МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ухтинский государственный технический университет»
(УГТУ)

А. В. Семериков

Приложение теории принятия решения

Учебное пособие

Ухта
УГТУ
2019

УДК 004.4(075.8)
ББК 32.(972 я7)
С 32

Семериков, А. В.

С 32 Приложение теории принятия решения [Текст] : учеб. пособие / А. В. Семериков. – Ухта : УГТУ, 2019. – 118 с.

В настоящем пособии изложены пояснения для выполнения контрольных и лабораторных работ по дисциплине «Теоретические основы поддержки принятия решений». Пособие состоит из восьми глав: принятие решения в условиях определённости, принятие решения в условиях неопределённости, принятие решения в условиях риска, марковская задача принятия решений, теория игр и принятие решений, принятие решения при проверке гипотез, принятие решения при выборе метода прогнозирования. Пособие предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения по специальности 09.03.02 Информационные системы и технологии и специальности 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

Содержание пособия соответствуют рабочим программам.

УДК 004.4(075.8)
ББК 32.(972 я7)

Учебное пособие рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Ухтинского государственного технического университета.

Рецензенты: И. Н. Бирилло, начальник лаборатории надёжности объектов ГТС филиала ООО «ГазпромВНИИГАЗ», канд. техн. наук; В. Б. Перминов, зам. начальника СОДУ СА и МО ООО «Газпром транс Ухта», канд. техн. наук.

Оглавление

Введение

Общая характеристика и подходы в принятии решений.

Искусство принятия наилучших решений, основанное на опыте и интуиции, является сущностью любой сферы человеческой деятельности.

Наука о выборе приемлемого варианта решения сложилась сравнительно недавно, а математической теории принятия решений – около 50 лет [1, 2].

В последующие годы была создана прикладная теория статистических решений, позволяющая анализировать и решать широкий класс управленческих задач, связанных с ограниченным риском – проблемы выбора, размещения, распределения и т. п.

В настоящее время теория принятия решений применяется преимущественно для анализа тех деловых проблем, которые можно однозначно формализовать, а результаты исследования адекватно интерпретировать.

Методы теории принятия решений используют в самых различных областях управления – при проектировании сложных технических и организационных систем, планировании развития городов, выборе программ развития экономики и энергетики регионов, организации новых экономических зон и т. п.

Необходимость использования подходов и методов теории принятия решений в управлении очевидна: быстрое развитие и усложнение экономических связей, выявление зависимости между отдельными сложными процессами и явлениями, которые раньше казались не связанными друг с другом, приводят к резкому возрастанию трудностей принятия обоснованных решений. Затраты на их осуществление непрерывно увеличиваются, последствия ошибок становятся всё серьёзнее, а обращение к профессиональному опыту и интуиции не всегда приводит к выбору наилучшей стратегии. Использование методов теории принятия решений позволяет решить эту проблему, причём быстро и с достаточной степенью точности.

В настоящем методическом пособии рассмотрены алгоритмы реализации целей: иерархический метод, метод с использованием максминного критерия, метод эксперимента над системой, метод на основе марковской цепи, метод на основе решения игры, принятие решения при проверке гипотез, принятие решения при выборе метода прогнозирования.

В первой главе пособия изложена методика принятия решения в условиях определённости с использованием понятий парного сравнения, согласованности суждений и комбинированного весового коэффициента.

Обоснованным считается то решение, в котором суждения не противоречат друг другу и комбинированный весовой коэффициент имеет максимальное значение.

Во второй главе изложен подход для формирования принятия решения в условиях неопределённости. Под неопределённостью подразумевается отсутствие конкретных значений параметров системы и их вероятности появления. Вместе с тем при этом известны интервалы изменения этих параметров. Критерий принятия решения выбирается в зависимости от предполагаемого сценария развития системы: оптимистический, пессимистический или промежуточный между ними, а также от того определяются максимальные доходы или минимальные расходы.

В третьей главе изложен подход для формирования принятия решения в условиях риска с использованием вероятностных характеристик параметров анализируемой системы. Причём для улучшения качества прогноза используются апостериорные вероятности, полученные на основе дополнительного анализа системы.

В четвёртой главе изложена методика принятия решения, когда известен вероятностный механизм перехода текущего состояния системы в будущий, который представляется в виде марковской цепи. Марковская цепь представляет собой конечное или бесконечное чередование матриц переходных вероятностей и матриц доходов. В постановке задачи использовались понятия «состояние системы», «временные этапы», «альтернативы принятия решения», «функция состояния». Поэтому для поиска решения использовался метод динамического программирования.

В пятой главе изложена методика достижения цели в условиях, когда между частями системы (конкурентами) существует конфликт, который можно представить в виде игры двух лиц. Для получения оптимального результата конфликтующие стороны должны придерживаться определённых стратегий поведения. При этом стратегия поведения может быть определена однозначно (чистая стратегия) или с использованием вероятностного распределения (смешанная стратегия). Отклонение игрока от рассчитанной стратегии приводит к уменьшению его выигрыша. Решение игры показывает величину выигрыша при соблюдении определённой стратегии. Также рассмотрена возможность решения матричных игр методами линейного программирования.

В шестой главе представлены подходы для принятия решения на основе выдвинутых гипотез. Подтверждение правдоподобности сформулированной гипотезы осуществляется путём сравнивания выборочного экспериментального значения с критическим значением. Если последнее оказывается меньше выборочного показателя, гипотеза отклоняется. С большой вероятностью можно утверждать, что будет совершена ошибка в принятии решения, если не отказаться от выдвинутой гипотезы.

В седьмой главе проиллюстрирован подход при принятии решения для выбора адекватного метода прогнозирования данных временного ряда. При этом на конкретном примере показан процесс принятия решения по выбору приемлемой функции прогноза с использованием критериев, представленных в шестой части.

В восьмой главе проиллюстрирован подход при принятии решения в экспертной нейлоровской системе, в которой для поиска наиболее вероятной гипотезы используется понятие цены свидетельства события. Для поиска наиболее правдоподобной гипотезы используется свидетельство с наивысшей ценой, что позволяет наладить комфортный диалог пользователей с системой.

В пособии большое внимание уделено практической работе, детально разобрано решение задач к каждой теме, что позволит студентам самостоятельно выполнять задания преподавателя.

Глава 1. Принятие решения в условиях определённости. Метод анализа иерархий

1.1 Постановка задачи

Сформулировать задачу принятия решения в условиях определённости с 2 иерархическими уровнями.

На основе искомых данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

1.2 Описание алгоритма решения задачи

Модели линейного, динамического, сепарабельного и т. д. программирования являются примером принятия решений в условиях определённости [3]. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. Но существует и иной подход к принятию решений в условиях определённости, когда определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

Этапы решения задачи

1. Получить матрицы парных сравнений критериев и матрицы парных сравнений альтернатив в рамках каждого критерия от всех экспертов.

Если имеется n критериев на заданном уровне иерархии, то создаётся матрица **A** размерности $n \times n$, именуемая матрицей парных сравнений, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев.

Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке i ($i = 1, 2, \ldots, n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы **A**, находящийся на пересечении i-строки и j-столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что i-й и j-й критерий одинаково важны, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что i-й критерий значительно важнее, чем j-й, а $a_{ij} = 9$ указывает, что i-й критерий чрезвычайно важнее и j-го Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. На матрицу парных сравнений накладываются следующие ограничения:

а) если $a_{ij} = k$, то $a_{ji} = 1/k$.

б) все диагональные элементы a_{ij} матрицы **A** должны быть равны 1, так как они выражают оценки критериев относительно самих себя.

2. Определить относительные веса w критериев и альтернатив путём нормализации матрицы **А** (деление элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца). Искомые относительные веса w вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы **А**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots\dots & a_{1,n} \\ & & \\ a_{m,1} & \dots\dots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

3. Определить согласованность матрицы **А**. Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы **А** означает, что $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ для всех i, j и k. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы **А**. В частности, столбцы матрицы сравнения размером 2×2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными, так как строятся на основе человеческих суждений. При этом необходимо определить: является ли уровень несогласованности приемлемым. Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности допустимым, необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений **А**. Идеально согласованная матрица **А** порождает нормализованную матрицу **N**, в которой все столбцы одинаковы.

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}.$$

Матрица сравнений **А** может быть получена из матрицы **N** путём деления элементов i-го столбца на w_i (это процесс, обратный нахождению матрицы **N** из **А**).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя приведённое определение матрицы **А**, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

В компактной форме условие согласованности матрицы **A** формулируется следующим образом. Матрица **A** будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = n\mathbf{w},$$

где $\mathbf{w}$ – вектор-столбец относительных весов w_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Когда матрица **A** не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов i-й строки нормализованной матрицы **N**. Обозначив через $\overline{w}$ вычисленную оценку (среднее значение в строке), условие согласованности матрицы можно записать

$$\mathbf{A}\overline{w} = n_{\max}\,\overline{w},$$

где $n_{\max} \geq n$. В случае $n_{\max} = n$ матрица сравнения **A** является идеально согласованной.

Уровень несогласованности матрицы **A** вычисляется из выражения

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

где $CI = \dfrac{n_{\max} - n}{n - 1}$ – коэффициент согласованности матрицы **A**,

$RI = \dfrac{1{,}98(n-2)}{n}$ – стохастический коэффициент согласованности матрицы **A**.

Стохастический коэффициент согласованности RI определяется эмпирическим путём как среднее значение коэффициента CI для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения **A**.

Если $CR \leq 0{,}1$, уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения **A** является высоким и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверить элементы парного сравнения a_{ij} матрицы **A** в целях получения более согласованной матрицы.

Значение $n_{\max}$ вычисляется на основе матричного уравнения $A\overline{w} = n_{\max}\overline{w}$, при этом нетрудно заметить, что i-е уравнение этой системы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\max}\overline{w}_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i = 1$, сумма элементов в столбце расчётной матрицы может быть записана в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\max} .$$

Таким образом, величину $n_{\max}$ можно определить путём вычисления вектор-столбца $A\overline{w}$ с последующим суммированием его элементов.

4. На основе полученных весовых коэффициентов находится комбинированный вес для каждой альтернативы.

5. Альтернатива, комбинированный весовой коэффициент которой является наибольшим, представляет собой оптимальное решение.

1.3 Пример решения задачи

Формулировка задачи:

Предприятию необходимо взять в аренду складские помещения для хранения своей продукции. Склад может быть расположен в одном из трёх городов: *D*, *B* или *C*. Руководству предприятия, в составе: Петров П. Е., Иванов И. В. и Некрасова Н. Е., необходимо решить: в каком городе рациональнее расположить склад. Для анализа альтернатив руководство выделило три критерия, оказывающих наибольшее влияние на доходность предприятия: спрос на продукцию (С), наличие конкурентов (К) и стоимость аренды складских помещений (Ар) в каждом из городов.

Основываясь на выдвинутых критериях, руководство должно отдать предпочтение определённому городу.

В каком городе выгоднее разместить склад при условии, что мнения экспертов равнозначны?

Решение:

1. Матрицы парных сравнений критериев:

Петров П. Е.

D =

	С	К	Ар
С	1	5	4
К	0,2	1	0,5
Ар	0,25	2	1

Иванов И. В.

D =

	С	К	Ар
С	1	4	3
К	0,25	1	1
Ар	0,333	1	1

Некрасов Н. Е.

D =

	С	К	Ар
С	1	2	5
К	0,5	1	4
Ар	0,2	0,25	1

2. Для определения относительных весов критериев «С», «К» и «Ар» нормализуем полученные матрицы сравнения и найдём средние значения элементов соответствующих строк нормализованной матрицы.

		Петров П. Е.			
		С	К	Ар	w_i
$N_D =$	С	$\frac{1}{1{,}45}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{5{,}5}$	0,681
	К	$\frac{0{,}2}{1{,}45}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{0{,}5}{5{,}5}$	0,118
	Ар	$\frac{0{,}25}{1{,}45}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{5{,}5}$	0,201

Аналогично получаем весовые коэффициенты критериев для других экспертов:

Иванов И. В.

		С	К	Ар	w_i
$N_D =$	С	0,632	0,667	0,6	0,633
	К	0,158	0,167	0,2	0,175
	Ар	0,211	0,167	0,2	0,192

Некрасов Н. Е.

		С	К	Ар	w_i
$N_D =$	С	0,588	0,615	0,5	0,568
	К	0,294	0,308	0,4	0,334
	Ар	0,118	0,077	0,1	0,098

3. Проверим: является ли уровень несогласованности полученных матриц парных сравнений приемлемым.

Петров П. Е.

$$D \times w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 4 \\ \hline 0{,}2 & 1 & 0{,}5 \\ \hline 0{,}25 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 0{,}681 \\ \hline 0{,}118 \\ \hline 0{,}201 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2{,}076 \\ \hline 0{,}355 \\ \hline 0{,}607 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем:

$n_{\max} = 2{,}076 + 0{,}355 + 0{,}607 = 3{,}038.$

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$$CI = \frac{3{,}038-3}{3-1} = 0{,}019, \quad RI = \frac{1{,}98(3-2)}{3} = 0{,}66, \quad CR = \frac{0{,}019}{0{,}66} = 0{,}029.$$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы **D** является приемлемым.

Аналогично находим:

Иванов И. В.

$$D \times w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 0{,}25 & 1 & 1 \\ \hline 0{,}333 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 0{,}633 \\ \hline 0{,}175 \\ \hline 0{,}192 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1{,}909 \\ \hline 0{,}525 \\ \hline 0{,}578 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}013$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}006; \quad RI = 0{,}66; \quad CR = 0{,}010.$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы **D** является приемлемым.

Некрасов Н. Е.

$$D \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 0{,}5 & 1 & 4 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}25 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}568 \\ \hline 0{,}334 \\ \hline 0{,}098 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}727 \\ \hline 1{,}011 \\ \hline 0{,}295 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем:

$n_{\max} = 3{,}033.$

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}016;\quad RI = 0{,}66;\quad CR = 0{,}025.$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы **D** является приемлемым.

В результате мы имеем весовые коэффициенты критериев для каждого эксперта, представленные в таблице 1.

Таблица 1

	Петров П. Е.	Иванов И. В.	Некрасов Н. А.
С	0,681	0,633	0,568
К	0,118	0,175	0,334
Ар	0,201	0,192	0,098

Произведём действия, аналогичные пп. 1–3, для получения весов альтернативных решений (D, B и C).

1. Матрицы парных сравнений альтернатив в соответствии с каждым критерием.

Петров П. Е.

D_C =

	D	B	C
D	1	1	2
B	1	1	3
C	0,5	0,333	1

D_K =

	D	B	C
D	1	2	3
B	0,5	1	2
C	0,333	0,5	1

D_{Ap} =

	D	B	C
D	1	2	0,5
B	0,5	1	0,25
C	2	4	1

Иванов И. В.

D_C =

	D	B	C
D	1	4	3
B	0,25	1	0,5
C	0,333	2	1

D_K =

	D	B	C
D	1	3	4
B	0,333	1	2
C	0,25	0,5	1

D_{Ap} =

	D	B	C
D	1	3	4
B	0,333	1	2
C	0,25	0,5	1

Некрасов Н. Е.

D_C =

	D	B	C
D	1	2	5
B	0,5	1	5
C	0,2	0,2	1

D_K =

	D	B	C
D	1	3	4
B	0,333	1	2
C	0,25	0	1

D_{Ap} =

	D	B	C
D	1	2	1
B	0,5	1	0,5
C	1	2	1

2. Соответствующие нормализованные матрицы и весовые коэффициенты альтернатив:

Петров П. Е.

$N_{DC} =$

	D	B	C	w_i
D	0,4	0,429	0,333	0,387
B	0,4	0,429	0,5	0,443
C	0,2	0,143	0,167	0,170

$N_{DK} =$

	D	B	C	w_i
D	0,545	0,571	0,5	0,539
B	0,273	0,286	0,333	0,297
C	0,182	0,143	0,167	0,164

$N_{DAp} =$

	A	B	C	w_i
D	0,286	0,286	0,286	0,286
B	0,143	0,143	0,143	0,143
C	0,571	0,571	0,571	0,571

Иванов И. В.

$N_{DC} =$

	D	B	C	w_i
D	0,632	0,571	0,667	0,623
B	0,158	0,143	0,111	0,137
C	0,211	0,286	0,222	0,239

$N_{DK} =$

	D	B	C	w_i
D	0,632	0,667	0,571	0,623
B	0,211	0,222	0,286	0,239
C	0,158	0,111	0,143	0,137

$N_{DAp} =$

	D	B	C	w_i
D	0,571	0,6	0,5	0,571
B	0,286	0,3	0,375	0,286
C	0,143	0,1	0,125	0,143

Некрасов Н. Е.

$N_{DC} =$

	D	B	C	w_i
D	0,588	0,625	0,455	0,556
B	0,294	0,313	0,455	0,354
C	0,118	0,063	0,091	0,090

$N_{DK} =$

	D	B	C	w_i
D	0,632	0,667	0,571	0,623
B	0,211	0,222	0,286	0,239
C	0,158	0,111	0,143	0,137

$N_{DAp} =$

	D	B	C	w_i
D	0,4	0,4	0,4	0,4
B	0,2	0,2	0,2	0,2
C	0,4	0,4	0,4	0,4

3. Проверим согласованности матриц сравнений альтернатив.

Столбцы матрицы N_{DAp} (Петров П. Е.) и N_{DAp} (Некрасов Н. Е.) одинаковы. Это имеет место лишь в случае, когда лицо, принимающее решение, проявляет идеальную согласованность в определении элементов матрицы сравнений, т. е. матрица сравнений является согласованной.

Оценим уровень несогласованности остальных матриц сравнений.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Спрос», составленную экспертом Петровым П. Е.

$$D_C \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0{,}333 & 1 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}387 \\ \hline 0{,}443 \\ \hline 0{,}170 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}170 \\ \hline 1{,}340 \\ \hline 0{,}511 \\ \hline\end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}021$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}010; \quad RI = 0{,}66; \quad CR = 0{,}016.$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_C}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Конкуренция», составленную экспертом Петровым П. Е.

$$D_K \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}5 & 1 & 2 \\ \hline 0{,}333 & 0{,}5 & 1 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}539 \\ \hline 0{,}297 \\ \hline 0{,}164 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}625 \\ \hline 0{,}894 \\ \hline 0{,}492 \\ \hline\end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}011$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}006; \quad RI = 0{,}66; \quad CR = 0{,}008.$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_K}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Спрос», составленную экспертом Ивановым И. В.

$$D_C \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 0{,}25 & 1 & 0{,}5 \\ \hline 0{,}3333 & 2 & 1 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}623 \\ \hline 0{,}137 \\ \hline 0{,}239 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}891 \\ \hline 0{,}413 \\ \hline 0{,}722 \\ \hline\end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}025$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}013; \quad RI = 0{,}66; \quad CR = 0{,}019.$

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_C}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Конкуренция», составленную экспертом Ивановым И. В.

$$D_K \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}333 & 1 & 2 \\ \hline 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}623 \\ \hline 0{,}239 \\ \hline 0{,}137 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}891 \\ \hline 0{,}722 \\ \hline 0{,}413 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}025$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}013$; $RI = 0{,}66$; $CR = 0{,}019$.

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_K}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Арендная плата», составленную экспертом Ивановым И. В.

$$D_{Ap} \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 0{,}5 & 1 & 3 \\ \hline 0{,}25 & 0{,}333 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}557 \\ \hline 0{,}320 \\ \hline 0{,}123 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}688 \\ \hline 0{,}967 \\ \hline 0{,}369 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}023$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}012$; $RI = 0{,}66$; $CR = 0{,}018$.

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_{Ap}}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Спрос», составленную экспертом Некрасовым И. В.

$$D_C \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 0{,}5 & 1 & 5 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}2 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}090 \\ \hline 0{,}090 \\ \hline 0{,}090 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}715 \\ \hline 1{,}083 \\ \hline 0{,}272 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}071$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}035$; $RI = 0{,}66$; $CR = 0{,}054$.

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_C}$ является приемлемым.

Проверим согласованность матрицы сравнений альтернатив в рамках критерия «Конкуренция», составленную экспертом Некрасовым И.В.

$$D_K \times w = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}333 & 1 & 2 \\ \hline 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 0{,}623 \\ \hline 0{,}239 \\ \hline 0{,}137 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 1{,}891 \\ \hline 0{,}722 \\ \hline 0{,}413 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда получаем: $n_{\max} = 3{,}025$.

Следовательно, для $n = 3$ имеем:

$CI = 0{,}013; \quad RI = 0{,}66; \quad CR = 0{,}019$.

Так как $CR < 0{,}1$, уровень несогласованности матрицы $\mathbf{D_K}$ является приемлемым.

В результате мы имеем весовые коэффициенты альтернатив в соответствии с каждым критерием для каждого эксперта, которые представлены в таблице 2.

Таблица 2

	Петров П. Е.			Иванов И. В.			Некрасов Н. А.		
	С	К	Ар	С	К	Ар	С	К	Ар
D	0,387	0,539	0,286	0,623	0,623	0,557	0,556	0,623	0,4
B	0,443	0,297	0,143	0,137	0,239	0,320	0,354	0,239	0,2
C	0,170	0,164	0,571	0,239	0,137	0,123	0,090	0,137	0,4

Полученные в результате расчётов данные (табл. 1 и 2) для наглядности представим на дереве (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Комбинированный вес W для каждого города определяется по единой схеме. Например, для города **D** можно записать:

$$\begin{aligned} W_D &= \frac{1}{3}(0{,}681\times 0{,}387 + 0{,}1179\times 0{,}539 + 0{,}2014\times 0{,}2857) + \\ &+ \frac{1}{3}(0{,}633\times 0{,}623 + 0{,}175\times 0{,}623 + 0{,}192\times 0{,}557) + \\ &+ \frac{1}{3}(0{,}568\times 0{,}556 + 0{,}334\times 0{,}623 + 0{,}098\times 0{,}4) = 0{,}519 \end{aligned}.$$

4. Таким образом, в результате проведённых вычислений получаем следующие комбинированные весовые коэффициенты для каждого из городов:

$$W_D = 0{,}519$$
$$W_B = 0{,}285$$
$$W_C = 0{,}195$$

В результате, город D получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором для размещения склада.

