



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO

CORSO DI ELETTRONICA

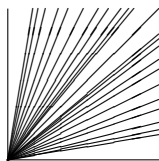
---

# Appunti

---

*Autore:*  
Luca PACE

25 gennaio 2012



## Prefazione

*Il presente documento è stato scritto con lo scopo di aiutare lo studente che deve affrontare l'esame di Elettrotecnica a ripetere gli argomenti trattati durante il corso, riassumendo i concetti fondamentali del programma. Tale documento NON deve assolutamente essere usato in sostituzione dei libri di testo.*

# Indice

<b>1</b>	<b>I Modelli Circuitali</b>	<b>4</b>
1.1	Potenza ed Energia Elettrica . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Regime Sinusoidale</b>	<b>6</b>
2.1	Metodo Simbolico . . . . .	6
2.1.1	Proprietà di Unicità . . . . .	7
2.1.2	Proprietà di Linearità . . . . .	7
2.1.3	Proprietà di Derivazione . . . . .	7
2.2	Potenza ed Energia in Regime Sinusoidale . . . . .	7
2.2.1	Potenza Media . . . . .	8
2.2.2	Potenza Complessa . . . . .	8
2.2.3	Caratterizzazione della Potenza Complessa . . . . .	9
2.2.4	Energia in Regime Sinusoidale . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Proprietà dei Circuiti</b>	<b>11</b>
3.1	Grafo di un Circuito e sue Proprietà . . . . .	11
3.1.1	Grafo, Grafo Orientato, Sottografo . . . . .	11
3.1.2	Grafo Connesso . . . . .	12
3.1.3	Maglia . . . . .	12
3.1.4	Albero, coalbero . . . . .	12
3.1.5	Grafo Planare . . . . .	13
3.1.6	Anello . . . . .	13
3.1.7	Insieme di Taglio . . . . .	13
3.2	Equazioni di Kirchhoff Indipendenti . . . . .	14
3.2.1	Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Correnti . . . . .	14
3.2.2	Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Tensioni . . . . .	15
3.3	Conservazione delle Potenze Elettriche e Teorema di Tellegen . . . . .	16
3.3.1	Teorema di Tellegen . . . . .	17
3.4	Proprietà Di Non Amplificazione . . . . .	18
3.4.1	Non Amplificazione delle Tensioni . . . . .	18
3.4.2	Non Amplificazione Delle Correnti . . . . .	19
3.5	Potenziali di Nodo . . . . .	20
3.6	Correnti di Maglia . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Doppi Bipoli</b>	<b>25</b>
4.1	Generatori Controllati Lineari . . . . .	25
4.1.1	Generatore di Tensione Controllato in Tensione . . . . .	25
4.1.2	Generatore di Tensione Controllato in Corrente . . . . .	26

4.1.3	Generatore di Corrente Controllato in Tensione . . . . .	27
4.1.4	Generatore di Corrente Controllato in Corrente . . . . .	28
4.2	Trasformatore . . . . .	28
4.2.1	Mutuo Accoppiamento . . . . .	29
4.2.2	Trasformatore Reale . . . . .	31
4.3	Doppi Bipoli di Resistori Lineari . . . . .	31
4.3.1	Rappresentazione dei Doppi Bipoli . . . . .	31
4.3.2	Proprietà di Reciprocità . . . . .	32
4.4	Matrici delle Conduttanze e delle Resistenze . . . . .	34
4.4.1	Matrici delle Conduttanze . . . . .	34
4.4.2	Matrici delle Resistenze . . . . .	36
4.5	Matrici Ibride e di Trasmissione . . . . .	37
4.5.1	Matrici Ibride . . . . .	37
4.5.2	Matrici di Trasmissione . . . . .	39
4.6	Sintesi di un Bipolo Resistivo Lineare . . . . .	41
4.6.1	Configurazione a “ $T$ ” . . . . .	41
4.6.2	Configurazione a $\Pi$ . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Circuiti a-Dinamici Lineari</b> . . . . .	<b>44</b>
5.1	Generatore Equivalente di Thèvenin-Norton . . . . .	44
5.1.1	Generatore Equivalente di Thèvenin . . . . .	44

# Capitolo 1

## I Modelli Circuitali

### 1.1 Potenza ed Energia Elettrica

L'energia (assorbita o erogata), così come il lavoro, è associata a un intervallo di tempo. Indichiamo con  $\Delta W^{(a)}$  l'energia assorbita dal bipolo nell'intervallo di tempo  $(t, t + \Delta t)$  e con  $\Delta W^{(e)}$  quella erogata ( $\Delta W^{(e)} = -\Delta W^{(a)}$ ). Possiamo allora definire a valor medio (nell'intervallo  $(t, t + \Delta t)$ ) della potenza elettrica assorbita come:

$$\langle p^{(a)} \rangle = \frac{\Delta W^{(a)}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

Sotto condizioni non affatto restrittive  $\langle p^{(a)} \rangle$  tende, per  $\Delta t \rightarrow 0$  ad un valore finito che dipende solo dall'istante  $t$  considerato:

$$p^{(a)}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W^{(a)}}{\Delta t}$$

Questa è, per definizione, la potenza elettrica istantanea assorbita dal bipolo. Essa si misura in *watt* ( $W$ ) nel Sistema Internazionale; immediatamente si ottiene  $1W = J/s$

L'energia  $\Delta W^{(a)}$  assorbita nell'intervallo  $(t, t + \Delta t)$  può essere considerata come differenza tra tutta l'energia assorbita  $W^{(a)}(t + \Delta t)$  nell'intervallo  $(t_0, t + \Delta t)$  dove  $t_0$  è un'istante di tempo assegnato, meno quella già assorbita sino all'istante  $t$ ,  $W^{(a)}(t)$ . Allora la 1.1 può essere riscritta:

$$\langle p^{(a)} \rangle = \frac{W^{(a)}(t + \Delta t) - W^{(a)}(t)}{\Delta t}$$

Applicando il processo al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ha:

$$p^{(a)}(t) = \frac{d W^{(a)}}{dt} \quad (1.2)$$

La potenza istantanea è uguale alla derivata prima dell'energia elettrica assorbita dallo stesso nel generico intervallo  $(t_0, t)$ . Dalla 1.2 segue che l'energia  $d W^{(a)}$  assorbita dal bipolo nell'intervallo elementare  $(t, t + \Delta t)$  è data da  $dW^{(a)} = p^{(a)}(t) dt$ . La relazione 1.2 può essere riformulata in forma integrale come:

$$W^{(a)}(t) = W^{(a)}(t_0) + \int_{t_0}^t p^{(a)}(t) dt$$

La potenza elettrica assorbita da un componente con due terminali è con buona approssimazione data da:

$$p^{(a)}(t) = v(t)i(t) \tag{1.3}$$

dove  $v$  ed  $i$  sono la tensione e l'intensità di corrente del componente con versi di riferimento scelti concordamente con la convenzione dell'utilizzatore. Se invece venisse adottata la convenzione del generatore l'espressione della potenza assorbita sarebbe:

$$p^{(a)} = -v'i$$

La relazione [1.3](#) vale esattamente soltanto in condizioni stazionarie. In condizioni lentamente variabili vale con buona approssimazione.

## Capitolo 2

# Regime Sinusoidale

### 2.1 Metodo Simbolico

Per fissata pulsazione  $\omega$  ad ogni funzione sinusoidale è possibile associare un numero complesso  $\bar{A}$  secondo la regola

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) \iff \bar{A} = A_m e^{j\alpha}$$

Essa produce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione assegnata  $\omega$ ,  $\{a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)\}$  e l'insieme dei fasori  $\{\bar{A} = A_m e^{j\alpha}\}$ . Utilizzando le formule di *Eulero* possiamo riscrivere

$$\bar{A} = A_m \cos(\alpha) + A_m j \sin(\alpha)$$

Considerazioni:

- $\alpha = 0; \alpha = \pm 2\pi \implies e^{j\alpha} = 1$
- $\alpha = \pm \pi \implies e^{j\alpha} = -1$
- $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \implies e^{j\alpha} = \pm j$
- $\alpha = \pm \frac{2}{3}\pi \implies e^{j\alpha} = \mp j$

Per gli altri valori di  $\alpha$ , sia la parte reale che la parte immaginaria di  $e^{j\alpha}$ , sono diverse da 0. Quindi la funzione sinusoidale  $a(t)$  può essere espressa in termini di fasore rappresentativo

$$a(t) = \Re\{\bar{A} e^{j\omega t}\}$$

La corrispondenza biunivoca gode delle seguenti proprietà

- **Unicità**
- **Linearità**
- **Derivazione**

### 2.1.1 Proprietà di Unicità

Consideriamo le funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \beta)$ , esse sono uguali se e solo se sono uguali i corrispondenti fasori rappresentativi  $\bar{A} = A_m e^{j\alpha}$  e  $\bar{B} = B_m e^{j\beta}$  quindi

$$a(t) = b(t) \iff \bar{A} = \bar{B}$$

Ciò è una diretta conseguenza del fatto che

$$c(t) = \Re\{\bar{C}e^{j\omega t}\} \forall t \iff \bar{C} = 0$$

### 2.1.2 Proprietà di Linearità

Prendiamo in esame la funzione sinusoidale

$$c(t) = k_1 a(t) + k_2 b(t)$$

Combinazione lineare delle funzioni sinusoidali  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  e  $b(t) = B_m \cos(\omega t + \beta)$  dove  $k_1$  e  $k_2$  sono costanti reali. Il fasore  $\bar{C}$  rappresentativo della funzione sinusoidale  $c(t)$  è uguale alla stessa combinazione lineare dei fasori  $\bar{A} = A_m e^{j\alpha}$  e  $\bar{B} = B_m e^{j\beta}$  rappresentazioni delle funzioni sinusoidali  $a(t)$  e  $b(t)$ .

