UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO

CORSO DI ELETTROTECNICA

Appunti

Autore:
Luca PACE

23 marzo 2010

Prefazione

Il presente documento è stato scritto con lo scopo di aiutare lo studente che deve affrontare l'esame di Elettrotecnica a ripetere gli argomenti trattati durante il corso, riassumendo i concetti fondamentali del programma. Tale documento NON deve assolutamente essere usato in sostituzione dei libri di testo.

Indice

1 Regime Sinusoidale **4**

1.1 Metodo Simbolico . . . 4

1.1.1 Proprietà di Unicità . . . 5

1.1.2 Proprietà di Linearità . . . 5

1.1.3 Proprietà di Derivazione . . . 5

1.2 Potenza ed Energia in Regime Sinusoidale . . . 5

1.2.1 Potenza Media . . . 6

1.2.2 Potenza Complessa . . . 6

1.2.3 Energia in Regime Sinusoidale . . . 7

2 Proprietà dei Circuiti **8**

2.1 Grafo di un Circuito e sue Proprietà . . . 8

2.1.1 Grafo, Grafo Orientato, Sottografo . . . 8

2.1.2 Grafo Connesso . . . 9

2.1.3 Maglia . . . 9

2.1.4 Albero, coalbero . . . 9

2.1.5 Grafo Planare . . . 10

2.1.6 Anello . . . 10

2.1.7 Insieme di Taglio . . . 10

2.2 Equazioni di Kirchhoff Indipendenti . . . 11

2.2.1 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Correnti 11

2.2.2 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Tensioni 12

2.3 Conservazione delle Potenze Elettriche e Teorema di Tellegen . . 13

2.3.1 Teorema di Tellegen . . . 14

2.4 Proprietà Di Non Amplificazione . . . 15

2.4.1 Non Amplificazione delle Tensioni . . . 15

2.4.2 Non Amplificazione Delle Correnti . . . 16

2.5 Potenziali di Nodo . . . 17

3 Doppi Bipoli **19**

3.1 Generatori Controllati Lineari . . . 19

3.1.1 Generatore di Tensione Controllato in Tensione . . . 19

3.1.2 Generatore di Tensione Controllato in Corrente . . . 20

3.1.3 Generatore di Corrente Controllato in Tensione . . . 21

3.1.4 Generatore di Corrente Controllato in Corrente . . . 22

3.2 Trasformatore . . . 22

3.2.1 Mutuo Accoppiamento . . . 23

3.2.2 Trasformatore Reale . . . 25

4 Circuiti a-Dinamici Lineari **26**
4.1 Generatore Equivalente di Thèvenin-Norton 26
4.1.1 Generatore Equivalente di Thèvenin 26

Capitolo 1

Regime Sinusiodale

1.1 Metodo Simbolico

Per fissata pulsazione ω ad ogni funzione sinusoidale è possibile associare un numero complesso $\bar{A}$ secondo la regola

$$a(t) = A_m cos(\omega t + \alpha) \iff \bar{A} = A_m e^{j\alpha}$$

Essa produce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione assegnata ω , $\{a(t) = A_m cos(\omega t + \alpha)\}$ e l'insieme dei fasori $\{\bar{A} = A_m e^{j\alpha}\}$. Utilizzando le formule di *Eulero* possiamo riscrivere

$$\bar{A} = A_m cos(\alpha) + A_m j sin(\alpha)$$

Considerazioni:

- $\alpha = 0$; $\alpha = \pm 2\pi \implies e^{j\alpha} = 1$
- $\alpha = \pm\pi \implies e^{j\alpha} = -1$
- $\alpha = \pm\frac{\pi}{2} \implies e^{j\alpha} = \pm j$
- $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi \implies e^{j\alpha} = \mp j$

Per gli altri valori di α, sia la parte reale che la parte immaginara di $e^{j\alpha}$, sono diverse da 0. Quindi la funzione sinusoidale $a(t)$ può essere espressa in termini di fasore rappresentativo

$$a(t) = \Re e\{\bar{A}e^{j\omega t}\}$$

La corrispondenza biunivoca gode delle seguenti proprietà

- **Unicità**
- **Linearità**
- **Derivazione**

1.1.1 Proprietà di Unicità

Consideriamo le funzioni sinusoidali $a(t) = A_m(\omega t + \alpha)$ e $b(t) = B_m(\omega t + \beta)$, esse sono uguali se e solo se sono uguali i corrispondenti fasori rappresentativi $\bar{A} = A_m e^{j\alpha}$ e $\bar{B} = B_m e^{j\beta}$ quindi

$$a(t) = b(t) \iff \bar{A} = \bar{B}$$

Ciò è una diretta conseguenza del fatto che

$$c(t) = \Re e\{\bar{C}e^{j\omega t}\}\ \forall\ t \iff \bar{C} = 0$$

1.1.2 Proprietà di Linearità

Prendiamo in esame la funione sinusoidale

$$c(t) = k_1 a(t) + k_2 b(t)$$

Combinazione lineare delle funzioni sinusoidali $a(t) = A_m cos(\omega t + \alpha)$ e $b(t) = B_m cos(\omega t + \beta)$ dove k_1 e k_2 sono costanti reali. Il fasore $\bar{C}$ rappresentativo della funzione sinusoidale $c(t)$ è uguale alla stessa combinazione lineare dei fasori $\bar{A} = A_m e^{j\omega}$ e $\bar{B} = B_m e^{j\beta}$ rappresentazioni delle funzioni sinusoidali $a(t)$ e $b(t)$.