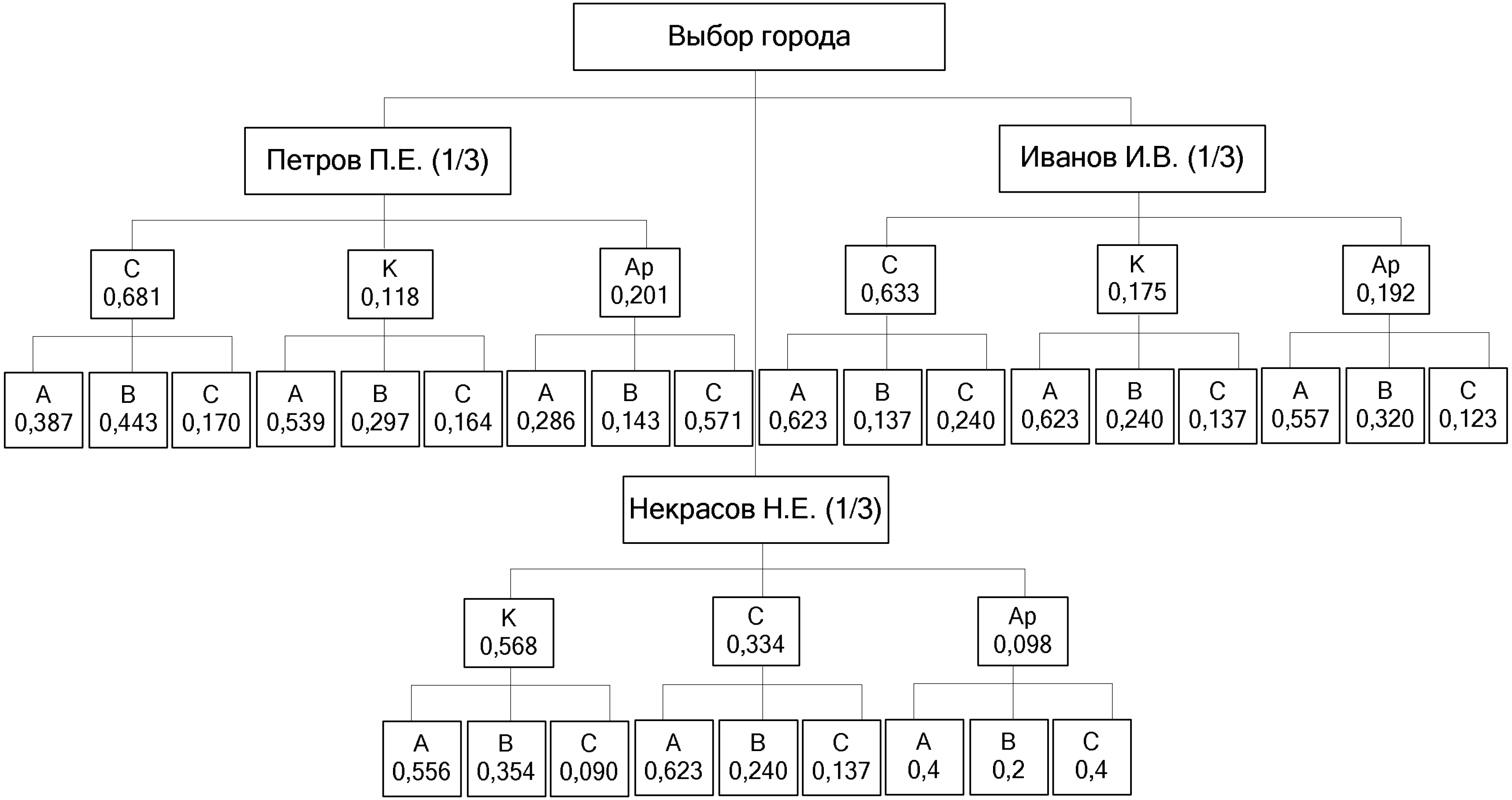
Выбор города
Петров П.Е. (1/3)
Иванов И.В. (1/3)
Некрасов Н.Е. (1/3)
С 0,681
К 0,118
Ар 0,201
А 0,387
В 0,443
С 0,170
А 0,539
В 0,297
С 0,164
А 0,286
В 0,143
С 0,571
С 0,633
К 0,175
Ар 0,192
А 0,623
В 0,137
С 0,240
А 0,623
В 0,240
С 0,137
А 0,557
В 0,320
С 0,123
К 0,568
С 0,334
Ар 0,098
А 0,556
В 0,354
С 0,090
А 0,623
В 0,240
С 0,137
А 0,4
В 0,2
С 0,4

Рисунок 1

Глава 2. Принятие решения в условиях неопределённости

2.1 Постановка задачи

1. Сформулировать задачу принятия решения в условиях неопределённости с 4 альтернативными действиями, которые зависят от 4 состояний природы [3].

2. На основе данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

2.2 Описание алгоритма решения задачи

Принятие решения в условиях неопределённости требует определения альтернативных действий, которым соответствуют расходы или доходы, зависящие от (случайных) состояний природы. Матрицу в задаче принятия решений с m возможными действиями и n состояниями природы можно представить следующим образом.

	s_1	s_2	…	s_n
a_1	$v\ (a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	…	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v\ (a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	…	$v(a_2, s_n)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_m	$v\ (a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	…	$v(a_m, s_n)$

Существует 4 критерия для анализа ситуации, связанной с принятием решений.

1. Критерий Лапласа.
2. Минимаксный критерий.
3. Критерий Сэвиджа.
4. Критерий Гурвица.

Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет индивидуум, принимающий решение, перед лицом неопределённости.

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного обоснования, который гласит, что поскольку распределение вероятностей состояния $P(s_j)$ неизвестно, нет причин считать их различными. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний природы равны между собой, то есть $P(s_1) = P(s_2) = ... = P(s_n) = \dfrac{1}{n}$. Если при этом $v(a_i, s_j)$

представляет получаемую прибыль, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет собой расходы лица, принимающего решение, то оператор «max» заменяется на «min».

Минимаксный (максиминный) критерий основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших или, наоборот, из наихудших альтернатив наилучшую. Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет получаемую прибыль, то в соответствии с максиминным критерием в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} \mathrm{v}(a_i, s_j)\right\}.$$

Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет потери, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путём замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) $v(a_i, s_j)$ матрицей потерь $r(a_i, s_j)$, которая определяется следующим образом:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\} - v(a_i, s_j), \text{ если } v - \textit{доход}, \\ v(a_i, s_j) - \min\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\}, \text{ если } v - \textit{потери}. \end{cases}$$

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). Для описания склонности лица к оптимизму используется параметр оптимизма $0 \le \alpha \le 1$. Пусть величины $v(a_i, s_j)$ представляют доходы. Тогда решению, выбранному по критерию Гурвица, соответствует:

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \cdot \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Если $\alpha = 0$, критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия.

Если $\alpha = 1$, критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, ибо рассчитывает на наилучшее из наилучших условий.

Степень оптимизма (или пессимизма) можно конкретизировать надлежащим выбором величины α из интервала $[0,1]$. При отсутствии ярко выраженной склонности к оптимизму или пессимизму выбор $\alpha = 0,5$ представляется разумным.

Если величины $v(a_i, s_j)$ представляют потери, то критерий принимает следующий вид:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha \cdot \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

2.3 Пример решения задачи

Формулировка задачи:

В некотором городе планируется построить санаторий. Организаторы посчитали, что количество отдыхающих в зависимости от времени года может быть различно и составлять 150, 200, 300 или 350 человек.

Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные по количеству отдыхающих размеры санатория, а переменные $s_1 - s_4$ соответствуют различным уровням обслуживания отдыхающих.

Матрица затрат (в тыс. рублей) выглядит следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190

Определить оптимальный размер санатория, характеризующийся наименьшими затратами.

Решение:

Критерий Лапласа

При заданных вероятностях $P\{s_j\} = 1/4$ $j = 1, 2, 3, 4$ ожидаемые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом:

$M_1\{a_1\} = 1/4 \cdot (100 + 120 + 160 + 185) = 141,25$;

$M_2\{a_2\} = 1/4 \cdot (120 + 110 + 145 + 170) = 136,25$ ←оптимум;

$M_3\{a_3\} = 1/4 \cdot (140 + 145 + 140 + 175) = 150$;

$M_4\{a_4\} = 1/4 \cdot (170 + 165 + 150 + 190) = 168,75$.

Так как исходная матрица представляет собой расходы, то оптимальное решение достигается при реализации альтернативы, характеризующейся минимальными затратами.

Вывод: наименьший уровень расходов был получен при использовании альтернативы a_2, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Минимаксный критерий

Эту же задачу можно решить с помощью минимаксного критерия $\min\limits_{a_i}\left\{\max\limits_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}$, так как в данном случае рассматривается матрица расходов.

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\max\limits_{s_j} v(a_i, s_j)$	
a_1	100	120	160	185	185	
a_2	120	110	145	170	170	←минимакс
a_3	140	145	140	175	175	
a_4	170	165	150	190	190	

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Критерий Сэвиджа

Для случая исследования расходов, согласно критерию Сэвиджа, составляется матрица сожалений, элементы которой определяются по данным исходной матрицы из соотношения:

$$r(a_i, s_j) = v(a_i, s_j) - \min_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\}, \text{ если } v - \text{потери} \ ,$$

где $\min\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\}$ минимальное значение элемента в столбце матрицы.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	120	160	185
a_2	120	110	145	170
a_3	140	145	140	175
a_4	170	165	150	190
$\min\limits_{a_k}\left\{v(a_k, s_j)\right\}$	100	110	140	170

Матрица сожалений в данном случае имеет следующий вид:

	s_1	s_2	s_3	s_4	*Максимум строк*	
a_1	0	10	20	15	20	←минимакс
a_2	20	0	5	0	20	←минимакс
a_3	40	35	0	5	40	
a_4	70	55	10	20	70	

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_1 или a_2 альтернатив, организаторы могут выбрать любую из этих двух альтернатив.

Критерий Гурвица

Для отражения своего мнения по рассматриваемому процессу принятия решения примем показатель оптимизма $\alpha = 0,25$ (высказывается точка зрения направленная к оптимизму).

Оптимальное решение ищется из соотношения $\min\limits_{a_i}(\alpha \min\limits_{s_j} \nu(a_i, s_j) + (1-\alpha)\max\limits_{s_j} \nu(a_i, s_j))$.

Тогда получаем:

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\min\limits_{s_j}\{\nu(a_i, s_j)\}$	$\max\limits_{s_j}\{\nu(a_i, s_j)\}$	$\alpha \min\limits_{s_j} \nu(a_i, s_j) + (1-\alpha)\max\limits_{s_j} \nu(a_i, s_j)$
a_1	100	120	160	185	100	185	$0,25 \cdot 100 + (1-0,25)\cdot 185 = 163,75$
a_2	120	110	145	170	110	170	$0,25 \cdot 110 + (1-0,25)\cdot 170 = 155$
a_3	140	145	140	175	140	175	$0,25 \cdot 140 + (1-0,25)\cdot 175 = 166,25$
a_4	170	165	150	190	150	190	$0,25 \cdot 150 + (1-0,25)\cdot 190 = 180$

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Глава 3. Принятие решения в условиях риска

3.1 Постановка задачи

1. Сформулировать задачу принятия решения риска с 3 альтернативами.
2. На основе данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

3.2 Описание алгоритма решения задачи

Если решение принимается в условиях риска, то альтернативные решения обычно оцениваются на основе вероятностных распределений [3]. По этой причине принимаемое решение основывается на использовании критерия ожидаемого значения, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Такой подход имеет свои недостатки, так как недостаточно полно характеризует исходные данные для принятия решения. В таких случаях используются модификации критерия ожидаемого значения. Одна из таких модификаций состоит в определении апостериорных вероятностей на основе эксперимента над исследуемой системой.

Распределения вероятностей, которые используются при формулировке критерия ожидаемого значения, получаются, как правило, из накопленной ранее информации. В некоторых случаях оказывается возможным модифицировать эти вероятности с помощью текущей и/или полученной ранее информации, которая обычно основывается на исследованиях, выборочных (или экспериментальных) данных. Получаемые при этом вероятности называют апостериорными (или Байесовскими), в отличие от априорных вероятностей, полученных из исходной информации. Следующий пример демонстрирует применение апостериорных вероятностей Байеса для принятия решения в условиях риска.

3.3 Пример решения задачи с использованием апостериорной вероятности

Формулировка задачи:

На фондовой бирже можно вложить 300 тыс. рублей в три компании: «A», «B» и «C». Акции компаний:

- «A» могут принести 65 % прибыли в условиях повышения котировок, 20 % в условиях постоянства котировок и 50 % потерь в условиях понижения котировок.
- «B» – 30 % прибыли в условиях повышенных котировок, 20 % в условиях постоянства котировок, 5 % в условиях пониженных котировок.
- «C» – 50 % прибыли в условиях повышения котировок, 20 % в условиях постоянных котировок, 30 % потерь в условиях понижения котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 45 %, постоянство котировок – 25 %, а понижение – 30 %.

Предположим, вместо того, чтобы полностью полагаться на публикации, вы решили провести собственное расследование путём консультации с квалифицированным специалистом, который высказал общее мнение «за» или «против» инвестиций.

Так, при повышении котировок его мнение будет «за» с вероятностью 60 %, при постоянстве – 25 %, а при понижении – 30 %.

В какую компанию следует вкладывать средства для извлечения наибольшей прибыли?

Решение:

Введём следующие обозначения:

v_1 – мнение «за», v_2 – мнение «против».

Количество событий j, относящихся к мнению специалиста, равно 2.

m_1 – повышение котировок, m_2 – постоянство котировок, m_3 – понижение котировок.

Количество событий i, относящихся к состоянию котировок, равно 3.

Мнение специалиста можно записать в виде вероятностных соотношений следующим образом:

$$P\{v_1 \mid m_1\} = 0{,}6\,, \quad P\{v_2 \mid m_1\} = 0{,}4\,,$$

$$P\{v_1 \mid m_2\} = 0{,}25\,, \quad P\{v_2 \mid m_2\} = 0{,}75\,,$$

$$P\{v_1 \mid m_3\} = 0{,}3\,, \; P\{v_2 \mid m_3\} = 0{,}7\,.$$

С помощью полученной дополнительной информации задачу выбора решения можно сформулировать следующим образом:

- если мнение специалиста «за», акции какой компании следует покупать?
- если мнение специалиста «против», акции какой компании следует покупать?

Рассмотренную задачу можно представить в виде дерева решений, представленного на рисунке 2. Узлу *1* здесь соответствует случайное событие, мнение специалиста с соответствующими вероятностями «за» и «против». Узлы *2* и *3* представляют выбор между компаниями A, B и C при известном мнении эксперта «за» или «против» соответственно. Узлы *4–9* соответствуют случайным событиям, связанным с состоянием котировок.

Для оценки различных альтернатив, показанных на рисунке 2, необходимо вычислить апостериорные вероятности $P\{m_i \mid v_j\}$, указанные на соответствующих ветвях, выходящих из узлов *4–9*. Эти апостериорные вероятности вычисляются с учётом дополнительной информации, содержащейся в рекомендациях эксперта, с помощью следующих четырёх шагов.

Шаг 1.

Условные вероятности $P\{\nu_j \mid m_i\}$ для данной задачи запишем следующим образом.

$P\{\nu_j \mid m_i\} =$

	v_1	v_2
m_1	0,6	0,4
m_2	0,25	0,75
m_3	0,3	0,7

Шаг №2.

Вычисляем вероятности совместного появления событий m и v.

$P\{m_i, \nu_j\} = P\{\nu_j \mid m_i\} \cdot P\{m_i\}$ для всех i и j. В результате получаем:

$P\{m_i, \nu_j\} =$

	v_1	v_2
m_1	0,27	0,18
m_2	0,0625	0,1875
m_3	0,09	0,21

Шаг №3.

Вычисляем абсолютные вероятности появления события v.

$$P\{\nu_j\} = \sum_{\text{все } i} P\{m_i, \nu_j\}, \text{ для всех } j$$

v_1	v_2
0,4225	0,5775

Шаг №4.

Определяем искомые апостериорные вероятности по формуле

$$P\{m_i \mid \nu_j\} = \frac{P\{m_i, \nu_j\}}{P\{\nu_j\}}.$$

$P\{m_i \mid \nu_j\} =$

	v_1	v_2
m_1	0,639	0,312
m_2	0,148	0,325
m_3	0,213	0,364

Эти вероятности отличаются от исходных априорных вероятностей.

Теперь можно оценить альтернативные решения, основанные на ожидаемых платежах для узлов 4–9.

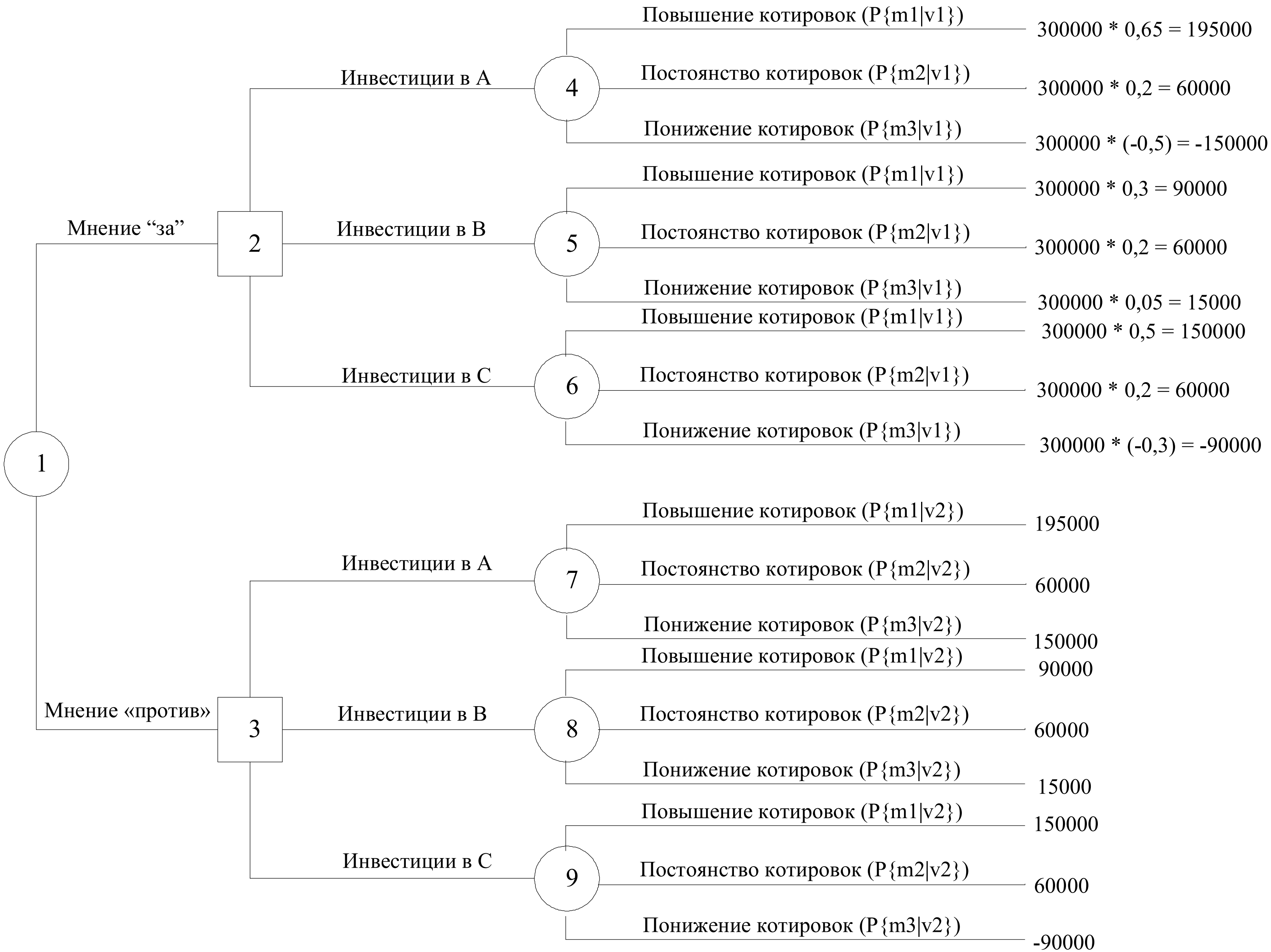
1
Мнение “за”
2
Инвестиции в А
4
Повышение котировок (P{m1|v1})
300000 * 0,65 = 195000
Постоянство котировок (P{m2|v1})
300000 * 0,2 = 60000
Понижение котировок (P{m3|v1})
300000 * (-0,5) = -150000
Инвестиции в В
5
Повышение котировок (P{m1|v1})
300000 * 0,3 = 90000
Постоянство котировок (P{m2|v1})
300000 * 0,2 = 60000
Понижение котировок (P{m3|v1})
300000 * 0,05 = 15000
Инвестиции в С
6
Повышение котировок (P{m1|v1})
300000 * 0,5 = 150000
Постоянство котировок (P{m2|v1})
300000 * 0,2 = 60000
Понижение котировок (P{m3|v1})
300000 * (-0,3) = -90000
Мнение «против»
3
Инвестиции в А
7
Повышение котировок (P{m1|v2})
195000
Постоянство котировок (P{m2|v2})
60000
Понижение котировок (P{m3|v2})
150000
Инвестиции в В
8
Повышение котировок (P{m1|v2})
90000
Постоянство котировок (P{m2|v2})
60000
Понижение котировок (P{m3|v2})
15000
Инвестиции в С
9
Повышение котировок (P{m1|v2})
150000
Постоянство котировок (P{m2|v2})
60000
Понижение котировок (P{m3|v2})
-90000

Рисунок 2

Мнение «за»:

Доход от акций компании А:

в узле 4 = 195 000 · 0,639 + 60 000 · 0,148 – 150 000 · 0,213 = 101 538,5.

Доход от акций компании В:

в узле 5 = 90 000 · 0,639 + 60 000 · 0,148 + 15 000 · 0,213 = 69 585,8.

Доход от акций компании С:

в узле 6 = 150 000 · 0,639 + 60 000 · 0,148 – 90 000 · 0,213 = 85 562,13.

Решение. Инвестировать в акции компании А.

Мнение «против»:

Доход от акций компании А:

в узле 7 = 195 000 · 0,312 + 60 000 · 0,325 – 150 000 · 0,364 = 25 714,29.

Доход от акций компании В:

в узле 8 = 90 000 · 0,312 + 60 000 · 0,325 + 15 000 · 0,364 = 52 987,01.

Доход от акций компании С:

в узле 9 = 150 000 · 0,312 + 60 000 · 0,325 – 90 000 · 0,364 = 33 506,49.

Решение. Инвестировать в акции компании В.

3.4 Пример решения задачи с оценкой априорной вероятности

Имеется человек, у которого диагностируется заболевание гриппом [4]. Врач выдвигает гипотезу H_0 о заболевании. По медицинской статистике определена априорная вероятность $P(H)$ заболевания гриппом в настоящее время в конкретной местности. Для подтверждения этой гипотезы необходимо собрать свидетельства, характерные для данного заболевания. Наличие этих свидетельств увеличит значение априорной вероятности, а их отсутствие уменьшит последнюю.

Пусть E означает свидетельство высокой температуры. По формуле Байеса можно определить условную вероятность $P(H|E)$ заболевания гриппом при высокой температуре, увеличение которой по сравнению с априорной вероятностью $P(H)$ указывает на влияние температуры на возможность заболевания при высокой температуре.

Для определения условной вероятности $P(H|E)$ необходимо знать значение условной вероятности $P(E|H)$ – вероятность высокой температуры при гриппе и значение условной вероятности $P(E|\overline{H})$ – вероятность высокой температуры при отсутствии гриппа. Вероятности $P(H)$, $P(E|H)$, $P(E|\overline{H})$ имеют универсальный характер, так как они не зависят от конкретного человека, а присущи всем. Поэтому они могут быть использованы при диагностике для любого человека.

Пусть $P(H) = 0{,}001$; $P(\overline{H}) = 0{,}999$; $P(E|\mathrm{H}) = 1$; $P(E|\overline{H}) = 0{,}01$, тогда

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)*P(H)}{P(E|H)*P(H)*P(E|\overline{H})*P(\overline{H})=}=\frac{1*0{,}001}{1*0{,}001+0{,}01*0{,}999} = 0{,}009 \qquad (3.4.1)$$

Таким образом, вероятность заболевания гриппом при наличии высокой температуры увеличивает априорную вероятность в 9 раз с 0,001 до 0,009.

При наличии новых свидетельств Е полученная текущая априорная вероятность $P(H) = P(H|E) = 0{,}009$ вновь уточняется согласно формулы (3.4.1). Перебрав все имеющиеся свидетельства определяется максимальная вероятность заболевания гриппом.

3.5 Многоэтапные процессы принятия решения

Решения, принимаемые в будущем и не зависящие от решений, принятых в текущий момент, называются одноэтапными. Наряду с этим существуют многоэтапные процессы принятия решений. Эти процессы удобно представить в виде дерева. Для иллюстрации многоэтапного процесса рассмотрим пример.

Фирма имеет намерение открыть торговое предприятие, которое будет работать 10 лет. При этом необходимо определить его размер (большой или маленький). Последний можно расширить, если рентабельность предприятия будет высокой. Решение о расширении предполагается принять через два года его работы. Процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в текущий момент и решение, принимаемое через два года. Другими словами, надо принять решение об открытии сразу большого или вначале маленького, а затем его расширить.

Решение. Представим процесс принятия решения в виде дерева (рис. 3).

Для оценки доходов в отдельных узлах дерева воспользуемся критерием ожидаемого значения.

Расчёт ожидаемого дохода начнём со второго этапа. Для этого рассчитаем ожидаемый доход в узле 5. Для расширения небольшого предприятия потребуется вложить 4200 руб.

$$E_5 = (900 \cdot 0{,}75 + 200 \cdot 0{,}25) \cdot 8 - 4\,200 = 1\,600 \text{ руб.}$$

Затем рассчитаем ожидаемый доход в узле 6, в котором расширение небольшого предприятия не планируется.

$$E_6 = (250 \cdot 0{,}75 + 200 \cdot 0{,}25) \cdot 8 = 1\,900 \text{ руб.}$$

Таким образом в узле 4 выгоднее не проводить расширение предприятия.

