

Лабораторная работа 1.2.5

"Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа"

Белов Михаил Б01-302

3 ноября 2023 г.

Аннотация:

Цель лабораторной работы заключается в исследовании вынужденной прецессии гироскопа, установлении зависимости скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа, определении скорости вращения ротора гироскопа и сравнении её со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Теоретические сведения:

Уравнение движения твёрдого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

(1) уравнение здесь выражает закон движения центра масс тела.

(2) уравнение моментов.

Момент импульса твёрдого тела в его главных осях x, y, z равен:

$$\vec{L} = \vec{i} \cdot I_x \cdot \omega_x + \vec{j} \cdot I_y \cdot \omega_y + \vec{k} \cdot I_z \cdot \omega_z \quad (3)$$

Быстро вращающееся тело, для которого $I_z \cdot \omega_z \gg I_x \cdot \omega_x, I_y \cdot \omega_y$ принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (2):

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} \cdot dt \quad (4)$$

из (4) следует, что $|\Delta \vec{L}| \ll |\vec{L}|$

с этим связана устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Если $L\Omega \ll L\omega_0$, то $|d\vec{L}| = L \cdot d\phi = L\Omega dt$ и верно, что $d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

Под действием \vec{M} внешних сил ось гироскопа медленно вращается относительно оси z с угловой скоростью Ω . Такое движение называется регулярной прецессией гироскопа. Для гироскопа массой m_r , у которого ось собственного вращения наклонена на угол α от вертикальной оси, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна:

$$\Omega = \frac{M_{tp}}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_g r g l \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_g r g l}{I_z \omega_0}, \quad (8)$$

где l - расстояние от точки подвеса до центра масс.

Скорость прецессии в этом случае:

$$\Omega = \frac{m_g r g l}{I_z \omega_0}, \quad (9)$$

где m - масса груза, l - расстояние от подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа.

Период колебаний T_0 :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{f}}$$

Для определения момента инерции ротора необходимо подвесить вместо него на проволоке цилиндр известного момента инерции и посчитать момент инерции ротора по формуле:

$$I_0 = I_c \cdot \frac{T_0^2}{T_c^2}$$

Методика измерений:

Гирископ, установленный в горизонтальное положение, вращается относительно горизонтальной оси. На один из концов горизонтальной оси вешают груз, после чего гироскоп начинает медленно вращаться относительно вертикальной оси с угловой скоростью регулярной прецессии Ω и опускаться под действием трения.