$$\bar{C} = k_1\bar{A} + k_2\bar{B} \implies c(t) = k_1 a(t) + k_2 b(t) \iff \bar{C} = k_1\bar{A} + k_2\bar{B}$$

$$\Re e\{(k_1\bar{A} + k_2\bar{B})e^{j\omega t}\} = k_1 \cdot \Re e\{\bar{A}e^{j\omega t}\} + k_2 \cdot \Re e\{\bar{B}e^{j\omega t}\}$$

1.1.3 Proprietà di Derivazione

La derivata prima della funzione sinusoidale

$$a(t) = A_m cos(\omega t + \alpha)$$

con pulsazione ω è

$$\frac{d\ a(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A_m cos(\omega t + \alpha)]\ = \omega A_m cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sia $\bar{A} = A_m e^{j\omega}$ il fasore rappresentativo della funzione sinusoidale $a(t)$, allora il fasore rappresentativo della derivata prima di $a(t)$, che indicheremo con D_a, è dato da $D_a = \omega A_m e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega\bar{A}$, quindi

$$\frac{d\ a(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A_m cos(\omega t + \alpha)]\ \iff D_a = j\omega\bar{A}$$

1.2 Potenza ed Energia in Regime Sinusoidale

Siano

- $v(t) = V_m cos(\omega t + \alpha)$
- $i(t) = I_m cos(\omega t + \beta)$

Tenendo presente le due relazioni sopra citate,la potenza elettrica istantanea assorbita da un generico bipolo del circuito è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m cos(\omega t + \alpha)cos(\omega t + \beta)$$

Applichiamo l'identità trigonometrica, che afferma

$$2 \cdot cosxcosy = cos(x + y) + cos(x - y)$$

Abbiamo che

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m [cos(\alpha - \beta) + cos(\underbrace{2\omega}_{\text{pulsazione}} t + \alpha + \beta)]$$

1.2.1 Potenza Media

È definita a valor medio sul periodo T della potenza istantanea assorbita

$$P = \int_0^T p(\tau)d(\tau)$$

Sostituendo

$$P = \frac{V_m I_m}{2} cos(\alpha - \beta)$$

La potenza quindi non dipende solo dalle ampiezze massime della tensione e dell'intensità di corrente, ma anche dalla differenza delle loro fasi $[cos(\alpha - \beta)]$.

1.2.2 Potenza Complessa

La potenza media può essere espressa direttamente in termini dei fasori della tensione $\bar{V} = V_m e^{j\alpha}$ e dell'intesità di corrente $\bar{I} = I_m e^{j\beta}$, infatti:

$$P = \Re e \left\{ \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \right\}$$

$$\widehat{P} = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^* \longrightarrow \text{potenza complessa assorbita}$$

Poniamo

$$Q = Im\{\widehat{P}\} \implies \widehat{P} = P + jQ$$

Abbiamo

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m sin(\alpha - \beta)$$

1.2.3 Energia in Regime Sinusoidale

L'energia assorbita dal bipolo in regime sinusoidale nell'intevallo $[0, \widehat{t}]$ è data da

$$\omega(0, \widehat{t}) = \int_0^{\widehat{t}} p(\tau)d(\tau) = (nT)P + \int_{nT}^{nT+\Delta t} pt(\tau)d(\tau)$$

n è un numero intero tale che $\widehat{t} = nT + \Delta t$ con $\Delta t < T$. n è il numero di periodi T contenuti nell'intervallo $[0, \widehat{t}]$. Se $n >> 1$ il contributo dovuto all'energia assorbita nell'intervallo di tempo $(nT, nt + \Delta t)$ è trascurabile rispetto a $(nT)P$, quindi

$$\omega(0, \widehat{t}) \cong (nT)P \cong \widehat{t}P$$

Capitolo 2

Proprietà dei Circuiti

2.1 Grafo di un Circuito e sue Proprietà

Un generico circuito può essere rappresentato tramite il metodo dei *grafi*, ossia uno schema geometrico del circuito in cui sono presenti solo i nodi e i collegamenti tra essi (sono assenti i bipoli che lo caratterizzano). Prendiamo ad esempio il circuito in **Figura 2.1** costituito da 4 *nodi* e 5 *lati*. Per convenzione lo indicheremo con G.

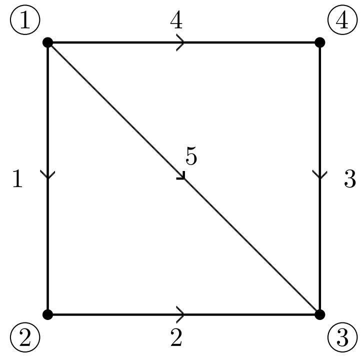

Figura 2.1 Grafo G

Di seguito sono enunciate le proprietà annesse alla teoria dei *grafi*.

2.1.1 Grafo, Grafo Orientato, Sottografo

Prendiamo in considerazione il grafo in **Figura 2.1**.

- Un grafo $G(N, L)$ è costituito dall'insieme di n nodi, che indicheremo con $N = \{1, 2, ..., l\}$, dall'insieme di lati l *lati*, che indicheremo con

$L = \{1, 2, ..., l\}$, e dalla *relazione di incidenza* che ogni lato (bipolo) fa corrispondere la coppia di nodi nei quali quel lato incide.

- Se ogni lato (bipolo) del grafo è orientato, il grafo allora si dice **orientato**. Per ciascun lato del grafo di un circuito è orientato con la fraccia che indica il verso di riferimento dell'intensità della corrente del corrispondente bipolo.

- Si consideri un grafo $G(N, L)$. Il grafo $G_1(N, L)$ si dice sottografo di $G(N, L)$, se N_1 è un sottoinsieme di N, L_1 è un sottoinsieme di L e la realzine di incidenza tra i nodi di N_1 ed i lati di L_1 è la stessa relazione che si ha nel grafo $G(N, L)$

2.1.2 Grafo Connesso

Un grafo si dice connesso se ogni nodo è collegato ad un qualsiasi altro nodo attraverso uno o più lati. Un grafo connesso contiene sottografi connessi. Circuiti di interesse con grafi non connessi sono io circuiti che contengono elementi con più di due terminali, come, ad esempio, i doppi bipoli.

2.1.3 Maglia

- Sia un dato grafo connesso G. Una maglia di G è un sottografo connesso in un ciascun nodo incidano due e solo due lati.

- Se alla maglia viene associato un verso di percorrenza essa è detta *orientata*.

Ogni maglia forma un percorso chiuso, perchè essa deve costituire un sottografo connesso in cui in ogni nodo coincidono due e due soli lati: percorrendo interamente la maglia ciascun lato e ciascun nodo vengono incontrati una ed una sola volta.

2.1.4 Albero, coalbero

- Sia dato un grafo connesso G. Un *albero* A di G è un suo sottografo connesso che comprende tutti i nodi e non contiene alcuna maglia.

- Il *coalbero* C di G, corrisponde all'albero A, è l'insieme dei dati complementare a quelli dell'albero: l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati di G.

Per l'albero di un qualsiasi grafo connesso vale la seguente proprietà

Proprietà 1. *Si consideri un grafo connesso G con n nodi ed l lati. Ciascun albero del grafo G è costituito da $(n-1)$ lati (indipendentemente dal numero dei lati del grafo e della realzione di incidenza).*

Una diretta conseguenza della **Proprietà 1** è relativa al coalbero. Difatti, essendo sempre $(n-1)$ il numero di lati dell'albero, e del fatto che il coalbero è il componente all'albero, si ha:

Proprietà 2. *Si consideri un grafo connesso G con n nodi ed l lati. Ciascun coalbero del grafo è costituito da $[l-(n-1)]$ lati (indipendentemente dalla relazione di incidenza del grafo).*

Una maglia **fondamentale** è descritta dalla seguente relazione:

Proprietà 3. *Si consideri un sottografo che si ottiene aggiungendo all'albero A un solo lato di coalbero C: esso contiene una e una soloa maglia, che si ottiene eliminando tutti quei lati che non appartengono al percorso chiuso. Una maglia ottenuta in questo modo prende il nome di* **maglia fondamentale** *del coalbero C.*

È evidente, allora, che aggiungendo un lato di coalbero per volta è possibile costruire $[l-(n-1)]$ maglie fondamentali distinte. Questo insieme di maglie prende il nome di *insieme di maglie fondamentali* del coalbero C del grafo G.

2.1.5 Grafo Planare

Un grafo si dice planare se può essere tracciato su un piano senza che nessuna coppia di lati si intersechi in un punto che non sia un nodo. Ogni grafo planare gode della seguente proprietà:

Proprietà 4. *Ogni maglia partiziona il piano in due regioni, quella interna al cammino chiuso e quella esterna. Tra tutte le possibili maglie di un grafo planare, rivestono particolare interesse quelle che non contengono nessun lato al loro interno.*

2.1.6 Anello

Un anello è una maglia di un grafo planare che non contiene lati al suo interno.

Proprietà 5. *Si consideri un grafo planare connesso G con n nodi e l lati. Il grafo G ha $[l-(n-1)]$ anelli.*

2.1.7 Insieme di Taglio

Si consideri un grafo connesso $G(N, L)$. Un sottoinsieme T dei lati L del grafo, si dice insieme di taglio se, contemporaneamente:

- la rimozione del grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce a due sottografi non connessi;
- il ripristino si uno qualsiasi dei lati dell'insieme di taglio connette nuovamente i due sottografi.

Se il grafo è orientato, l'insieme di taglio si dice orientato.

Legge di Kirchhoff per gli Insiemi di Taglio

La somma algebrica delle intensità di corrente dei bipoli che formano un qualsiasi insieme di taglio è uguale a zero istante per istante.

2.2 Equazioni di Kirchhoff Indipendenti

le equazioni circuitali sono costituite dalle equazioni di kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali. le equazioni di kirchhoff sono algebriche lineari ed omogenee. invece le equazioni di caratteristiche possono essere, in generale, algebriche o differenziali, lineari o non lineari, tempo-invarianti o tempo-varianti, omogenee o non omogenee, a seconda della natura degli elementi circuitali.

2.2.1 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Correnti

Prendiamo in esame le equazioni di Kirchhoff per le correnti analizzando un circuito avente un grafo come di seguito.

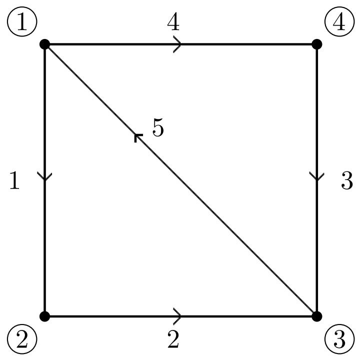

Figura 2.2 Grafo

Applichiamo le LKC ai nodi e abbiamo:

nodo 1. $i_1 + i_2 - i_5 = 0$

nodo 2. $-i_1 + i_4 = 0$

nodo 3. $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$

nodo 4. $i_2 + i_3 = 0$

Esse sono linearmente dipendenti. Infatti sommando membro a membro le 4 equazioni del sistema si ottiene l'identità $0 = 0$. Per tanto la 4^a è combinazione lineare delle altre 3. Dunque tutte le *informazioni* contenute nella 4^a equazione del sistema sono già presenti nlle altre 3 e, quindi essa è ridondante. Questo risultato è del tutto generale. Le n equazioni di Kirchhoff per le correnti (n è il numero i nodi):

$$A_a \mathbf{i} = 0$$

di un circuito sono linearmenti dipendenti, qualunque sia il grafo del circuito. Questo è una diretta conseguenza del il fatto che la somma di tutte le righe della matrice di incidenza è la riga identicamente nulla. Questo è in accordo con il fatto che il rango della matrice di incidenza A_a è minore di n. Quindi, a conclusione delle nostre tesi, qualsiasi equazione del sistema può essere eliminata, senza che l'informazione contenuta nel sistema ne risenta in alcun modo.

Proprietà 6. *Per un circuito con grafo connesso con n nodi, $n-1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti, scelte in maniera arbitraria tra le possibili n, sono linearmente indipendenti.*

Equazioni Indipendenti per gli Insiemi di Taglio

Fissato un albero, un insieme ti taglio fondamentale contiene un unico lato dell'albero assieme ad alcuni lati di coalbero. Scrivendo le equazioni di Kirchhoff per gli insiemi di taglio fondamentali associati ad un qualisiasi albero si perviene ad un insieme di equazioni che sono coerentemente indipendenti fra loro inquanto ciascuna contiene (in esclusiva) l'intensià cirrente relativa ad un lato dell'albero. Essendo proprio $n-1$ il numero dei lati dell'albero, abbiamo così costruito un insieme di $n-1$ equazioni per gli insieme di taglio indipendenti. Siccome gli altri insiemi di taglio possono essere sempre espressi come un'opportuna unione di insiemi di taglio fondamentali, le corrisponenti equazioni sono esprimibili come combinazione lineare di quelle corrispondenti ad insieme di taglio fondamentali. In conclusione, le equazioni indipendenti per gli insiemi di taglio sono $n-1$. Da questo risultato segue che imporre $n-1$ equazioni indipendenti agli insiemi di taglio equivale ad imporre le equazioni di Kirchhoff per i nodi

2.2.2 Indipendenza delle Equazioni di Kirchhoff per le Tensioni

Ora consideriamo le leggi di Kirchhoff per le tensioni. Analizziamo quindi le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni al circuito in **Figura 2.2**:

$$\mathbf{M_1} \longrightarrow -v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

$$\mathbf{M_2} \longrightarrow v_3 + v_4 - v_5 = 0$$

$$\mathbf{M_3} \longrightarrow -v_1 + v_2 + v_5 = 0$$

Queste equazioni non sono tra loro linearmente indipendenti. Ad esempio la terza equazione è combinazione lineare delle restanti due equazioni. Infatti piuò essere ottenuta sottraendo membro a membro le prime due. Ora consideriamo un generico circuito e sia m il numero di maglie. Le m maglie equazioni di Kirchhoff per le tensioni corrispondenti

$$B_a \mathbf{v} = 0$$

non sono linearmente indipendenti. Quindi per stabilire quante sono le equazioni linearmente indipendenti ricorriamo alla seguente proprietà che esprime l'*indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni*:

Proprietà 7. *Per un circuito con grafo connesso con n nodi e l lati, le $l-(n-1)$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni relative ad un insieme di maglie fondamentali sono linearmente indipendenti. Le equazioni di Kirchhoff per le maglie del circuito possono essere espresse come combinazioni lineari delle equazioni delle maglie fondamentali.*

La proprietà di indipendenza può essere dimostrata semplicemente, anche nel caso generale, ricordando che ogni maglia di un insieme di maglie fondamentali ha almeno un lato in esclusiva. Di conseguenza, ogni equazione dell'insieme delle equazioni di Kirchhoff per un insieme di maglie fondamentali ha almeno una tensione incognita in esclusiva, e quindi le $l-(n-1)$ equazioni per le maglie fondamentali sono linearmente indipendenti.

2.3 Conservazione delle Potenze Elettriche e Teorema di Tellegen

L'espressione della potenza elettrica assorbita dal $k-esimo$ bipolo $k = (1, 2, ..., l)$ del circuito è data da

$$p_k(t) = i_k(t)v_k(t)$$

Proprietà 1. *La somma delle potenze elettriche assorbite da tutti i bipoli di un circuito è, istante per istante, uguale a 0.*

$$\sum_{k=1}^{l} p_k(t) = \sum_{k=1}^{l} i_k(t)v_k(t) = 0$$

A questo punto introduciamo il vettore $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_l)^T$ delle correnti, il vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_l)^T$ delle tensioni ed il vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_l)^T$ dei potenziali di nodo del circuito. Quindi:

$$\sum_{k=1}^{l} v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + ... + v_l i_l = \mathbf{v^T i}$$

Le tensioni del circuito possono essere scritte come

$$\mathbf{v} = \mathbf{A_a^T u} \qquad \mathsf{A_a} = \text{ matrice d' incidenza}$$

Quindi sostituendo

$$\mathbf{v^T i} = (\mathbf{A_a^T u})\mathbf{i}$$

Per la proprietà di identità possiamo scrivere

$$(\mathbf{A_a^T u})^\mathbf{T} = \mathbf{u^T A_a}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{l} v_k i_k = (\mathbf{u^T A_a i}) = \mathbf{u^T}(\mathbf{A_a i})$$

Dalle leggi di **Kirchhoff** sappiamo che $\mathbf{A_a i} = \mathbf{0}$ quindi possiamo scrivere

$$\sum_{k=1}^{l} v_k i_k = 0$$

1

2.3.1 Teorema di Tellegen

La sommatoria delle potenze virtuali assorbite da ciascun lato del grafo è uguale a 0.

$$\sum_{k=1}^{l} i'_k v''_k = 0 \text{ o } \left(\sum_{k=1}^{l} i''_k v'_k = 0 \right)$$

Consideriamo due bipoli come in figura

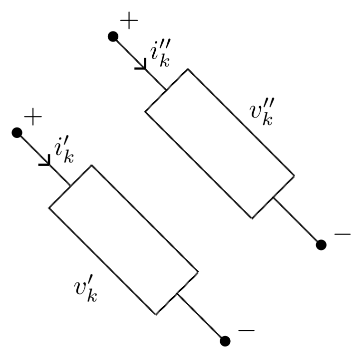

Figura 2.3 Due bipoli generici

Abbiamo che $\widehat{p} = i'_k v''_k$

$$\widehat{p}_k^{(e)} = -\widehat{p}_k$$

2.4 Proprietà Di Non Amplificazione

2.4.1 Non Amplificazione delle Tensioni

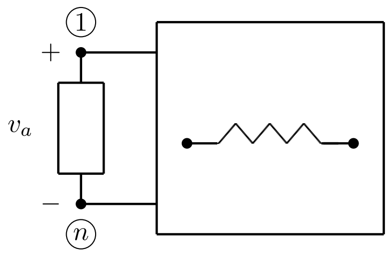

Figura 2.4 Circuito generico

Si consideri un circuito costituito da resistori strettamente passivi (i resistori possono essere anche non lineari) e un solo bipolo attivo.

Teorema 1. *La tensione del genrico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo.*

Per dimostrare il teorema prendiamo in considerazione 4 bipoli collegati al nodo o, come in figura.

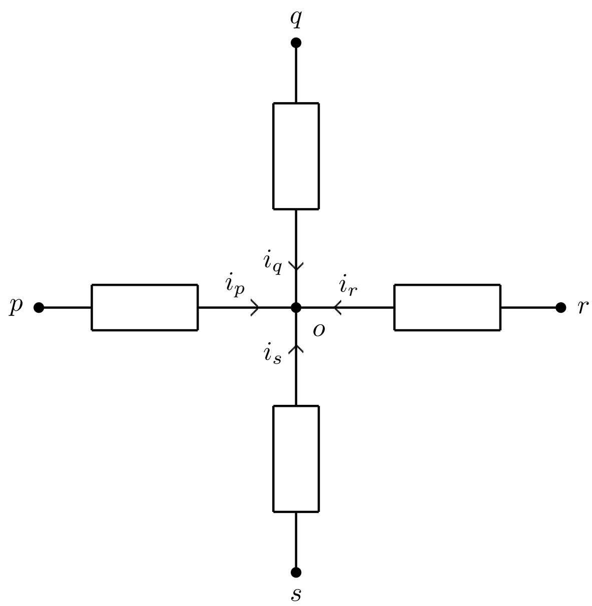

Figura 2.5 Bipoli casuali estratti dal generico circuito in *Figura 2.4*

Applichiamo la LKC al nodo o

$$i_p + i_q + i_r + i_s = 0$$

Data questa relazione possiamo avere due possibili alternative.

- Le correnti sono tutte nulle
- Abbiamo delle correnti nulle, altre negative altre positive.

Prendiamo in esame la seconda possibilità. Quindi

$$i_q > 0 \quad i_r < 0$$

$$p_p = v_q i_q > 0 \quad p_r = v_r i_r > 0$$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali

$$v_q = u_q - u_o > 0 \quad v_r = u_r - u_o < 0$$

Ne consegue la seguente relazione verificando il **Teorema 1**

$$u_r < u_o < u_q$$

2.4.2 Non Amplificazione Delle Correnti

Si consideri un circuito costituito da resitori strettamente passivi e da un solo bipolo attivo.

Teorema 2. *L'intensità di corrente del generico bipolo strettamente passivo non può superare, in valore assoluto, quella dell'unico bipolo attivo.*

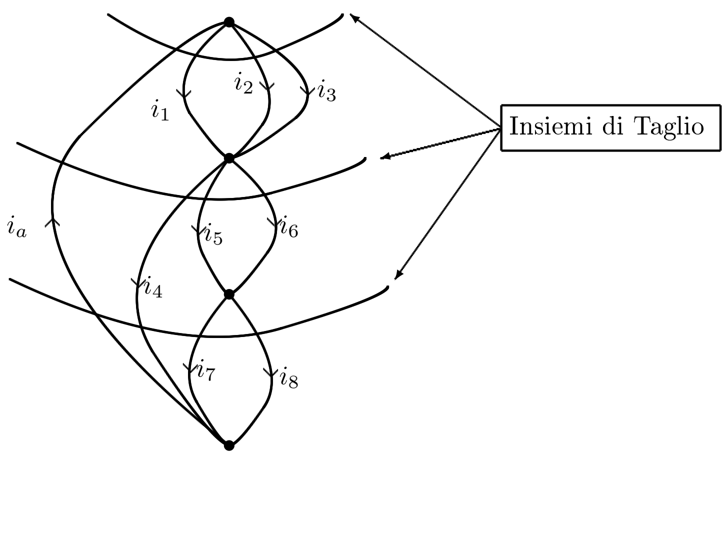

Figura 2.6 Grafo ordinato per potenziali di nodi decrescenti

Prendendo in considerazione gli insiemi di taglio sui tre nodi e applicando la LKC abbiamo

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = i_a \\ i_4 + i_5 + i_6 = i_a \\ i_4 + i_7 + i_8 = i_a \end{cases}$$

$$|i_a| \ \leq 0 \quad i_k \geq 0 \longrightarrow k = 1, 2, ..., 8$$

Ne consegue che

$$i_a \geq i_k$$

2.5 Potenziali di Nodo

Il metodo dei potenziali di nodo consiste nell'esprimere le tensioni di ciascun lato attraverso delle opportune grandezze ausiliari, in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le tensioni sia verificata automaticamente per ogni maglia del circuito.

Consideriamo ancora una volta un generico circuito, con n nodi e l bipoli, assegnamo i versi di riferimento per le intensità di corrente e fissiamo una volta per tutte le convenzioni dell'utilizzatore per tutti i bipoli.

Il metodo dei potenziali di nodo consiste nell'associare, a ciascun nodo, una variabile aleatoria, detta *potenziale di nodo*: al generico nodo i $(i = 1, 2, ..., n)$ associamo dunque il potenziale di nodo u_i.

Facendo riferimento alla seguente figura.

Assumiamo che sia possibile esprimere la tensione di ciascun bipolo del circuito in funzione dei potenziali dei due nodi nei quali il lato incide secondo la seguente regola: la tensione v_s del generico bipolo s $(s = 1, 2, ..., l)$ è espressa come differenza tra il potenziale del nodo contrassegnato con il $''+''$ ed il potenziale del nodo contrassegnato con il $''-''$:

$$v_s = u_p - u_q \quad \text{per} \quad s = 1, 2, ..., l \tag{2.1}$$

Le tensioni espresse da questa relazione verificano automaticamente la LKT qualunque siano i valori dei potenziali di nodo $u_1, u_2, ..., u_n$. Prendendo sempre in considerazione la **Figura 2.7** e la maglia costituita dai lati $1, 2, 3, 4, 7$, la LKT è:

$$v_1 + v_2 - v_3 - v_4 - v_7 = 0$$

Esprimendola attraverso i potenziali di nodo abbiamo:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_5 - u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_3 - u_2 \\ v_4 &= u_4 - u_3 \\ v_7 &= u_5 - u_4 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sostituendo nella LKT abbiamo:

$$(u_5 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u - 3 - u_2) + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) = 0$$

Questa equazione è sempre verificata, indipendentemente da valori dei potenziali di nodo $u_1, u_2, ..., u_5$, dunque è un'identità. Quindi la 2.2 verificano la LKT.

Quindi possiamo affermare che

Teorema 3. *Se le tensioni di un circuito sono sempre espresse attraverso i potenziali di nodo secondo la 2.1*

Capitolo 3

Doppi Bipoli

3.1 Generatori Controllati Lineari

I *generatori controllati lineari* sono dei particolari tipi di doppi-bipoli a-dinamici lineari: una delle due grandezze - tensione o intensità di corrente - ad una delle due porte è direttamente proporzionale al una delle due grandezze all'altra porta. Esistono diversi tipi, qui di seguito sono descritti 4 possibili configurazioni.

3.1.1 Generatore di Tensione Controllato in Tensione

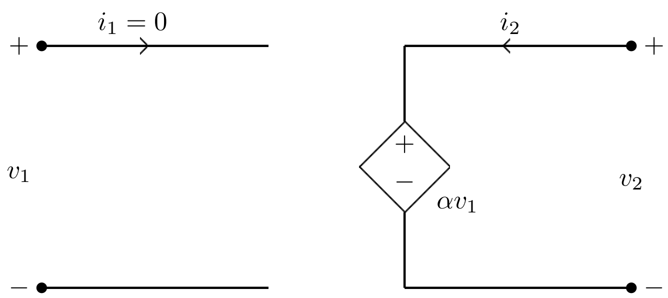

Figura 3.1 Rappresentazione di un Generatore di Tensione Controllato in Tensione

Le realzioni caratteristiche sono

$$i_1 = 0$$

$$v_2 = \alpha v_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere epresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base ibrida.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Generatore di Tensione Controllato in Corrente

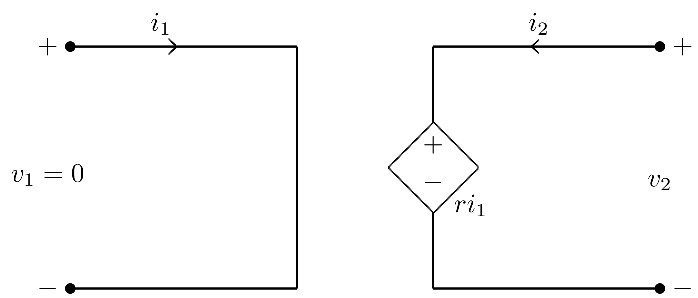

Figura 3.2 Rappresentazione di un Generatore di Tensione Controllato in Corrente

Le realzioni caratteristiche sono

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \gamma v_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere epresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base tensione.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Generatore di Corrente Controllato in Tensione

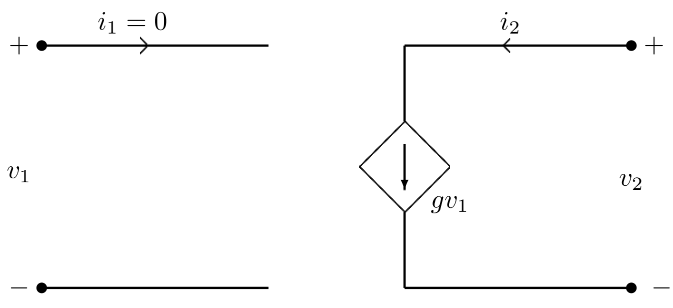

Figura 3.3 Rappresentazione di un Generatore di Corrente Controllato in Tensione

Le relazioni caratteristiche sono

$$i_1 = 0$$

$$i_2 = gv_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere epresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base corrente.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Generatore di Corrente Controllato in Corrente

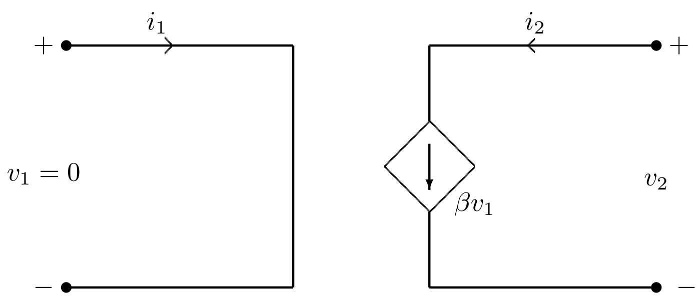

Figura 3.4 Rappresentazione di un Generatore di Corrente Controllato in Corrente

Le realzioni caratteristiche sono

$$v_1 = 0$$

$$i_2 = \beta i_1$$

Le relazioni caratteristiche possono essere epresse anche sotto forma di notazione vettoriale. In questo caso abbiamo una notazione su base ibrida.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

3.2 Trasformatore

Il trasformatore può essere realizzato con due circuiti mutuamente accoppiati. I due circuiti, *primario* e *secondario*, sono realizzati avvolgendo del filo conduttore, smaltato con della vernice isolante,su un supporto di materiale, fatto di ferrite o lamine sottili di acciaio speciale.

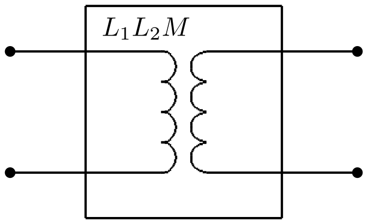

Figura 3.5 Rappresentazione simbolica di un trasformatore

3.2.1 Mutuo Accoppiamento

Le equazioni caratteristiche del *mutuo accoppiamento* sono

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{d\, i_1}{dt} + M \dfrac{d\, i_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{d\, i_2}{dt} + M \dfrac{d\, i_1}{dt} \end{cases}$$

N.B.	*In caso di mutuo accoppiamento perfetto abbiamo* $$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = 1$$ $$M^2 = L_1L_2 \implies \frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \left(\dfrac{d\, i_1}{dt} + \dfrac{M}{L_1} \cdot \dfrac{d\, i_2}{dt} \right) \\ v_2 = M \left(\dfrac{d\, i_1}{dt} + \dfrac{L_2}{M} \cdot \dfrac{d\, i_2}{dt} \right) \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro abbiamo

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} \implies n \quad n\text{: Rapporto di Trasformazione}$$

Simbolicamente il trasformatore ideale si può rappresentare in questo modo

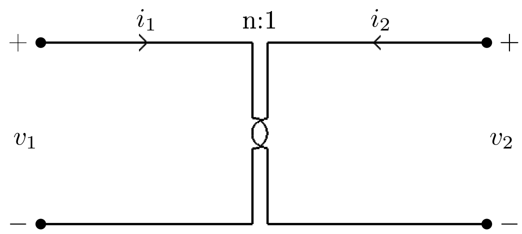

Figura 3.6 Trasformatore ideale con doppio bipolo generico sul primario

Continuando ad agire con delle semplici manipolazioni algebriche abbiamo le seguenti relazioni.

$$v_1 = L_1 \left(\frac{d\, i_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \cdot \frac{d\, i_2}{dt} \right) = L_1 \frac{d}{dt} \underbrace{\left(i_1 + \frac{1}{n}\, i_2 \right)}_{i^*} = L_1 \frac{d\, i^*}{dt}$$

Aggiungiamo al circuito un bipolo generico

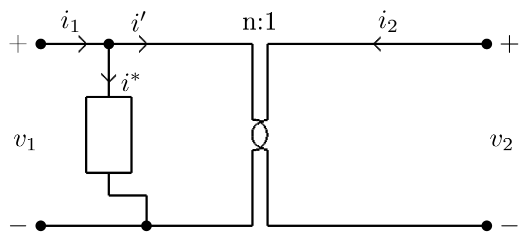

Figura 3.7 Trasformatore ideale con doppio bipolo generico sul primario

$$i' = -\frac{1}{n}\, i_2 \quad \text{in quanto} \quad i_1 = i^* + i'$$

$$i^* = i_1 - i' = i_1 + \frac{1}{n}\, i_2$$

3.2.2 Trasformatore Reale

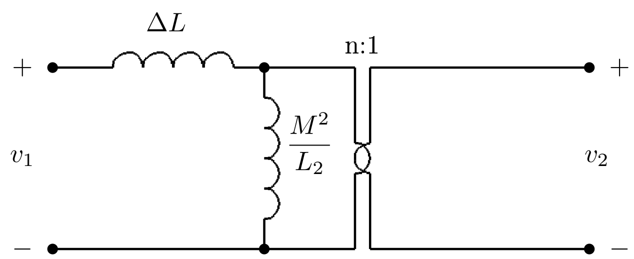

Figura 3.8 Schema simbolico di trasformatore reale

Per un trasformatore reale abbiamo che il *coefficiente di mutua induzione* M risulta essere molto minore del prodotto $L_1 L_2$

$$M^2 << L_1 L_2$$

Prendendo in esame L_1 abbiamo

$$L_1 = L' + \Delta L \implies \Delta L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

$$L_1 \implies L_1' L_2 = M^2$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1' \dfrac{d\, i_1}{dt} + M \dfrac{d\, i_2}{dt} + \Delta L \, \dfrac{d\, i_1}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{d\, i_2}{dt} + M \dfrac{d\, i_1}{dt} \end{cases}$$

Capitolo 4

Circuiti a-Dinamici Lineari

4.1 Generatore Equivalente di Thèvenin-Norton

Consideriamo un generico circuito costituito da resistori lineari e generatori reali come in figura.

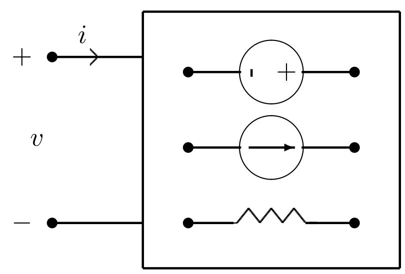

Figura 4.1 Circuito generico costutito da resistori e generatori lineari

Dobbiamo determinare la relazione caratteristica tra l'intensità di corrente i e la tensione v per tutti i volori ammessi. Può essere effettuato su base tensione (*Norton*) o su base corrente (*Thèvenin*).

Prendiamo in esame la caratterizzazione base corrente.

4.1.1 Generatore Equivalente di Thèvenin

Se prensiamo in esame la caratterizzazione base corrente applichiamo al circuito generico un generatore di corrente.

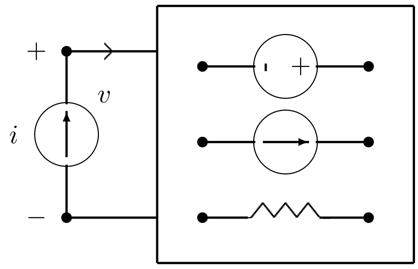

Figura 4.2 Circuito generico con generatore di corrente

Ora possiamo spegnere, all'interno del bipolo generico, i generatori indipendenti come in **Figura 4.3**. Poi spegnamo il generatore di corrente per la caratterizzazione come in **Figura 4.4**.

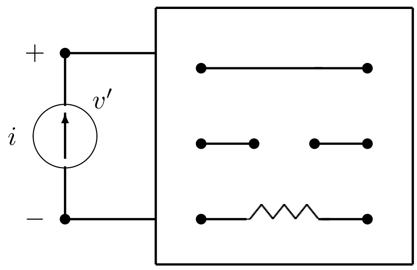

Figura 4.3

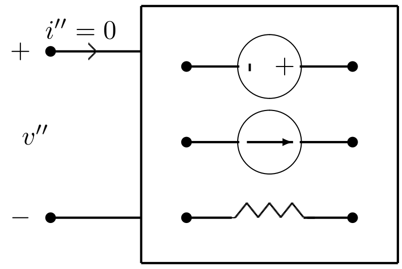

Figura 4.4

Il circuito in **Figura 4.3** è costituito da soli resistori lineari, circuiti aperti e corto-circuiti. Quindi può essere rappresentato tramite un resistore di equivalente R_{TH}. Quindi

$$v' = R_{Th} i$$

Nel circuito in **Figura 4.4**, invece, le sorgenti sono quelle dei bipoli interne al bipolo in questione. Indichiamo con $E_0 = v''$ la tensione a vuoto. Applichiamo la sovrapposizione degli effetti e abbiamo

$$v = v' + v''$$

Sostituendo abbiamo

$$v = R_{Th} i + E_0$$

Teorema 4. *Il comportamento ai terminali di un qualsiasi bipolo costituito da resistori lineari e generatori ideali è descrivibile attraverso un generatore reale di tensione con valori della resistenza equivalente e tensione a vuoto opportuni.*

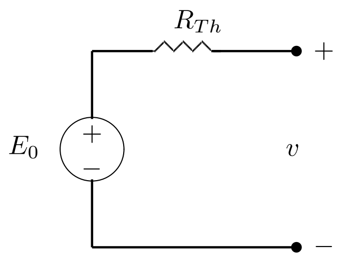

Figura 4.5 Circuito equivalente di Thèvenin