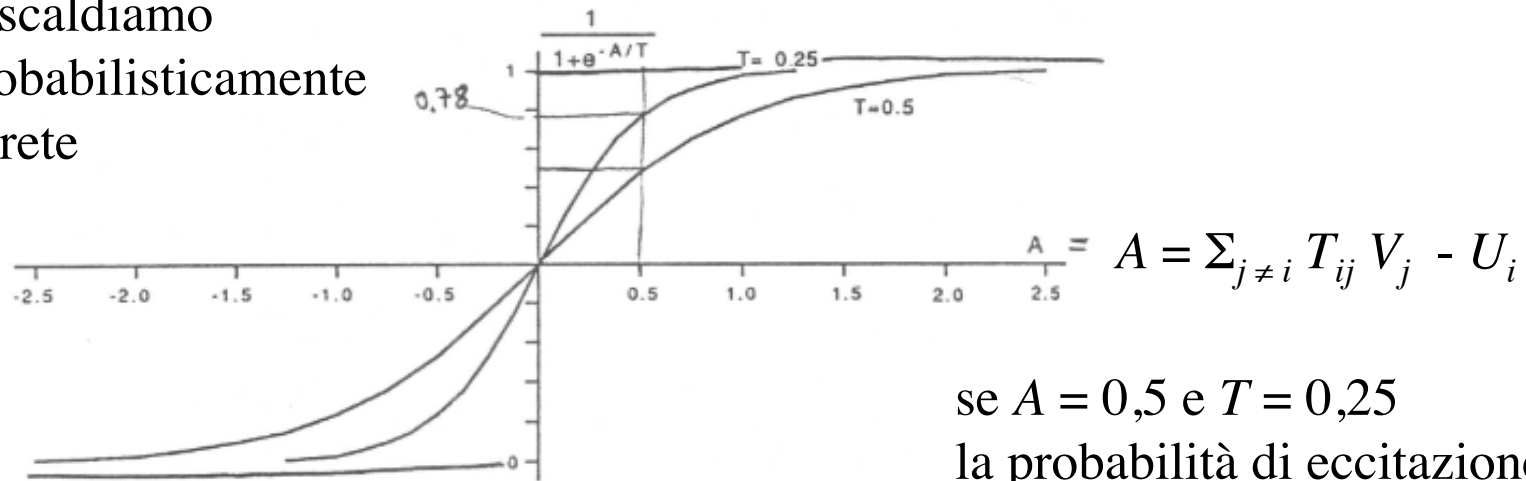


Fig. 7.4 The S-shaped Boltzmann firing probability function.

se $A = 0,5$ e $T = 0,25$
la probabilità di eccitazione
del neurone sarà 0,78 invece di 1

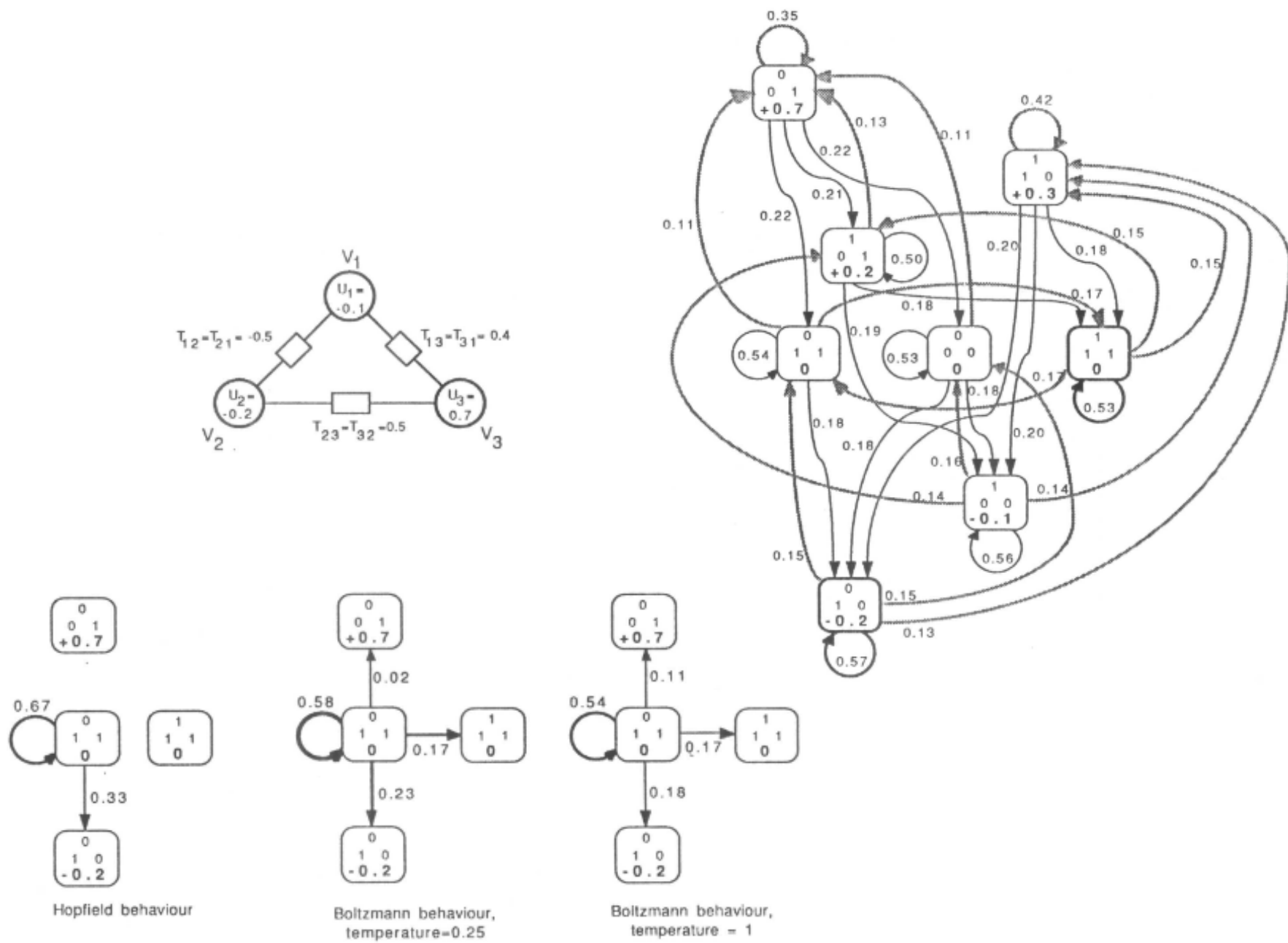
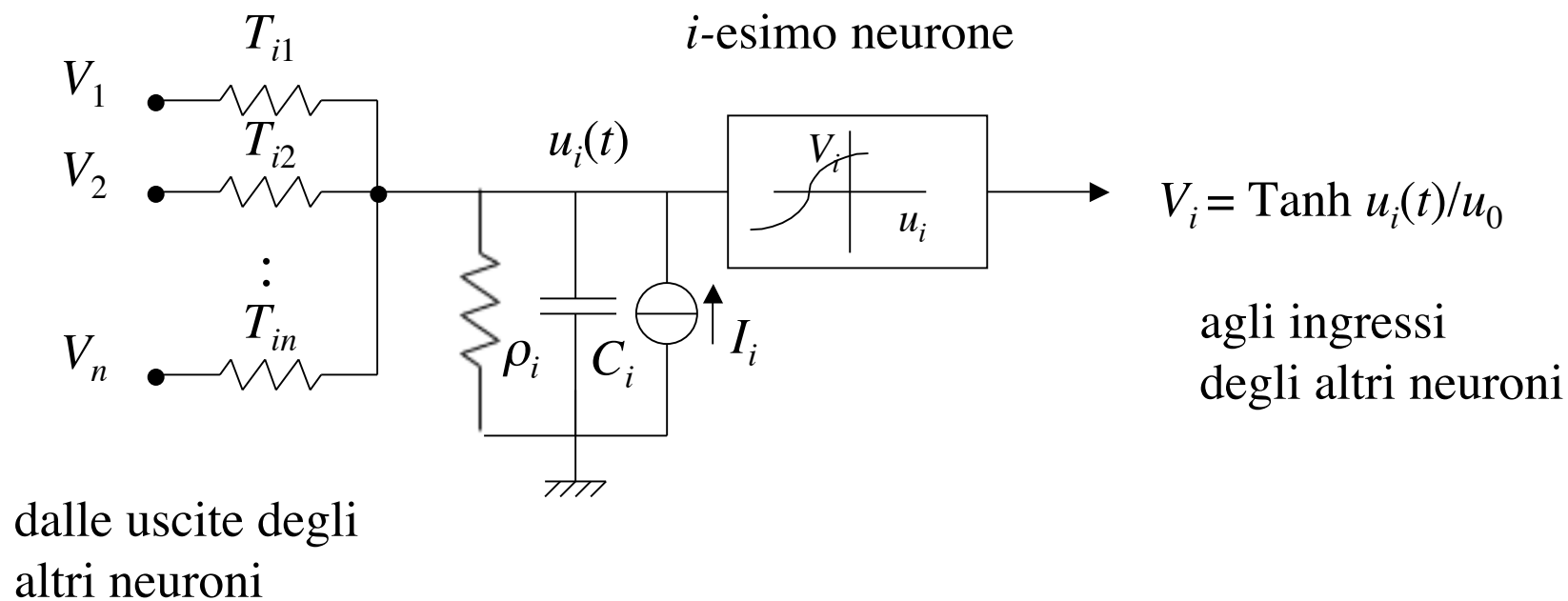


Fig. 7.5 Transition probabilities at different temperatures.

Rete (continua) di Hopfield



$$\sum_j (V_j - u_j) T_{ij} + I_i = C_i \frac{du_i}{dt} + u_i / \rho_i$$

$$E = -1/2 \sum_{ij} T_{ij} V_i V_j + \sum_i 1/R_i \int_0^{V_i} g_i^{-1}(V) dV - \sum_i I_i V_i$$

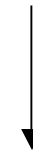
$$dE/dt = \sum_i dE/dV_i \, dV_i/dt$$

$$dE/dV_i = - \sum_j T_{ij} V_j + u_i/R_i - I_i = - C_i \, du_i/dt$$

$$dE/dt = - \sum_i dV_i/dt \left(\sum_j T_{ij} V_j - u_i/R_i + I_i \right) = - \sum_i (dV_i/dt)(du_i/dt) C_i =$$

$$= - \sum_i C_i (dV_i/dt)^2 (du_i/dV_i) = - \sum_i C_i (dV_i/dt)^2 g_i^{-1'}(V_i) \leq 0$$

$$dE/dt \leq 0 \quad (= 0 \text{ sse } dV_i/dt = 0 \text{ per ogni } i)$$



> 0 poiché è

monotona crescente

“Soluzione” di problemi con una rete di Hopfield

Con una rete di Hopfield si può risolvere un problema solo se lo stesso può essere codificato nei termini della *minimazione di una forma quadratica*.

Individuata la forma quadratica associata al problema, per confronto si ricavano i valori T_{ij} e I_i che ci consentono di costruire la rete.

Memoria indirizzabile

Vogliamo che V^s ($s = 1, 2, \dots, n$) siano stati stabili in una rete con n neuroni

quantità da minimare $E^* = - 1/2 \sum_s (V^s V)^2$ poiché quando $V=V^s$

l'energia assume il valore minimo negativo

Se V è casuale la E^* deve essere circa nulla ($-1 \leq V_i \leq +1$)

Se $V=V^s$ si ha $E^* = - 1/2 n^2$

Allora impongo

$$E = -1/2 \sum_s (V^s V)^2 = \dots = -1/2 \sum_i \sum_j \left(\sum_s V_i^s V_j^s \right) V_i V_j$$



dal confronto
si ricava

$$E = -1/2 \sum_{ij} T_{ij} V_i V_j - \sum_i I_i V_i$$



$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ij} = \sum_s V_i^s V_j^s \\ I_i = 0 \end{array} \right.$$

Problema delle somme parziali

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) (V_1, V_2, \dots, V_n) = S \quad a_i \text{ interi positivi}$$

$$V_i \in \{0, 1\}$$

Funzione da rendere minima

$$E = 1/2 (S - \sum_i a_i V_i)^2 - 1/2 \sum_i a_i^2 V_i(V_i-1)$$

= ...

↑
associata al problema

condizione al contorno
= 0 se $V_i = 0$ o $V_i = 1$

$$= - 1/2 \sum_i \sum_{j \neq i} (-a_i a_j) V_i V_j - \sum_i (-a_i^2/2 + S a_i) V_i + S^2/2$$

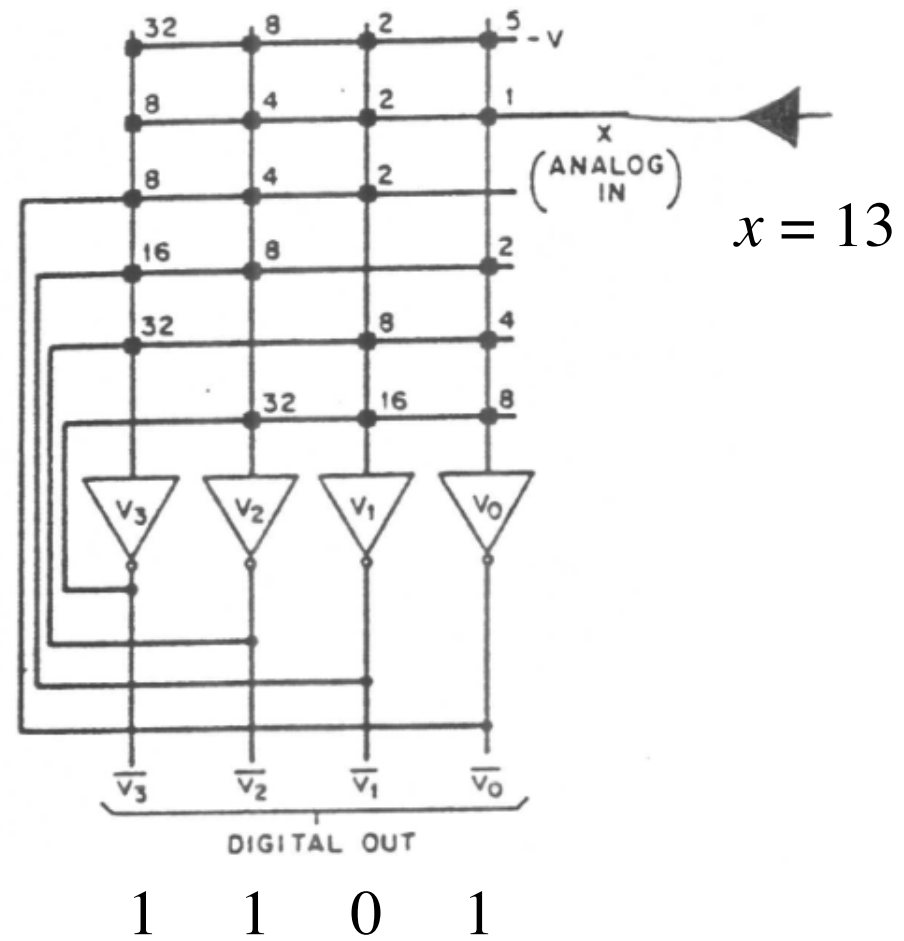
T_{ij}

I_i

Esempio:

convertitore A/D

con $a_i = 2^i$



Traveling salesman problem

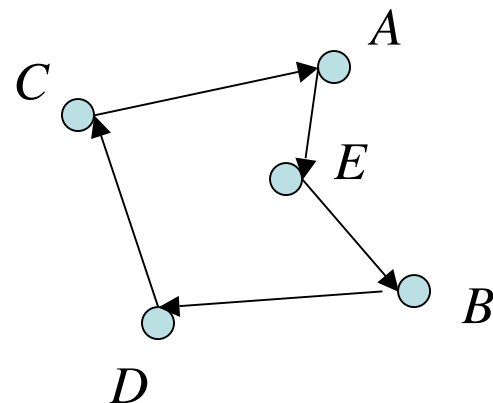
n città A, B, C, \dots

distanze reciproche

$d_{AB} d_{AC} d_{BC} d_{AD} \dots$

percorso $C-A-E-B-D$

$$d = d_{CA} + d_{AE} + d_{EB} + d_{BD}$$



	1	2	3	4	5
A	0	1	0	0	0
B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0

codifica del percorso $C-A-E-B-D$

condizione al contorno
 = 0 se ogni riga
 contiene un solo 1

condizione al contorno
 = 0 se ogni colonna
 contiene un solo 1

$$E = \alpha/2 \sum_X \sum_i \sum_{j \neq i} V_{X_i} V_{X_j} + \beta/2 \sum_i \sum_X \sum_{X \neq Y} V_{X_i} V_{Y_j}$$

$$+ \delta/2 \left(\sum_X \sum_i V_{X_i} - n \right)^2 + \gamma/2 \sum_X \sum_{X \neq Y} \sum_i d_{XY} V_{X_i} (V_{Y_{i+1}} + V_{Y_{i-1}})$$

= 0 se ci sono
 esattamente n 1
 condizione al contorno

percorso da rendere minimo

	1	2	3	4	5
A	0	1	0	0	0
B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	0	1	0	0

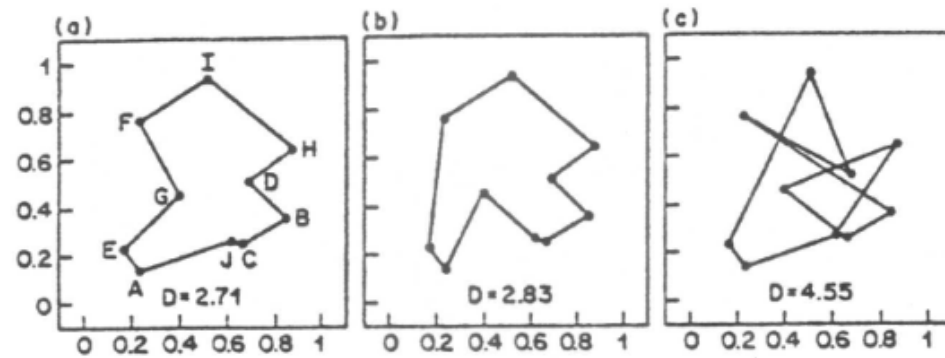


Fig. 3a-c. **a, b** Paths found by the analog convergence on 10 random cities. The example in **a** is also the shortest path. The city names *A ... J* used in Fig. 2 are indicated. **c** A typical path found using a two-state network instead of a continuous one

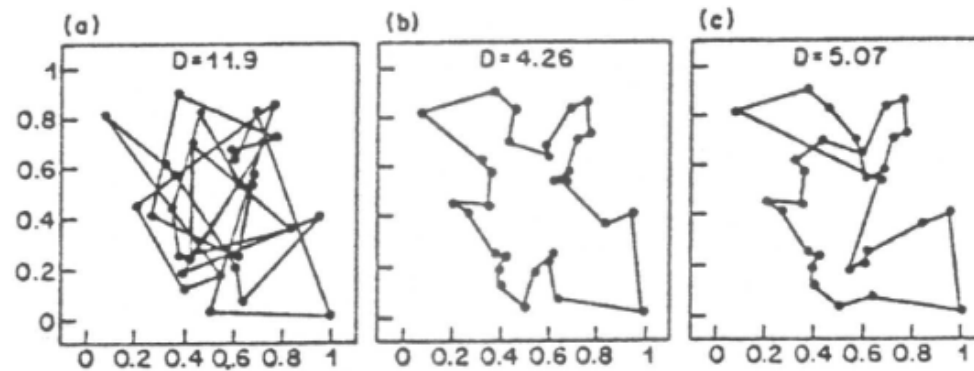
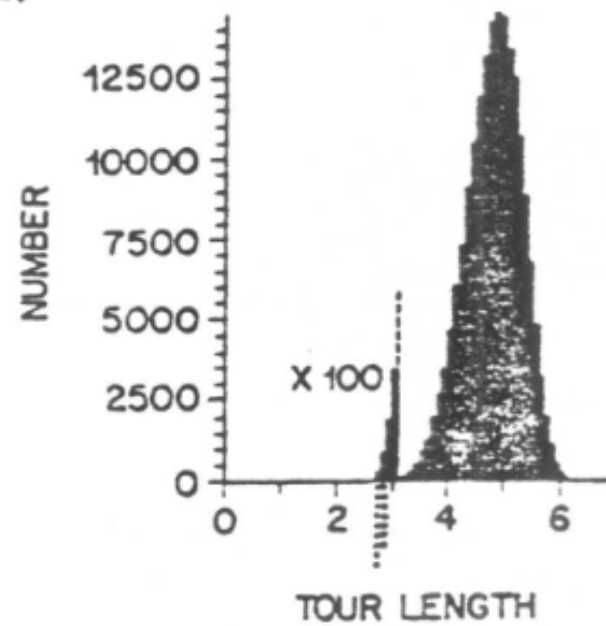
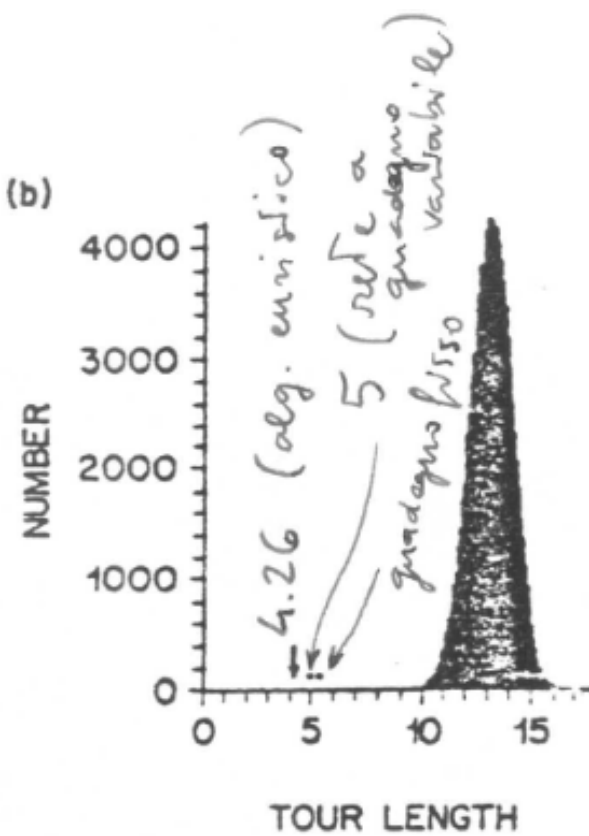


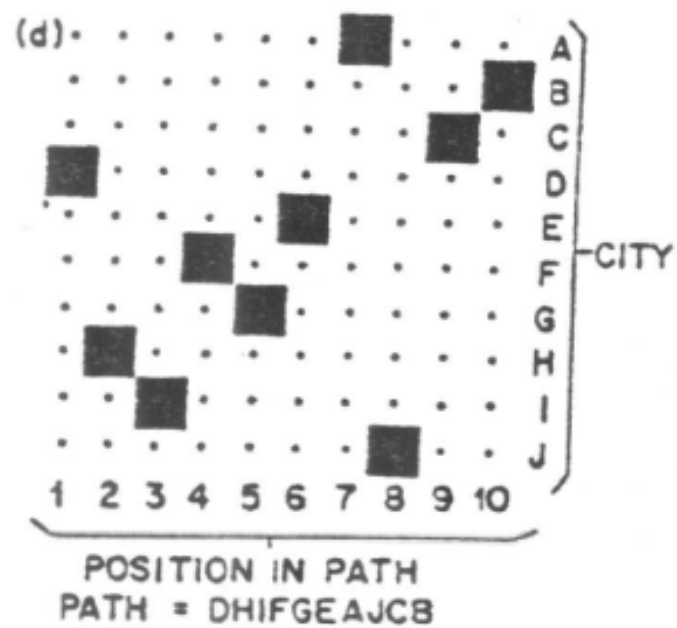
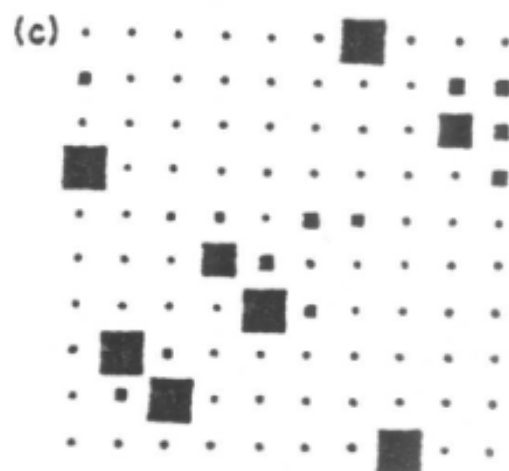
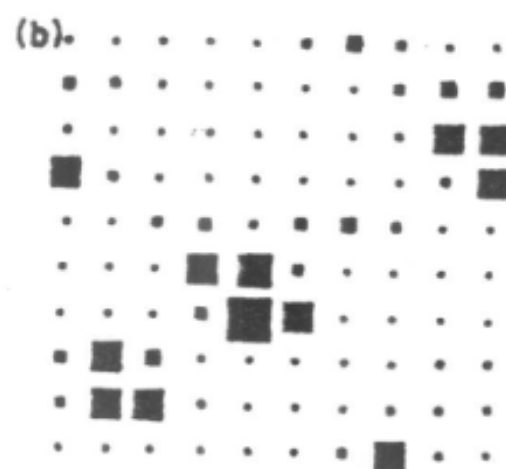
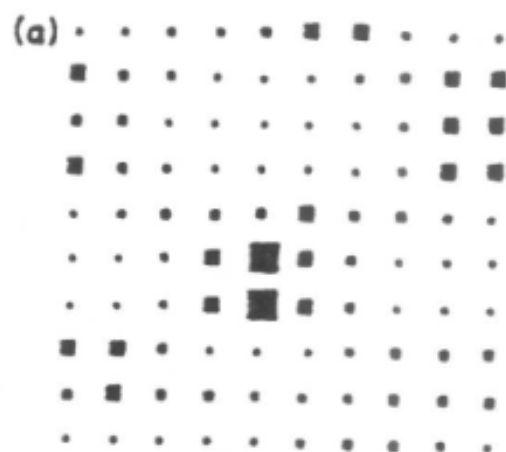
Fig. 4a-c. **a** A random tour for 30 random cities. **b** The Lin-Kernighan tour. **c** A typical tour obtained from the analog network by slowing increasing the gain

(a)



(b)





Pregi

- nuovo ed interessante paradigma computazionale
- robustezza rispetto ai pesi (guasti)
- risposte in tempo reale nel caso di realizzazione hardware
- la metafora biologica lascia ben sperare

Difetti

- manca una formalizzazione adeguata
- non ci sono garanzie sulla qualità delle soluzioni trovate e in generale non si ottengono soluzioni ottime
- problema dei falsi minimi
- escono sempre sconfitte nel confronto con algoritmi dedicati
- altissima complessità strutturale
- dipendenza dei pesi dal problema (il che rende difficile la realizzazione hardware)

A.K. Dewdney 1997, "Although neural nets do solve a few toy problems, their powers of computation are so limited that I am surprised anyone takes them seriously as a general problem-solving tool."