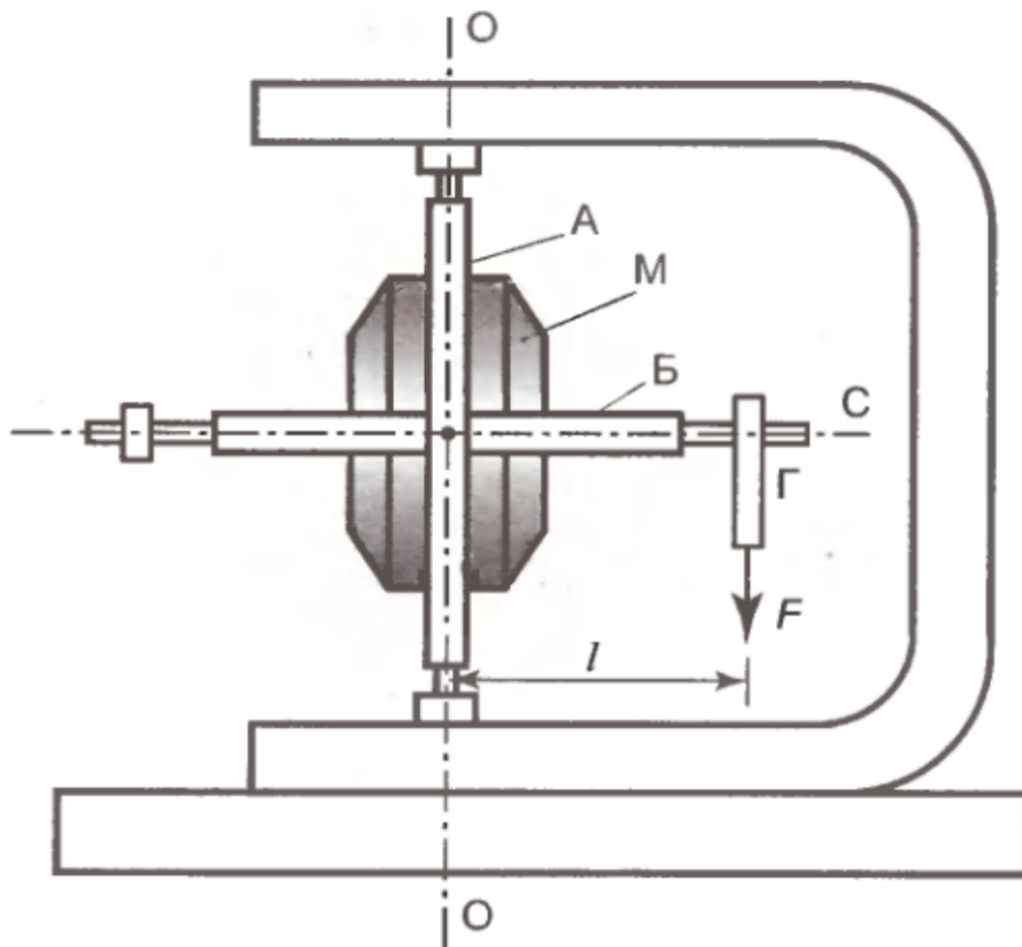


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Результаты измерений:

Результаты замеров регулярной прецессии скорости опускания для различных масс грузов:

№	момент сил		число об.	время прец.	Скор. прец.	Ср. скор. прец.	Скор. опускания	Момент сил
№	mgr, грамм	l, мм	N, шт	T, сек	Ω , радиан/сек	$\bar{\Omega}$, радиан/сек	v, мм/сек	M,
1	342	119	11	324	0,213	0,213	0,076	0,397
2	342	119	11	325	0,213		0,076	0,397
3	342	119	11	325	0,213		0,076	0,397
6	274	119	9	332	0,170	0,172	0,074	0,318
7	274	119	9	331	0,171		0,075	0,318
8	274	119	9	325	0,174		0,076	0,318
11	220	119	8	366	0,137	0,137	0,067	0,255
12	220	119	8	366	0,137		0,067	0,255
13	220	119	8	366	0,137		0,067	0,255
16	179	119	7	392	0,112	0,112	0,063	0,208
17	179	119	8	450	0,112		0,055	0,208
18	179	119	7	396	0,111		0,062	0,208
21	142	119	5	352	0,089	0,089	0,070	0,165
22	142	119	5	352	0,089		0,070	0,165
23	142	119	5	352	0,089		0,070	0,165
26	117	119	4	346	0,072	0,073	0,071	0,136
27	117	119	4	346	0,073		0,071	0,136
28	117	119	4	346	0,073		0,071	0,136

Измерение момента инерции ротора:

$m_c,$	$R_c,$	$t_c,$	N_c	T_c	$I_c,$
1,6167	0,039	80	20	4	0,0012
$m_0,$	$R_0,$	$t_0,$	N_0	T_0	$I_0,$
1,083		63	20	3,15	0,00076

Погрешности можно посчитать по формулам:

Погрешность скорости прецессии:

$$\delta\Omega_{syst} = \Omega \cdot \epsilon_T$$

$$\delta\Omega_{rnd} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2}{n(n-1)}}$$

$$\delta\Omega = \sqrt{\delta\Omega_{syst}^2 + \delta\Omega_{rnd}^2}$$

Ω	0,213	0,172	0,137	0,112	0,089	0,073	0,058	0,048	0,035
$\delta\Omega$	0,270	0,240	0,001	0,270	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001

Погрешность момента инерции ротора:

$$\delta I_0 = I_0 \cdot \sqrt{\epsilon_{I_c}^2 + 4 \cdot \epsilon_{I_0}^2 + 4 \cdot \epsilon_{T_c}^2} \approx 0,00005$$

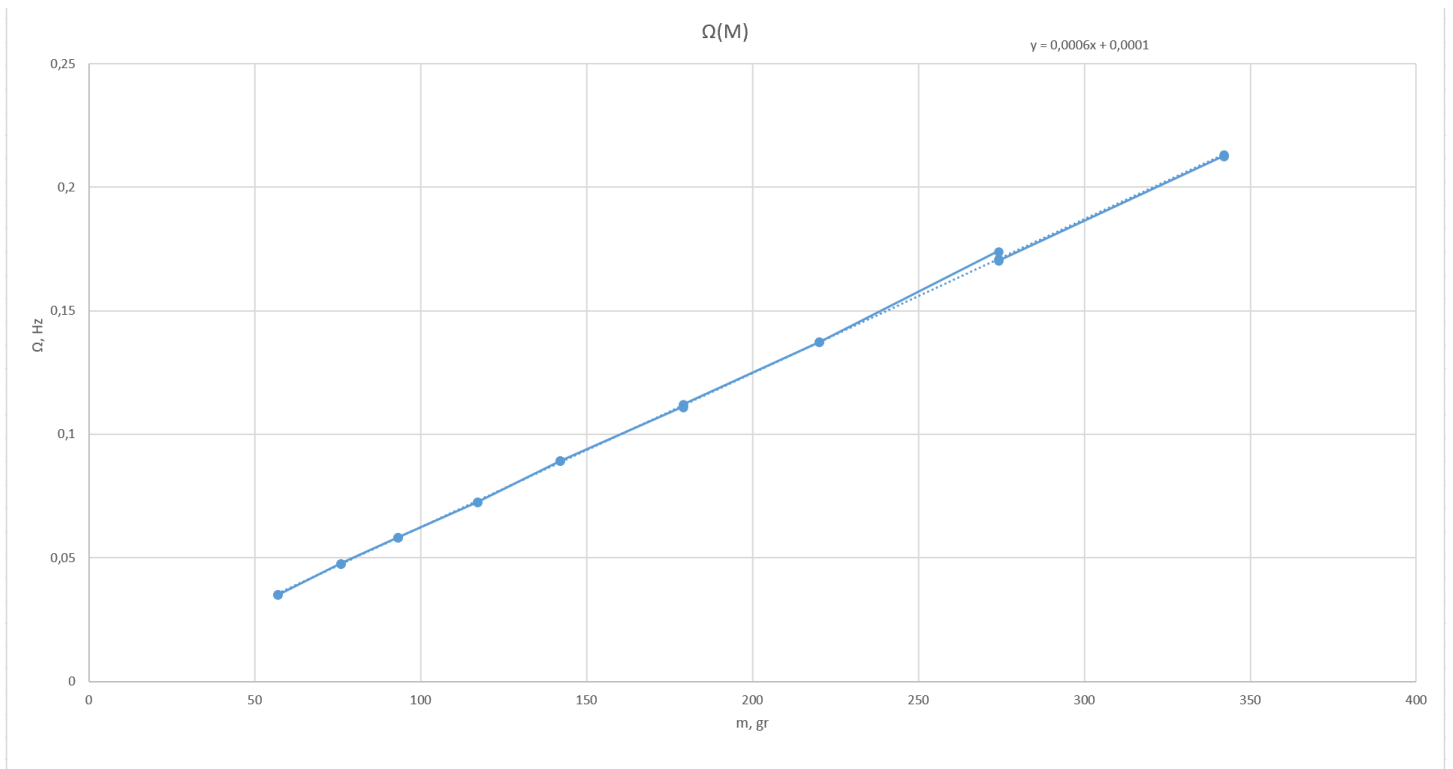
Частота вращения гироскопа:

Необходимо сравнить два способа расчёта частоты вращения гироскопа: из регулярной прецессии и через осциллограф.

Частоту вращения гироскопа можно посчитать по формуле:

$$\omega = \frac{mg \cdot l}{I_0 \cdot \Omega},$$

то есть частоту можно выяснить из графика зависимости скорости регулярной прецессии от массы груза:



Погрешность можно вычислить по формуле:

$$\delta\omega = \omega \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta(\frac{m}{\Omega})}{\frac{m}{\Omega}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2},$$

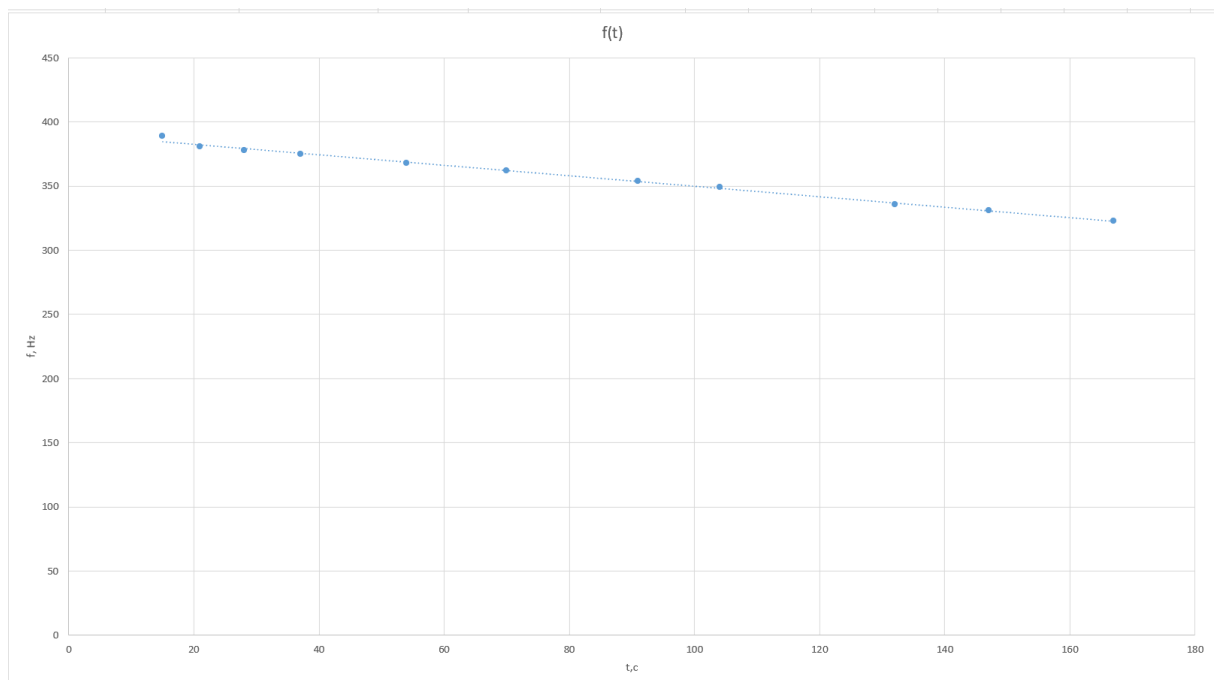
где $\frac{m}{\Omega}$ – угол наклона графика, погрешность которого вычисляется по МНК по формуле:

$$\delta\left(\frac{m}{\Omega}\right) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\langle \frac{m^2}{\Omega^2} \rangle - \left(\frac{m}{\Omega}\right)^2\right)}$$

Таким образом получаем:

ω , Hz	$\delta\omega$, Hz
409,1	54,1

Также частоту вращения гироскопа можно измерить с помощью осциллографа. Отключим питание мотора гироскопа и посмотрим как будет уменьшаться со временем частота вращения гироскопа:



А начальное значение частоты будет $\omega = 389 \text{ Hz}$.

Обсуждение результатов и вывод:

Таким образом мы исследовали вынужденную прецессию гироскопа и её зависимость от величины момента внешних сил. Так же по скорости прецессии мы вычислили частоту вращения гироскопа. Получившаяся частота $\omega = (409,1 \pm 54,1) \text{ Hz}$ близка к частоте, измеренной осциллографом.