$$\bar{C} = k_1 \bar{A} + k_2 \bar{B} \implies c(t) = k_1 a(t) + k_2 b(t) \iff \bar{C} = k_1 \bar{A} + k_2 \bar{B}$$

$$\Re\{(k_1 \bar{A} + k_2 \bar{B})e^{j\omega t}\} = k_1 \cdot \Re\{\bar{A}e^{j\omega t}\} + k_2 \cdot \Re\{\bar{B}e^{j\omega t}\}$$

### 2.1.3 Proprietà di Derivazione

La derivata prima della funzione sinusoidale

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

con pulsazione  $\omega$  è

$$\frac{d a(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A_m \cos(\omega t + \alpha)] = \omega A_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sia  $\bar{A} = A_m e^{j\alpha}$  il fasore rappresentativo della funzione sinusoidale  $a(t)$ , allora il fasore rappresentativo della derivata prima di  $a(t)$ , che indicheremo con  $D_a$ , è dato da  $D_a = \omega A_m e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} = j\omega \bar{A}$ , quindi

$$\frac{d a(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A_m \cos(\omega t + \alpha)] \iff D_a = j\omega \bar{A}$$

## 2.2 Potenza ed Energia in Regime Sinusoidale

Siano

- $v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$
- $i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta)$



Tenendo presente le due relazioni sopra citate, la potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo del circuito è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta)$$

Applichiamo l'identità trigonometrica, che afferma

$$2 \cdot \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

Abbiamo che

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\underbrace{2\omega}_{\text{pulsazione}} t + \alpha + \beta)]$$

### 2.2.1 Potenza Media

È definita a valor medio sul periodo  $T$  della potenza istantanea assorbita

$$P = \int_0^T p(\tau) d(\tau)$$

Sostituendo

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

La potenza quindi non dipende solo dalle ampiezze massime della tensione e dell'intensità di corrente, ma anche dalla differenza delle loro fasi  $[\cos(\alpha - \beta)]$ .

### 2.2.2 Potenza Complessa

La potenza media può essere espressa direttamente in termini dei fasori della tensione  $\bar{V} = V_m e^{j\alpha}$  e dell'intensità di corrente  $\bar{I} = I_m e^{j\beta}$ , infatti:

$$P = \Re \left\{ \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \right\}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \longrightarrow \text{potenza complessa assorbita}$$

Poniamo

$$Q = \text{Im}\{\hat{P}\} \implies \hat{P} = P + jQ$$

Abbiamo

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\alpha - \beta)$$

### 2.2.3 Caratterizzazione della Potenza Complessa

#### Resistore

Per il resistore (convenzione dell'utilizzatore) sappiamo:

$$V_m = RI_m \quad \alpha = \beta;$$

se  $R > 0$  : l'impedenza  $\dot{Z} = R$  del resistore è *reale*, la sua fase è nulla. In definitiva, il *fasore della tensione di un resistore è in fase con il fasore dell'intensità di corrente*. Siccome  $\alpha - \beta = 0$  la potenza complessa assorbita da un resistore passivo ha parte reale maggiore di zero e la parte immaginaria nulla; quindi la potenza reattiva di un resistore è sempre nulla. La potenza complessa quindi può essere espressa come

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{RI_m^2}{2}$$

#### Induttore

L'impedenza dell'induttore è puramente immaginaria e può essere espressa come

$$\dot{Z}_L = jX_L$$

dove:

$$X_L = \omega L$$

è la cosiddetta *reattanza* dell'induttore. La reattanza di un induttore ( $L > 0$ ) è positiva. Allora la relazione caratteristica dell'induttore si ha

$$V_m = X_L I_m, \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

*Il fasore rappresentativo della tensione di un induttore (passivo) è in anticipo di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto a quello dell'intensità di corrente.*

La parte reale della potenza complessa è sempre uguale a zero poichè  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ . Di conseguenza la potenza media assorbita dall'induttore è sempre nulla. La potenza reattiva assorbita è positiva e vale:

$$Q_L = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{X_L I_m^2}{2} = \frac{V_m^2}{2X_L}$$

Si ossevi che  $Q_L = (\frac{1}{2}LI^2)\omega$  dove  $\frac{1}{2}LI^2$  è il valore massimo dell'energia immagazzinata dall'induttore. La potenza istantanea immagazzina dall'induttore è data da:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = Q_L \cos \left[ 2 \left( \omega t + \beta + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Essa è una funzione periodica  $\frac{T}{2}$  che oscilla tra i valori  $-Q_L$  e  $Q_L$

## Condensatore

L'impedenza del condensatore, così come quella dell'induttore, è puramente immaginaria e può essere espressa come:

$$\dot{Z}_C = jX_C$$

dove:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

è la cosiddetta reattanza del condensatore. La reattanza di un condensatore passivo ( $C > 0$ ) è sempre negativa. Allora la relazione caratteristica del condensatore è:

$$V_m = |X_C|I_m, \quad \alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$

La reattanza del condensatore è inversamente proporzionale alla pulsazione.

*Il fasore rappresentativo della tensione di un condensatore è in ritardo di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto a quello dell'intensità di corrente.*

Anche per il condensatore la parte reale della potenza complessa assorbita è sempre nulla perchè  $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$ . Di conseguenza, così come per l'induttore, la potenza media assorbita dal condensatore è uguale a zero. La potenza reattiva assorbita è *negativa* e vale:

$$Q_C = -\frac{V_m I_m}{2} = -\frac{X_C I_m^2}{2} = -\frac{V_m^2}{2X_C}$$

Si osservi che  $|Q_C| = (\frac{1}{2}CV_M^2)\omega$ , dove  $\frac{1}{2}CV_M^2$  è il valore massimo dell'energia immagazzinata dal condensatore. La potenza istantanea assorbita dal condensatore è:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Cv^2 \right) = |Q_C| \cos \left[ \left( \omega t + \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Essa, come per l'induttore, è una funzione sinusoidale con periodo  $\frac{T}{2}$  che oscilla tra valori  $-|Q_C|$  e  $|Q_C|$ .

### 2.2.4 Energia in Regime Sinusoidale

L'energia assorbita dal bipolo in regime sinusoidale nell'intervallo  $[0, \hat{t}]$  è data da

$$W(0, \hat{t}) = \int_0^{\hat{t}} p(\tau) d(\tau) = (nT)P + \int_{nT}^{nT+\Delta t} p(\tau) d(\tau)$$

$n$  è un numero intero tale che  $\hat{t} = nT + \Delta t$  con  $\Delta t < T$ .  $n$  è il numero di periodi  $T$  contenuti nell'intervallo  $[0, \hat{t}]$ . Se  $n \gg 1$  il contributo dovuto all'energia assorbita nell'intervallo di tempo  $(nT, nT + \Delta t)$  è trascurabile rispetto a  $(nT)P$ , quindi

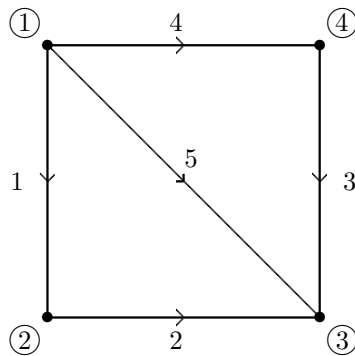
$$\omega(0, \hat{t}) \cong (nT)P \cong \hat{t}P$$

## Capitolo 3

# Proprietà dei Circuiti

### 3.1 Grafo di un Circuito e sue Proprietà

Un generico circuito può essere rappresentato tramite il metodo dei *grafi*, ossia uno schema geometrico del circuito in cui sono presenti solo i nodi e i collegamenti tra essi (sono assenti i bipoli che lo caratterizzano). Prendiamo ad esempio il circuito in **Figura 2.1** costituito da 4 *nod*i e 5 *lati*. Per convenzione lo indicheremo con  $G$ .



**Figura 2.1** Grafo  $G$

Di seguito sono enunciate le proprietà annesse alla teoria dei *grafi*.

#### 3.1.1 Grafo, Grafo Orientato, Sottografo

Prendiamo in considerazione il grafo in **Figura 2.1**.

- Un grafo  $G(N, L)$  è costituito dall'insieme di  $n$  nodi, che indicheremo con  $N = \{1, 2, \dots, l\}$ , dall'insieme di lati  $l$  *lati*, che indicheremo con

$L = \{1, 2, \dots, l\}$ , e dalla *relazione di incidenza* che ogni lato (bipolo) fa corrispondere la coppia di nodi nei quali quel lato incide.

- Se ogni lato (bipolo) del grafo è orientato, il grafo allora si dice **orientato**. Per ciascun lato del grafo di un circuito è orientato con la freccia che indica il verso di riferimento dell'intensità della corrente del corrispondente bipolo.
- Si consideri un grafo  $G(N, L)$ . Il grafo  $G_1(N, L)$  si dice sottografo di  $G(N, L)$ , se  $N_1$  è un sottoinsieme di  $N$ ,  $L_1$  è un sottoinsieme di  $L$  e la relazione di incidenza tra i nodi di  $N_1$  ed i lati di  $L_1$  è la stessa relazione che si ha nel grafo  $G(N, L)$

### 3.1.2 Grafo Connesso

Un grafo si dice connesso se ogni nodo è collegato ad un qualsiasi altro nodo attraverso uno o più lati. Un grafo connesso contiene sottografi connessi. Circuiti di interesse con grafi non connessi sono i circuiti che contengono elementi con più di due terminali, come, ad esempio, i doppi bipoli.

### 3.1.3 Maglia

- Sia un dato grafo connesso  $G$ . Una maglia di  $G$  è un sottografo connesso in cui in ciascun nodo incidano due e solo due lati.
- Se alla maglia viene associato un verso di percorrenza essa è detta *orientata*.

Ogni maglia forma un percorso chiuso, perchè essa deve costituire un sottografo connesso in cui in ogni nodo coincidono due e due soli lati: percorrendo interamente la maglia ciascun lato e ciascun nodo vengono incontrati una ed una sola volta.

### 3.1.4 Albero, coalbero

- Sia dato un grafo connesso  $G$ . Un *albero*  $A$  di  $G$  è un suo sottografo connesso che comprende tutti i nodi e non contiene alcuna maglia.
- Il *coalbero*  $C$  di  $G$ , corrisponde all'albero  $A$ , è l'insieme dei dati complementare a quelli dell'albero: l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati di  $G$ .

Per l'albero di un qualsiasi grafo connesso vale la seguente proprietà

**Proprietà 1.** *Si consideri un grafo connesso  $G$  con  $n$  nodi ed  $l$  lati. Ciascun albero del grafo  $G$  è costituito da  $(n - 1)$  lati (indipendentemente dal numero dei lati del grafo e della relazione di incidenza).*

Una diretta conseguenza della **Proprietà 1** è relativa al coalbero. Difatti, essendo sempre  $(n - 1)$  il numero di lati dell'albero, e del fatto che il coalbero è il componente all'albero, si ha:

**Proprietà 2.** *Si consideri un grafo connesso  $G$  con  $n$  nodi ed  $l$  lati. Ciascun coalbero del grafo è costituito da  $[l - (n - 1)]$  lati (indipendentemente dalla relazione di incidenza del grafo).*

Una maglia **fondamentale** è descritta dalla seguente relazione:

**Proprietà 3.** *Si consideri un sottografo che si ottiene aggiungendo all'albero  $A$  un solo lato di coalbero  $C$ : esso contiene una e una sola maglia, che si ottiene eliminando tutti quei lati che non appartengono al percorso chiuso. Una maglia ottenuta in questo modo prende il nome di **maglia fondamentale** del coalbero  $C$ .*

È evidente, allora, che aggiungendo un lato di coalbero per volta è possibile costruire  $[l - (n - 1)]$  maglie fondamentali distinte. Questo insieme di maglie prende il nome di *insieme di maglie fondamentali* del coalbero  $C$  del grafo  $G$ .

### 3.1.5 Grafo Planare

Un grafo si dice planare se può essere tracciato su un piano senza che nessuna coppia di lati si intersechi in un punto che non sia un nodo. Ogni grafo planare gode della seguente proprietà:

**Proprietà 4.** *Ogni maglia partiziona il piano in due regioni, quella interna al cammino chiuso e quella esterna. Tra tutte le possibili maglie di un grafo planare, rivestono particolare interesse quelle che non contengono nessun lato al loro interno.*

### 3.1.6 Anello

Un anello è una maglia di un grafo planare che non contiene lati al suo interno.

**Proprietà 5.** *Si consideri un grafo planare connesso  $G$  con  $n$  nodi e  $l$  lati. Il grafo  $G$  ha  $[l - (n - 1)]$  anelli.*

### 3.1.7 Insieme di Taglio

Si consideri un grafo connesso  $G(N, L)$ . Un sottoinsieme  $T$  dei lati  $L$  del grafo, si dice insieme di taglio se, contemporaneamente:

- la rimozione del grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce a due sottografi non connessi;
- il ripristino di uno qualsiasi dei lati dell'insieme di taglio connette nuovamente i due sottografi.

Se il grafo è orientato, l'insieme di taglio si dice orientato.

### Legge di Kirchhoff per gli Insiemi di Taglio

La somma algebrica delle intensità di corrente dei bipoli che formano un qualsiasi insieme di taglio è uguale a zero istante per istante.

## 3.2 Equazioni di Kirchhoff Indipendenti

Le equazioni circuitali sono costituite dalle equazioni di Kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali. Le equazioni di Kirchhoff sono algebriche lineari ed omogenee. Invece le equazioni di caratteristiche possono essere, in generale, algebriche o differenziali, lineari o non lineari, tempo-invarianti o tempo-varianti, omogenee o non omogenee, a seconda della natura degli elementi circuitali.

### 3.2.1 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Correnti

Prendiamo in esame le equazioni di Kirchhoff per le correnti analizzando un circuito avente un grafo come di seguito.

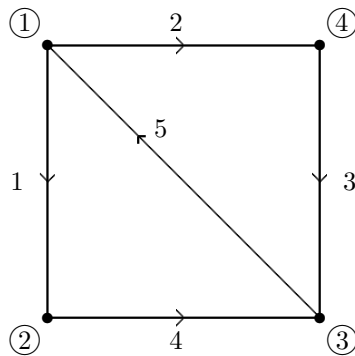


Figura 2.2 Grafo

Applichiamo le LKC ai nodi e abbiamo:

**nodo 1.**  $i_1 + i_2 - i_5 = 0$

**nodo 2.**  $-i_1 + i_4 = 0$

**nodo 3.**  $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$

**nodo 4.**  $-i_2 + i_3 = 0$

Esse sono linearmente dipendenti. Infatti sommando membro a membro le 4 equazioni del sistema si ottiene l'identità  $0 = 0$ . Per tanto la 4<sup>a</sup> è combinazione lineare delle altre 3. Dunque tutte le *informazioni* contenute nella 4<sup>a</sup> equazione del sistema sono già presenti nelle altre 3 e, quindi essa è ridondante. Questo risultato è del tutto generale. Le  $n$  equazioni di Kirchhoff per le correnti ( $n$  è il numero di nodi):

$$A_a \mathbf{i} = 0$$

di un circuito sono linearmente dipendenti, qualunque sia il grafo del circuito. Questo è una diretta conseguenza del fatto che la somma di tutte le righe della matrice di incidenza è la riga identicamente nulla. Questo è in accordo con il fatto che il rango della matrice di incidenza  $A_a$  è minore di  $n$ . Quindi, a conclusione delle nostre tesi, qualsiasi equazione del sistema può essere eliminata, senza che l'informazione contenuta nel sistema ne risenta in alcun modo.

**Proprietà 6.** *Per un circuito con grafo connesso con  $n$  nodi,  $n - 1$  equazioni di Kirchhoff per le correnti, scelte in maniera arbitraria tra le possibili  $n$ , sono linearmente indipendenti.*

### Equazioni Indipendenti per gli Insiemi di Taglio

Fissato un albero, un insieme di taglio fondamentale contiene un unico lato dell'albero assieme ad alcuni lati di coalbero. Scrivendo le equazioni di Kirchhoff per gli insiemi di taglio fondamentali associati ad un qualsiasi albero si perviene ad un insieme di equazioni che sono coerentemente indipendenti fra loro in quanto ciascuna contiene (in esclusiva) l'intensità corrente relativa ad un lato dell'albero. Essendo proprio  $n - 1$  il numero dei lati dell'albero, abbiamo così costruito un insieme di  $n - 1$  equazioni per gli insiemi di taglio indipendenti. Siccome gli altri insiemi di taglio possono essere sempre espressi come un'opportuna unione di insiemi di taglio fondamentali, le corrispondenti equazioni sono esprimibili come combinazione lineare di quelle corrispondenti ad insieme di taglio fondamentali. In conclusione, le equazioni indipendenti per gli insiemi di taglio sono  $n - 1$ . Da questo risultato segue che imporre  $n - 1$  equazioni indipendenti agli insiemi di taglio equivale ad imporre le equazioni di Kirchhoff per i nodi

### 3.2.2 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Tensioni

Ora consideriamo le leggi di Kirchhoff per le tensioni. Analizziamo quindi le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni al circuito in **Figura 2.2**:

$$\mathbf{M}_1 \longrightarrow -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

$$\mathbf{M}_2 \longrightarrow v_3 + v_5 + v_2 = 0$$

$$\mathbf{M}_3 \longrightarrow -v_1 - v_5 - v_4 = 0$$

Queste equazioni non sono tra loro linearmente indipendenti. Ad esempio la terza equazione è combinazione lineare delle restanti due equazioni. Infatti può essere ottenuta sottraendo membro a membro le prime due. Ora consideriamo un generico circuito e sia  $m$  il numero di maglie. Le  $m$  maglie equazioni di Kirchhoff per le tensioni corrispondenti

$$B_a \mathbf{v} = 0$$



non sono linearmente indipendenti. Quindi per stabilire quante sono le equazioni linearmente indipendenti ricorriamo alla seguente proprietà che esprime l'indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni:

**Proprietà 7.** *Per un circuito con grafo connesso con  $n$  nodi e  $l$  lati, le  $l - (n - 1)$  equazioni di Kirchhoff per le tensioni relative ad un insieme di maglie fondamentali sono linearmente indipendenti. Le equazioni di Kirchhoff per le maglie del circuito possono essere espresse come combinazioni lineari delle equazioni delle maglie fondamentali.*

La proprietà di indipendenza può essere dimostrata semplicemente, anche nel caso generale, ricordando che ogni maglia di un insieme di maglie fondamentali ha almeno un lato in esclusiva. Di conseguenza, ogni equazione dell'insieme delle equazioni di Kirchhoff per un insieme di maglie fondamentali ha almeno una tensione incognita in esclusiva, e quindi le  $l - (n - 1)$  equazioni per le maglie fondamentali sono linearmente indipendenti.

### 3.3 Conservazione delle Potenze Elettriche e Teorema di Tellegen

L'espressione della potenza elettrica assorbita dal  $k$ -esimo bipolo  $k = (1, 2, \dots, l)$  del circuito è data da

$$p_k(t) = i_k(t)v_k(t)$$

**Proprietà 1.** *La somma delle potenze elettriche assorbite da tutti i bipoli di un circuito è, istante per istante, uguale a 0.*

$$\sum_{k=1}^l p_k(t) = \sum_{k=1}^l i_k(t)v_k(t) = 0$$

A questo punto introduciamo il vettore  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$  delle correnti, il vettore  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$  delle tensioni ed il vettore  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_l)^T$  dei potenziali di nodo del circuito. Quindi:

$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_l i_l = \mathbf{v}^T \mathbf{i}$$

Le tensioni del circuito possono essere scritte come

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_a^T \mathbf{u} \quad \mathbf{A}_a = \text{matrice d'incidenza}$$

Quindi sostituendo

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{A}_a^T \mathbf{u})^T \mathbf{i}$$

Per la proprietà di identità possiamo scrivere

$$(\mathbf{A}_a^T \mathbf{u})^T = \mathbf{u}^T \mathbf{A}_a$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = (\mathbf{u}^T \mathbf{A}_a \mathbf{i}) = \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_a \mathbf{i})$$

Dalle leggi di **Kirchhoff** sappiamo che  $\mathbf{A}_a \mathbf{i} = \mathbf{0}$  quindi possiamo scrivere

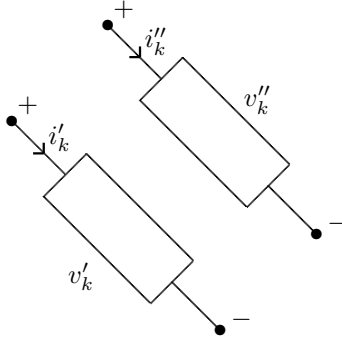
$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = 0$$

### 3.3.1 Teorema di Tellegen

La sommatoria delle potenze virtuali assorbite da ciascun lato del grafo è uguale a 0.

$$\sum_{k=1}^l i'_k v''_k = 0 \circ \left( \sum_{k=1}^l i''_k v'_k = 0 \right)$$

Consideriamo due bipoli come in figura



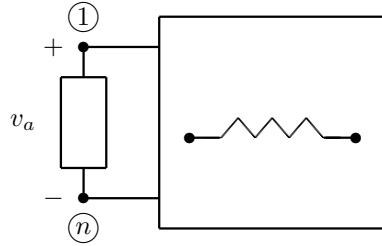
**Figura 2.3** Due bipoli generici

Abbiamo che  $\hat{p} = i'_k v''_k$

$$\hat{p}_k^{(e)} = -\hat{p}_k$$

## 3.4 Proprietà Di Non Amplificazione

### 3.4.1 Non Amplificazione delle Tensioni

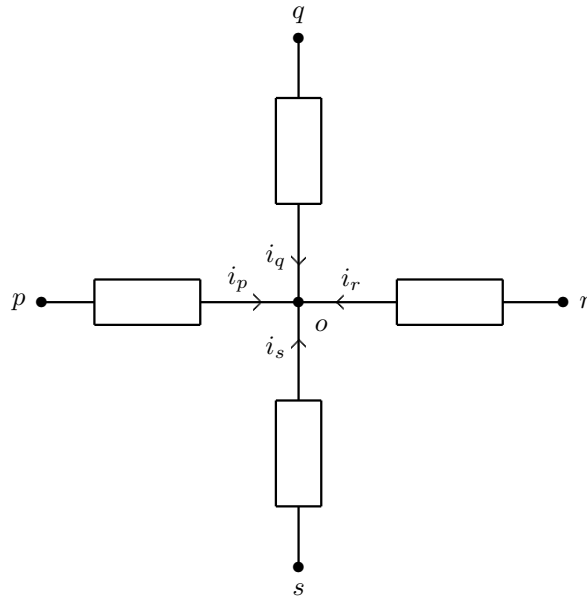


**Figura 2.4** Circuito generico

Si consideri un circuito costituito da resistori strettamente passivi (i resistori possono essere anche non lineari) e un solo bipolo attivo.

**Teorema 1.** *La tensione del generico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo.*

Per dimostrare il teorema prendiamo in considerazione 4 bipoli collegati al nodo  $o$ , come in figura.



**Figura 2.5** Bipoli casuali estratti dal generico circuito in *Figura 2.4*

Applichiamo la LKC al nodo  $o$

$$i_p + i_q + i_r + i_s = 0$$

Data questa relazione possiamo avere due possibili alternative.

- Le correnti sono tutte nulle
- Abbiamo delle correnti nulle, altre negative altre positive.

Prendiamo in esame la seconda possibilità. Quindi

$$i_q > 0 \quad i_r < 0$$

$$p_q = v_q i_q > 0 \quad p_r = v_r i_r > 0$$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali

$$v_q = u_q - u_o > 0 \quad v_r = u_r - u_o < 0$$

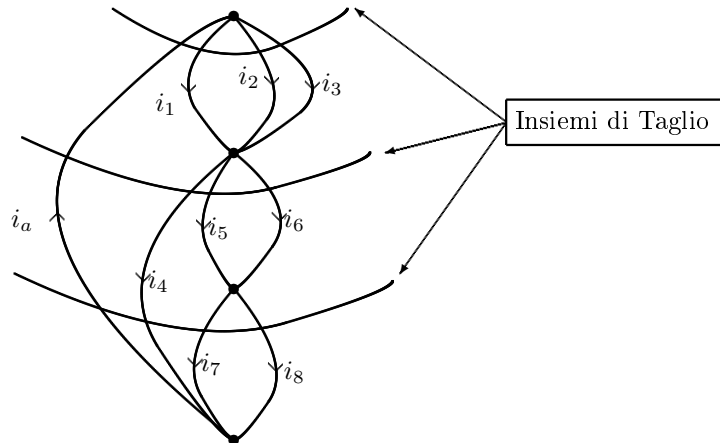
Ne consegue la seguente relazione verificando il **Teorema 1**

$$u_r < u_o < u_q$$

### 3.4.2 Non Amplificazione Delle Correnti

Si consideri un circuito costituito da resistori strettamente passivi e da un solo bipolo attivo.

**Teorema 2.** *L'intensità di corrente del generico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo.*



**Figura 2.6** Grafo ordinato per potenziali di nodi decrescenti

Prendendo in considerazione gli insiemi di taglio sui tre nodi e applicando la *LKC* abbiamo

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = i_a \\ i_4 + i_5 + i_6 = i_a \\ i_4 + i_7 + i_8 = i_a \end{cases}$$

$$|i_a| \leq 0 \quad i_k \geq 0 \longrightarrow k = 1, 2, \dots, 8$$

Ne consegue che

$$i_a \geq i_k$$

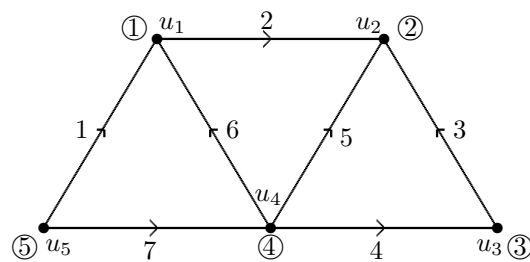
### 3.5 Potenziali di Nodo

Il metodo dei potenziali di nodo consiste nell'esprimere le tensioni di ciascun lato attraverso delle opportune grandezze ausiliari, in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le tensioni sia verificata automaticamente per ogni maglia del circuito.

Consideriamo ancora una volta un generico circuito, con  $n$  nodi e  $l$  bipoli, assegnamo i versi di riferimento per le intensità di corrente e fissiamo una volta per tutte le convenzioni dell'utilizzatore per tutti i bipoli.

Il metodo dei potenziali di nodo consiste nell'associare, a ciascun nodo, una variabile aleatoria, detta *potenziale di nodo*: al generico nodo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) associamo dunque il potenziale di nodo  $u_i$ .

Facendo riferimento alla seguente figura.



**Figura 2.7** Potenziali di nodo

Assumiamo che sia possibile esprimere la tensione di ciascun bipolo del circuito in funzione dei potenziali dei due nodi nei quali il lato incide secondo la

seguente regola: la tensione  $v_s$  del generico bipolo  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, l$ ) è espressa come differenza tra il potenziale del nodo contrassegnato con il "+" ed il potenziale del nodo contrassegnato con il "-":

$$v_s = u_p - u_q \quad \text{per } s = 1, 2, \dots, l \quad (3.1)$$

Le tensioni espresse da questa relazione verificano automaticamente la *LKT* qualunque siano i valori dei potenziali di nodo  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Prendendo sempre in considerazione la **Figura 2.7** e la maglia costituita dai lati 1, 2, 3, 4, 7, la *LKT* è:

$$v_1 + v_2 - v_3 - v_4 - v_7 = 0$$

Esprimendola attraverso i potenziali di nodo abbiamo:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_5 - u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_3 - u_2 \\ v_4 &= u_4 - u_3 \\ v_7 &= u_5 - u_4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sostituendo nella *LKT* abbiamo:

$$(u_5 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) = 0$$

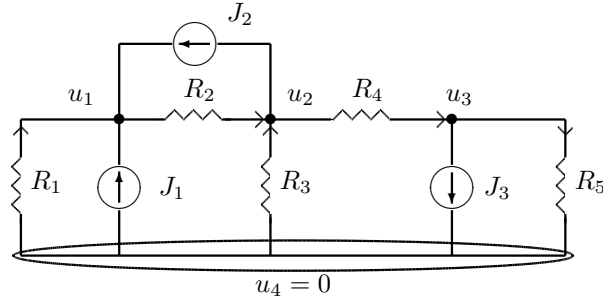
Questa equazione è sempre verificata, indipendentemente da valori dei potenziali di nodo  $u_1, u_2, \dots, u_5$ , dunque è un'identità. Quindi la 3.2 verificano la *LKT*.

Quindi possiamo affermare che

**Teorema 3.** *Se le tensioni di un circuito sono sempre espresse attraverso i potenziali di nodo secondo la 3.1, allora esse verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le tensioni per qualsiasi maglia del circuito.*

### Applicazione del Metodo dei Potenziali di Nodo

Consideriamo il circuito in **Figura 2.8**.



**Figura 2.8** Esempio di circuito di soli resistori e generatori di corrente.

Esso consta di 4 nodi e 8 lati. Abbiamo scelto di considerare il nodo 0 come riferimento dei potenziali ( $u_0 = 0$ ). In riferimento ai versi adottati per le intensità di corrente dei resistori, le *LKC* ai nodi 1, 2, 3 sono

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 + i_2 = J_1 + J_2 \\ -i_2 - i_3 + i_4 = -J_2 \\ -i_4 + i_5 = -J_3 \end{array} \right.$$

Ogni intensità di corrente incognita del precedente sistema può essere espressa in funzione delle tensioni (e quindi in funzione dei potenziali di nodo) mediante le equazioni caratteristiche dei resistori. Se adottiamo, ad esempio, la convenzione dell'utilizzatore abbiamo per le tensioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = -u_1 \\ v_{j_1} = -u_1 \\ v_2 = u_1 - u_2 \\ v_{j_2} = -u_1 + u_2 \\ v_3 = -u_3 \\ v_4 = u_2 - u_3 \\ v_{j_3} = u_3 \\ v_5 = u_3 \end{array} \right.$$

Utilizzando ora le equazioni caratteristiche dei singoli bipoli si ottengono le relazioni che esprimono le intensità di corrente in termini di potenziali di nodo:

$$i_1 = \frac{-u_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_1 - u_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{-u_2}{R_3}, \quad i_4 = \frac{u_2 - u_3}{R_4}, \quad i_5 = \frac{u_3}{R_5}$$

Sostituendo queste relazioni nelle *LKC* si ottengono le equazioni per i potenziali di nodo:

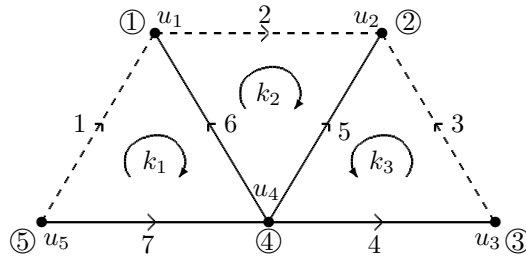
$$\frac{-u_1}{R_1} + \frac{u_2 - u_1}{R_2} = J_1 + J_2, \quad -\frac{u_2 - u_1}{R_2} - \frac{-u_2}{R_3} + \frac{u_2 - u_3}{R_4} = -J_2, \quad -\frac{u_2 - u_3}{R_4} + \frac{u_3}{R_5} = -J_3$$

Questo è un sistema di tre equazioni in tre incognite ( $u_1, u_2, u_3$ ). Una volta determinati i valori dei potenziali dei nodi, le tensioni sui diversi bipoli possono essere espresse attraverso le relazioni con questi ultimi.

### 3.6 Correnti di Maglia

Secondo il seguente grafo, avendo preso come versi di riferimento + per le correnti di maglia con versi di riferimento concordi con quello dell'intensità di corrente di lato e con - tutte le correnti di maglia che hanno versi di riferimento discordi:

$$i_m = \sum_h (\pm) k_h$$



**Figura 2.9** Un grafo, un albero (tr. continuo) e correnti di maglia.

Consideriamo il grafo orientato come in **Figura 2.9**. È stato scelto un albero e sono indicate le correnti di maglia  $k_1, k_2$  e  $k_3$  associate a maglie fondamentali



corrispondenti all'albero scelto. Le intensità di corrente di lato sono espresse tramite le correnti di maglia nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = k_1 \\ i_2 = k_2 \\ i_3 = k_3 \\ i_4 = k_3 \\ i_5 = -k_2 - k_3 \\ i_6 = -k_1 + k_2 \\ i_7 = -k_1 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

È immediato verificare che le intensità delle correnti espresse attraverso la 3.3 verificano la *LKC*, indipendentemente dai valori delle correnti di maglia. Consideriamo tutte le maglie fondamentali a cui un dato nodo appartiene. Per ciascuna di esse ci sono due e due soli lati che coincidono nel nodo in esame. Di conseguenza la corrente di maglia di ciascuna di queste maglie fondamentali compare due sole volte nell'equazione di Kirchhoff per le correnti applicata al nodo in esame, una volta con il segno positivo ed una volta con il segno negativo. Ad esempio, consideriamo l'equazione di Kirchhoff al nodo **1**. Ad esso sono collegati i lati 1, 2, 6. La corrente di maglia  $k_1$  è entrante nel nodo quando contribuisce all'intensità di corrente  $i_1$  del lato 1, mentre è uscente quando contribuisce ad  $i_6$ ; la corrente di maglia  $k_2$  è entrante quando contribuisce ad  $i_2$  ed è uscente quando contribuisce ad  $i_6$ . Quindi l'equazione di Kirchhoff per il nodo **1**:

$$-i_1 + i_2 - i_6 = 0$$

diventa l'identità

$$-k_1 + k_2 - (-k_1 + k_2) = 0$$

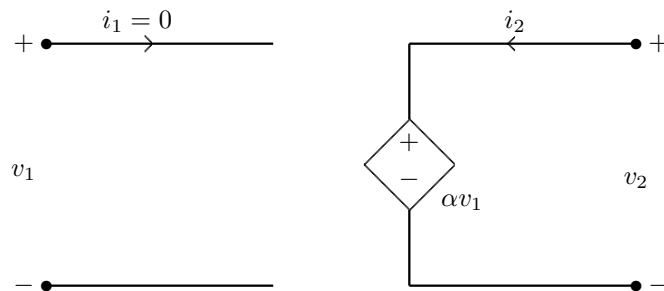
## Capitolo 4

# Doppi Bipoli

### 4.1 Generatori Controllati Lineari

I *generatori controllati lineari* sono dei particolari tipi di doppi-bipoli a-dinamici lineari: una delle due grandezze - tensione o intensità di corrente - ad una delle due porte è direttamente proporzionale al una delle due grandezze all'altra porta. Esistono diversi tipi, qui di seguito sono descritti 4 possibili configurazioni.

#### 4.1.1 Generatore di Tensione Controllato in Tensione



**Figura 3.1** Rappresentazione di un Generatore di Tensione Controllato in Tensione

Le relazioni caratteristiche sono

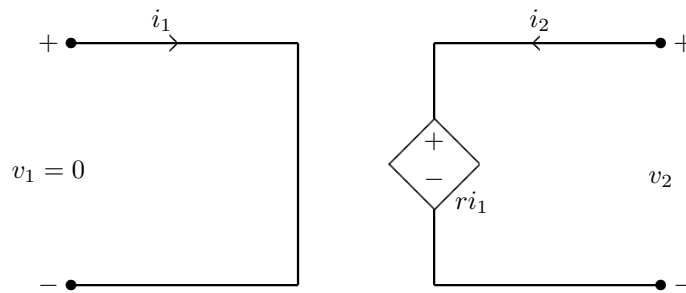
$$i_1 = 0$$

$$v_2 = \alpha v_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere espresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base ibrida.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.2 Generatore di Tensione Controllato in Corrente



**Figura 3.2** Rappresentazione di un Generatore di Tensione Controllato in Corrente

Le relazioni caratteristiche sono

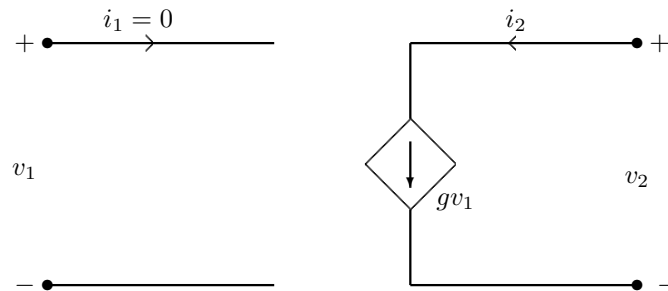
$$v_1 = 0$$

$$v_2 = r i_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere espresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base tensione.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

### 4.1.3 Generatore di Corrente Controllato in Tensione



**Figura 3.3** Rappresentazione di un Generatore di Corrente Controllato in Tensione

Le relazioni caratteristiche sono

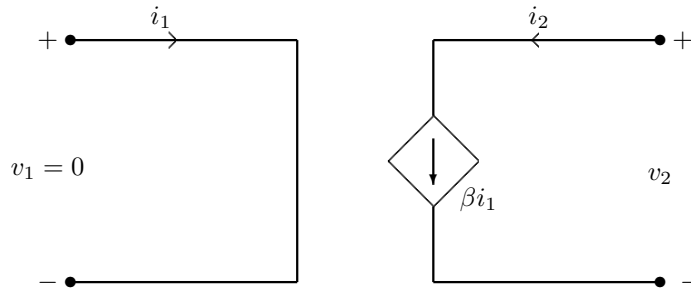
$$i_1 = 0$$

$$i_2 = gv_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere espresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base corrente.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.4 Generatore di Corrente Controllato in Corrente



**Figura 3.4** Rappresentazione di un Generatore di Corrente Controllato in Corrente

Le relazioni caratteristiche sono

$$v_1 = 0$$

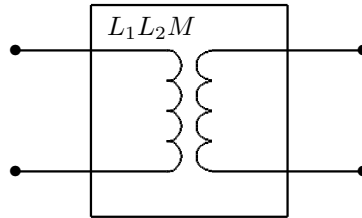
$$i_2 = \beta i_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere espresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base ibrida.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

## 4.2 Trasformatore

Il trasformatore può essere realizzato con due circuiti mutuamente accoppiati. I due circuiti, *primario* e *secondario*, sono realizzati avvolgendo del filo conduttore, smaltato con della vernice isolante, su un supporto di materiale, fatto di ferrite o lamine sottili di acciaio speciale.



**Figura 3.5** Rappresentazione simbolica di un trasformatore

### 4.2.1 Mutuo Accoppiamento

Le equazioni caratteristiche del *mutuo accoppiamento* sono

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{d i_1}{dt} + M \frac{d i_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{d i_2}{dt} + M \frac{d i_1}{dt} \end{cases}$$

*In caso di mutuo accoppiamento perfetto abbiamo*

**N.B.**  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$

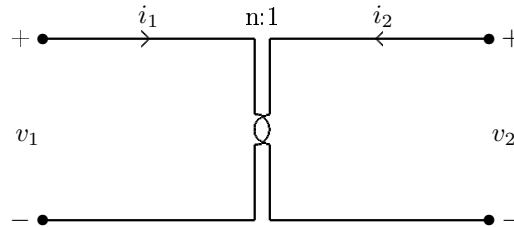
$$M^2 = L_1 L_2 \implies \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \left( \frac{d i_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \cdot \frac{d i_2}{dt} \right) \\ v_2 = M \left( \frac{d i_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \cdot \frac{d i_2}{dt} \right) \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro abbiamo

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} \implies n \quad n: \text{Rapporto di Trasformazione}$$

Simbolicamente il trasformatore ideale si può rappresentare in questo modo

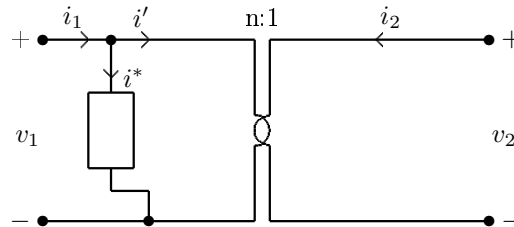


**Figura 3.6** Rappresentazione simbolica di trasformatore ideale con rapporto di accoppiamento

Continuando ad agire con delle semplici manipolazioni algebriche abbiamo le seguenti relazioni.

$$v_1 = L_1 \left( \frac{d i_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \cdot \frac{d i_2}{dt} \right) = L_1 \frac{d}{dt} \underbrace{\left( i_1 + \frac{1}{n} i_2 \right)}_{i^*} = L_1 \frac{d i^*}{dt}$$

Aggiungiamo al circuito un bipolo generico

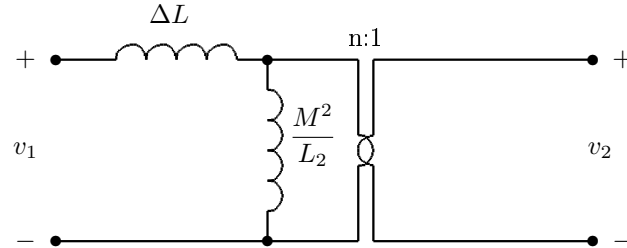


**Figura 3.7** Trasformatore ideale con doppio bipolo generico sul primario

$$i' = -\frac{1}{n} i_2 \quad \text{in quanto} \quad i_1 = i^* + i'$$

$$i^* = i_1 - i' = i_1 + \frac{1}{n} i_2$$

### 4.2.2 Trasformatore Reale



**Figura 3.8** Schema simbolico di trasformatore reale

Per un trasformatore reale abbiamo che il *coefficiente di mutua induzione*  $M$  risulta essere molto minore del prodotto  $L_1 L_2$

$$M^2 \ll L_1 L_2$$

Prendendo in esame  $L_1$  abbiamo

$$L_1 = L'_1 + \Delta L \implies \Delta L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

$$L_1 \implies L'_1 L_2 = M^2$$

$$\begin{cases} v_1 = L'_1 \frac{d i_1}{dt} + M \frac{d i_2}{dt} + \Delta L \frac{d i_1}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{d i_2}{dt} + M \frac{d i_1}{dt} \end{cases}$$

## 4.3 Doppi Bipoli di Resistori Lineari

### 4.3.1 Rappresentazione dei Doppi Bipoli

Un doppio bipolo a-dinamico in generale è descritto da due relazioni algebriche che legano l'intensità di corrente e le tensioni alle due porte. Quando le relazioni sono esplicite danno origine a diverse rappresentazioni:

- Rappresentazione su **Base Corrente**: le intensità di corrente  $i_1$  e  $i_2$  sono le variabili **indipendenti** e le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  sono le variabili **dipendenti**



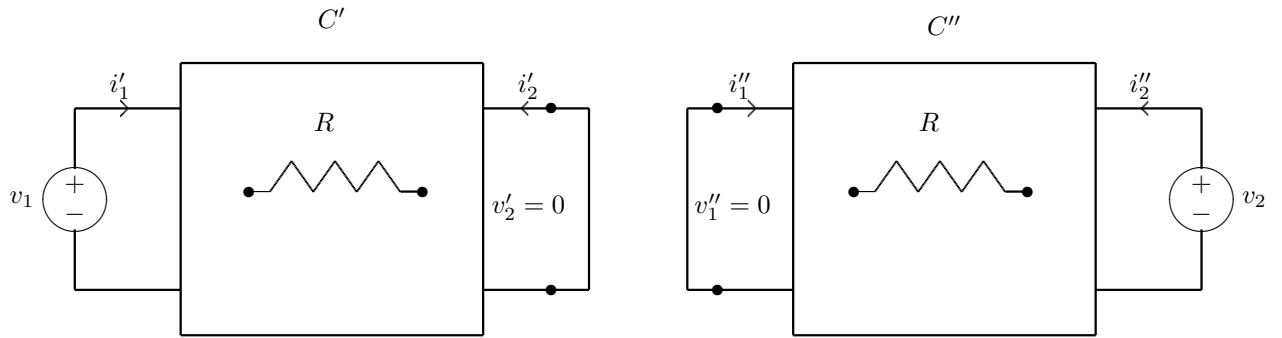
- Rappresentazione su **Base Tensione**: le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  sono le variabili **indipendenti** e le correnti  $i_1$  e  $i_2$  sono le variabili **dipendenti**.
- Rappresentazione su **Base Ibrida**: la tensione  $v_1$  e  $v_2$  sono le variabili **indipendenti** e la corrente  $i_1$  e  $v_1$  sono le variabili **dipendenti** (o viceversa).
- Rappresentazione di **Trasmissione**: la tensione  $v_1$  e la corrente  $i_1$  sono le variabili **indipendenti** e la tensione  $v_2$  e la corrente  $i_2$  sono le variabili **dipendenti** (o viceversa)

### 4.3.2 Proprietà di Reciprocità

Vi sono tre forme per la proprietà di reciprocità e sono le seguenti.

#### Prima Forma

Consideriamo i circuiti come in **Figura 3.9**.



**Figura 3.9** Prima forma di Reciprocità

Per il teorema di **Tellegen** possiamo scrivere che:

$$v_1 i''_1 + v_2 i''_2 + \sum_{k=1}^{N_R} v'_k i''_k = 0 \quad (4.1)$$

$$v''_1 i'_1 + v_2 i'_2 + \sum_{k=1}^{N_R} v''_k i'_k = 0 \quad (4.2)$$

Dove  $N_R$  è il numero di resistori presenti all'interno del doppio bipolo.

È immediato verificare che i termini  $v'_2 i''_2$  e  $v''_1 i'_1$  sono nulli.

Considerando che nella relazione caratteristica del  $k$ -esimo resistore si ha che:

$$\mathbf{v}'_k \mathbf{i}''_k = R_k i'_k i''_k = R_k i''_k i'_k = \mathbf{v}''_k \mathbf{i}'_k$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni 4.1 e 4.2 restano i termini:

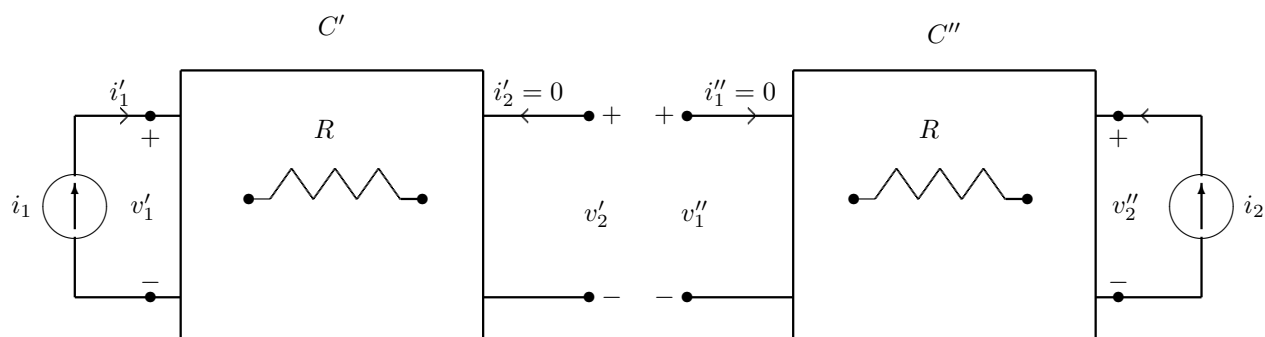
$$v_1 i_1'' - v_2 i_2' = 0 \implies v_1 i_1'' = v_2 i_2'$$

Da cui ne consegue che

$$\frac{i_1''}{v_2} = \frac{i_2'}{v_1}$$

### Seconda Forma

Consideriamo, per la seconda forma della reciprocità, il circuito che segue.



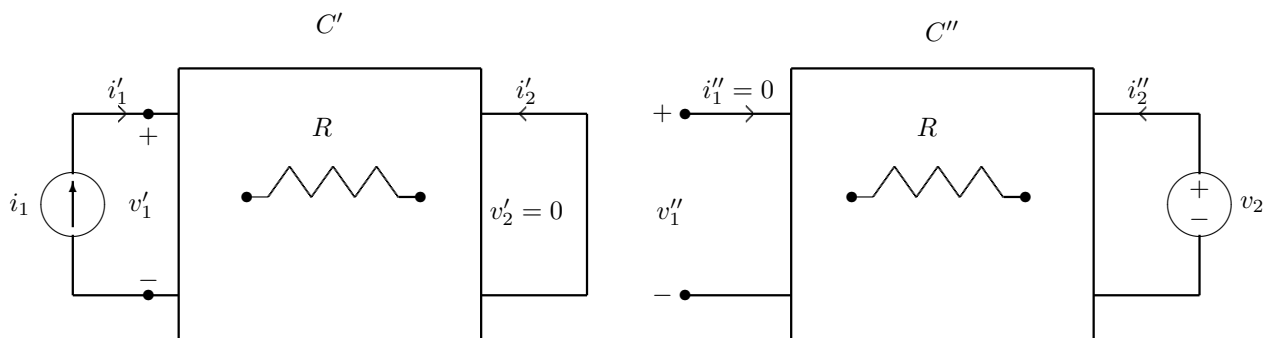
**Figura 3.10** Seconda forma di Reciprocità

Come per la prima, la seconda forma della reciprocità è definita come:

$$\frac{v_2'}{i_1} = \frac{v_1''}{i_2}$$

### Terza Forma

Prendiamo in considerazione il seguente circuito.



**Figura 3.11** Terza forma di Reciprocità

La terza forma della reciprocità è detta anche **antireciprocità** a causa del segno.

$$-i_1 v_1'' - i_2' v_2 = 0 \implies i_2' v_2 = -i_1 v_1'' \implies \frac{i_2'}{i_1} = -\frac{v_1''}{v_2}$$

**N.B.**

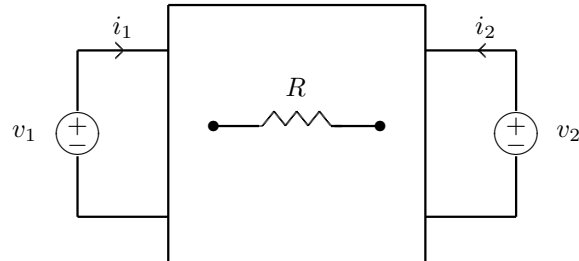
*Questi tre risultati continuano a valere quando nel doppio bipolo ci sono anche trasformatori ideali, ma non valgono quando ci sono anche generatori controllati e giratori.*

I doppi bipoli costituiti da resistori lineari e generatori indipendenti godono della **proprietà di non amplificazione delle correnti** (3.4.2).

## 4.4 Matrici delle Conduttanze e delle Resistenze

### 4.4.1 Matrici delle Conduttanze

Consideriamo il circuito in **Figura 3.12** su **base tensione** e applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:



**Figura 3.12** Circuito su base tensione

Le equazioni caratteristiche sono

$$\begin{cases} i_1 = i'_1 + i''_1 \\ i_2 = i'_2 + i''_2 \end{cases}$$

Possiamo riscrivere

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases} \implies i = Gv$$

La seguente matrice è detta delle **conduttanze** (la conduttanza si misura in *siemens*).

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i'_1}{v_1} \qquad G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i''_1}{v_2}$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i'_2}{v_1} \qquad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i''_2}{v_2}$$

$G_{11}$  e  $G_{22}$  sono dette conduttanze *proprie*.

$G_{12}$  e  $G_{21}$  sono dette conduttanze *mutue*.

La potenza assorbita dal doppio bipolo è  $p = v^T i = v^T G v$ .

### Proprietà

- $\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{21}$ : dalla **prima forma della proprietà di reciprocità** (4.3.2) sappiamo che  $\frac{i_1''}{v_2} = \frac{i_2'}{v_1}$  e data la definizione di conduttanza mutua si ha  $G_{12} = G_{21}$
- $\mathbf{G}_{11} \geq 0$  e  $\mathbf{G}_{22} \geq 0$  (se i resistori sono passivi): considerando la convenzione dell'utilizzatore se  $R > 0$  anche  $\frac{1}{R} > 0$  quindi  $G_{11} \geq 0$  e  $G_{22} \geq 0$
- $\mathbf{G}_{11} \geq |\mathbf{G}_{21}|$  e  $\mathbf{G}_{22} \geq |\mathbf{G}_{12}|$ : con la sovrapposizione degli effetti ho sempre un solo bipolo attivo quindi per la **proprietà di non amplificazione delle correnti** (3.4.2) segue che quando  $v_2 = 0$

$$|i_1'| \geq |i_2'|$$

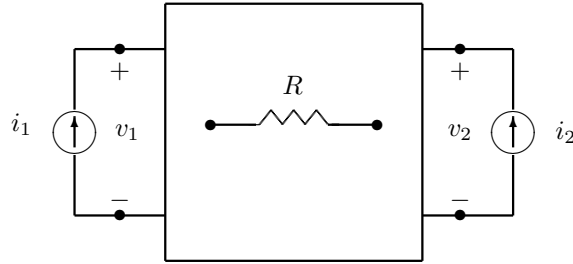
ed essendo  $G_{11} = \frac{i_1'}{v_1}$  e  $G_{21} = \frac{i_2'}{v_1}$  segue che

$$\left| \frac{i_1'}{v_1} \right| \geq \left| \frac{i_2'}{v_1} \right|$$

quindi  $|G_{11}| \geq |G_{21}|$ . Stesse considerazioni per  $v_1$  quindi  $|G_{22}| \geq |G_{21}|$

### 4.4.2 Matrici delle Resistenze

Consideriamo un circuito rappresentato su **base corrente** come in **Figura 3.13**



**Figura 3.13** Circuito su base corrente

applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\begin{cases} v_1 = \underbrace{R_{11}i_1}_{v_1'} + \underbrace{R_{12}i_2}_{v_1''} \\ v_2 = \underbrace{R_{21}i_1}_{v_2'} + \underbrace{R_{22}i_2}_{v_2''} \end{cases}$$

Abbiamo che

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

prende il nome di **matrice delle resistenze**  $[G^{-1}]$  e si misurano in *ohm*. Esplicitando le relazioni abbiamo:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v'_1}{i_1} & R_{12} &= \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v''_1}{i_2} \\ R_{21} &= \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v'_2}{i_1} & R_{22} &= \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v''_2}{i_2} \end{aligned}$$

$R_{11}$  e  $R_{22}$  sono dette resistenze *proprie*.

$R_{12}$  e  $R_{21}$  sono dette resistenze *mutue*.

La potenza assorbita dal doppio bipolo è  $p = i^T R i$ .

#### Proprietà

- $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}$ : dalla **seconda forma di reciprocità** (4.3.2) sappiamo che

$$\frac{v'_2}{i_1} = \frac{v''_1}{i_2}$$

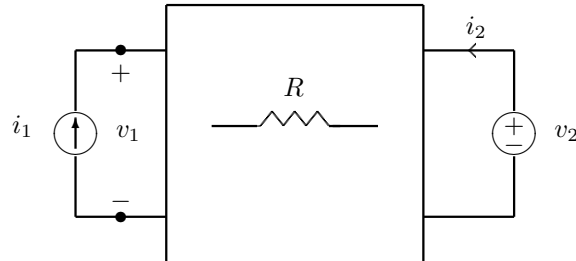
e data la definizione di resistenze mutue si ha che  $R_{12} = R_{21}$

- $\mathbf{R}_{11} \geq 0 \quad \mathbf{R}_{22} \geq 0$ : se tutti i resistori sono passivi si avrà che  $R_{11} \geq 0$  e  $R_{22} \geq 0$ .
- $\mathbf{R}_{11} \geq |\mathbf{R}_{21}| \quad \mathbf{R}_{22} \geq |\mathbf{R}_{12}|$ : questo è una conseguenza della **legge di non amplificazione delle tensioni** (3.4.1).

## 4.5 Matrici Ibride e di Trasmissione

### 4.5.1 Matrici Ibride

Consideriamo il circuito come in **Figura 3.14** rappresentato su **base ibrida**



**Figura 3.14** Circuito su base ibrida

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\begin{cases} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

La seguente matrice prende il nome di **matrice ibrida**

$$H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$$

Esplicitando i termini si ha:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{v'_1}{i_1} & H_{12} &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v''_1}{v_2} \\ H_{21} &= \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i'_2}{i_1} & H_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{i''_2}{v_2} \end{aligned}$$

Ora possiamo classificare ogni termine come segue

- $\mathbf{H}_{11}$ : è la resistenza equivalente vista alla porta **1** con  $v_2$  spento. Si misura in *ohm* ed è chiamata resistenza *propria*.
- $\mathbf{H}_{22}$ : è la conduttanza equivalente alla porta **2** con  $i_1$  spento. Si misura in *siemens* ed è chiamata conduttanza *propria*.
- $\mathbf{H}_{12}$ : è il guadagno in tensione quando  $i_1$  è spento. È adimensionale.
- $\mathbf{H}_{21}$ : è il guadagno in corrente quando  $v_2$  è spento. È adimensionale.

La potenza assorbita è pari a  $p = x^T H x$

### Proprietà

- $\mathbf{H}_{11} > 0 \quad \mathbf{H}_{22} > 0$ : sono, rispettivamente, una resistenza propria e una conduttanza propria perciò  $H_{11} > 0 \quad H_{22} > 0$ .
- $|H_{21}| \leq 1 \quad |H_{12}| \leq 1$ : per le **proprietà di non applicazione delle correnti (3.4.2) e delle tensioni (3.4.1)** abbiamo che  $|i_1| \geq i'_2$  e  $|v_2| \leq |v''_1|$  quindi:

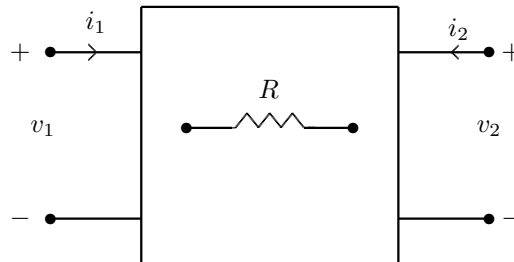
$$\frac{|i'_2|}{|i_1|} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{|v''_1|}{|v_2|} \leq 1$$

- per la **terza forma della reciprocità (4.3.2)** sappiamo che  $\frac{i'_2}{i_1} = -\frac{v''_1}{v_2}$  ne deriva quindi che  $H_{21} = -H_{12}$

Non è necessaria la passività di tutti gli elementi per far valere questa proprietà.

### 4.5.2 Matrici di Trasmissione

Consideriamo il circuito in **Figura 3.15** in cui  $v_1$  e  $i_1$  son espresse in funzione di  $v_2$  e  $i_2$ .



**Figura 3.15** Circuito con  $v_1$  e  $i_1$  in funzione di  $v_2$  e  $i_2$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\begin{cases} v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2) \\ i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2) \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad y = Tx$$

La seguente matrice prende il nome di **matrice di trasmissione**.

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$



Esplicitando i termini abbiamo:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_2=0} = \frac{v'_1}{v_2} & T_{12} &= \left. \frac{v_1}{-i_2} \right|_{v_2=0} = \frac{v''_1}{-i_2} \\ T_{21} &= \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{i_2=0} = \frac{i'_2}{v_2} & T_{22} &= \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{v_2=0} = \frac{i''_1}{-i_2} \end{aligned}$$

$T_{11}$  e  $T_{22}$  sono adimensionali.

$T_{12}$  è omogenea ad una resistenza e  $T_{21}$  ad una conduttanza. Questa è detta anche *rappresentazione ABCD*, utile nell'analisi di doppi bipoli in cascata.

### Proprietà

- $|T_{11}| \leq 1$   $|T_{22}| \leq 1$ : per la **proprietà di non amplificazione delle tensioni** (3.4.1) e delle **correnti** (3.4.2) abbiamo che

$$|v_2| \leq |v'_1| \quad \text{e} \quad |i_2| \geq |i''_1|$$

quindi

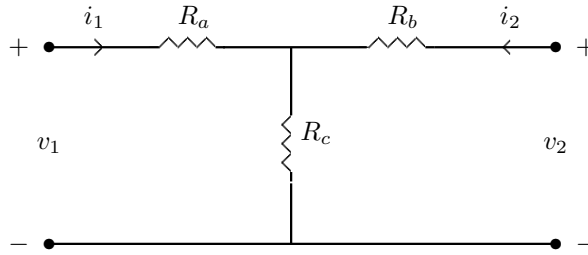
$$\left| \frac{v'_1}{v_2} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{i''_1}{-i_2} \right| \leq 1$$

- $\det(T) = 1$ : si può verificare questa proprietà esprimendo gli elementi della matrice di trasmissione in funzione degli elementi della matrice delle resistenze ed imponendo la condizione  $R_{12} = R_{21}$

## 4.6 Sintesi di un Bipolo Resistivo Lineare

### 4.6.1 Configurazione a “T”

Data una matrice delle resistenze, la configurazione più semplice di doppio bipolo a-dinamico Lineare avente tale matrice è la configurazione a “T”. Dato il circuito in **Figura 3.16**



**Figura 3.16** Configurazione a “T”

L’analisi del circuito avviene su base corrente. Quindi gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo sono:

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_a + R_c$$

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_b + R_c$$

$$R_{21} = R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_c$$

Quindi ne deriva che

$$\mathbf{R}_a = R_{11} - R_{12}, \quad \mathbf{R}_b = R_{22} - R_{12}, \quad \mathbf{R}_c = R_{12}$$

- $R_a$  e  $R_b$  hanno sempre segno positivo per la proprietà della matrice delle resistenze. Ossia:

$$R_{11} \geq 0; \quad R_{22} \geq 0$$

$$|R_{12}| \leq R_{11}; \quad |R_{21}| \leq R_{22}$$

$$R_{12} = R_{21}$$

- $R_c$  può avere qualsiasi segno. Se è negativo, basta invertire la coppia di terminali di una delle due porte per renderlo positivo.

Se la resistenza data non gode di almeno una delle proprietà della matrice delle resistenze non è possibile effettuare la sintetizzazione a doppio bipolo a-dinamico lineare, sarà necessario utilizzare dei generatori controllati.

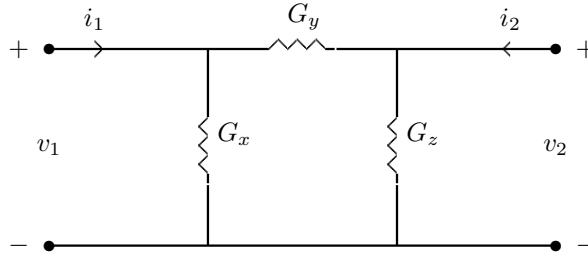
Anche data una matrice **ibrida** è possibile avere una configurazione a “ $T$ ”. Il legame tra i parametri ibridi ed i resistori della configurazione a “ $T$ ” sono:

$$H_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0} = (R_a + R_c)^{-1} \quad H_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = R_b + \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}$$

$$-H_{12} = H_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} = - \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{R_c}{R_a + R_c}$$

#### 4.6.2 Configurazione a $\Pi$

Data una matrice delle conduttanze, la configurazione più semplice di doppio bipolo a-dinamico lineare avente tale matrice è la configurazione a “ $\Pi$ ”



**Figura 3.17** Configurazione a “ $\Pi$ ”

L’analisi del circuito avviene su base tensione. Quindi gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo sono:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = G_x + G_y \\ G_{22} &= \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = G_y + G_z \\ G_{21} = G_{12} &= \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = -G_y \end{aligned}$$

Quindi ne deriva che:

$$\mathbf{G}_x = G_{11} + G_{12}, \quad \mathbf{G}_z = G_{22} + G_{12}, \quad \mathbf{G}_y = -G_{12}$$

- $G_x$  e  $G_z$  hanno sempre segno positivo per le proprietà delle conduttanze.  
Ossia:

$$G_{11} \geq 0; \quad G_{22} \geq 0$$

$$|G_{12}| \leq G_{11}; \quad |G_{21}| \leq G_{22}$$

$$G_{12} = G_{21}$$

- $G_{12}$  può avere qualsiasi segno. Se è negativo basta invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere  $G_y$  positivo.

Se la conduttanza data non gode di almeno una delle proprietà della matrice delle conduttanze non è possibile la sintetizzazione a “II” ma sarà necessario utilizzare dei generatori controllati.

Se la matrice data non è simmetrica si può scomporla per rendere almeno una parte simmetrica.

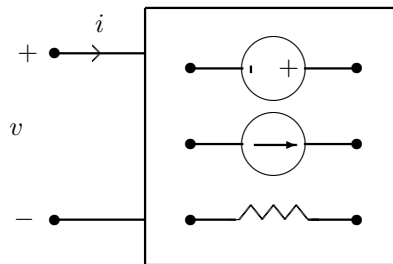
Si sintetizza la parte simmetrica e l'altra la si può sintetizzare mettendo un generatore controllato di tensione (o corrente) controllato in corrente (in tensione) in serie (in parallelo) alla parte dove abbiamo scomposto.

## Capitolo 5

# Circuiti a-Dinamici Lineari

### 5.1 Generatore Equivalente di Thèvenin-Norton

Consideriamo un generico circuito costituito da resistori lineari e generatori reali come in figura.



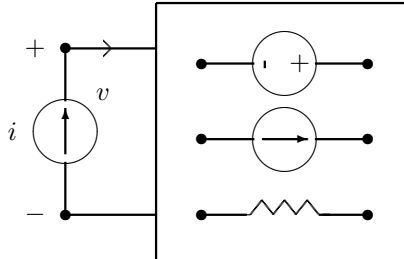
**Figura 4.1** Circuito generico costituito da resistori e generatori lineari

Dobbiamo determinare la relazione caratteristica tra l'intensità di corrente  $i$  e la tensione  $v$  per tutti i valori ammessi. Può essere effettuato su base tensione (*Norton*) o su base corrente (*Thèvenin*).

Prendiamo in esame la caratterizzazione base corrente.

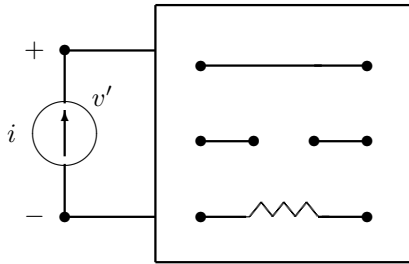
#### 5.1.1 Generatore Equivalente di Thèvenin

Se prendiamo in esame la caratterizzazione base corrente applichiamo al circuito generico un generatore di corrente.

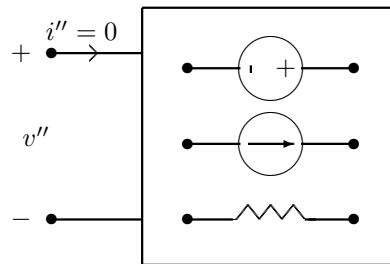


**Figura 4.2** Circuito generico con generatore di corrente

Ora possiamo spegnere, all'interno del bipolo generico, i generatori indipendenti come in **Figura 4.3**. Poi spegnamo il generatore di corrente per la caratterizzazione come in **Figura 4.4**.



**Figura 4.3**



**Figura 4.4**

Il circuito in **Figura 4.3** è costituito da soli resistori lineari, circuiti aperti e corto-circuiti. Quindi può essere rappresentato tramite un resistore di equivalente  $R_{TH}$ . Quindi

$$v' = R_{TH}i$$

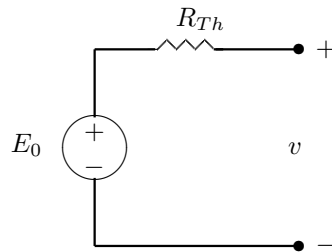
Nel circuito in **Figura 4.4**, invece, le sorgenti sono quelle dei bipoli interne al bipolo in questione. Indichiamo con  $E_0 = v''$  la tensione a vuoto. Applichiamo la sovrapposizione degli effetti e abbiamo

$$v = v' + v''$$

Sostituendo abbiamo

$$v = R_{Th}i + E_0$$

**Teorema 4.** *Il comportamento ai terminali di un qualsiasi bipolo costituito da resistori lineari e generatori ideali è descrivibile attraverso un generatore reale di tensione con valori della resistenza equivalente e tensione a vuoto opportuni.*



**Figura 4.5** Circuito equivalente di Thèvenin