Теперь перейдём на первый этап в узел 2 и рассчитаем ожидаемый доход при открытии большого предприятия на первом этапе принятия решения. На его открытие потребуется 5 000 руб.

$$E_2 = (1\,000 \cdot 0{,}75 + 300 \cdot 0{,}25) \cdot 10 - 5\,000 = 3\,250 \text{ руб.}$$

И, наконец, рассчитаем ожидаемый доход в узле 1 для случая принятия решения об открытия маленького предприятия на первом этапе, а потом через два года на втором этапе большого предприятия в случае высокой прибыли. На открытие маленького предприятия потребуется 1 000 руб.

$$E_1 = 1\,900 + 250 \cdot 0{,}75 \cdot 2 + 200 \cdot 0{,}25 \cdot 10 - 1\,000 = 1\,775 \text{ руб.}$$

Таким образом, на основе сравнения ожидаемых доходов в узлах 2 и 1 (3 250 > 1 775) следует принять решение об открытии большого предприятия на первом этапе.

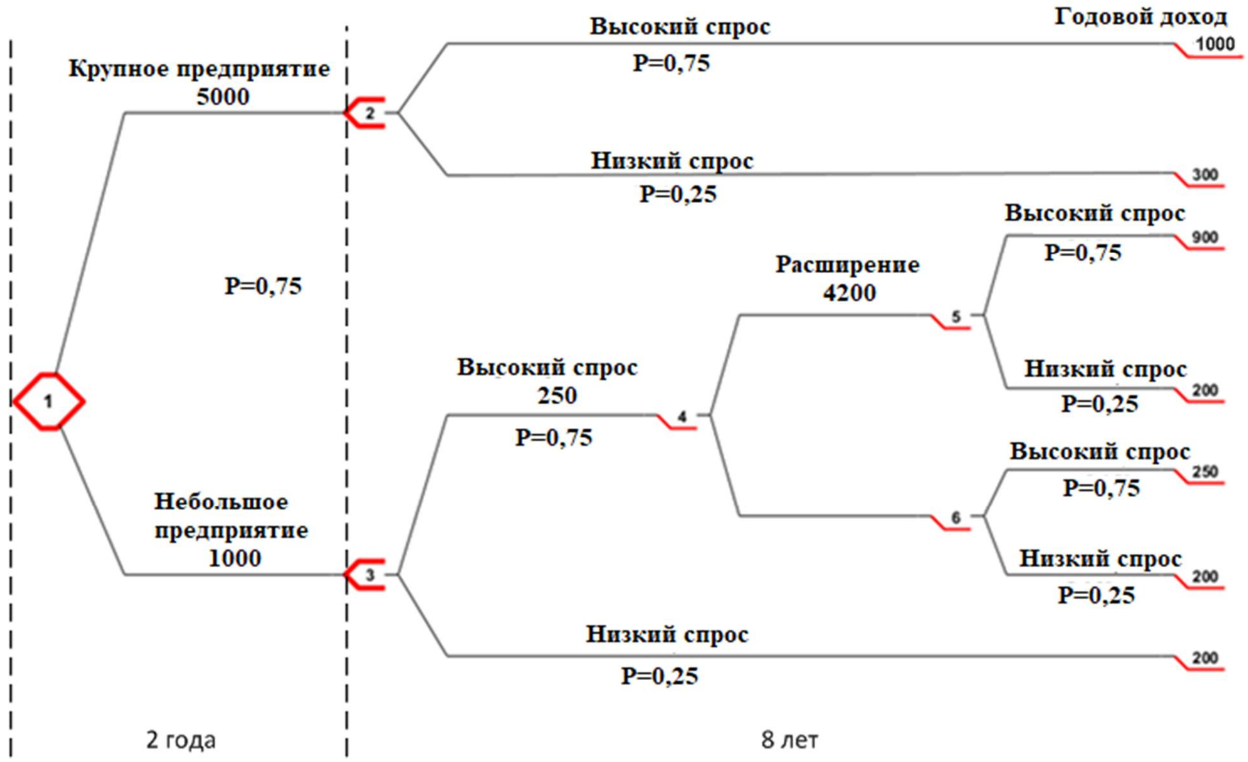

Рисунок 3. Дерево принятия решения

Глава 4. Марковская задача принятия решений

4.1 Постановка задачи

1. Сформулировать задачу принятия решения в условиях риска с тремя альтернативами.

2. На основе данных задачи выбрать оптимальную альтернативу.

4.2 Описание алгоритма решения задачи

Марковские процессы применяются при решении стохастических задач [3], где изменения в системе можно представить в виде ряда её чередующихся состояний. Переходные вероятности между состояниями описывают марковскую цепь. Структура данных в этом процессе представляется в виде матриц, элементы которых могут в самом общем виде изменятся при переходе из одного состояния в другое. В настоящем случае рассматриваются стационарные данные, представленные в матрице переходных вероятностей **P** и матрице доходов **R**.

Рассмотрим матрицу переходных вероятностей.

Состояние системы на следующем этапе

			x	*y*	*z*
$P^1 =$	Текущее состояние системы	*x*	0,3	0,6	0,1
		y	0,1	0,5	0,4
		z	0	0,6	0,4

Матрица переходных вероятностей отражает вероятности перехода системы из одного состояния в другое. Так, если в данный момент система находится в состоянии *«y»*, то вероятность того, что на следующем этапе она перейдёт в состояние *«z»* равна 0,4.

Переходные вероятности могут быть изменены путём организации каких-либо мероприятий. Так, например, если представленная выше матрица переходных вероятностей характеризует спрос, то при применении различных мероприятий по стимулированию спроса (организация рекламной компании) эта матрица может принять следующий вид.

Состояние системы на следующем этапе:

			x	*y*	*z*
$P^2 =$	Текущее состояние системы	*x*	0,1	0,6	0,3
		y	0,05	0,2	0,75
		z	0,1	0,2	0,7

С каждой матрицей переходных вероятностей **P** связывают матрицу доходов ***R***, которая определяет прибыль или убыток в зависимости от состояний, между которыми осуществляется переход.

В настоящем случае матрицы $\boldsymbol{R}^1$ и $\boldsymbol{R}^2$ соответствуют матрицам переходных вероятностей $\mathbf{P}^1$ и $\mathbf{P}^2$.

		x	*y*	*z*
$\boldsymbol{R}^1 =$	*x*	4	3	1
	y	0	2	5
	z	–2	–1	2

		x	*y*	*z*
$\boldsymbol{R}^2 =$	*x*	1	4	6
	y	–1	2	6
	z	–2	–1	0

Элементы матриц учитывают затраты, связанные с проведением рекламной компании. Соответственно, доход или убыток будет изменяться в зависимости от принятого решения.

Лицо, принимающего решения, может также интересовать оценка ожидаемого дохода при заранее определённой стратегии поведения в случае того или иного состояния системы. При этом говорят, что процесс принятия решений описывается стационарной стратегией.

Целью решения задачи является нахождение оптимальной стратегии, максимизирующей ожидаемый доход. Следует отметить, что структура марковского процесса позволяет моделировать его на основе модели динамического программирования. При этом период прогнозирования может иметь конечное или бесконечное число этапов.

4.2.1 Модель динамического программирования с конечным числом этапов

При условии, что количество этапов в задаче выбора наилучшей стратегии ограничено, эту задачу можно представить как задачу динамического программирования с конечным числом этапов. Пусть число состояний для каждого этапа равно m. Обозначим через $f_n(i)$ оптимальный ожидаемый доход, полученный на этапах от n до N включительно, при условии, что система находилась вначале этапа n в состоянии i.

Обратное рекуррентное уравнение, связывающее f_n и f_{n+1}, запишем в виде:

$$f_n(i) = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \left[r_{ij}^k + f_{n+1}(j) \right] \right\}, n = 1, 2, ..., N,$$

где $f_{N+1}(j) \equiv 0$ для всех j, k – альтернативы;

p_{ij}^k – вероятности перехода системы из i в j при альтернативе k;

r_{ij}^k – элемент матрицы доходов R при переходе системы из i в j при альтернативе k;

$f_{n+1}(j)$ – доход, который был получен на этапе $n + 1$, когда система была в состоянии j.

Приведённое уравнение основано на том, что накапливающийся доход $r_{ij}^k + f_{n+1}(j)$ получается в результате перехода из состояния i на этапе n в состояние j этапе $n + 1$ с вероятностью p_{ij}^k. Введя обозначение

$$\nu_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot r_{ij}^k ,$$

рекуррентное уравнение динамического программирования можно записать следующим образом:

$$f_N(i) = \max_k \{\nu_i^k\}.$$

Для промежуточных значений функция состояния:

$$f_n(i) = \max_k \left\{ \nu_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot f_{n+1}(j) \right\}, n = 1,2,..., N-1 .$$

4.2.2 Модель динамического программирования с бесконечным числом этапов

Поведение марковского процесса на долгосрочном горизонте характеризуется его независимостью от начального состояния. В этом случае говорят, что система достигла установившегося состояния.

Существует два метода решения таких задач.

Первый метод (метод полного перебора) основан на переборе всех возможных стационарных стратегий в задаче принятия решения. Этот подход можно использовать только тогда, когда общее число стационарных стратегий с точки зрения практических вычислений достаточно мало.

Второй метод (метод итерации по стратегиям), как правило, более эффективен, так как определяет оптимальную стратегию итерационным путём.

4.2.3 Метод полного перебора

Предположим, что в задаче принятия решений имеется S стационарных стратегий. Пусть $\mathbf{P}^\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}^\mathbf{S}$ – матрицы переходных (одношаговых) вероятностей и доходов, соответствующие применяемой стратегии, $s = 1, 2, \ldots, S$. Метод перебора включает четыре шага:

Шаг 1. Вычисляем ν_i^s – ожидаемый доход, получаемый за один этап при стратегии s для заданного состояния i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Шаг 2. Вычисляем π_i^s – долгосрочные стационарные вероятности матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P^S}$, соответствующие стратегии s. Эти вероятности (если они существуют) находятся из уравнений:

$$\pi^s P^s = \pi^s,$$

$$\pi_1^s + \pi_2^s + \ldots + \pi_m^s = 1,$$

где $\pi^s = (\pi_1^s, \pi_2^s, \ldots, \pi_m^s)$.

Шаг 3. Вычисляем E^S – ожидаемый доход за один шаг (этап) при выбранной стратегии s:

$$E^s = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^s \nu_1^s .$$

Шаг 4. Оптимальная стратегия s^* определяется из условия, что

$$E^{s^*} = \max_s \left\{ E^s \right\}.$$

4.2.4 Метод итерации по стратегиям без дисконтирования

При увеличении числа стационарных стратегий количество комбинаций может оказаться недопустимо большим. Поэтому использование метода полного перебора зачастую не оправдано, так как требует больших затрат машинного времени. Метод итераций по стратегиям лишён этого недостатка.

Метод итераций по стратегиям основывается на следующем. Для любой конкретной стратегии ожидаемый суммарный доход за n-й этап определяется рекуррентным уравнением.

$$f_n = \nu_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f_{n+1}(j),\ i = 1,2,\ldots,m .$$

Это уравнение и служит основой метода итераций по стратегиям. Однако, чтобы сделать возможным изучение асимптотического поведения процесса, вид уравнения нужно немного изменить. В отличие от величины n, которая фигурирует в уравнении и соответствует i-му этапу, обозначим через η число оставшихся для анализа этапов. Тогда рекуррентное уравнение записывается в виде:

$$f_\eta = \nu_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f_{\eta-1}(j),\ i = 1,2,\ldots,m .$$

Здесь f_η – суммарный ожидаемый доход при условии, что остались не рассмотренными η этапов. При таком определении η можно изучить асимптотическое поведение процесса, полагая при этом, что $\eta \to \infty$.

Обозначим через $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ вектор установившихся вероятностей состояний с матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$ и пусть $E = n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + ... + n_m\nu_m$ – ожидаемый доход за этап, тогда можно показать, что при достаточно большом значении η

$$f_n(i) = \eta E + f(i),$$

где $f(i)$ – постоянный член, описывающий асимптотическое поведение функции $f_\eta(i)$ при заданном состоянии *i*.

Так как $f_\eta(i)$ представляет суммарный оптимальный доход за η этапов при заданном состоянии *i*, а *E* – ожидаемый доход за один этап, то интуитивно понятно, почему величина $f_\eta(i)$ равна сумме ηE и поправочному числу $f(i)$, учитывающего определённое состояние *i*. При этом, конечно, предполагается, что число η достаточно велико. Теперь рекуррентное уравнение можно записать в следующем виде.

$$\eta E + f(i) = \nu_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\left\{(\eta - 1)E + f(j)\right\},\ i = 1,2...,m$$

Упростив это уравнение, получаем:

$$E = \nu_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) - f(i),\ i = 1,2,...,m,$$

т. е. имеем *m* уравнений с $m+1$ неизвестными $f(1)$, $f(2)$,..., $f(m)$ и *E*.

Конечной целью является определение оптимальной стратегии, приводящей к максимальному значению *E*. Так как имеется *m* уравнений с $m+1$ неизвестными, оптимальное значение *E* нельзя определить за один шаг. В связи с этим используется итеративная процедура, начинающаяся с произвольной стратегии, а затем определяется новая стратегия, дающая лучшее значение *E*. Итеративный процесс заканчивается, если две последовательно получаемые стратегии совпадают.

Итеративный процесс состоит из двух основных шагов.

Шаг 1. Оценивание параметров.

Выбираем произвольную стратегию *s*. Используя соответствующие матрицы $\mathbf{P}^S$ и $\mathbf{R}^S$, произвольно полагая $f(m) = 0$, решаем уравнения

$$E^S = \nu_i^s + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^S \cdot f^s(j) - f^s(i),\ i = 1,2,...,m$$

относительно неизвестных E^S, $f^S(1),...,f^S(m-1)$.

Шаг 2. Улучшение стратегии.

Для каждого состояния определяем альтернативу *k*, обеспечивающую

$$\max_k \left\{ \nu_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot f^s(j) \right\},\ i = 1,2,...,m.$$

Здесь используются значения $f^S(1)$, j = 1, 2, …, *m*, определённые на шаге оценивания параметров. Результирующие оптимальные решения для состояний 1, 2, …, *m* формируют новую стратегию *t*. Если *s* и *t* идентичны, то алгоритм заканчивается; в этом случае *t* – оптимальная стратегия. В противном случае полагаем $s = t$ и возвращаемся к шагу оценивания параметров. Оптимизационная задача на шаге улучшения стратегии нуждается в пояснении. Целью этого шага является получение максимального значения *E*. Как показано выше,

$$E = \nu_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) - f(i).$$

Поскольку $f(i)$ не зависит от альтернативы *k*, задача максимизации на шаге улучшения стратегии эквивалентна максимизации *E* по альтернативам *k*.

4.3 Пример решения задачи для конечного числа этапов

Формулировка задачи:

Мебельный магазин планирует свою работу на три месяца, при этом директору магазина необходимо решить: какие меры по стимулированию спроса, в зависимости от состояния дел, следует предпринять для увеличения объёма продаж. Рассматриваются следующие варианты стимулирования спроса:

1) 3%-ная скидка при следующей покупке;

2) бесплатная доставка;

3) не предпринимать ничего.

Кроме того, фирма оценивает месячный объём продаж по трёхбалльной шкале как:

1) отличный;

2) хороший;

3) удовлетворительный.

Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому из трёх вариантов:

3%-ная скидка при следующей покупке				
		1	2	3
P_1 =	1	0,4	0,5	0,1
	2	0,1	0,6	0,3
	3	0	0,2	0,8
		1	2	3
R_1 =	1	110	100	70
	2	105	90	65
	3	100	85	60

Бесплатная доставка				
		1	2	3
P_2 =	1	0,3	0,6	0,1
	2	0	0,4	0,6
	3	0	0,2	0,8
		1	2	3
R_2 =	1	130	110	90
	2	130	100	85
	3	125	98	80

Не предпринимать ничего				
		1	2	3
P_3 =	1	0,3	0,3	0,4
	2	0,1	0,7	0,2
	3	0,05	0,2	0,75

		1	2	3
R_3 =	1	100	90	70
	2	110	95	65
	3	100	85	60

Найти оптимальную стратегию стимуляции спроса для последующих 3 месяцев.

Решение:

В нашем случае число этапов – 3 (месяца), число состояний для каждого m = 3 (спрос отличный, хороший, удовлетворительный).

Вычислим значения $\nu_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot r_{ij}^k$:

$$\nu_1^1 = 0,4 \cdot 110 + 0,5 \cdot 100 + 0,1 \cdot 70 = 101;$$
$$\nu_2^1 = 0,1 \cdot 105 + 0,6 \cdot 90 + 0,3 \cdot 65 = 84;$$
$$\nu_3^1 = 0 \cdot 100 + 0,2 \cdot 85 + 0,8 \cdot 60 = 65;$$

$$\nu_1^2 = 0,3 \cdot 130 + 0,6 \cdot 110 + 0,1 \cdot 90 = 114;$$
$$\nu_2^2 = 0 \cdot 130 + 0,4 \cdot 100 + 0,6 \cdot 85 = 91;$$
$$\nu_3^2 = 0 \cdot 125 + 0,2 \cdot 98 + 0,8 \cdot 80 = 83,6;$$

$$\nu_1^3 = 0,3 \cdot 100 + 0,3 \cdot 90 + 0,4 \cdot 70 = 85;$$
$$\nu_2^3 = 0,1 \cdot 110 + 0,7 \cdot 95 + 0,2 \cdot 65 = 90,5;$$
$$\nu_3^3 = 0,05 \cdot 100 + 0,2 \cdot 85 + 0,75 \cdot 60 = 67.$$

i	v_i^1	v_i^2	v_i^3
1	101	114	85
2	84	91	90,5
3	65	83,6	67

С учётом затрат на каждую стратегию (10, 20, 0):

Этап 3:

	v_i^k			Оптимальное решение	
n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$f_3(i)$	k^*
1	101	114	85	114	2
2	84	91	90,5	91	2
3	65	83,6	67	83,6	2

Этап 2:

	$v_i^k + p_{i1}^k f_3(1) + p_{i2}^k f_3(2) + p_{i3}^k f_3(3)$			Оптимальное решение	
n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$f_2(i)$	k^*
1	101 + 0,4·114 + 0,5·91 + 0,1·83,6 = 200,46	211,16	179,94	211,16	2
2	84 + 0,1·114 + 0,6·91 + 0,3·83,6 = 175,08	177,56	182,32	182,32	3
3	65 + 0·114 + 0,2·91+ 0,8·83,6 = 150,8	168,68	153,6	168,68	2

Этап 1:

	$v_i^k + p_{i1}^k f_2(1) + p_{i2}^k f_2(2) + p_{i3}^k f_2(3)$			Оптимальное решение	
n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$f_1(i)$	k^*
1	101 + 0,4·211,16 + 0,5·182,32 + 0,1·168,68 = 293,49	303,61	270,52	303,61	2
2	84 + 0,1·211,16 + 0,6·182,32 + 0,3·168,68 = 265,11	265,14	272,98	272,98	3
3	65 + 0·211,16 + 0,2·182,32 + 0,8·168,68 = 236,41	255,01	240,53	255,01	2

Оптимальное решение показывает, что в 1-й и 2-й месяцы предприятию следует стимулировать спрос путём организации бесплатной доставки при условии, что уровень спроса находится либо в *отличном*, либо в *удовлетворительном* состоянии. Если же уровень спроса *хороший*, то не следует ничего предпринимать. В 3-м месяце магазину следует организовать бесплатную доставку мебели независимо от состояния системы. Суммарный ожидаемый доход за 3 месяца составит $f_1(1) = 303{,}61$ при отличном уровне продаж в 1-ый месяц, $f_1(2) = 272{,}98$ – при хорошем уровне и $f_1(3) = 255{,}01$ – при удовлетворительном уровне продаж в 1-й месяц.

4.4 Пример решения задачи с бесконечным числом этапов методом полного перебора

Формулировка задачи:

Мебельный магазин планирует свою работу на неопределённый период, при этом директору магазина необходимо решить: какие меры по стимулированию спроса, в зависимости от состояния дел, следует предпринять для увеличения объёма продаж. Рассматриваются следующие варианты стимулирования спроса:

1) 3%-ная скидка при следующей покупке;

2) бесплатная доставка;

3) не предпринимать ничего.

Кроме того, фирма оценивает месячный объём продаж по трёхбалльной шкале как:

1) отличный;

2) хороший;

3) удовлетворительный.

В данной задаче принятия решений имеется $3^3 = 27$ стационарных стратегий поведения, представленных в следующей таблице.

s	Действия
1	Не предпринимать никаких мер по стимулированию спроса.
2	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке независимо от объёма продаж.
3	Организовать бесплатную доставку независимо от объёма продаж.
4	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1.
5	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2.
6	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 3.
7	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1 или 2.
8	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1 или 3.
9	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2 или 3.
10	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1.
11	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2.
12	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 3.
13	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1 или 2.
14	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1 или 3.
15	Организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2 или 3.
16	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2.
17	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 3.
18	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 3.
19	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1.

20	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 3, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1.

s	Действия
21	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 3, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2.
22	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1 или 2, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 3.
23	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1 или 3, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2.
24	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 1, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 2 или 3.
25	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2 или 3, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1.
26	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 2, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1 или 3.
27	Предложить 3%-ную скидку при следующей покупке, если объём продаж на уровне 3, и организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1 или 2.

Матрицы $\mathbf{P}^{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{R}^{\mathbf{S}}$:

1.

$P_1 =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,7	0,2
3	0,05	0,2	0,75

$R_1 =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	110	95	65
3	100	85	60

2.

$P_2 =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0	0,2	0,8

$R_2 =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	105	90	65
3	100	85	60

3.

$P_3 =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_3 =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	130	100	85
3	125	98	80

4.

$P_4 =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0,05	0,2	0,75

$R_4 =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	110	95	65
3	100	85	60

5.

$P_5 =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,2	0,75

$R_5 =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	105	90	65
3	100	85	60

6.

$P_6 =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_6 =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	110	95	65
3	100	85	60

7.

$P_7 =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,2	0,75

$R_7 =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	105	90	65
3	100	85	60

8.

$P_8 =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_8 =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	110	95	65
3	100	85	60

9.

$P_9 =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,6	0,3
3	0	0,2	0,8

$R_9 =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	105	90	65
3	100	85	60

10.

$P_{10} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0,05	0,2	0,75

$R_{10} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	110	95	65
3	100	85	60

11.

$P_{11} =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0	0,4	0,6
3	0,05	0,2	0,75

$R_{11} =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	130	100	85
3	100	85	60

12.

$P_{12} =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_{12} =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	110	95	65
3	125	98	80

13.

$P_{13} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0,05	0,2	0,75

$R_{13} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	130	100	85
3	100	85	60

14.

$P_{14} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_{14} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	110	95	65
3	125	98	80

15.

$P_{15} =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_{15} =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	130	100	85
3	125	98	80

16.

$P_{16} =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0,05	0,2	0,75

$R_{16} =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	130	100	85
3	100	85	60

17.

$P_{17} =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_{17} =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	110	95	65
3	125	98	80

18.

$P_{18} =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,2	0,75

$R_{18} =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	105	90	65
3	100	85	60

19.

$P_{19} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,2	0,75

$R_{19} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	105	90	65
3	100	85	60

20.

$P_{20} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,7	0,2
3	0	0,2	0,8

$R_{20} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	110	95	65
3	100	85	60

21.

$P_{21} =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_{21} =$

	1	2	3
1	100	90	70
2	130	100	85
3	100	85	60

22.

$P_{22} =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,2	0,75

$R_{22} =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	105	90	65
3	100	85	60

23.

$P_{23} =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_{23} =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	130	100	85
3	100	85	60

24.

$P_{24} =$

	1	2	3
1	0,4	0,5	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_{24} =$

	1	2	3
1	110	100	70
2	130	100	85
3	125	98	80

25.

$P_{25} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0	0,2	0,8

$R_{25} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	105	90	65
3	100	85	60

26.

$P_{26} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0,1	0,6	0,3
3	0	0,2	0,8

$R_{26} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	105	90	65
3	125	98	80

27.

$P_{27} =$

	1	2	3
1	0,3	0,6	0,1
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$R_{27} =$

	1	2	3
1	130	110	90
2	130	100	85
3	100	85	60

Результаты вычислений v_i^s приведены в таблице.

s	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	85	90,5	67
2	101	84	65
3	114	91	83,6
4	101	90,5	67
5	85	84	67
6	85	90,5	65
7	101	84	67
8	101	90,5	65

s	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
9	85	84	65
10	114	90,5	67
11	85	91	67
12	85	90,5	83,6
13	114	91	67
14	114	90,5	83,6
15	85	91	83,6
16	101	91	67
17	101	90,5	83,6
18	85	84	67
19	114	84	67
20	114	90,5	65
21	85	91	65
22	101	84	67
23	101	91	65
24	101	91	83,6
25	114	84	65
26	114	84	83,6
27	114	91	65

Стационарные вероятности находятся из уравнений

$$\pi^s P^s = \pi^s;$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m = 1.$$

Для иллюстрации применения этих уравнений рассмотрим стратегию $s = 1$. Соответствующие уравнения имеют следующий вид.

$$0,3\pi_1 + 0,1\pi_2 + 0,05\pi_3 = \pi_1;$$
$$0,3\pi_1 + 0,7\pi_2 + 0,2\pi_3 = \pi_2;$$
$$0,4\pi_1 + 0,2\pi_2 + 0,75\pi_3 = \pi_3;$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

(Отметим, что одно из первых трёх уравнений избыточно.) Решение системы будет

$$\pi_1^1 = 0,095; \quad \pi_2^1 = 0,419; \quad \pi_3^1 = 0,486.$$

В данном случае ожидаемый годовой доход равен

$$E^1 = \sum_{i=1}^{3} \pi_i^1 \nu_i^1 = 0,095 \cdot 85 + 0,419 \cdot 90,5 + 0,486 \cdot 67 = 78,577 .$$

Результаты вычисления π^s и E^s для всех стационарных стратегий приведены в следующей таблице.

s	π_1	π_2	π_3	E_s
1	0,095	0,419	0,486	78,557
2	0,061	0,364	0,575	74,112
3	0	0,25	0,75	85,450
4	0,113	0,468	0,419	81,840
5	0,049	0,341	0,61	73,679
6	0,059	0,412	0,529	76,686
7	0,107	0,387	0,506	77,217
8	0,075	0,444	0,481	79,022
9	0,049	0,341	0,61	72,459
10	0,099	0,479	0,422	82,910
11	0,05	0,256	0,694	74,044
12	0,059	0,412	0,529	86,525
13	0,048	0,274	0,678	75,832
14	0,065	0,452	0,483	*88,695*
15	0	0,25	0,75	85,450
16	0,056	0,271	0,673	75,408
17	0,075	0,444	0,481	87,969
18	0,09	0,348	0,562	74,536
19	0,093	0,395	0,512	78,086
20	0,065	0,452	0,483	79,711
21	0	0,25	0,75	71,500
22	0,107	0,387	0,506	77,217
23	0	0,25	0,75	71,500
24	0	0,25	0,75	85,450
25	0,053	0,368	0,579	74,589
26	0,053	0,368	0,579	85,358
27	0	0,25	0,75	71,500

Вывод: Из таблицы видно, что стратегия 14 (организовать бесплатную доставку, если объём продаж на уровне 1 или 3) даёт наибольший ожидаемый месячный доход. Следовательно, это и есть оптимальная долгосрочная стратегия.

Глава 5. Теория игр и принятие решений

5.1 Постановка задачи

В экономической практике часто возникают ситуации, в которых различные стороны преследуют различные цели [3]. Например, отношения между продавцом и покупателем, поставщиком и потребителем, банком и вкладчиком и т. д. Эти отношения представляют подобия игр, в которых один игрок пытается выиграть у другого.

Игра – это математическая модель конфликтной ситуации с участием не менее двух лиц, использующих несколько различных способов для достижения своих целей. Игра называется антагонистической, если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Следовательно, для задания игры достаточно задать величины выигрышей одного игрока в различных ситуациях.

Любой способ действия игрока в зависимости от сложившейся ситуации называется стратегией. Каждый игрок располагает определённым набором стратегий. Стратегии называются чистыми, если каждый из игроков выбирает только одну стратегию определённым, а не случайным образом.

Решение игры заключается в выборе такой стратегии, которая удовлетворяет ***условию оптимальности***. Это условие состоит в том, что один игрок получает ***максимальный выигрыш***, если второй придерживается своей стратегии. И наоборот, второй игрок получает ***минимальный проигрыш,*** если первый из игроков придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются ***оптимальными***. Таким образом, ***цель игры – это определение оптимальной стратегии для каждого игрока***.

5.2 Игра в чистых стратегиях

Рассмотрим игру с двумя игроками A и B. Предположим, что игрок A имеет m стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок B имеет n стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем считать, что выбор игроком A стратегии A_i, а игроком B стратегии B_j однозначно определяет исход игры, т. е. выигрыш a_{ij} игрока A и выигрыш b_{ij} игрока B. Здесь $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$.

Простейшей игрой с двумя игроками является антагонистическая игра, т. е. игра, в которой интересы игроков прямо противоположны. В этом случае выигрыши игроков связаны равенством

$$b_{ij} = -a_{ij}.$$

Это равенство означает, что выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого. В этом случае достаточно рассматривать лишь выигрыши одного из игроков, например, игрока A.

Каждой паре стратегий A_i и B_j соответствует выигрыш a_{ij} игрока A. Все эти выигрыши удобно записывать в виде так называемой ***платёжной матрицы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B. В общем случае такая игра называется *$(m \times n)$-игрой.*

Пример 1. Два игрока A и B бросают монету. Если стороны монеты совпадают, то выигрывает A, т. е. игрок B платит игроку A некоторую сумму, равную 1, а если не совпадают, то выигрывает игрок В, т. е. наоборот, игрок A платит игроку B эту же сумму, равную 1. Сформировать платёжную матрицу.

Решение. По условию задачи

	Орел	*Решка*
Орел	*1*	*-1*
Решка	*-1*	*1*

Таким образом, платёжная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Известна следующая платёжная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проанализировать стратегии игрока A, учитывая, что игрок B будет стараться минимизировать выигрыш игрока A.

Решение. Пусть игрок A выбрал первую стратегию. Тогда игрок B ответит второй стратегией, минимизирующий выигрыш игрока A. Если игрок A выбрал вторую стратегию, то игрок B ответит первой или третьей стратегией. Если же игрок A выбрал третью стратегию, то игрок B ответит своей третьей стратегией. Припишем в виде дополнительного столбца справа полученные минимальные значения каждой строки. Итак,

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -3 \end{array}$$

Аналогичные рассуждения можно провести относительно игрока *B*.

Действительно, пусть игрок *B* выбрал первую стратегию. Тогда игрок *A* ответит второй или третьей стратегией, максимизирующей свой выигрыш.

Если игрок *B* выбрал вторую стратегию, то игрок *A* ответит третьей стратегией. Если же игрок *B* выбрал третью стратегию, то игрок *A* ответит своей первой стратегией. Припишем в виде дополнительной строки снизу полученные максимальные значения каждого столбца. Итак,

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 3 & \quad 2 \end{matrix} \end{array}$$

Очевидно, что игрок *A* остановит свой выбор на второй стратегии, дающей ему гарантированный выигрыш, равный 1. Очевидно также, что игрок *B* остановит свой выбор на первой стратегии, при которой максимальный выигрыш игрока *A* минимален.

Итак, в нашем примере максимум из минимальных элементов каждой строки совпадает с минимумом из максимальных элементов каждого столбца и равен 1, т. е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Отметим, что элементами платёжной матрицы являются выигрыши игрока *A*, а именно, выигрыш соответствует положительному числу, а проигрыш – отрицательному. Матрица выплат игроку *B* получается из платёжной матрицы (матрицы выплат игроку *A*) заменой каждого её элемента на противоположный.

Рассмотрим произвольную *(m×n)-игру*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что оба игрока действуют разумно и стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом.

Рассмотрим оптимальные действия игрока *A*. В каждой строке платёжной матрицы вычисляется минимальный элемент:

$$a_i = \min_j a_{ij}; \, (i = 1, 2, \dots, m).$$

Полученные числа приписываются в качестве правого столбца платёжной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{matrix}$$

Выбирая стратегию A_i (i-ю строку платёжной матрицы), игрок A должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий соперника B он выиграет не меньше, чем a_i. Следовательно, игрок A должен остановиться на той стратегии A_i, для которой это число максимально, т. е.

$$a = \max_i a_i.$$

Итак,

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Ясно, что это число является одним из элементов платёжной матрицы.

Если игрок A будет придерживаться этой стратегии, то ему будет гарантирован выигрыш, не меньший a. Число a в этом случае называют ***нижней ценой игры***. Принцип построения стратегии игрока A, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называют ***принципом максимина.***

Соответствующую этому выбору стратегию A_i называют ***максиминной стратегией.***

Рассмотрим теперь оптимальные действия игрока B. В каждом столбце платёжной матрицы вычисляется максимальный элемент

$$a_j = \max_i a_{ij};\ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Полученные числа приписываются в качестве нижней строки платёжной матрицы:

$$\begin{array}{cc} A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{matrix} \\ & \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad \dots & \quad b_n \end{matrix} \end{array}$$

Выбирая стратегию B_j (j-й столбец платёжной матрицы), игрок B должен рассчитывать на то, что в результате разумных действий соперника A он проиграет не больше, чем b_j. Следовательно, игрок B должен остановиться на той стратегии B_j, для которой это число минимально, т. е.

$$b = \min_j b_j .$$

Итак,

$$b = \min_j \max_i b_{ij} .$$

Ясно, что это число является также одним из элементов платёжной матрицы.

Если игрок B будет придерживаться этой стратегии, то при любом поведении игрока A ему будет гарантирован проигрыш, не больший, чем b. Число b в этом случае называют ***верхней ценой игры***. Принцип построения стратегии игрока B, основанный на минимизации максимальных выигрышей, называют ***принципом минимакса***. Соответствующую этому выбору стратегию A_i называют ***минимаксной стратегией***.

Пример 3. Найти максиминную и минимаксную стратегию игроков, если платёжная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с изложенным выше *принципом максимина* по каждой строке определяем наименьшее число, которое приписываем в качестве правого столбца платёжной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{array}.$$

Это означает, что какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок B, выигрыш игрока A, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно: 2, –3, 1, 3. Ясно, что игрок A предпочтёт выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш, независимо от того, какую стратегию (столбец) выбрал игрок B, т. е.

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_i = \max(2, -3, 1, 3) = 3 .$$

Таким образом, максиминной стратегией игрока A является стратегия A_4.

Аналогично, в соответствии с изложенным выше *принципом минимакса* по каждому столбцу определяем наибольшее число, которое приписываем в качестве нижней строки платёжной матрицы.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 7 & 5 & 9 \end{array} \end{array}$$

Это означает, что какой бы выбор по строкам ни сделал игрок A, проигрыш игрока B, который свои стратегии выбирает по столбцам, составит соответственно: 8, 7, 5, 9. Ясно, что игрок B предпочтёт выбрать такую стратегию (столбец), для которой достигается минимальный проигрыш, независимо от того, какую стратегию (строку) выбрал игрок A, т. е.

$$b = \min_j \max_i b_{ij} = \min_j b_i = \min(8, 7, 5, 9) = 5.$$

Таким образом, минимаксной стратегией игрока B является стратегия B_3. Заметим, что в нашем примере $a < b$.

Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема. *В матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней цены, т. е.* $a \le b$.

Доказательство. По определению

$$a_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij}, b_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij}.$$

Объединяя эти неравенства, получаем

$$a_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = b_j.$$

Следовательно,

$$a_i \le a_{ij} \le b_j.$$

Это неравенство справедливо для любых индексов i и j. Значит,

$$a = \max_i a_i \le a_{ij} \le \min_j b_j = b,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем различать чистые и смешанные стратегии. *Чистая стратегия* – это стратегия первого или второго игрока, выбранная им с вероятностью, равной 1.

Если для чистых стратегий A_i и B_j игроков A и B имеет место равенство

$$a = b,$$

то такую пару стратегий называют ***седловой точкой матричной игры***. Элемент a_{ij}, на котором достигается это равенство, называют ***седловым элементом платёжной матрицы***. Число

$$v = a = b$$

называют ***чистой ценой игры.***

Пример 4. Исследовать платёжную матрицу на наличие седловой точки и найти цену игры

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение. Определим нижнюю и верхнюю чистые цены данной игры. Для этого отыщем минимальные элементы в каждой строке и максимальные в каждом столбце:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \end{array}$$

Нижняя цена игры:

$$a = \max_i a_i = \max(1, -4, 5) = 5\,.$$

Верхняя цена игры:

$$b = \min_j b_i = \min(9, 5, 6, 8) = 5\,.$$

Оказалось, что нижняя и верхняя цены игры совпали. Значит, чистая цена игры $v = 5$.

В нашем примере седловой элемент $a_{32} = 5$ находится на пересечении третьей строки и второго столбца платёжной матрицы. Следовательно, оптимальной стратегией игрока A является третья стратегия, а игрока B – вторая стратегия.

5.3 Игра в смешанных стратегиях

Пример 5. Исследовать платёжную матрицу на наличие седловой точки и найти цену игры:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя рассмотренный выше алгоритм, получаем

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} -3 \\ -3 \\ -2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \end{array}\qquad\end{array}$$

Отсюда находим

$$a = -2, \quad b = 2.$$

Итак, нижняя и верхняя цены игры не совпадают. Оптимальными являются стратегии A_3 и B_2.

Ясно, что пока игроки придерживаются этих стратегий, средний выигрыш будет между числами –2 и 2. Однако, если игроку B станет известно, что игрок A выбрал стратегию A_3, то он немедленно ответит стратегией B_1 и сведёт его выигрыш к –2. В свою очередь, на стратегию B_1 у игрока A имеется ответная стратегия A_2, дающая ему выигрыш *4.* Таким образом, ситуацию A_3, B_2 нельзя признать равновесной.

Если матричная игра не имеет седловой точки, то применение минимаксных стратегий приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает a, а проигрыш не меньше b.

Можно ли увеличить выигрыш или уменьшить проигрыш? Решение находят в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией называется случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии с соответствующими им вероятностями.

Смешанную стратегию игрока A удобно записывать в виде следующей подстановки:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

где $\quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0,$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1.$$

Аналогично, смешанную стратегию игрока B также удобно записывать в виде следующей подстановки:

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

где $\quad q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0,$

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1\,.$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. А именно, чистой стратегии A_1 соответствует подстановка

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а чистой стратегии B_2 – подстановка

$$B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае чистой стратегии A_i соответствует следующий набор вероятностей:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \dots \quad , p_i = 1, \quad \dots \quad , p_m = 0\,,$$

а чистой стратегии B_j – набор вероятностей

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots \quad , q_j = 1, \quad \dots \quad , q_n = 0\,.$$

Будем считать, что для соблюдения секретности каждый из игроков применяет свои стратегии независимо друг от друга.

Итак, смешанные стратегии игроков A и B могут быть охарактеризованы заданием векторов вероятностей применения соответствующих стратегий:

$$P = \{p_1, p_2, \dots , p_m\},$$

$$Q = \{q_1, q_2, \dots , q_n\}.$$

Следовательно, выбор игроком A стратегии A_i, а игроком B стратегии B_j является случайным событием с вероятностью $p_i q_j$ (по теореме умножения независимых событий).

Тогда математическое ожидание выигрыша будет равно

$$M(A, P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j\,.$$

Число $M(A, P, Q)$ будем считать ***средним выигрышем игрока A*** в условиях смешанных стратегий.

Стратегии A^* и B^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}; \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}$$

называются ***оптимальными***, если

$$M(A, P, Q^*) \le M(A, P^*, Q^*) \le M(A, P^*, Q). \qquad (5.1)$$

Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется *ценой игры*:

$$v = M(A, P^*, Q^*).$$

Цена игры удовлетворяет неравенству:

$$a \le v \le b.$$

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называется набор (P^*, Q^*, v), состоящий из оптимальных смешанных стратегий игроков и цены игры.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии, а второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии.

Отметим два важных вопроса. Первый вопрос: какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях? Имеет место основная теорема теории матричных игр, а именно:

Теорема Неймана. *Для матричной игры с любой платёжной матрицей существуют и равны между собой следующие величины:*

$$\max_P \min_Q M(A,P,Q) = \min_Q \max_P M(A,P,Q),$$

причём существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях {P^*, Q^*), *для которой выполняется равенство*

$$M(A, P^*, Q^*) = \max_P \min_Q M(A,P,Q) = \min_Q \max_P M(A,P,Q).$$

Второй вопрос: как находить решение матричной игры?

Пусть

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}; \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix}.$$

оптимальные смешанные стратегии и v – цена игры. Оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит только из тех чистых стратегий A_i, (i = 1, 2, ..., m), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = v. \qquad (5.2)$$

Аналогично, оптимальная смешанная стратегия игрока B состоит только из тех чистых стратегий B_j, (j = 1, 2, ..., n), для которых

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v. \qquad (5.3)$$

Отсюда следует, что только те вероятности p_i могут быть отличны от нуля, для которых имеет место равенство (2), и только те вероятности q_j, для которых имеет место равенство (3). В связи с этим, если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то назовём её *активной стратегией.*

Итак, *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.*

Это утверждение имеет большое практическое значение, так как указывает методы нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки. Вот эти равенства:

$$v = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_P \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i =$$

$$= \min_Q \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_i \sum a_{ij} q_j^* = v.$$

Простейшим случаем матричной игры является игра размера (2×2).

Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальным решением является пара соответствующих чистых стратегий. Если игра не имеет седловой точки, то в соответствии с теоремой Неймана оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}; \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}.$$

Найдём оптимальное решение этой игры. Для этого воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии A^*, то его средний выигрыш будет равен цене игры v, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок B.

В игре (2×2) любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока A – это случайная величина, математическое ожидание которой равно цене игры v. Следовательно, средний выигрыш игрока A будет равен v для любой стратегии игрока B.

В соответствии с определением средний выигрыш игрока A, если он использует оптимальную смешанную стратегию

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix},$$

а игрок B – чистую стратегию B_1, равен цене игры, т. е.

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v.$$

Такой же средний выигрыш получает игрок A, если игрок B применяет стратегию B_2. Значит,

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v.$$

Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии A^* и цены игры:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем вероятности оптимальной смешанной стратегии первого игрока:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (5.4)$$

и цену игры

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (5.5)$$

По аналогии, учитывая, что $q_1^* + q_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии B^* и цены игры:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем вероятности оптимальной смешанной стратегии второго игрока:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (5.6)$$

При любой чистой стратегии игрока A средний проигрыш игрока B равен v.

Пример 6. Найти оптимальные стратегии игры с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Очевидно, что седловая точка отсутствует, так как $a = -1$, $b = 1$.

Значит, решение надо искать в смешанных стратегиях. Как и ранее, средний выигрыш первого игрока или средний проигрыш второго обозначим через v. Системы уравнений (4), (5) в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} -p_1^* + p_2^* = v, \\ p_1^* - p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} -q_1^* + q_2^* = v, \\ q_1^* - q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем:

$$p_1^* = p_2^* = 0{,}5, \quad q_1^* = q_2^* = 0{,}5, \quad v = 0.$$

Это значит, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом с вероятностью 0,5, при этом средний выигрыш равен 0.

5.4 Решение матричных игр методами линейного программирования

Представленные выше примеры решения игры со смешанными стратегиями наглядно иллюстрируют теоретические положения матричных игр и трудоёмкость ручного счёта даже при матрице 2×2. Для автоматизации расчётов можно использовать программные продукты, метод расчёта в которых основан на решении системы линейных уравнений http://www.uchimatchast.ru/.

Решение общей матричной игры (mхn) достаточно трудоёмко, однако может быть сведено к решению задачи ***линейной оптимизации***. Пусть игра задана платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Игрок A имеет стратегии A_1, A_2, ..., A_m, а игрок B стратегии B_1, B_2, ..., B_n. Найдём оптимальные стратегии:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \dots & q_n^* \end{pmatrix},$$

где p_i^*, q_j^* – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j, причём

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$

При любой стратегии игрока *B* оптимальная стратегия игрока *A* обеспечивает ему средний выигрыш не меньше цены игры *v* и выигрыш, равный цене игры *v*, при оптимальной стратегии игрока *B*. Пусть игрок *A* применяет смешанную стратегию A^* против какой-нибудь чистой стратегии B_j игрока *B*. Тогда он получает средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша):

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \ldots + a_{mj} p_m \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, имеет место следующая система линейных неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge \nu \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

или в развёрнутой форме:

$$\begin{aligned} &a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \ldots + a_{m1} p_m \ge \nu; \\ &a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \ldots + a_{m2} p_m \ge \nu; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \ldots + a_{mn} p_m \ge \nu. \end{aligned}$$

Разделим каждое неравенство на *v* и обозначим $x_i = \dfrac{p_i}{\nu} (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Полученная выше система примет вид:

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \ge 1; \\ &a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \ge 1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \ge 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Принимая во внимание равенство $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ и введённые данные обозначения, получаем

$$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\nu} \tag{5.8}$$

Игрок *A* старается максимизировать свой выигрыш. Это эквивалентно минимизации функции *Z*. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии A^* свелась к задаче линейной оптимизации (ЛО): минимизировать линейную функцию вида (8) при линейных ограничениях вида (7).

При любой стратегии игрока *A* оптимальная стратегия игрока *B* обеспечивает ему средний проигрыш не больше цены игры *v* и проигрыш, равный цене игры *v*, при оптимальной стратегии игрока *A*. Пусть игрок *B* применяет смешанную стратегию B^* против какой-нибудь чистой стратегии A_i игрока *A*. Тогда он имеет средний проигрыш (математическое ожидание проигрыша):

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Итак, имеет место следующая система линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_i \le \nu \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

или в развёрнутой форме

$$\begin{aligned}
&a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \le \nu; \\
&a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \le \nu; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}p_m \le \nu.
\end{aligned}$$

Разделим каждое неравенство на ν и обозначим $y_j = \dfrac{q_j}{\nu} \quad (j = 1, 2, ..., n)$. Полученная выше система примет вид:

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1; \\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1.
\end{aligned} \qquad (5.9)$$

Принимая во внимание равенство $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$ и введённые обозначения, получаем

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{\nu}. \qquad (5.10)$$

Игрок B старается минимизировать свой проигрыш. Это эквивалентно максимизации функции F. Таким образом, задача поиска оптимальной стратегии B^* также свелась к задаче линейной оптимизации: максимизировать линейную функцию вида (10) при линейных ограничениях вида (9).

Нетрудно заметить, что полученные задачи ЛО являются взаимно двойственными. Первую из задач можно решить, например, методом искусственного базиса. Однако проще сначала решить вторую из рассмотренных задач, а затем по последней симплексной таблице найти решение первой задачи. Если платёжная матрица имеет большой размер, обе задачи целесообразно решать с помощью оптимизатора ***Поиск решения*** в табличном процессоре ***Excel***.

Любую конечную игру двух лиц с нулевой суммой можно представить в виде задачи линейного программирования. При этом возможно решение задачи как с чистыми, так со смешанными стратегиями. В случае чистых стратегий вероятность одной из стратегий будет равна единице, а вероятность остальных стратегий, естественно, равна нулю.

Оптимальные значения вероятностей стратегий $x_i, i=1,2,...,m$ игрока А могут быть определены путём решения следующей максминной задачи.

Сформулируем задачу матричной игры. Две конкурирующие компании А и В выпускают продукцию. Для увеличения продаж товар поставляется в различных упаковках. Компания А использует картон A_1, целлофан A_2, пластмасс A_3. Компания В использует такие же материалы для упаковки. Однако, при этом компании использовали различные виды оформления упаковок. В компании А зафиксировали увеличение/уменьшение притока покупателей в зависимости от упаковки товара и стратегии поведения конкурента В. Эти статистические данные представлены в таблице.

	B_1	B_2	B_3	**Мин. строк**
A_1	3	–2	–3	**–3**
A_2	–2	4	–1	**–2**
A_3	–3	–6	2	**–6**
Макс. столбцов	**3**	**4**	**2**	

Решение задачи основано на получение наилучшего результата из наихудших результатов для каждого игрока, который может быть получен определённой стратегией поведения. Из представленной таблицы следует, что данную задачу нельзя решить на основе чистых стратегий (седловой точки нет). Решение задачи находится между –2 и 2. В данном случае присутствуют смешанные стратегии, а так как количество стратегий у игрока А равно трём эту задачу можно решить с помощью линейного программирования (ЛП) алгебраическим методом. Следует заметить, что эту задачу нельзя решить графическим методом, так как количество стратегий у каждого игрока больше двух.

В соответствии с данными, представленными в таблице, задача ЛП для игрока А записывается следующим образом:

максимизировать: $F = v \to \max$ (максимальное количество клиентов) при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} v - 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 0, \\ v + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \le 0, \\ v + 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$

где $\nu -$ не ограничена в знаке.

5.5 Решение задачи ЛП симплекс-методом

Приведём систему ограничений к каноническому виду, для этого необходимо неравенства преобразовать в равенства с добавлением дополнительных переменных. Если в преобразуемом неравенстве стоит знак $\geq$, то при переходе к равенству знаки всех его коэффициентов и свободных членов меняются на противоположные. Тогда система запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 0x_7 + 0x_8 + x_9 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 6x_5 + 0x_6 + x_7 + 0x_8 + \quad x_{10} = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 + \quad + x_{11} = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + \quad + R_1 = 1. \end{cases}$$

Переходим к формированию исходной симплекс-таблицы. В строку F таблицы заносятся коэффициенты целевой функции. Так как нам необходимо найти максимум целевой функции, то в таблицу заносятся коэффициенты с противоположным знаком

Так как среди исходного набора условий были равенства, мы ввели искусственные переменные R. Это значит, что в симплекс-таблицу нам необходимо добавить дополнительную строку M, элементы которой рассчитываются как сумма соответствующих элементов условий-равенств (тех, которые после приведения к каноническому виду содержат искусственные переменные R), взятая с противоположным знаком.

Из данных задачи составляем исходную симплекс-таблицу.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	–1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_9	1	–1	–3	2	3	1	0	0	0
x_{10}	1	–1	2	–4	6	0	1	0	0
x_{11}	1	–1	3	1	–2	0	0	1	0
R_1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
M	0	0	–1	–1	–1	0	0	0	–1

Так как в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то найдено допустимое решение. В строке M имеются отрицательные элементы, это означает, что полученное решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдём в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент – это –1. Ведущей строкой будет та, для которой отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является R_1, а ведущий элемент: 1.

	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	–1	1	0	0	0	0	0	0
x_9	1	–1	5	6	0	0	0	3
x_{10}	1	–1	–6	4	1	0	0	–2
x_{11}	1	–1	–2	–5	0	1	1	–3
x_3	0	0	1	1	0	0	0	1
M	0	0	0	0	0	0	0	0

В составленной нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю – это элемент: –3, он задаёт ведущую строку – x_{11}. В этой строке также находим максимальный по модулю отрицательный элемент: –5, он находится в столбце x_5, который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная, соответствующая ведущему столбцу, включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_4	x_{11}	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	–1	1	0	0	0	0	0	0
x_9	2,2	–2,2	2,6	1,2	1	0	1,2	–0,6
x_{10}	1,8	–1,8	–7,6	0,8	0	1	0,8	–4,4
x_5	–0,2	0,2	0,4	–0,2	0	0	–0,2	0,6
x_3	0,2	–0,2	0,6	0,2	0	0	0,2	0,4
M	0	0	0	0	0	0	0	0

В составленной нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю – это элемент: –4,4, он задаёт ведущую строку – x_{10}. В этой строке также находим максимальный по модулю отрицательный элемент: –7,6, он находится в столбце x_4, который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная, соответствующая ведущему столбцу, включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_{10}	x_{11}	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	–1	1	–0	0	0	0	0	0
x_9	2,82	–2,82	0,34	1,47	1	0,34	1,47	–2,11
x_4	–0,24	0,24	–0,13	–0,11	–0	–0,13	–0,11	0,58
x_5	–0,11	0,11	0,05	–0,16	0	0,05	–0,16	0,37
x_3	0,34	–0,34	0,08	0,26	0	0,08	0,26	0,05
M	0	0	0	0	0	0	0	0

В составленной нами таблице имеются отрицательные элементы в столбце свободных членов, находим среди них максимальный по модулю – это элемент: –2,11, он задаёт ведущую строку – x_9. В этой строке также находим максимальный по модулю отрицательный элемент: – 2,82, он находится в столбце x_2, который будет ведущим столбцом. Переменная в ведущей строке исключается из базиса, а переменная, соответствующая ведущему столбцу, включается в базис. Пересчитаем симплекс-таблицу:

	x_1	x_9	x_{10}	x_{11}	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	0	0,35	0,12	0,52	0,35	0,12	0,52	–0,75
x_2	–1	–0,35	–0,12	–0,52	–0,35	–0,12	–0,52	0,75
x_4	0	0,09	–0,1	0,02	0,09	–0,1	0,02	0,4
x_5	0	0,04	0,06	–0,1	0,04	0,06	–0,1	0,29
X_3	0	–0,12	0,04	0,08	–0,12	0,04	0,08	0,3
M	0	–0	0	0	0	0	0	0

Так как в строке F нет отрицательных элементов, то найдено оптимальное решение $F = –0,75$ при значениях переменных, равных: $x_2 = 0,75$, $x_4 = 0,4$, $x_5 = 0,29$, $x_3 = 0,3$.

В соответствии с данными, представленными в таблице, задача ЛП для игрока В записывается следующим образом: максимизировать: $F = \nu \to \text{мин}$ (минимальное количество клиентов) при выполнении следующих ограничений:

$$\begin{cases} \nu - 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 0, \\ \nu + 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 \ge 0, \\ \nu + 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \ge 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$

где ν – не ограничена в знаке.

Приведём систему ограничений к каноническому виду, для этого необходимо неравенства преобразовать в равенства, с добавлением дополнительных переменных.

Если в преобразуемом неравенстве стоит знак ≥, то при переходе к равенству знаки всех его коэффициентов и свободных членов меняются на противоположные.

Тогда система запишется в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 + x_6 + 0x_7 + 0x_8 + x_9 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 + 0x_6 + x_7 + 0x_8 + \quad x_{10} = 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 2x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 + \quad + x_{11} = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + \quad + R_1 = 1. \end{cases}$$

Переходим к формированию исходной симплекс-таблицы. В строку F таблицы заносятся коэффициенты целевой функции.

Так как среди исходного набора условий были равенства, мы ввели искусственные переменные R. Это значит, что в симплекс-таблицу нам необходимо добавить дополнительную строку M, элементы которой рассчитываются как сумма соответствующих элементов условий-равенств (тех, которые после приведения к каноническому виду содержат искусственные переменные R), взятая с противоположным знаком.

Из данных задачи составляем исходную симплекс-таблицу.

	x_1	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Свободный член
F	1	–1	0	0	0	0	0	0	0
x_9	–1	1	3	–2	–3	1	0	0	0
x_{10}	–1	1	–2	4	–1	0	1	0	0
x_{11}	–1	1	–3	–6	2	0	0	1	0
R_1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
M	0	0	–1	–1	–1	0	0	0	–1

Так как в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, то найдено допустимое решение. В строке M имеются отрицательные элементы, это означает что полученное решение не оптимально. Определим ведущий столбец. Для этого найдём в строке M максимальный по модулю отрицательный элемент – это –1. Ведущей строкой будет та, для которой отношение свободного члена к соответствующему элементу ведущего столбца минимально. Ведущей строкой является R_1, а ведущий элемент: 1.

	x_1	x_{11}	x_{10}	x_9	x_6	x_7	x_8	Свободный член
F	0	0,29	0,4	0,31	0,31	0,4	0,29	0,75
x_5	0	0,1	-0,02	-0,09	-0,09	-0,02	0,1	0,53
x_4	0	-0,07	0,1	-0,04	-0,04	0,1	-0,07	0,12
x_2	-1	0,29	0,4	0,31	0,31	0,4	0,29	0,75
x_3	0	-0,04	-0,09	0,12	0,12	-0,09	-0,04	0,35
M	0	0	0	0	0	0	0	0

Так как в строке F нет отрицательных элементов, то найдено оптимальное решение. Так как исходной задачей был поиск минимума, оптимальное решение есть свободный член строки F, взятый с противоположным знаком. Найдено оптимальное решение F = –0.75 при значениях переменных равных: x_5 = 0,53, x_4 = 0,12, x_2 = 0,75, x_3 = 0,35.

Проведённый расчёт показал, что значение игры, как со стороны игрока A, так и со стороны игрока B, одинаково и равняется –0,75.

5.6 Упрощение матричных игр

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платёжной матрицы. Поэтому для игр с платёжными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путём исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

Определение 1. Если в платёжной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Определение 2. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока А, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Определение 3. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_i игрока В, не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Правило. Решение матричной игры не изменится, если из платёжной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Пример. Упростить матричную игру, платёжная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9
A_4 →	4	8	3	4	5
A_5 →	4	7	7	9	10

Из платёжной матрицы видно, что стратегия A_2 дублирует стратегию A_5, потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию A_5). Сравнивая почленно стратегии A_1 и A_4, видим, что каждый элемент строки A_4 не больше соответствующего элемента строки A_1.

Поэтому применение игроком А доминирующей над A_4 стратегии A_1 всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии A_4.

Следовательно, стратегию A_4 можно отбросить.

Таким образом, имеем упрощённую матричную игру с платёжной матрицей вида:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока В доминируют над другими: B_3 над B_2, B_4 и B_5. Отбрасывая доминируемые стратегии B_2, B_4 и B_5, получаем игру 3×2, имеющей платёжную матрицу вида:

B_j / A_i	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7
A_3	4	3

В этой матрице стратегия A_3 доминирует как над стратегией A_1, так и стратегией A_2. Отбрасывая стратегию A_3, окончательно получаем игру 2×2 с платёжной матрицей.

B_j / A_i	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, её надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что, отбрасывая дублирующие и доминирующие стратегии в игре с седловой точкой, мы всё равно придём к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой – это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

Свойство 1. Если ко всем элементам платёжной матрицы прибавить (вычесть) одно и тоже число С, то оптимальнее смешанные стратегии не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число С.

Свойство 2. Если каждый элемент платёжной матрицы умножить на положительное число k, то оптимальные смешанные стратегии не изменятся, а цена игры умножится на k.

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными элементами имеет и отрицательные элементы, то ко всем её элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

Пример. Решить матричную игру 2×2 с платёжной матрицей вида:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	0,5	-0,2
A_2	0,1	0,3

Умножая все элементы платёжной матрицы на 10, а затем, прибавляя к ним число 2, получаем игру с платёжной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	0
A_2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9}; \qquad p_2 = \frac{7}{9};$$

$$q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9}; \qquad q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7\cdot 5 - 0\cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2 исходная матричная игра имеет те же оптимальные смешанные стратегии: $S_A = \left\| \frac{2}{9} : \frac{7}{9} \right\|$ и $S_B = \left\| \frac{5}{9} : \frac{4}{9} \right\|$. А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким образом, получаем цену исходной игры: $\left(\frac{35}{9} - 2\right) : 10 = \frac{17}{90}$.

Решение игр 2×n и m×2

Как уже отмечалось в теореме об активных стратегиях, любая конечная игра **m×n** имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит 1, где $1 = \min(m, n)$. Следовательно, у игры **2×n** или **m×2** всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(\min(2,n)=\min(m,2)=2)$. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры $\mathbf{2\times n}$ и $\mathbf{m\times 2}$ превращаются в игру $\mathbf{2\times 2}$, методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры $\mathbf{2\times n}$ осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры $\boldsymbol{v}$;

3) определяется пара стратегий игрока **B**, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока **B**.

Таким образом, игра $\mathbf{2\times n}$ сведена к игре $\mathbf{2\times 2}$, которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана **любая пара** из них.

Решение игры $\mathbf{m\times 2}$ осуществляется аналогично. Но в этом случае выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша, так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока **B**, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример. Найти решение игры, платёжная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры (рис. 4).

Точка **N** (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ игрока **B**.

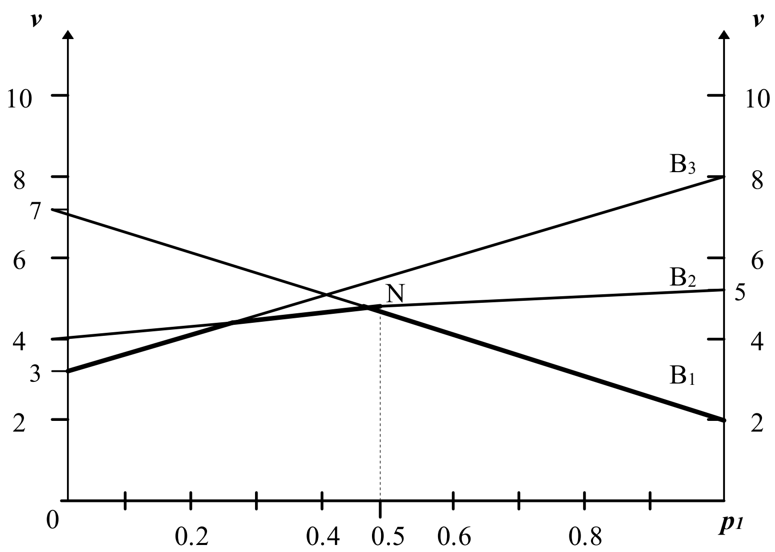

Рисунок 4. Решение матричной игры

Таким образом, исключая стратегию **B**$_3$, получаем матричную игру **2×2** с платёжной матрицей вида:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; \qquad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; \qquad q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2\cdot 4 - 7\cdot 5}{2+4-7-5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ: $S_A = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\|$; $v = \frac{27}{6}$

Пример. Найти решение игры, платёжная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	0	1
A_2	4	2
A_3	–1	4
A_4	1	–3
A_5	6	–2
A_6	1,5	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре **2×2** строим её графическое изображение.

Точка **M** (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A_2, A_6 и A_3 игрока А. Таким образом, исключая стратегии A_1, A_4 и A_5 и выбирая из трёх активных стратегий две (например, A_2 и A_3 или A_2 и A_6), приходим к матричной игре **2×2**. Выбор стратегий A_3 и A_6 исключён, так как в этом случае точка M перестанет быть точкой минимакса.

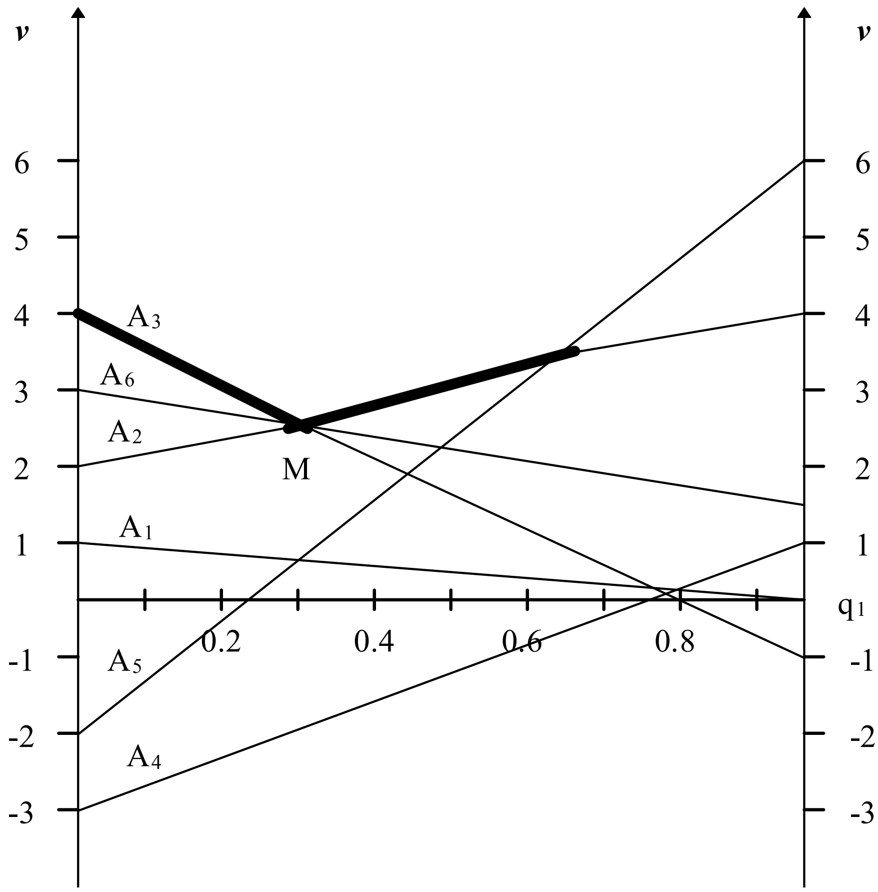

Рисунок 5. Решение матричной игры

Пусть выбираются стратегии A_2 и A_3. Тогда игра **2×2** приобретает вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_2	4	2
A_3	–1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}; \qquad p_2 = \frac{2}{7};$$

$$q_1 = \frac{4+2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}; \qquad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0 \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|; \quad v = \frac{18}{7}.$

Другой вариант игры **2×2** получается, если использовать стратегии A_2 и A_6. В этом случае платёжная матрица имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_2	4	2
A_6	$1\frac{1}{2}$	3

Тогда

$$p_1 = \frac{3-1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{3}{7}; \qquad p_2 = \frac{4}{7};$$

$$q_1 = \frac{3-2}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{7}; \qquad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4\cdot 3-2\cdot 1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, \frac{4}{7} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|$; $v = \frac{18}{7}$.

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр $\mathbf{2\times n}$ и $\mathbf{m\times 2}$:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры α не равна верхней цене игры β, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путём исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощённая игра имеет размерность не $\mathbf{2\times 2}$, то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяется две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

4. Решается матричная игра $\mathbf{2\times 2}$.

Глава 6. Принятие решения при проверке гипотез

6.1 Постановка задачи

На имеющейся выборке следует проверить гипотезу H_0 [5, 6]. Она может быть, например, гипотезой о равенстве определённых параметров распределения, о равенстве законов распределения, о некоррелированности событий. Для проверки гипотезы нужна какая-то контрольная величина T, которая должна быть выбрана и соответствовать функции распределения. По заданному уровню значимости $\propto$ (0,05, 0,02…) определяется критическая область, удовлетворяющая условию $P(\mathrm{T} \in \mathrm{B} | H_0) \leq \propto$. Область В можно найти, если известно распределение или асимптотическое приближение.

Метод проверки состоит в следующем. Производится выборка, которая даёт частное значение величины T. Если t принадлежит области В, то есть если осуществляется событие, имеющее очень маленькую вероятность $\propto$, то от гипотезы H_0 следует отказаться. Если t не лежит в области В, то делается заключение, что данные не противоречат принятой гипотезе.

Ошибочное решение, когда гипотеза H_0 отвергается, хотя она и верна, является ошибкой первого рода.

Ошибочное решение, когда гипотеза H_0 не отвергается, хотя она и не верна, является ошибкой второго рода.

Если $\propto$ задано, то критическую область можно выбрать многими способами. Её выбирают таким образом, чтобы вероятность допустить ошибку второго рода была наименьшей.

Для принятия решения о гипотезе используются критерии: t-критерий, F-критерий, критерий согласия χ^2.

6.2 *t*-критерий

t-критерий служит для сравнения двух средних значений из нормально распределённых генеральных совокупностей в предположении, что дисперсии исследуемых величин равны, хотя и неизвестны. Таким образом, проверяется гипотеза что $M_x = M_y$. (x, y независимые случайные величины ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) и ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) – случайная выборка из генеральных совокупностей. Выборки могут иметь различные объёмы. В качестве контрольной величины используется величина:

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}. \qquad (6.2)$$

При сделанных предположениях (нормально распределённых средних значений $\bar{X} + \bar{Y}$ и равенство дисперсий $\partial_x = \partial_y$) и в предположении, что (гипотеза

H_0), T удовлетворяет t-распределению Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. В этом случае критическая область В может быть определена из таблицы $t_{\propto,k}$. Если вычисленное значение удовлетворяет неравенству$|t| \leq t_{\propto,k}$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть.

Пример 6.2.1 Необходимо определить влияние вида тренировочного комплекса на результаты спортсмена. С этой целью первая группа из 15 спортсменов занимались по первой методике, а вторая группа из 15 спортсменов по второй методике. X и Y – результаты поднятия штанги спортсменов первой и второй группы. Величины X и Y можно считать нормально распределёнными, так как согласно центральной предельной теореме на величину X и Y влияют многочисленные факторы, каждый из которых вносит несущественное на них влияние. Так как дисперсия увеличения веса поднятия штанги зависит от свойств спортсменов и эти свойства проявляются независимо от вида тренировок, то можно считать $\partial_x = \partial_y$. Таким образом, выполнены условия для применения t-критерия. Среднее эмпирическое значение $\bar{X} = 110$ кг, $\bar{Y} = 100$ кг. Эмпирическая дисперсия составляет $S_x^2 = 200$, $S_y^2 = 90$. При этих входных параметрах расчетное значение t согласно выражению 6.2 составит

$$t = \frac{110-100}{\sqrt{14*200+14*90}} \sqrt{\frac{15*15(15+15-2)}{15+15}} = 2{,}27.$$

Для $\propto = 0{,}05$ и $k = 15 + 15 - 2 = 28$ из таблицы $t_{0,05,\ 28} = 2{,}048$ (Прил. 2), так как $t \geq t_{0,05,\ 28}$, то гипотеза H_0 отвергается. Следовательно, с погрешностью 0,05 можно утверждать, что первая методика тренировок лучше другой и разница результатов испытаний не носит случайный характер.

6.3 *F*-критерий

С помощью гипотезы о дисперсии ∂^2 можно оценить точность измерительного прибора по отношению к подобному измерительному устройству, так как дисперсия является её мерой. Для проверки $\partial_x = \partial_y$ при условии, что X и Y распределены нормально. Из каждой генеральной совокупности производятся выборки объёмом n_1 и n_2. В качестве контрольной величины выбирают отношение эмпирических дисперсий $S_x^2/S_y^2 = F$. Величина F удовлетворяет F-распределению с (m_1, m_2) степенями свободы, $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$.

Для уровня значимости $\propto$ при $p = \propto/2$ и степенях свободы m_1, m_2 из таблицы выбирают критическое значение $F_{P,\,m_1,\,m_2}$. Если F, вычисленное по выборке больше, чем значение $F_{P,\,m_1,\,m_2}$, то гипотеза должна быть отклонена с вероятностью погрешности $\propto$.

Пример 6.3.1 Двумя приборами произведено 8 и 25 измерений соответственно. Получены эмпирические дисперсии $S_x^2 = 18{,}9$, $S_y^2 = 15{,}4$ и $F = 18{,}9/15{,}4 = 1{,}22$. Из таблицы для $\propto = 0{,}1$ находим критическое значение $F_{0{,}05,\,8{,}25} = 2{,}34$. (Прил. 1). Так как вычисленное значение меньше критического значения, то различия между S_x^2 и S_y^2 незначительные. Оба прибора имеют одинаковую точность.

6.4 Критерий согласия χ^2

При помощи *F*-критерия и *t*-критерия можно определить, являются ли наблюдения двух выборок существенно значимыми или случайными.

Имеются критерии, с помощью которых можно проверить, относится ли случайная величина X к заданному закону распределения $F_0(x)$. Такие критерии называются критериями согласия. Критерий служит для проверки гипотезы H_0 о том, что $F_x(x) = F_0(x)$. $F_x(x)$ – экспериментальная исследуемая функция, $F_0(x)$ – заданная (гипотетическая) функция.

Рассмотрим случай, когда $F_0(x)$ полностью определена и не содержит неизвестных параметров. Область параметров делится на конечное число непересекающихся множеств так называемых классов $\nabla_1, \nabla_2 \ldots \nabla_k$. При непрерывном X классы представляются промежуточными. При дискретном X классы являются группами. Пусть p_i есть теоретическая вероятность, что X попадёт в ∇_i, если гипотеза H_0 верна. Если $\nabla_i = [a_i, b_i]$, то $p_i = F_0(b_i) - F_0(a_i)$. Из X производится выборка x_1, x_2, … x_n объёмом n. Пусть M_i число значений в выборке ∇_i, тогда $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k} M_i = n$. Разбиение на классы произвольно. Для граничных классов должно быть $np_i \geq 1$, для остальных классов $p_i \geq 5$. Контрольная величина вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \sum_{I=1}^{k} \frac{(\mathrm{Mi} - np_i)^2}{np_i} = \left(\sum_{I=1}^{k} \frac{(\mathrm{Mi})^2}{np_i}\right) - n. \tag{6.2}$$

В предположении, что H_0 верна, X имеет асимптотическое μ^2 распределение с $m = k - 1$ степенями свободы, где k – число разбиений интервала. Так как μ^2 есть мера отклонения истинного распределения от гипотетического, то гипотеза отвергается, если значение, вычисленное по выбранной выборке, превышает критические значения χ^2 для заданного уровня значимости $\propto$ и $m = k - 1$ степеней свободы. $\chi^2_\propto$ определяется из таблицы 6.1. Если $\chi^2 > \chi^2_\propto$, то гипотеза H_0 отвергается.

Для $n > 30$ значение $\mu^2_\propto$ вычисляется по формуле

$$\chi^2_\propto = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2]{2m-1} + Z_{2\propto}\right)^2, \tag{6.3}$$

где $Z_{2\propto}$ – нормально распределённая случайная величина.

Пример 6.4.1 От лототрона требуется, чтобы 100 возможных значений имели бы равномерное распределение. Для проверки качества работы устройства было проведено испытание. В устройство было положено 5 шаров и было сделано 100 выниманий по одному шару. Выбранный шар снова помещался в устройство. Гипотетическая (заданная) функция распределения $F_0(x)$ определяется в предположении равномерного распределения 5 (пяти) возможных значений X (номер вынутого шара) с p_i = 1/5 для классов 1, 2, 3, 4, 5. В данном случае классами являются номерами шаров. Результаты проведённого эксперимента представлены в таблице 6.1

Таблица 6.1

i	Число вынутых шаров (m_i)	np_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	17	20	–3	0,45
2	18	20	–2	0,2
3	22	20	+2	0,2
4	23	20	+3	0,45
5	20	20	0	0
Итого	100	100	0	1,3

Для $\propto$ = 0,05 и m = 5 – 1 = 4 из таблицы найдём $\chi^2_{\propto,m}$ = 9,5. Таким образом, так как вычисленное значение χ^2 меньше $\chi^2_{\propto,m}$, можно утверждать с ошибкой 0,05, что устройство выдаёт шары по равновероятностному закону.

Рассмотрим второй случай принятия решения, когда функция распределения $F_0(x)$ установлена неоднозначно и гипотеза говорит, что $F_0(x)$ относится к определённом множеству $F(x, Q_1, Q_2, \ldots, Q_r)$ функций распределения, которые имеют r параметров.

Например, гипотеза может гласить, что X имеет нормальное распределение с двумя параметрами $\propto, \partial$ или X имеет распределение Пуассона с одним параметром λ. В этом случае необходимо поступать следующим образом: по выборке получают наиболее правдоподобные оценки $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ ... $\bar{Q}_k$ и принимают $F_0 = (x) = F_0(x, Q_1, Q_2, \ldots, Q_r)$. Затем по формуле $P_\text{I} = F_0(b_i) - F_0(a_i)$ определяют P_I, а по формуле 6.3.1 определяют значение критерия согласия χ^2. При этом степень свободы уменьшится на величину количества параметров r и составит $m = k - r - 1$.

Пример 6.4.2 Измерительным прибором было произведено 100 измерений известных расстояний. Результаты расхождений представлены в таблице 6.2. Результаты наблюдений разбиты на 8 интервалов по 5.

Таблица 6.2

Номер интервала	Интервал	Частота
1	–20 ⋯–15	5
2	–15 ⋯–10	8,5
3	–10 ⋯ –5	10,5
4	–5 ⋯ 0	20
5	0 ⋯ 5	25
6	5⋯ 10	13
7	10 ⋯15	12
8	15 ⋯20	6
	Итого	100

Проверим гипотезу H_0, что случайная погрешность измерений X распределена нормально. Гипотетическое распределение представляется

$$f\left(x,a,\partial\right)=\frac{1}{\partial}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\partial}\right)^2}, \tag{6.4}$$

где a и ∂ – неизвестные параметры.

По представленной выборке можно вычислить наиболее правдоподобные оценки a и ∂, которые для представленной выборки имеют значение $\overline{a}=0,925$, $\partial^{-2}=80,89$.

Таким образом функция распределения имеет вид

$$F_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi 80,89}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x-0,925\right)^2}{80,89}}. \tag{6.5}$$

Из таблицы 6.3 определяем вероятность нахождения значений в интервалах, указанных в таблице 6.2, и заносим в таблицу 6.3

$$P_1 = P(–20 < x < –15) = P(–2,32) – P(–1,77) = 0,0374.$$

Таблица 6.3

Номер интервала	Частота m_i	P_{I}	nP_{I}	$\left[\left(m_i-nP_i\right)\right]\wedge 2/\left(nP_i\right)$
1	5	0,0374	3,74	0,31752
2	8,5	0,0728	7,28	0,175
3	10,5	0,1438	14,38	1,433
4	20	0,2052	20,52	0,01
5	25	0,1338	13,38	5,4
6	13	0,1674	16,74	1,075
7	12	0,0996	9,96	0,347
8	6	0,0593	5,93	0,0008
	100	0,92	92	8,76

Таким образом, по результатам выборки получаем χ^2 = 8,76. В представленном примере количество степеней свободы при оценке двух параметров составляет m = 8 – 2 – 1 = 5. Для уровня значимости $\propto$ = 0,05 и m = 5 критическое значение χ^2 = 11. Так как вычисленное значение χ^2 меньше критического, то гипотеза о нормальном распределении погрешности измерительного прибора не противоречит проведённым наблюдениям при уровне значимости $\propto$ = 0,05.

6.5 Критерий согласия Колмогорова – Смирнова

В этом критерии используется эмпирическая $F_n(x)$ и гипотетическая $F_0(x)$ функции распределения, после определения которых определяется функция выборки

$$D_n = Sup|\mathrm{Fn(x)} - \mathrm{Fo(x)}|, \text{ где } -\infty < x < \infty.$$

В этом случае имеет место распределение Колмогорова – Смирнова:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = Q(\lambda);$$

$$Q(\lambda) = \sum_{к=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{2k^2\lambda^2}.$$

Контрольная величина $D_n\sqrt{n}$ имеет асимптотическую функцию распределения $Q(\lambda)$. Для уровня значимости $\propto$ принимают такое значение λ_0, при котором $Q(\lambda_0)$ = 1 – $\propto$. Если $D_n\sqrt{n} > \lambda_0$, то гипотезу H_0 о том, что x распределено по закону $Fo(x)$, следует отбросить. Критерий Колмогорова – Смирнова нельзя использовать, если параметры в функциях $F_n(x)$, $F_0(x)$ определены по одной выборке.

Рассмотренный критерий также позволяет оценить существенность различий между двумя выборками (экспериментальной и контрольной).

Пример 6.5.1 При изучении качества продукции были получены результаты для экспериментальных и контрольных групп (табл. 6.4). Согласно данным таблицы можно сделать заключение о расхождении результатов наблюдений. Нулевая гипотеза H_0 утверждает, что эти расхождения несущественны. Являются ли значимыми различия между контрольной и экспериментальной группами и можно ли принять нулевую гипотезу?

Таблица 6.4

Уровень качества	Частота в экспериментальной группе	Частота в контрольной группе
Хороший	150 шт.	95 шт.
Удовлетворительный	41 шт.	55 шт.
Плохой	10 шт.	28 шт.
Объём выборки	n_1 = 150 + 41 + 10 = 201	n_2 = 95 + 55 + 28 = 178

Решение

Для обоснования принятия решения используем критерий Колмогорова-Смирнова. Вначале вычислим относительные частоты и модули разностей для экспериментальных и контрольных групп (табл. 6.5). Затем вычисляем модули разностей между частотами.

Таблица 6.5

Относительная частота экспериментальной группы ($f_{эксп}$)	Относительная частота контрольной группы ($f_{контр}$)	Модуль разности частот $\lvert f_{эксп} - f_{контр}\rvert$
$150/201 \approx 0{,}75$	$95/178 \approx 0{,}53$	0,22
$41/201 \approx 0{,}2$	$55/178 \approx 0{,}3$	0,1
$10/201 \approx 0{,}05$	$28/178 \approx 0{,}16$	0,11

Среди полученных модулей разностей относительных частот выбираем наибольший модуль, который обозначается $d_{\max}$. В рассматриваемом примере $0{,}22 > 0{,}11 > 0{,}1$, поэтому $d_{\max} = 0{,}22$.

Эмпирическое значение критерия $\lambda_{эмп}$ определяется с помощью формулы:

$$\lambda_{эм} = d_{эм} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}\,. \tag{6.6}$$

Чтобы сделать вывод о схожести по рассматриваемому критерию между двумя группами, сравним экспериментальное значение критерия с его критическим значением, определяемым по специальной таблице (λ-распределение Колмогорова – Смирнова), исходя из уровня значимости $\propto$. В качестве нулевой гипотезы примем утверждение о том, что сравниваемые группы незначительно отличаются друг от друга по уровню усвоения. При этом нулевую гипотезу следует принять в том случае, если наблюдаемое значение критерия не превосходит его критического значения.

По формуле 6.5.1 определяем

$$\lambda_{эм} = 0{,}22 \cdot \sqrt{\frac{201 \cdot 178}{201 + 178}} = 2{,}13\,.$$

Принимая уровень значимости $\propto = 0{,}05$,определяем критическое значение $\lambda_{кр} = 1{,}36$ (Прил. 4).

Таким образом, $\lambda_{эмп} = 2{,}13 > 1{,}36 = \lambda_{кр}$. Следовательно, нулевая гипотеза отвергается, и группы по рассмотренному признаку отличаются существенно.

Пример 6.5.2 Используя критерий Колмогорова, проверить на уровне значимости 5 % гипотезу о том, что выборка частоты прихода клиентов $F_n(x)$

0,91; 0,57; 0,06; 0,25; 0,95; 0,8; 0,02; 0,13; 0,71; 0,45 является выборкой наблюдений равномерно распределённой случайной величины Fо.

Решение.

Сформулируем гипотезу H_0 : Fn(x) = Fо$(0,1)$.

Составим вариационный ряд выборки:

0,02; 0,06; 0,13; 0,25; 0,45; 0,57; 0,71; 0,8; 0,91; 0,95.

Значения функции Fо $(0,1)$ в этих точках:

0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1.

Найдём рассогласования между: $Fn(x)$ = Fо$(0,1)$ в этих точках:

0,02; 0,04; 0,05; 0,05; 0,03; 0,01; 0,0; 0,01; 0,05.

Находим значение D_n = 0,05. Выборочное экспериментальное значение критерия $\lambda_{эм} = \sqrt{10} \cdot 0,05 = 0,16$.

По таблице находим распределения Колмогорова на уровне 1–α: $\lambda_{кр} = 1,23$.

Таким образом, поскольку $\lambda_{кр} = 1,23$ больше $\lambda_{эм} = 0,16$, оснований считать, что гипотеза H_0 не согласуется с экспериментальными данными, нет. Отвергать, что данная выборка могла быть получена из равномерного распределения нельзя.

Глава 7. Принятие решения при выборе метода прогнозирования

7.1 Типы данных

Повсеместное распространение компьютерных технологий позволило накопить большое количество данных по различным показателям [5, 7]. На основе этих данных можно построить прогноз на будущее. Перед выполнением расчётов по прогнозированию необходимо провести оценку имеющихся данных, так как качество прогноза зависит от качества входных данных.

Для выбора данных используются следующие критерии.

1. Данные должны быть достоверными и точными.
2. Данные должны быть значимыми.
3. Данные должны быть согласованные.
4. Данные должны быть представлены через определённые промежутки времени.

Для исследования представляют два типа данных – кросс-секционные и временной ряд. Кросс-секционные данные представляют собой наблюдения, собранные в фиксированный момент времени. Временной ряд состоит из данных, зафиксированных через последовательные промежутки времени.

7.2 Временной ряд

При выборе метода прогнозирования для временного ряда необходимо определиться с моделью поведения данных в наборе. Существуют четыре основных типов моделей данных: горизонтальная, тренд, сезонная и циклическая.

Для горизонтальной модели характерны незначительные флуктуации около постоянного или среднего значения.

Если наблюдаемые данные с течением большого промежутка времени возрастают или убывают, то говорят, что в них присутствует модель поведения – тренд.

Если данные наблюдений характеризуются подъёмами и спадами в незафиксированные периоды, то говорят, что в них присутствует циклическая модель.

Если данные наблюдений характеризуются подъёмами и спадами единообразно из года в год, то говорят, что в них проявляется сезонная модель поведения.

Определение модели поведения данных можно выполнить с помощью автокорреляционного анализа.

7.3 Автокорреляционный анализ

Наблюдения, проводимые в различные моменты времени, могут быть взаимосвязанными или коррелированными. Уровень корреляции оценивается с помощью коэффициента корреляции. Автокорреляцией называется корреляция между величиной и её запаздываем в один и более периоды времени. По значению коэффициента автокорреляцией можно отождествить модель поведения данных временного ряда.

Коэффициент r_k автокорреляции для запаздывания k вычисляется по формуле (7.3.1)

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t-\bar{Y})(y_{t-k}-\bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2}, \tag{7.3.1}$$

где $\bar{Y}$ – среднее значение ряда;

y_t – наблюдение в момент времени *t*;

y_{t-k} – наблюдения на *k* периодов ранее, в момент времени *t* – *k*.

Пример 7.1 Продажа товара за год помесячно составила (табл. 7.1).

Определить коэффициент автокорреляции со сдвигом на 1, 2 и 3 месяца.

Таблица 7.1 – Сдвиг на 1 месяц

Месяц	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{Y}$	$y_{t-1}-\bar{Y}$	$(y_t-\bar{Y})^2$	$(y_t-\bar{Y})\,(y_{t-1}-\bar{Y})$
1	150		–21,66	–	469,44	–
2	130	150	–41,66	–12,66	1736,11	902,77
3	110	130	–61,66	–41,66	3802,77	2569,44
4	170	110	–1,66	–61,66	2,77	102,77
5	180	170	8,33	–1,66	69,44	–13,88
6	150	180	–21,66	8,33	469,44	–180,55
7	160	150	–11,66	–21,66	136,11	252,77
8	190	160	18,33	–11,66	336,11	–213,88
9	200	190	28,33	18,33	802,77	519,44
10	210	200	38,33	28,33	1469,44	1086,11
11	190	210	18,33	38,33	336,11	702,77
12	220	190	48,33	18,33	2336,11	886,11

$$\bar{Y} = \sum_{t=1}^{12} y_t/12 = 2\,060/12 = 171{,}66; \qquad \sum_{t=1}^{12}(y_i-\bar{Y})^2 = 11\,966{,}67;$$

$$\sum_{t=1+1}^{12}(y_t-\bar{Y})(y_{t-1}-\bar{Y}) = 6\,613{,}88.$$

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на один месяц $r_1 = 0{,}552$.

Таблица 7.2 – Сдвиг на 2 месяца

Месяц	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{Y}$	$y_{t-1}-\bar{Y}$	$(y_t-\bar{Y})^2$	$(\boldsymbol{y_t}-\bar{\boldsymbol{Y}})\,(\boldsymbol{y_{t-1}}-\bar{\boldsymbol{Y}})$
1	2	3	4	5	6	7
1	150		–21,67		469,59	0
2	130		–41,67		1 736,39	0
3	110	150	–61,67	–21,67	3 803,19	1 336,39
4	170	130	–1,67	–41,67	2,79	69,59
5	180	110	8,33	–61,67	69,39	–513,71

Окончание табл. 7.2

1	2	3	4	5	6	7
6	150	170	–21,67	–1,67	469,59	36,19
7	160	180	–11,67	8,33	136,19	–97,21
8	190	150	18,33	–21,67	335,99	–397,21
9	200	160	28,33	–11,67	802,59	–330,61
10	210	190	38,33	18,33	1 469,19	702,59
11	190	200	18,33	28,33	335,99	519,29
12	220	210	48,33	38,33	2335,79	1 852,49

$\bar{Y} = \sum_{t=1}^{12} y_t/12$ = 2 060/12 = 171,66; $\sum_{t=1}^{12}(y_i - \bar{Y})^2$ = 11 966,67;

$\sum_{t=2+1}^{12}(y_t - \bar{Y})(y_{t-1} - \bar{Y})$ = 3 177,77.

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на два месяца $r_2 = 0,26$.

Таблица 7.3 – Сдвиг на 3 месяца

Месяц	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{Y}$	$y_{t-1} - \bar{Y}$	$(y_t - \bar{Y})^2$	$(\boldsymbol{y_t} - \boldsymbol{\bar{Y}})\ (\boldsymbol{y_{t-1}} - \boldsymbol{\bar{Y}})$
1	150	–	–21,66	–	469,44	–
2	130	–	–41,66	–	1 736,11	–
3	110	–	–61,66	–	3 802,77	–
4	170	150	–1,66	–21,66	2,77	36,11
5	180	130	8,33	–41,66	69,44	–347,22
6	150	110	–21,66	–61,66	469,44	1 336,11
7	160	170	–11,66	–1,66	136,11	19,44
8	190	180	18,33	8,33	336,11	152,77
9	200	159	28,33	–12,66	802,77	–358,88
10	210	160	38,33	–11,66	1 469,44	–447,22
11	190	190	18,33	18,33	336,11	336,11
12	220	200	48,33	28,33	2 336,11	1 369,44

$\bar{Y} = \sum_{t=1}^{12} y_t/12$ = 2 060/12 = 171,66; $\sum_{t=1}^{12}(y_i - \bar{Y})^2$ = 11 966,67;

$\sum_{t=3+1}^{12}(y_t - \bar{Y})(y_{t-1} - \bar{Y})$ = 2 096,667.

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на три месяца $r_3 = 0,17$.

На основании проведённых расчётов можно построить коррелограмму, на которой располагаются периоды запаздывания k = 1, 2, 3 и значения коэффициентов автокорреляции r_k. Коэффициент автокорреляции можно использовать для оценивания наборов данных по следующим показателям.

1. Являются ли данные случайными.
2. Являются ли данные нестационарными (имеется ли тренд).
3. Являются ли данные стационарными.
4. Имеются ли в данных сезонные колебания.

Если коэффициент автокорреляции для любого запаздывания близок к нулю, то можно сказать, что ряд случаен (последовательные значения не связаны друг с другом).

Если коэффициенты автокорреляции существенно отличны от нуля для первых периодов и с увеличением периодов убывает до нуля, то у ряда имеется тренд (нестационарность).

У ряда с большой сезонной компонентой коэффициенты автокорреляции наблюдаются для периодов запаздывания равных сезонному периоду (для ежемесячных данных 12).

Таким образом, для оценки ряда необходимо определить существенно ли полученный коэффициент автокорреляции отличается от нуля. Было доказано, что коэффициент автокорреляции случайных данных имеет выборочное распределение, которое может быть аппроксимировано нормальной функцией распределения со средним равным 0 и среднеквадратичным $1/\sqrt{n}$. На основании этого можно сравнить выборочный коэффициент с теоретическим и определить для заданных периодов запаздывания, взяты ли эти значения из генеральной совокупности со средним равным нулю.

7.3.1 Проверка случайности данных, тренда, сезонности

Проверка случайности. Простая случайная модель представляется в виде уравнения (7.1). Наблюдения состоят из двух составляющих: c – общий уровень и μ_t – случайная ошибка, которая некоррелированая от периода к периоду:

$$y_t = c + \mu_t. \tag{7.1}$$

Для проверки соответствия данных в таблице 7.1 с моделью (7.3.1.1) поступают следующим образом. Выдвигается гипотеза H_0: $\rho_1 = 0$ и альтернативная гипотеза H_1: $\rho_1 \neq 0$. Для подтверждения гипотезы H_0 используется t-статистика:

$$t = \frac{r_{k-\rho_1}}{SE(r_k)}, \tag{7.2}$$

где $SE(r_k)$ стандартная ошибка, которая для первого запаздывания при 12 данных определяется по формуле $SE(r_1) = 1/\sqrt{12} = 0{,}2887$. t-статистика в этом случае равна

$$t_1 = \frac{r_{1-\rho_1}}{SE(r_1)} = \frac{0{,}552-0}{0{,}2887} = 1{,}91.$$

Поскольку для $n = 12 - 1$ степеней свободы и уровне значимости $\propto = 0{,}05$, критическое значение $t_{кр} = 2{,}2$ (Прил. 2), будет большой ошибкой отказаться от нулевой гипотезы. Поэтому заключаем, что коэффициент автокорреляции при запаздывании на один период несущественно отличается от нуля.

Подобным образом оценим значение коэффициента автокорреляции для запаздывания на 2 месяца и 3 месяца. В этом случае стандартная ошибка и коэффициент автокорреляции равны:

$$SE(r_2) = \sqrt{\frac{1+2\sum_{i=1}^{k-1} r_1^2}{n}} = \sqrt{\frac{1+2(0{,}552)^2}{12}} = 0{,}366; \quad t_2 = \frac{r_{2-\rho_2}}{SE(r_2)} = \frac{0{,}26-0}{0{,}366} = 0{,}7;$$

$$SE(r_3) = \sqrt{\frac{1+2\sum_{i=1}^{k-1} r_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1+2((0{,}552)^2+(0{,}26)^2)}{12}} = 0{,}38; \quad t_3 = \frac{r_{3-\rho_3}}{SE(r_3)} = \frac{0{,}17-0}{0{,}38} = 0{,}447.$$

Во всех рассмотренных случаях t-статистика меньше критического значения $t_{кр} = 2{,}2$. Таким образом, можно сделать заключение, что коэффициент автокорреляции несущественно отличается от 0. Это значит, что данные имеют случайный характер.

Другой способ оценки коэффициента автокорреляции состоит в сравнении последнего с пределами доверительного интервала, соответствующими уровню значимости 95 %.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на один месяц равны.

Верхний предел = $t_{0{,}975{,}11} \cdot SE(r_1) = 2{,}2 \cdot 0{,}2887 = 0{,}64$.

Нижний предел = $t_{0{,}025{,}11} \cdot SE(r_1) = -2{,}2 \cdot 0{,}2887 = -0{,}64$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_1 = 0{,}552$ попадает в интервал –0,64…0,64. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции подтверждается.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на два месяца равны.

Верхний предел = $t_{0{,}975{,}11} \cdot SE(r_2) = 2{,}2 \cdot 0{,}366 = 0{,}8$.

Нижний предел = $t_{0{,}025{,}11} \cdot SE(r_2) = -2{,}2 \cdot 0{,}366 = -0{,}8$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_2 = 0{,}26$ попадает в интервал –0,8…0,8. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции подтверждается.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на три месяца равны.

Верхний предел = $t_{0{,}975{,}11} \cdot SE(r_3) = 2{,}2 \cdot 0{,}38 = 0{,}84$.

Нижний предел = $t_{0{,}025{,}11} \cdot SE(r_3) = -2{,}2 \cdot 0{,}38 = -0{,}84$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_3 = 0{,}17$ попадает в интервал –0,84…0,84. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции подтверждается.

Таким образом, делаем заключение, что рассматриваемый ряд данных случаен. Между членами ряда нет явно выраженной взаимосвязи. Можно принять, что ряд является стационарным, у которого среднее значение и дисперсия постоянные во времени.

Проверка тренда. В то же время можно полагать, что в этом ряде присутствует небольшой тренд, так как первый коэффициент автокорреляции имеет довольно большое значение, хотя и находится в доверительном интервале. Для избавления от тренда можно представить этот ряд в виде разности членов исходного ряда таблицы 7.1. Для оценки стационарности полученного ряда проведём расчёт коэффициента автокорреляции согласно данным таблицы 7.4.

Таблица 7.4

№ разн.	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{Y}$	$y_{t-1}-\bar{Y}$	$(y_t-\bar{Y})^2$	$(y_t-\bar{Y})\,(y_{t-1}-\bar{Y})$
1	20		24,54545		602,4793	
2	20	20	24,54545	24,54545	602,4793	602,4793
3	–60	20	–55,4545	24,54545	3075,207	–1 361,16
4	–10	–60	–5,45455	–55,4545	29,75207	302,4793
5	30	–10	34,54545	–5,45455	1 193,388	–188,43
6	–10	30	–5,45455	34,54545	29,75207	–188,43
7	–30	–10	–25,4545	–5,45455	647,9339	138,843
8	–10	–30	–5,45455	–25,4545	29,75207	138,843
9	10	–10	14,54545	–5,45455	211,5702	–79,3388
10	20	10	24,54545	14,54545	602,4793	357,0248
11	–30	20	–25,4545	24,54545	647,9339	–624,793

$$\bar{Y}=\sum_{t=1}^{11} y_t/11 = –50/11 = –4,54; \quad \sum_{t=1}^{11}(y_i-\bar{Y})^2 = 7\,672,727;$$
$$\sum_{t=1+1}^{12}(y_t-\bar{Y})(y_{t-1}-\bar{Y}) = –902,479.$$

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на одну разность $r_1 = -0{,}117$.

Оценим значение коэффициента автокорреляции для запаздывания на 1 разность с помощью доверительного интервала.

Верхний предел = $t_{0,975,10}\cdot SE\left(r_1\right) = 2{,}2\cdot 1/\sqrt{11} = 0{,}66$.

Нижний предел = $t_{0,025,10}\cdot SE\left(r_1\right) = -2{,}2\cdot 1\sqrt{11} = -0{,}66$

Ряд состоит из случайных чисел. Тренд отсутствует.

Проверка сезонности. Если ряд является сезонным, наблюдения в одном и том же моменте разных сезонных периодов имеют тенденцию к зависимости. Если наблюдаются ежеквартальные данные с сезонной компонентой, значения для первых кварталов имеют тенденцию быть похожими, значения для вторых кварталов также похожи и так далее. Если рассматриваются ежемесячные данные, то похожесть наблюдается через 12 месяцев. Для ежеквартальных данных значительный коэффициент автокорреляции наблюдается при времени запаздывания на 4 месяца, а для ежемесячных данных через 12 месяцев.

Пример 7.2. Положим, что продажа товара за 3 года поквартально составила (табл. 7.5). Определить наличие сезонной компоненты.

Определим коэффициент автокорреляции со сдвигом на 1 квартал

Таблица 7.5

Год	Квартал	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{Y}$	$y_{t-1}-\bar{Y}$	$(y_t-\bar{Y})^2$	$(y_t-\bar{Y})\,(y_{t-1}-\bar{Y})$
1	1	150	–	–21,66	–	469,44	–
	2	130	150	–41,66	–12,66	1 736,11	902,77
	3	110	130	–61,66	–41,66	3 802,77	2 569,44
	4	170	110	–1,66	–61,66	2,77	102,77
2	5	180	170	8,33	–1,66	69,44	–13,88
	6	150	180	–21,66	8,33	469,44	–180,55
	7	160	150	–11,66	–21,66	136,11	252,77
	8	190	160	18,33	–11,66	336,11	–213,88
3	9	200	190	28,33	18,33	802,77	519,44
	10	210	200	38,33	28,33	1 469,44	1 086,11
	11	190	210	18,33	38,33	336,11	702,77
	12	220	190	48,33	18,33	2 336,11	886,11

$\bar{Y}=\sum_{t=1}^{12} y_t/12$ = 2 060/12 = 171,66; $\sum_{t=1}^{12}(y_i-\bar{Y})^2$ = 11 966,67;

$\sum_{t=1+1}^{12}(y_t-\bar{Y})(y_{t-1}-\bar{Y})$ = 6 613,89.

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на один квартал $r_1=0{,}552$.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на один месяц равны.

Верхний предел = $t_{0{,}975{,}11}\cdot SE(r_1)=2{,}2\cdot 0{,}2887=0{,}64$.

Нижний предел = $t_{0{,}025{,}11}\cdot SE(r_1)=-2{,}2\cdot 0{,}2887=-0{,}64$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_1=0{,}552$ попадает в интервал –0,64…0,64. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции подтверждается.

Определим коэффициент автокорреляции со сдвигом на 4 квартала (табл. 7.6).

Таблица 7.6

Год	Квартал	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{Y}$	$y_{t-1}-\bar{Y}$	$(y_t-\bar{Y})^2$	$(y_t-\bar{Y})\,(y_{t-1}-\bar{Y})$
1	1	150	–	–21,66	–	469,44	–
	2	130	–	–41,66	–	1736,11	–
	3	110	–	–61,66	–	3802,77	–
	4	170	–	–1,66	–	2,77	–
2	5	180	150	8,33	–21,66	69,44	–180,556
	6	150	130	–21,66	–41,66	469,44	902,7778
	7	160	110	–11,66	–61,66	136,11	719,4444
	8	190	170	18,33	–1,66	336,11	–30,5556
3	9	200	180	28,33	8,33	802,77	236,1111
	10	210	150	38,33	–21,66	1469,44	–830,556
	11	190	160	18,33333	–11,66	336,11	–213,889
	12	220	190	48,33	18,33	2336,11	886,1111

$\bar{Y} = \sum_{t=1}^{12} y_t/12 = 2\,060/12 = 171{,}66$; $\sum_{t=1}^{12}(y_i - \bar{Y})^2 = 11\,966{,}67$;

$$\sum_{t=1+1}^{12}(y_t - \bar{Y})(y_{t-1} - \bar{Y}) = 1\,488{,}89.$$

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на один квартал $r_4 = 0{,}124$.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на один месяц равны.

$$SE(r_4) = \sqrt{\frac{1+2\sum_{i=1}^{k-1} r_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1+2((0{,}552)^2+(0{,}26)^2)+(0{,}17))^2}{12}} = 0{,}26.$$

Верхний предел = $t_{0,975,11} \cdot SE(r_4) = 2{,}2 \cdot 0{,}26 = 0{,}58$.

Нижний предел = $t_{0,025,11} \cdot SE(r_4) = -2{,}2 \cdot 0{,}26 = -0{,}58$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_4 = 0{,}124$ попадает в интервал $-0{,}58 \ldots 0{,}58$. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции подтверждается. Это значит, что сезонности в данных не наблюдается.

7.4 Выбор метода прогнозирования

Методы прогнозирования делятся на количественные и качественные. В настоящем пособии рассматриваются количественные методы. Имеется большой ряд методов прогнозирования. Приведём некоторые из них: наивный, простые средние, скользящее среднее, экспоненциальное сглаживание, линейное экспоненциальное сглаживание, квадратичное экспоненциальное сглаживание, сезонное экспоненциальное сглаживание, адаптивная фильтрация, простая регрессия, множественная регрессия, классическое разложение, экспоненциальные трендовые модели. Выбор подходящего метода зависит от свойств ряда: стационарность, тренд, сезонность, цикличность. Эти характеристики ряда можно установить с помощью автокорреляционного анализа, представленного выше.

Имеются рекомендации по выбору метода прогнозирования [5]. Проведённые исследования показали, что сложные методы не всегда дают лучшие прогнозы по сравнению с простыми методами. Эффективность различных методов прогнозирования зависит от времени прогнозирования и типа (ежемесячные, ежеквартальные, ежегодные). Одни методы дают хороший прогноз на короткий промежуток, другие на длинный. Некоторые методы дают хорошую точность прогноза для месячных данных, а другие на квартальных и годовых данных. При принятии решения о выборе метода прогнозирования необходимо провести исследования на предмет установления, насколько метод надёжен для применения в рассматриваемой задаче прогноза.

7.4.1 Определение ошибки прогноза

Разработаны методы оценки ошибок методов прогнозирования. Большинство из них состоит в усреднении функции от разности между действительным значением и его прогнозом. Такие разности называются ошибками прогноза. Для вычисления ошибок прогноза каждого момента времени используется выражение:

$$\varepsilon = Y_t - \tilde{Y}_t, \qquad (7.3)$$

где ε – ошибка прогноза;

Y_t – действительное значение в момент времени t;

$\tilde{Y}_t$ – значение прогноза в момент времени t.

Используются следующие оценки метода прогнозирования**.**

1. Среднее абсолютное отклонение:

$$\text{MAD} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\lceil Y_t - \widetilde{Y_t}\right\rceil \ . \qquad (7.4)$$

2. Среднеквадратичная ошибка:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{Y_t} - \widetilde{\boldsymbol{Y_t}})^{\boldsymbol{2}}. \qquad (7.5)$$

Этот метод следует применять в случае возникновения в отдельные моменты времени большой погрешности на фоне маленьких погрешностей.

3. Средняя абсолютная ошибка в процентах:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\left\lceil \boldsymbol{Y_t} - \widetilde{\boldsymbol{Y_t}}\right\rceil}{\boldsymbol{Y_t}} \ . \qquad (7.6)$$

Этот метод следует применять, когда необходимо знать, насколько велика ошибка прогноза в сравнении с действительной величиной.

4. Средняя ошибка в процентах:

$$\text{MPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{Y_t} - \widetilde{\boldsymbol{Y_t}})}{\boldsymbol{Y_t}}. \qquad (7.7)$$

С помощью этой ошибки можно оценить метод прогноза. Если получается большое отрицательное процентное значение, то это значит, что метод прогноза является последовательно переоценивающим. И, наоборот если получается большое положительное процентное значение, то это значит, что метод прогноза является последовательно недооценивающим.

Принятие решения о выборе соответствующего метода прогнозирования основывается в первом приближении на значение ошибки прогноза. Естественно ожидать, что правильно выбранный метод прогноза даёт маленькие ошибки.

Представленные методы оценки используются для следующего:

1. Сравнение точности различных методов.

2. Оценка надёжности методов.

3. Нахождение наилучшего метода.

Пример 7.3. Имеются данные Y_t по продажам товара за t = 12 месяцев (табл. 7.7).Выбран простой метод прогнозирования (наивный), который предполагает, что количество проданного товара $\widetilde{Y_t}$ в последующих периодах будет равно количеству товара в текущих периодах. Необходимо оценить выбранный метод прогноза.

Таблица 7.7

t	Y_t	$\widetilde{\boldsymbol{Y_t}}$	Ошибка ε_t	$\lceil\varepsilon_t\rceil$	$(\varepsilon_t)^2$	$\lceil\varepsilon_t\rceil/Y_t$	ε_t/Y_t
1	150	–	–	–	–	–	–
2	130	150	–20	20	400	0,15	–0,15
3	110	130	–20	20	400	0,18	–0,18
4	170	110	60	60	3 600	0,35	0,35
5	180	170	10	10	100	0,06	0,06
6	150	180	–30	30	900	0,2	–0,2
7	160	150	10	10	100	0,06	0,06
8	190	160	30	30	900	0,16	0,16
9	200	190	10	10	100	0,05	0,05
10	210	200	10	10	100	0,05	0,05
11	190	210	–20	20	400	0,11	–0,11
12	220	190	30	30	900	0,14	0,14
Сумма			70	250	7 900	1,51	0,23

Для оценки метода вычислим ошибки прогноза по выражениям 7.4, 7.5, 7.6, 7.7:

$$\text{MAD} = \frac{1}{n} = \frac{250}{11} = 22{,}73;$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \widetilde{Y_t})^2 = \frac{7900}{11} = 718{,}18;$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\lceil Y_t-\widetilde{Y_t}\rceil}{Y_t} = \frac{1{,}51}{11} = 0{,}14;$$

$$\text{MPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{(Y_t-\widetilde{Y_t})}{Y_t} = \frac{0{,}23}{11} = 0{,}02.$$

Значение MAD = 22,73 свидетельствует, что каждый прогноз отклоняется от реального среднего на 22,73. Маленькие значения MAPE и MPE указывают на то, что метод прогноза не является систематически недооцененным и переоцененным. Так как рассматриваемый метод прогноза даёт большое значение MSE, его следует сравнить с другими методами прогноза.

7.4.2 Оценка адекватности выбранного метода прогноза

Прежде чем начать использовать метод прогноза необходимо выяснить следующее:

1. Являются ли ошибки прогноза случайными. Это можно установить путём расчёта коэффициента автокорреляции ряда ошибок прогноза.

2. Являются ли ошибки нормально распределёнными.

3. Имеют ли оценки коэффициентов автокорреляции t-значения выше критических.

4. Является ли метод прогноза простым.

Считается, что метод прогноза адекватно описывает имеющиеся данные временного ряда, если ошибки прогноза имеют случайный характер, наличие которого можно установить с помощью автокорреляционного анализа. Проиллюстрируем определение коэффициентов автокорреляции на примере ряда из таблицы 7.7, в которой отражены результаты прогноза на основе наивной модели. На основе этих данных создадим ряд ошибок этой модели в сравнении с действительными данными и представим их в таблице таблица 7.8.

Таблица 7.7

№ ошибки	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{Y}$	$y_{t-1} - \bar{Y}$	$(y_t - \bar{Y})^2$	$(y_t - \bar{Y})\,(y_{t-1} - \bar{Y})$
1	–20	–	–24	–	576	–
2	–20	–20	–24	–24	576	576
3	60	–20	56	–24	3136	–1 344
4	10	60	6	56	36	336
5	–30	10	–34	6	1 156	–204
6	10	–30	6	–34	36	–204
7	30	10	26	6	676	156
8	10	30	6	26	36	156
9	10	10	6	6	36	36
10	–20	10	–24	6	576	–144

$$\bar{Y} = \sum_{t=1}^{10} y_t/10 = 40/10 = 4; \quad \sum_{t=1}^{10}(y_i - \bar{Y})^2 = 6\,840;$$
$$\sum_{t=1+1}^{10}(y_t - \bar{Y})(y_{t-1} - \bar{Y}) = –636.$$

Коэффициент автокорреляции со сдвигом на один период $r_1 = -0{,}09$.

Пределы доверительного интервала для запаздывания на один месяц равны.

Верхний предел = $t_{0{,}975{,}10} \cdot SE\left(r_1\right) = 2{,}2 \cdot 1/\sqrt{10} = 0{,}7$.

Нижний предел = $t_{0{,}025{,}10} \cdot SE\left(r_1\right) = -2{,}2 \cdot 1/\sqrt{10} = -0{,}7$.

Расчётный коэффициент автокорреляции $r_1 = -0{,}09$ попадает в интервал –0,7…0,7. Значит, гипотеза о равенстве 0 коэффициента автокорреляции ошибок подтверждается.

Выполним подобным образом расчёт коэффициентов автокорреляции ошибок для периодов запаздываний 2, 3, 4. Они соответственно равны – 0,б1; 0,1;

0,26. Согласно этим коэффициентам рассчитаем Q-статистику и оценим её по χ^2-распределению с уровнем значимости $\propto$ = 0,05 при 4 – 1 = 3 степенями свободы.

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k^2}{n-k} = 10(10+2)\left(\frac{0{,}09^2}{10-1}+\frac{0{,}61^2}{10-2}+\frac{0{,}1^2}{10-3}+\frac{0{,}26^2}{10-4}\right) = 7{,}21.$$

Коэффициент согласия $\chi^2_{0,05;3}$ = 7,8 (Прил. 3). Это означает, что ошибки выбранного метода прогноза имеют случайный характер и сам метод адекватно выполняет прогноз. Этот метод можно принять для проведения прогноза. В процессе накопления данных этот метод может оказаться неприемлемым для проведения прогноза.

Глава 8. Принятие решения в нейлоровской диагностирующей системе

Разработанная К. Нейлором концепция построения экспертных систем (ЭС) основана на байесовской схеме пересчёта вероятностей событий после получения дополнительной информации [5]. Один из основных принципов, заложенных в ЭС, состоит в следующем: введение понятия цен свидетельств в пользу выдвинутой гипотезы. Введение понятия цены свидетельства позволяет значительно улучшить диалог пользователя и ЭС.

8.1 Цены свидетельств

В базе знаний ЭС имеется множество гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, множество свидетельств $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Каждой гипотезе соответствует свой набор свидетельств.

Согласно прямой цепочке рассуждений необходимо перебрать весь список свидетельств, а затем принимается решение о выборе наиболее вероятной гипотезе. При таком подходе потребуется большое количество времени, так как не известна гипотеза, на которой остановится диалог пользователя и ЭС. Кроме того, в этом случае задаваемые вопросы выглядят бессистемно и неупорядоченно. При обратной цепочке рассуждений перебор осуществляется не во множестве свидетельств E, а во множестве гипотез H. В этом случае поведение ЭС выглядит более целенаправленно при проверке конкретной гипотезы. В то же время и в этом случае также не известно в каком порядке перебирать гипотезы H_i.

В настоящем пособии рассматривается подход улучшения взаимодействия пользователя и ЭС посредством назначения цены каждого свидетельства в процессе логического вывода. В этом случае цены свидетельств пересчитываются в зависимости от текущих значений ответов и в дальнейшем пользователь получает наиболее важные вопросы. В качестве цены свидетельства E используется выражение:

$$\mathrm{C(E)} = \sum_i^n |P(H_i|E) - P(H_i|\bar{E})|, \qquad (8.1)$$

где

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)\cdot P(H_i)}{P(E)};\ P(E) = P(E|H_i)\cdot P(H_i) + (E|\overline{H_i})\cdot P(\overline{H_i});$$

$$P(H_i|\bar{E}) = \frac{(1 - P(E|H_i)\cdot P(H_i)}{1 - P(E)}.$$

Цена свидетельства представляет собой сумму максимально возможных изменений вероятностей по всем гипотезам.

Для задания пользователю вопроса необходимо выбрать свидетельство с наибольшей ценой. После получения ответа пользователя вероятности Р(Н) заменяются на Р(Н|Е). В процессе вывода условные вероятности $P(E|H)$, $(E|\bar{H})$ остаются неизменными. Меняется только массив $P(H_i)$.

Из формулы Байеса следует, что

$$\lim P(H|E) = 0 \text{ при } P(H) \to 0;$$

$$\lim P(H|\bar{E}) = 0 \text{ при } P(H) \to 0.$$

Это означает, что цены свидетельств, относящихся к маловероятным гипотезам уменьшаются. Поэтому пользователь обращается к свидетельствам с высокой ценой, которая приведёт его к более вероятной гипотезе.

8.2 Структура базы знаний

Для выполнения расчётов цен свидетельств необходимо сформировать базу знаний, содержащую записи знаний о гипотезах и свидетельствах о гипотезах.

Форма записи для гипотезы H (формат 1) имеет следующий вид:

$$\text{НАЗВ. ГИП.}; P; S; (j_1; p_1^+; p_1^-) \dots ; (j_s; p_s^+; p_s^-).$$

Здесь НАЗВ. ГИП – название гипотезы H; $P = P(H)$ – априорная вероятность текущей гипотезы; S – число свидетельств, относящихся к данной гипотезе; j_k – номер свидетельства; $p_{Jk}^+ = P(E_{Jk}|H)$ – вероятность выполнения свидетельства для данной гипотезы; $p_{Jk}^- = P(E_{Jk}|\bar{H})$ – вероятность выполнения свидетельства при неверности данной гипотезы.

Форма записи свидетельства имеет следующий вид:

№_свидетельства; Название_свидетельства; Задаваемый вопрос.

8.3 Пример определения цены свидетельств

Проиллюстрируем использование цены свидетельств при построении ЭС по диагностике электрического утюга, принцип работы которого основан на прохождении электрического тока по спирали с высоким сопротивлением. В результате чего, согласно закону электротехники, спираль нагревается. В процессе эксплуатации утюга он может сломаться. Перед выполнением ремонтных работ необходимо установить диагностику поломки. Наиболее эффективно её можно выполнить с помощью ЭС, работа которой должна быть интуитивно понятна пользователю. Одним из способов для достижения комфортной работы пользователя является определение текущей цены свидетельств.

Для выполнения расчётов цен свидетельств сформируем базу знаний для электрического утюга согласно формам 1 и 2.

Описание гипотез Г.

1. Наличие электричества 0,99; 2 (1; 0,8; 0), (2; 0,8; 0).

2. Целостность провода питания 0,8; 3 (1; 0,8; 0), (2; 0,7; 0), (3; 0,7; 0,1).

3. Исправность теплового реле 0,9; 3 (1; 0,8; 0), (2; 0,7; 0,1), (3; 0,9; 0,1).

4. Исправность нагревательного элемента 0,9; 2 (1; 0,8; 0) (2; 0,8; 0,1) (3; 0,7; 0,1).

Описание свидетельств Е.

1. Горит лампочка на ручке утюга.

2. Нагрев нижней поверхности утюга.

3. Регламентный технический осмотр утюга.

Для расчёта цен свидетельств воспользуемся выражением 8.1, которое можно записать в таком виде:

$$C(E_J)=\sum_i^n \left|\frac{P(E_J|H_i)P(H_i)}{P(E_J|H_i)\cdot P(H_i)+(E_J|\overline{H_i})\cdot P(\overline{H_i})}-\frac{(1-P\left(E_J\middle|H_i\right))\cdot P(H_i)}{1-P(E_J|H_i)\cdot P(H_i)+(E_J|\overline{H_i})\cdot P(\overline{H_i})}\right|, \quad (8.2)$$

где j – номер свидетельства, $P(E_J|H_i)=p_j^+$, $P(E_J|\overline{H}_i)=p_j^-$.

Для данного примера: E_1 – горит лампочка на ручке утюга; E_2 – нагрев нижней поверхности утюга; E_3 – регламентный технический осмотр утюга.

Первое свидетельство E_1 соотносится с четырьмя гипотезами H. Поэтому для определения цены свидетельства по выражению 8.2 используется сумма из четырёх слагаемых.

$$C(E_1)=\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}99}{0{,}8\cdot 0{,}99+0\cdot 0{,}01}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}99}{1-0{,}8\cdot 0{,}99+0\cdot 0{,}01}\right|+\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}8}{0{,}8\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}8}{1-0{,}8\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}\right|+$$
$$+\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}9+0*0{,}1}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}9}{1-0{,}8\cdot 0{,}9+0\cdot 0{,}1}\right|+\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}9+0\cdot 0{,}1}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}9}{1-0{,}8\cdot 0{,}9+0\cdot 0{,}1}\right|=1{,}31.$$

Подобным способом найдём цены свидетельств: $C(E_2)$, $C(E_3)$.

$$C(E_2)=\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}8}{0{,}8\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}8}{1-0{,}8\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}\right|+\left|\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}-\frac{(1-0{,}7)\cdot 0{,}8}{1-0{,}7\cdot 0{,}8+0\cdot 0{,}2}\right|+$$
$$+\left|\frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}-\frac{(1-0{,}7)\cdot 0{,}9}{1-0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}\right|+\left|\frac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}-\frac{(1-0{,}8)\cdot 0{,}9}{1-0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}\right|=1{,}37.$$

$$C(E_3)=\left|\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}2}-\frac{(1-0{,}7)\cdot 0{,}8}{1-0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}2}\right|+\left|\frac{0{,}9\cdot 0{,}9}{0{,}9\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}-\frac{(1-0{,}9)\cdot 0{,}9}{1-0{,}9\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}\right|+$$
$$+\left|\frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}-\frac{(1-0{,}7)\cdot 0{,}9}{1-0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}1}\right|=1{,}26.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере первое свидетельство имеет цену 1,31. У второго и третьего цены свидетельства соответственно равны 1,37 и 1,26. Наибольшую цену имеет второе свидетельство. Получая такую информацию, пользователю следует обратить внимание на нагрев нижней поверхности утюга. После положительного или отрицательного ответа ЭС пересчитает массив априорных вероятностей $P(H)$, заменяя её условной вероятностью $P(H|E)$.

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E|H)\cdot P(H)+P(E|\bar{H})P(\bar{H})}. \tag{8.3}$$

Рассчитаем, согласно выражению 8.3, условную вероятность для первой гипотезы: $P(H_1|E_2) = \frac{0,8\cdot 0,99}{0,8\cdot 0,99+0\cdot 0,01} = 1$. Пользователь установил нагрев нижней поверхности утюга. Подобным образом вычислим условные вероятности для остальных гипотез: $P(H_2|E_2) = \frac{0,8\cdot 0,8}{0,8\cdot 0,8+0\cdot 0,2} = 1$; $P(H_3|E_2) = \frac{0,7\cdot 0,9}{0,7\cdot 0,9+0,1\cdot 0,1} = 0,98$; $P(H_4|E_2) = \frac{0,8\cdot 0,9}{0,8\cdot 0,9+0,1\cdot 0,2} = 0,97$.

Для последующих расчетов используем следующие априорные вероятности гипотез: $P(H_1) = P(H_1|E_2) = 1$; $P(H_2) = P(H_2|E_2) = 1$; $P(H_3) = P(H_3|E_2) = 0,98$; $P(H_4) = P(H_4|E_2) = 0,97$. В данном случае дальнейшие расчеты проводить не имеет смысла, так как полученные вероятности гипотез близки к 1. На основании последних расчётов принимается решение: утюг в настоящий момент находится в работоспособном состоянии. При его последующей эксплуатации возможны отказы и, естественно, вероятности гипотез будут уменьшаться. Уменьшение вероятности гипотез будет наблюдаться в случаях, когда пользователь зафиксирует не выполнение какого-либо свидетельства в пользу гипотезы.

Библиографический список

1. Основы теории систем и системный анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа : refy.ru/56/214424-osnovy-teorii-sistem-i-sistemnyy-analiz.html, свободный. – Заглавие с экрана.

2. Гайдес, М. А. Общая теория систем / М. А. Гайдес. – М. : Глобус-Пресс, 2005. – 2001 с.

3. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М. : Вильямс, 2005. – 912 с. : ил.

4. Семериков, А. В. Системный анализ в менеджменте [Текст] : методические указания/ А. В. Семериков, В. И. Серкова. – Ухта : УГТУ, 2015. – 95 с.

5. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : Наука, 2005. – 416 с. : ил.

6. Ханк, Д. Э. Бизнес-прогнозирование / Д. Э. Ханк, А. Дж. Райтс, Д. У. Уичерн. – М. : Вильямс, 2003. – 656 с.

7. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с. : ил.

8. Учиматчасть. Задачи оптимизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.uchimatchast.ru/, свободный. – Заглавие с экрана.

9. Институт биотехнологии, пищевой и химической инженерии АлтГТУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://www.chem-astu.ru/science/reference/t-statistic.html свободный. – Заглавие с экрана.

10. Математическая статистика для психологов. Расчёт и анализ данных [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://statpsy.ru/pearson/tablica-pirsona/ свободный. – Заглавие с экрана.

11. Видео лекции по эконометрике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://univer-nn.ru, свободный. – Заглавие с экрана.

Задания для контрольной работы

В контрольной работе предлагается выполнить следующее:

1. Построить модель системы.
2. Разработать стратегию управления системой.

Варианты заданий

Варианты заданий выбираются по следующему алгоритму:

Три последние цифры зачётной книжки делятся на 25, остаток от целочисленного деления будет Вашим вариантом. Например, 123 = 25 · 4 + 23. Вариант работы – 23.

1. Автолюбитель давно мечтал приобрести какую-либо машину для работы в службе такси, и в итоге он приобрёл подержанный автомобиль. Теперь он планирует периодический профилактический ремонт своего «железного друга». При этом состояние машины оценивается по трёхбалльной шкале как отличное (1), хорошее (2) и удовлетворительное (3). Автолюбитель полагает, что продуктивность его работы в текущем году будет зависеть от состояния его авто в предыдущем году. Таким образом, перед будущим таксистом встал вопрос, проводить раз в год профилактический ремонт или не проводить его, ведь поломка автомобиля лишит водителя возможности работы на некоторое время и ему придётся проводить капитальный ремонт.

Ниже представлены переходные вероятности, соответствующие каждому из трёх состояний автомобиля. Необходимо найти оптимальную стратегию профилактического ремонта для последующих трёх лет с помощью трёх методов оценивания.

Матрицы вероятностей

$$P_1 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 2 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$P_2 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 3 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{array}$$

$$P_3 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 2 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 3 & 0{,}4 & 0{,}45 & 0{,}15 \end{array}$$

Матрицы доходов

$$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 10 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$R_2 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 9 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -2 \end{array}$$

$$R_3 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 8 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \end{array}$$

2. Компания решила повысить спрос к своей продукции, для этого она решила, разместить рекламу в одном из трёх средств массовой информации: радио (матрица 1), телевидение (матрица 2) и газета (матрица 3). Предположим, что существенных затрат на рекламу компания не понесёт, поэтому их мы не учитываем.

Компания оценивает недельный объём сбыта своей продукции по трёхбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Ниже представлены переходные вероятности, соответствующие каждому из трёх средств массовой информации. Найти оптимальную стратегию рекламы для последующих трёх недель с помощью трёх методов оценивания.

Матрица 1						
0,200	0,400	0,400		300	500	450
0,600	0,200	0,200		250	350	700
0,100	0,200	0,700		200	250	500

Матрица 2						
0,200	0,500	0,300		200	300	450
0,000	0,700	0,300		150	300	250
0,000	0,200	0,800		500	600	700

Матрица 3						
0,700	0,200	0,100		310	510	710
0,300	0,600	0,100		250	400	650
0,100	0,700	0,200		110	400	650

3. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях тёплой погоды предприятие реализует 1 000 костюмов и 2 300 платьев, а при прохладной погоде – 1 400 костюмов и 700 платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны 20, а платья – 5 рублям, цена реализации соответственно равна 40 рублей и 12 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

4. Фирма планирует свою работу на 3 месяца по продаже оргтехники. Рассматриваются 2 варианта, а также вариант не предпринимать никаких действий.

Варианты:

1. Бесплатная сборка при покупке компьютера.
2. Бесплатная доставка.
3. Не предпринимать ничего.

Месячные затраты на каждый из вариантов оценивается как, 5, 20 и 0 тыс. руб. соответственно. Кроме того, фирма оценивает месячный объём продаж по трёхбалльной шкале как:

1) удовлетворительный;
2) хороший;
3) отличный.

Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому из трёх вариантов:

Бесплатная сборка компьютера				
		1	2	3
$P_1 =$	1	0,5	0,3	0,2
	2	0,2	0,5	0,3
	3	0,1	0,2	0,7

Бесплатная доставка				
		1	2	3
$P_2 =$	1	0,3	0,5	0,2
	2	0	0,4	0,6
	3	0	0,2	0,8

		1	2	3
$R_1 =$	1	70	100	110
	2	65	90	105
	3	60	85	100

		1	2	3
$R_2 =$	1	90	110	130
	2	85	100	130
	3	80	98	125

Не предпринимать ничего				
		1	2	3
$P_3 =$	1	0,3	0,3	0,4
	2	0,1	0,6	0,3
	3	0,05	0,25	0,7

		1	2	3
$R_3 =$	1	70	90	100
	2	65	95	110
	3	60	85	100

Найти оптимальную стратегию стимуляции сбыта для последующих 3 месяцев.

5. Компания хочет продавать сотовые телефоны одной из трёх фирм Siemens, Sony, Samsung. Компания оценивает объём сбыта своей продукции по трёхбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие недельные доходы по каждой компании:

	0,5	0,3	0,2	200	700	300
Siemens	0,7	0,2	0,1	100	250	450
	0,6	0,2	0,2	600	100	300

	0,5	0,4	0,1	1 000	700	800
Sony	0,2	0,3	0,1	1 200	900	850
	0,8	0,1	0,1	700	500	900

	0	0,6	0,4	500	200	150
Samsung	0,1	0,7	0,2	300	800	550
	0,6	0,3	0,1	800	1 100	600

Найти оптимальную стратегию продажи сотовых телефонов для трёх недель.

6. В статистическом отделе туристической фирмы решили проверить, в какую из трех стран продавать путевки выгодней. Для оценки они выбрали Таиланд, Израиль и Грецию. Фирма оценивает объем сбыта путевок по трехбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие недельные доходы по каждой стране:

	0,5	0,3	0,2	200	700	300
Греция	0,7	0,2	0,1	100	250	450
	0,6	0,2	0,2	600	100	300

	0,5	0,4	0,1	1 000	700	800
Израиль	0,2	0,3	0,1	1 200	900	850
	0,8	0,1	0,1	700	500	900

	0	0,6	0,4	500	200	150
Таиланд	0,1	0,7	0,2	300	800	550
	0,6	0,3	0,1	800	1 100	600

Найти оптимальную стратегию продажи туристических путёвок для трёх недель.

6. Фирма может за небольшую плату (10 руб.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчётов на ПЭВМ. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов. Стоимость аренды машинного времени составляет 80 руб. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ).

Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. Определить число сотрудников фирмы, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

8. Фирма (магазин) планирует свою работу на квартал (3 месяца) по сбыту продукции. Рассматриваются 2 варианта стимуляции покупной способности покупателя, а также вариант не предпринимать никаких действий, т.е. избежать дополнительных затрат.

Варианты:

1. Бесплатная доставка покупки.
2. Подарок при покупке.
3. Не предпринимать ничего.

Месячные затраты на каждый из вариантов оценивается как 5, 20 и 0 тыс. руб. соответственно. Кроме того, фирма оценивает месячный объём сбыта продукции по трёхбалльной шкале как:

1) удовлетворительный;
2) хороший;
3) отличный.

Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому из трёх вариантов стимуляции сбыта:

Бесплатная доставка покупки

$P P_1 =$

	1	2	3
1	0,5	0,3	0,2
2	0,2	0,5	0,3
3	0,1	0,2	0,7

$R R_1 =$

	1	2	3
1	70	100	110
2	65	90	105
3	60	85	100

Подарок при покупке

$PP_2 =$

	1	2	3
1	0,3	0,5	0,2
2	0	0,4	0,6
3	0	0,2	0,8

$RR_2 =$

	1	2	3
1	90	110	130
2	85	100	130
3	80	98	125

Не предпринимать ничего

$PP_3 =$

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,1	0,6	0,3
3	0,05	0,25	0,7

$RR_3 =$

	1	2	3
1	70	90	100
2	65	95	110
3	60	85	100

Найти оптимальную стратегию стимуляции сбыта для последующих 3 месяцев.

9. Компания хочет продавать сотовые телефоны одной из трёх фирм Siemens, Sony, Samsung. Компания оценивает объем сбыта своей продукции по трёхбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие недельные доходы по каждой компании:

	0,5	0,3	0,2	200	700	300
Siemens	0,7	0,2	0,1	100	250	450
	0,6	0,2	0,2	600	100	300
	0,5	0,4	0,1	1 000	700	800
Sony	0,2	0,3	0,1	1 200	900	850
	0,8	0,1	0,1	700	500	900

	0	0,6	0,4	500	200	150
Samsung	0,1	0,7	0,2	300	800	550
	0,6	0,3	0,1	800	1 100	600

Найти оптимальную стратегию продажи сотовых телефонов для трёх недель.

10. Издательство «Вильямс» начинает выпуск новой серии книг по 3 направлениям: экономическая теория, информационные технологи, математический анализ. Месячные затраты на выпуск оцениваются как 600, 850 и 1 200 тыс. руб. Объём сбыта издательство оценивает: удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому направлению. Найти оптимальную стратегию продажи для трёх недель.

	0,2	0,5	0,3	800	740	600
Экономическая теория	0,4	0,2	0,4	600	780	900
	0,1	0,3	0,6	840	950	700

	0,6	0,1	0,3	900	1 150	1 050
Информационные технологии	0,2	0,6	0,2	1 200	1 350	1 000
	0,2	0,1	0,7	950	950	850
	0,2	0,7	0,1	1 900	1 450	1 750
Математический анализ	0,2	0,5	0,3	1 200	1 350	1 550
	0,1	0,8	0,1	2 950	1 600	1 850

11. Косметическая компания решила начать производство одной из новой линии косметики: для детей, для мужчин и для подростков. Месячные затраты на производство этой продукции оценивается в 600, 850 и 1 200 денежных единиц. Компания оценивает месячный объём сбыта своей продукции по трёхбалльной шкале, как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому направлению. Найти оптимальную стратегию продажи.

	0,2	0,5	0,3	800	740	600
Косметика для детей	0,4	0,2	0,4	600	780	900
	0,1	0,3	0,6	840	950	700
	0,6	0,1	0,3	900	1 150	1 050
Косметика для мужчин	0,2	0,6	0,2	1 200	1 350	1 000
	0,2	0,1	0,7	950	950	850
	0,2	0,7	0,1	1 900	1 450	1 750
Косметика для подростков	0,2	0,5	0,3	1 200	1 350	1 550
	0,1	0,8	0,1	2 950	1 600	1 850

12. Телеканал ТНТ для повышения своего рейтинга среди остальных каналов решил провести рекламную акцию по поводу появления нового реалити-шоу «Большой брат». Для этого PR-директор решает разместить рекламу в одном из трёх средств массовой информации: радио, газета, телевидение. Предположим, что существенных затрат на рекламу компания не понесёт, поэтому мы их не учитываем. Телеканал оценивает свой рейтинг в конце каждой недели по 3-балльной шкале: удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3) с помощью анкетирования 500 человек. Известны переходные вероятности и соответствующие доходы по каждому направлению. Найти оптимальную стратегию рекламы.

	0,3	0,5	0,2	200	350	380
Радио	0,4	0,4	0,2	450	180	360
	0,2	0,7	0,1	350	200	400
	0,8	0,1	0,1	300	220	360
Газета	0,4	0,3	0,3	560	350	400
	0,5	0,1	0,4	250	480	550
	0,3	0,4	0,3	660	330	200
Телевидение	0,2	0,6	0,2	380	450	500
	0,3	0,5	0,2	250	400	550

13. Землевладелец на знойном юге решает вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке томатов. Урожайность колеблется в зависимости от погоды от 500 до 600 центнеров, закупочная цена стабильна и равна 5 руб./кг. Рабочий за сезон собирает 20 центнеров, получая 1,2 руб./кг за уборку и 280 руб. для оплаты стоимости проезда. Затраты на обеспечение рабочих жильём составляют 300 руб. и не зависят от численности.

14. Издательский дом «Русский детектив» планирует выпустить в тираж книгу одного из авторов, а именно И. И. Иванова, П. П. Петрова, С. С. Сидорова. Издательский дом оценивает месячный объём сбыта по трёхбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Известны переходные вероятности и соответствующие доходы по каждой из трёх книг.

	0,3	0,5	0,2		50	70	100
Иванов	0,4	0,4	0,7		30	50	70
	0,2	0,7	0,6		100	150	200

	0,8	0,1	0,32		150	200	300
Петров	0,4	0,3	0,5		200	300	400
	0,5	0,1	0,2		250	300	350
	0,3	0,2	0,3		70	100	150
Сидоров	0,2	0,2	0,2		30	50	70
	0,3	0,6	0,2		150	250	300

Найти оптимальную стратегию выпуска книг.

15. Вариант содержит два задания.

1. На фондовой бирже можно вложить 50 000 $ в 3 компании: *A*, *B* и *C*. Акции компаний:

• *A* могут принести 30 % прибыли в условиях повышения котировок, 20 % – в условиях постоянных котировок, 10 % – в условиях понижения котировок;

• *B* могут принести 35 % прибыли в условиях повышения котировок, 25 % – в условиях постоянных котировок, 5 % – в условиях понижения котировок;

• *C* могут принести 50 % прибыли в условиях повышения котировок, 10 % – в условиях постоянных котировок, и обесцениться на 30 % в условиях понижения котировок;

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 30 %, постоянство котировок – 55 %, а понижение – 15 %. Специалист по рынку выскажется «за»: при повышении котировок с вероятностью 80 %, при постоянстве котировок – 30 %, а при понижении – 20 %.

Таким образом, задачу выбора решения можно сформулировать следующим образом:

- Найти прибыль при различных мнениях эксперта.
- Если мнение специалиста «за», акции какой компании следует покупать?
- Если мнение специалиста «против», акции какой компании следует покупать?

2. В городе Ухте предполагается открыть детскую футбольную школу, в которой будут тренировать юных футболистов. Предполагается, что число занимающихся детей может быть 50, 80, 110, 140. Стоимость футбольной школы будет минимальной, поскольку она строится для удовлетворения только точно определённых небольших потребностей. Отклонения в сторону уменьшения или увеличения относительно идеальных уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные размеры футбольной школы (на 50, 80, 110, 140 детей), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее количество детей.

Матрица стоимостей (в тысячах долларов), относящаяся к описанной ситуации, будет выглядеть следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	4	9	16	26
a_2	7	14	18	29
a_3	23	16	15	24
a_4	27	21	17	14

16. Вариант содержит два задания.

1. На фондовой бирже можно вложить 80 000 долларов в 3 компании: Газпром (A), Лукойл (B), СМН (C). Акции компаний:

- Газпром могут принести 70 % прибыли в условиях повышения котировок, 10 % – при понижения и 15 % – в условиях постоянства котировок;
- Лукойл – соответственно 50 %, 15 % и 25 %;
- СМН – 60 %, 20 % и 30 %.

Прогнозируется повышение котировок с вероятностью 35 %, постоянство котировок – 40 %, а понижение – 25 %. Специалист по бирже высказывается «за»: при повышении котировок с вероятностью 60 %, при постоянстве котировок – 30 %, а при понижении – 25 %.

Таким образом, можно сформулировать задачу следующим образом:

➢ Найти прибыль при различных мнениях эксперта.

➢ Если мнение эксперта «за», акции какой компании следует покупать – A, B или C?

➢ Если мнение эксперта «против», то акции какой компании следует покупать – A, B или C?

2. Частный предприниматель решает открыть DVD-кинотеатр. Он решает, что число посадочных мест может быть 50, 70, 90 или 110. Стоимость кинотеатра будет минимальной, поскольку он строится для удовлетворения только точно определённых потребностей. Отвлечения от уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные количества посадочных мест (на 50, 70, 90 и 110 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее количество людей.

Матрица стоимостей (в тысячах долларов), относящаяся к описанной ситуации, будет выглядеть следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	12	10	6	8
a_2	4	14	20	7
a_3	10	8	15	5
a_4	5	6	14	18

17. Вариант содержит два задания.

1. На фондовой бирже можно вложить 40 000 долларов в 3 компании: Газпром (A), ТэбукНефть (B), Лукойл (C). Акции компаний:

• Газпром могут принести 50 % прибыли в условиях повышения котировок, 15 % – в условиях понижения котировок, 5 % – в условиях постоянных котировок;

• ТэбукНефть – 70 % прибыли в условиях повышения котировок, 5 % в условиях постоянных котировок и обесцениться на 30 % в условиях понижения котировок;

• Лукойл – 60 % в условиях повышения котировок, 20 % в условиях постоянных котировок, 10 % в условиях понижения котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 25 %, постоянство котировок – 55 %, а понижение – 20 %. Специалист по рынку выскажется «за»: при повышении котировок с вероятностью 70 %, при постоянстве котировок – 40 %, а при понижении – 10 %. Какова прибыль при различных мнениях специалиста? Если мнение специалиста «за», то акции какой компании следует покупать? Если мнение специалиста «против», то акции какой компании следует покупать?

2. Ухтинский государственный технический университет подбирает место для строительства собственного бассейна. Ректор рассчитывает, что бассейн сможет принять 100, 150, 200 или 300 человек. Стоимость бассейна будет минимальной, поскольку ректор решил удовлетворить только точно определённые потребности. Отвлечения от уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные размеры бассейна (на 100, 150, 200 и 300 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее количество людей.

Матрица стоимостей (в тыс. долларов) будет выглядеть следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	22	44	66	88
a_2	11	33	55	77
a_3	10	60	30	80
a_4	50	20	70	40

Определить стратегию поведения для получения минимальных расходов.

18. В сельхозрайоне с посевной площадью 1 430 га решено построить элеватор по одному из типовых проектов на 20, 30, 40, 50 или 60 тыс. центнеров зерна. Привязка проекта обойдётся в 37 тыс. руб. Стоимость материалов и оборудования для элеватора мощности 20 тыс. равна 60 тыс. руб. и растёт на 10 % с ростом мощности на 10 тыс. Затраты на эксплуатацию элеватора на 20 тыс. равны 10 тыс. руб. и растут на 10 тыс. с ростом мощности на 10 тыс. За хранение зерна на счёт элеватора вносится плата 10 руб. за центнер. Урожайность колеблется от 14 до 20 ц/га. Какой элеватор необходимо строить?

19. Вариант содержит два задания.

1. На фондовой бирже можно вложить 100 тыс. рублей в 3 компании: «СМН», «Севергазпром» и «ЛУКОЙЛ». Акции компаний:

- «СМН» могут принести 60 % прибыли в условиях повышенных котировок, 15 % в условиях постоянных котировок, 5 % в условиях пониженных котировок.
- «Севергазпром» – 80 % прибыли в условиях повышенных котировок, 20 % в условиях постоянных котировок, 10 % в условиях пониженных котировок.
- «ЛУКОЙЛ» – 70 % прибыли в условиях повышения котировок, 25 % в условиях постоянных котировок, 15 % в условиях пониженных котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 40 %, постоянство котировок – 50 %, а понижение – 10 %.

Квалифицированный специалист по рынку выскажется «за»: при повышении котировок с вероятностью 60 %, при постоянстве – 80 %, а при понижении – 20 %.

Какова прибыль при различных мнениях специалиста?

2. В некотором городе планируется открыть новый кинотеатр «Звезда». Организаторы посчитали, что людей может быть 150, 300, 400 и 500 в зависимости от того, какой это день недели. Стоимость кинотеатра будет максимальной, поскольку организаторы хотят, чтобы посетители оставались очень довольными после посещения кинотеатра. Отклонение от уровней потребностей влечёт за собой дополнительные затраты. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные размеры развлекательного комплекса (на 150, 300, 400 и 500 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее количество людей.

Матрица стоимостей (в млн. рублей) будет выглядеть следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	13	23	7	10
a_2	22	16	9	12
a_3	21	8	17	14
a_4	12	20	8	9

Определить стратегию поведения для получения наибольшей прибыли.

20. Вариант содержит два задания.

Фирма по производству мониторов планирует в будущем году выпускать либо жидкокристаллические – ЖК, либо электроннолучевые – ЭЛ мониторы. На это она готова потратить 1 000 000 $. Вероятность того, что спрос на мониторы повысится – 0,2, останется прежним – 0,5, и понизится – 0,3. Если спрос повысится, то производство ЖК-мониторов принесёт 600 000 $ дохода, ЭЛ – 250 000 $, если останется прежним, ЭЛ-мониторы принесут – 20 000 $, ЖК принесут убыток – 70 000 $. Если спрос понизится, то убыток от ЖК-мониторов составит 300 000 $, а от ЭЛ – 80 000 $. Отдел прогнозирования высказывается за производство при повышении спроса с вероятностью 0,85, при постоянном спросе – 0,6, при понижении спроса – 0,2. Какие мониторы выпускать при различных мнениях прогнозистов?

2. Ухтинский государственный технический университет планирует построить собственный бассейн. Ректор рассчитывает, что бассейн сможет принять 100, 150, 200 или 300 человек. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные размеры бассейна (на 100, 150, 200 и 300 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее количество людей.

Матрица доходов (в тыс. долларов) будет выглядеть следующим образом:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	22	44	66	88
a_2	11	33	55	77
a_3	10	60	30	80
a_4	50	20	70	40

Определить стратегию поведения для получения максимальных доходов.

21. Фирма решила открыть магазин оргтехники. У неё 4 альтернативы:

- a_1 – продавать фирменные системные блоки
- a_2 – продавать системные блоки в базовых комплектациях
- a_3 – продавать системные блоки с возможностью конфигурирования
- a_4 – продавать комплектующие.

Магазин могут посещать люди различных возрастных групп: до 18 (s_1), 18–30 (s_2), 30–50 (s_3), после 50 (s_4). В зависимости от рода магазина и возрастной группы покупателей можно ожидать следующий недельный доход (в тыс. руб.)

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	10	15	12	5
a_2	1	4	15	16
a_3	8	18	15	3
a_4	1	3	10	9

Определить стратегию поведения для получения наибольшей прибыли.

22. Вариант содержит два задания.

1. На фондовой бирже можно вложить 100 тыс. рублей в 3 компании: «СМН», «Севергазпром» и «ЛУКОