Лабораторная работа 1.4.1
"Изучение физического маятника"

Белов Михаил Б01-302

12 октября 2023 г.

Аннотация:

Цель лабораторной работы заключается в исследовании физического маятника в зависимости от положения его центра масс и его момента инерции. А также опытное получение значения ускорения свободного падения.

Теоретические сведения:

Физическим маятником называют любое твёрдое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтально оси. Движение маятника описывается уравнением:

$I \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = M$,

где I – момент инерции маятника, ϕ – угол отклонения маятника от положения равновесия, t – время, M – момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника используется однородный металлический стрежень длинной l:

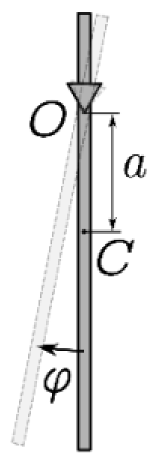


Рис. 1. Стержень как физический маятник

Пусть расстояние от оси вращения O до центра массы стержня C равно a, тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника:

$I = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot a^2$,

где m – масса маятника. Момент силы тяжести, действующей на маятник:

$M = -mg \cdot a \cdot \sin(\phi)$

Если угол ϕ мал, то $\sin(\phi) \approx \phi$, так что:

$M \approx -mg \cdot a \cdot \phi$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. поэтому моментом силы трения можно пренебречь. Тогда получаем уравнение:

$\ddot{\phi} + \omega^2 \cdot \phi = 0,$

где:

$\omega^2 = \frac{g \cdot a}{a^2 + \frac{l^2}{12}}$

Решением этого уравнения является функция:

$\phi(t) = A \cdot \sin(+\alpha)$

Амплитуда колебаний A и начальная фаза α зависят только от начальных условий, а частота колебаний ω определяется только ускорением свободного падения и параметрами маятника.
Период колебаний равен:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{a \cdot g}}$

Можем заметить, что период малых колебаний физического маятника не зависит от фазы и амплитуды. Это утверждение (изохронность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению $\ddot{\phi} + \omega^2 \cdot \phi = 0$.

Период колебаний математического маятника определяется формулой:

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}},$

где l' – длина математического маятника. Поэтому величину

$l_{np} = a + \frac{l^2}{12a}$

называют приведённой длиной физического маятника. Точку O', отстающую от точки O на расстаяние l_{np} называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании вокруг точки O.

Измерение периода колебаний:

Измерение периода колебаний маятника с помощью секундомера сопровождается погрешностью из-за конечного времени реакции человека. Как правило, время реакции составляет 0,1 – 0,2 с. Однако это время различно для разных людей.
Найти случайную погрешность из-за времени реакции можно экспериментально. Для этого необходимо несколько раз повторить опыт по измерению одного и того же числа колебаний маятника. По полученному набору результатов определить среднее значение среднеквадратичное отклонение отдельного измерения:

$\delta_t^{rnd} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum(t_i - \overline{t})}$

Кроме того, у каждого секундомера возможна систематическая погрешность δ_t^{syst}, максимальная величина которой устанавливается производителем. Как правило у секундомера есть погрешность цены деления, а также систематическая погрешность из-за постепенного «ухода» показаний с течением времени. Последняя зависит от класса точности секундомера: например, от лабораторных механических секундомеров 2-го класса точности следует ожидать погрешности 0,1 с за 60 с (0,2%). Тогда полная погрешность измерения времени вычисляется среднеквадратично:

$\delta_t^{full} = \sqrt{(\delta_t^{rnd})^2 + \delta_t^{syst})^2}$

Особенности маятника с перемещаемым грузом:

Если на стержень насадить груз, то момент инерции маятника, а значит и период его колебаний, будет зависеть от положения груза относительно оси качания. Поскольку размер груза m_r мала по сравнению с длиной стержня, его можно считать закреплённой на стержне точечной массой. Обозначим за y расстояние от точки подвеса O до центра масс груза. Тогда момент инерции маятника будет равен:

$I = I_0 + m_r \cdot y^2,$

где I_0 — момент инерции маятника без груза. Поскольку точка подвеса в фиксирована, величина I_0 в опыте остаётся постоянной. Пусть x_{c0} — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника без груза. Тогда центр масс маятника с грузом находится в точке:

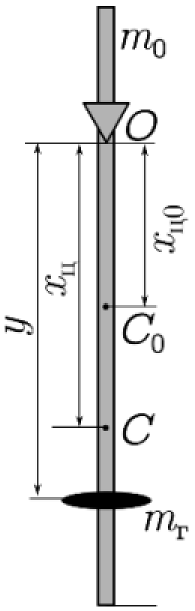
$x_c = \frac{m_0 x_{c0} + m_r y}{M}$,

где m_0 — масса маятника без груза, $M = m_0 + m_r$ — полная масса маятника. Положения центра масс x_c и x_{c0} могут быть измерены с помощью подставки. Отсюда находим формулу для вычисления положения центра масс груза:

$y = \frac{Mx_c + m_0 x_{c0}}{m_r}$

Из общей формулы найдём период колебаний маятника с грузом:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m_r y^2}{gM \cdot x_c}}$



Учёт влияния подвесной призмы:

Все формулы были получены в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование этих формул приведёт к систематической погрешности результата. Для более точных расчётов необходимо принимать во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_{ster} + Ipriz}{m_{ster}} g \cdot a_{ster} - m_{priz} g \cdot a_{priz}}$,

где I_{priz}, m_{priz} и a_{priz} — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы.

Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень:

$\frac{M_{priz}}{M_{ster}} = \frac{m_{ster} g \cdot a_{ster}}{m_{priz} g \cdot a_{priz}} \approx 0,01$

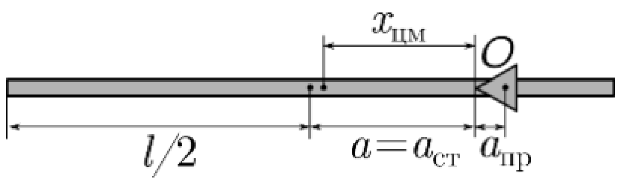
, 1%.

.a$_{priz}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, измеряя положение центра масс всей системы. Пусть x_c — расстояние от центра масс системы до точки подвеса. По определению имеем:

$x_c = \frac{m_{ster} a_{ster} - m_{priz} a_{priz}}{m_{ster} + m_{priz}}$

Исключая отсюда a_{priz}, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{priz}}{m_{ster}}) x_c}}$



Методика измерений:

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой, дополнительный груз, закреплённая на стене консоль, подставка с острой гранью для определения цента масс маятника, секундомер, счётчик колебаний, штангенциркуль, электронные весы.

Тонкий стальной стержень длиной 1 м и массой 1 кг. Диаметр стержня много меньше его длины 12 мм. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Возможны две схемы реализации установок:
Установка А: Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя расстояние от центра масс до точки подвеса.
Установка Б: Подвесная призма остаётся неподвижной, на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера, положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника.

Расстояния во всех установках измеряется штангенциркулем. Положение центра масс маятника может быть определено с помощью балансирования маятника на вспомогательной подставке с острой верхней гранью. Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня или дополнительного тела на нём, можно экспериментально проверить теоретические формулы и вычислить значение ускорения свободного падения g. Формулу для периода колебаний можно проверить, откладывая по осям величины $U = T^2 \cdot a$ и $v = a^2$. В этих координатах график $U(v)$ должен иметь вид прямой линии, угловой коэффициент которой пропорционален g, а вертикальное смещение — моменту инерции стержня относительно центра масс.

Используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем 0,1%.

Результаты измерений:

Измерим постоянные величины (массу стержня, призмы и груза, длину стержня):
Для первых n = 20 колебаний, проводимых в некотором положении трапеции и груза:

x_c, мм	t_n, с	T, с	g, $\frac{m}{c^2}$	ϵ
412	31,76	1,59	8,976	8,6 %

Таким образом значение g попало в пределы 10% оотносительно табличного значения.

Проведём подоюный эксперимент 5 раз:

N	t, с
1	29,26
2	29,25
3	29,26
4	29,26
5	29,26
t_{sredn}	29,258
δt_{rnd}	0,06
δt_{syst}	0,002
δt_{full}	0,06

В этом случае относительная погрешность получается $\epsilon_{max} \approx 0,002 \approx 0,2\%$. Тогда необходимое число измерений получается $n = 20$.

Проведём по восемь экспериментов для каждой из установок А и Б, при этом совершая по n = 20 колебаний в каждом из случаев:

Установка А:

№ опыта	a, мм	X призмы, мм	x_c, мм	n	t_n, с	T, с	g, $\frac{m}{c^2}$	ϵ
1	229,1	727,2	515,2	20	30,97	1,54	9,16	6,6%
2	246,2	744,3	521,1	20	30,75	1,53	9,69	1,2%
3	250,9	749	523,8	20	30,69	1,53	9,81	0,05%
4	231,3	729,4	520,3	20	30,94	1,54	9,15	6,7%
5	259,5	757,6	520,8	20	30,63	1,53	10,17	3,62%
6	225,7	723,8	519,1	20	31,02	1,55	8,96	8,6%
7	241,7	739,8	520,8	20	30,8	1,54	9,53	2,8%
8	260,3	758,4	522,6	20	30,89	1,54	9,98	1,8%

Уствновка Б:

№ опыта	y, мм	X_c, мм	n	t_n, с	T, с	g, $\frac{}{2}$	ϵ
1	585,7	412,1	20	31,76	1,59	8,87	9,6%
2	563,8	417,4	20	31,44	1,57	8,89	9,4%
3	539,8	423,3	20	31,05	1,55	8,83	9,9%
4	524,34	427,1	20	30,84	1,54	8,85	9,8%
5	481,3	437,7	20	30,33	1,52	8,86	9,7%
6	440,2	447,8	20	29,92	1,49	8,85	9,8%
7	410,9	455,1	20	29,65	1,48	8,85	9,8%
8	364,6	466,4	20	29,26	1,46	8,86	9,6%

Посчитаем для каждого эксперимента установки Б момент инерции маятника:

	1	2	3	4	5	6	7	8
I, $kg \cdot m^2$	0,039906	0,039908	0,039909	0,039911	0,039914	0,039917	0,039919	0,039923

Посчитаем приведённую длину маятника в каждом эксперименте:

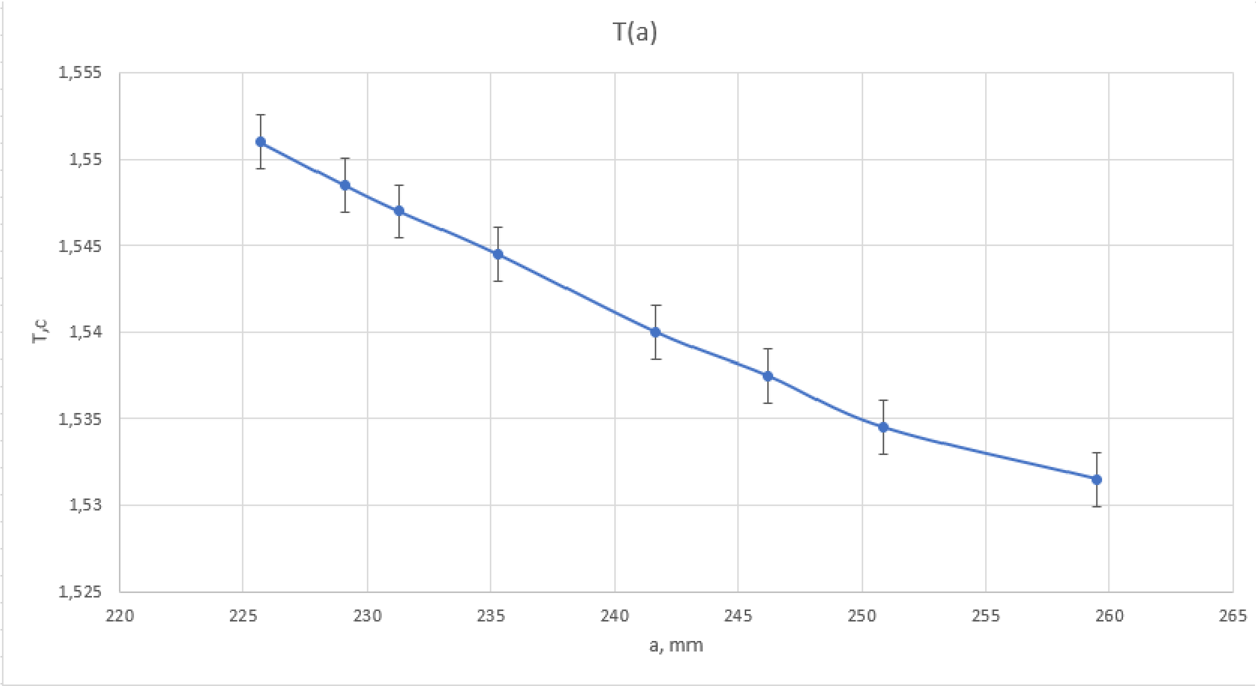
Установка А:

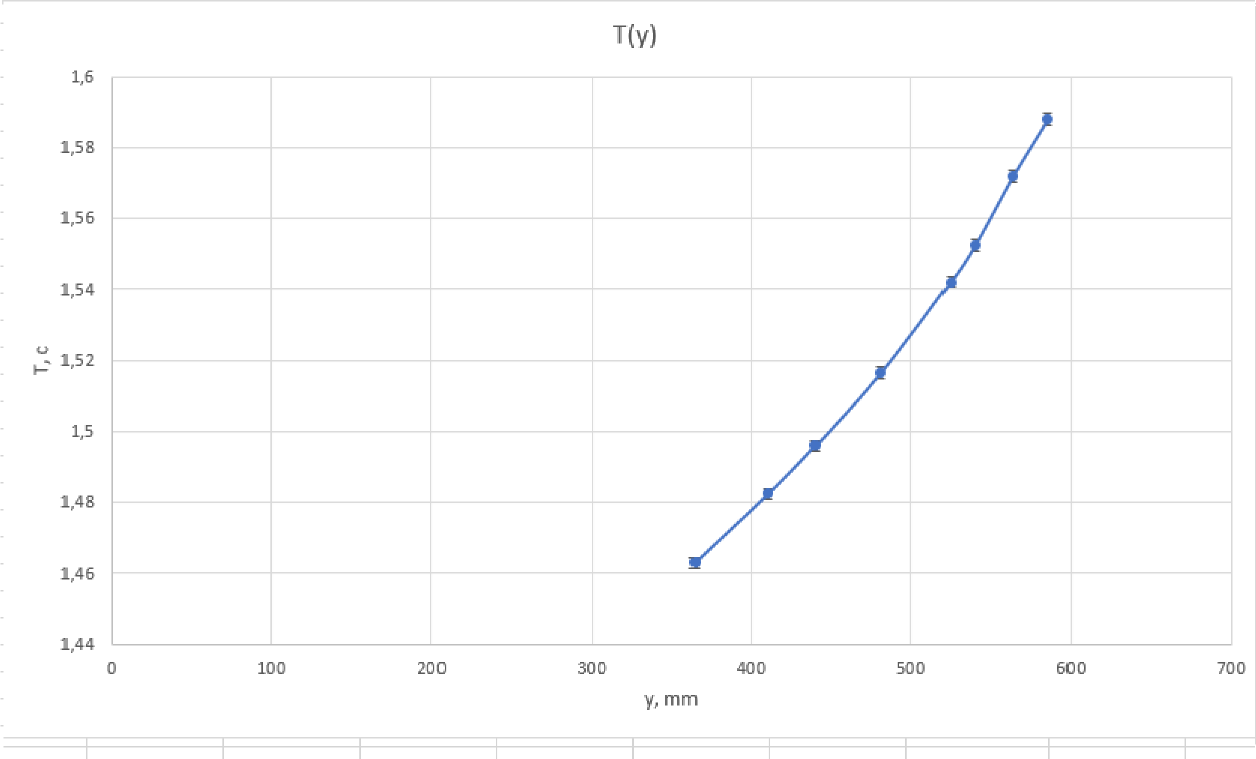
	1	2	3	4	5	6	7	8
l_{pr}	419,9	430,1	432,8	421,1	438,8	417,9	427,3	439,1

Установка Б:

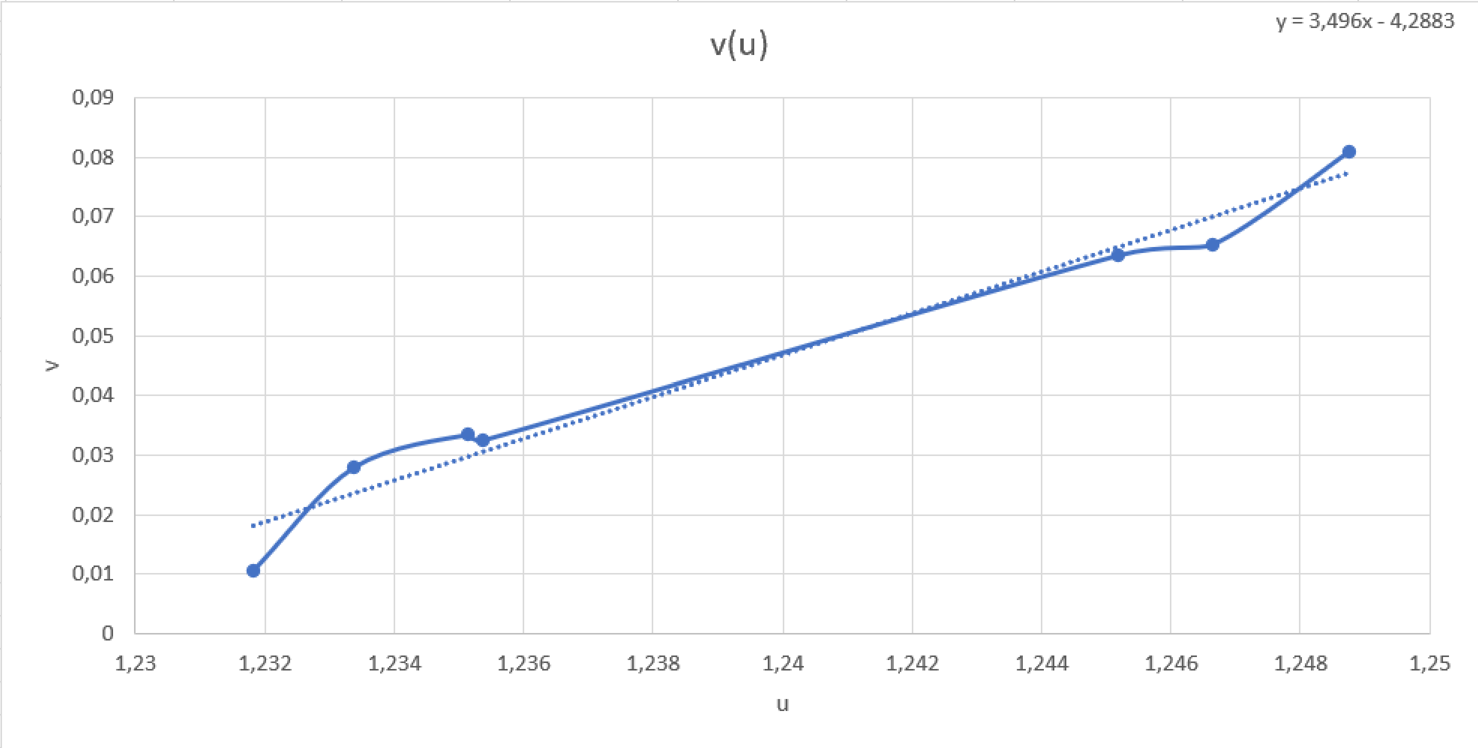
	1	2	3	4	5	6	7	8
l_{pr}	461,2	458,2	455,0	453,0	447,6	442,9	439,7	435,2

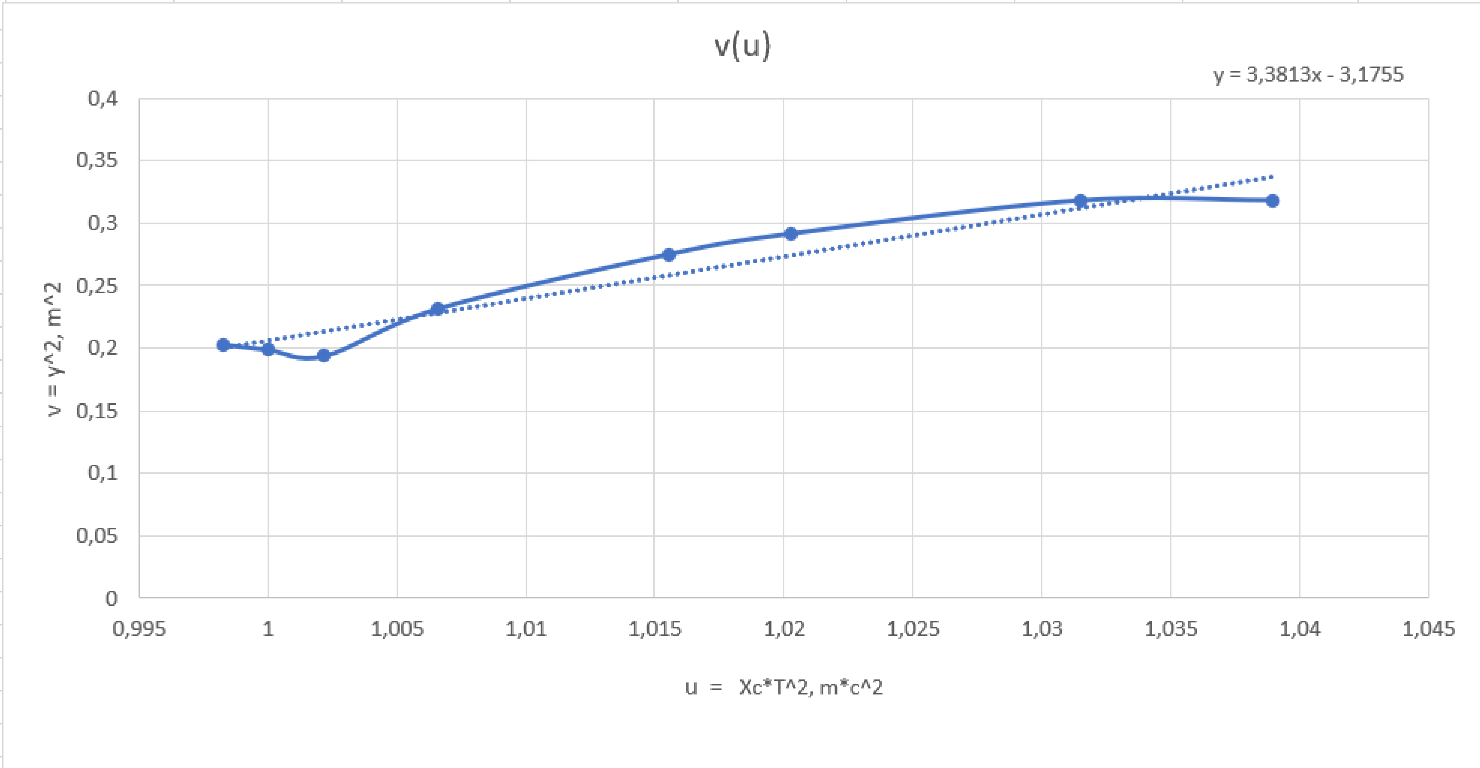
Построим графики зависимотей T от a (для первой установки) и y (для второй установки):





Построим графики зависимотей V от U, где $V = T^2 \cdot x_c$, а $U = a^2$, для первой установки, $U = y^2$, для второй установки:





По методу наименьших квадратов посчитаем покрешности коэффициентов у прямых аппроксимации:

	k	b	δ_k	δ_b
A	3,5	-1,6	1,3	1,6
	k	b	δ_k	δ_b
B	3,4	-4,5	0,8	0,2

Из формул для периода колеаний можно получить:

Для установки A:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12}+a^2}{g(1+\frac{m_{priz}}{m_{ster}})x_c}} \Leftrightarrow u = \frac{4\pi^2}{g\mu} \cdot v + \frac{\pi^2 \cdot l^2}{g \cdot \mu} \Leftrightarrow u = k \cdot v + b$

Откуда:

$g = \frac{4 \cdot \pi^2}{k \cdot \mu}$, $\mu = (1 + \frac{m_{priz}}{m_{ster}}) \approx 10,38$

Для установки B:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + m_r y^2}{gM \cdot x_c}} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 \cdot m_r}{g \cdot M} \cdot v + \frac{4\pi^2 \cdot I_0}{g \cdot M} \Leftrightarrow u = k \cdot v + b$

Откуда:

$g = \frac{4\pi^2 \cdot m_r}{k \cdot M} \approx 9,36$

Погрешность δg можно оценить по формуле:

$\delta g = g \cdot \epsilon_b = g \cdot \frac{\delta b}{b}$

Тогда:

	g	δ_g
A	10,4	0,6
B	9,4	0,5

Обсуждение результатов и вывод:

Таким образом, мы исследовали физический маятник и опытно измерили величину g. В результате, при прямом измерении получилось значение $g \approx 9,47$ для первой установки и $g \approx 8,83$ для воторой установки. При этом в первом случае отклонение от табличной велечины составило порядка 3,5%, а во втором 9,9%. Произошло это из-за случайных погрешнсотей при измерении длин маятника и времени реакции человека. При нахождении величины g по МНК получилось: $g \approx 10,4$ для первой установки и $g \approx 9,4$ для воторой установки. С погрешностью 6% и 5% соответственно. При этом в первом случае отклонение от табличной велечины составило порядка 6%, а во втором 4%. Таким образом оба способа дали приблизительно схожий результат.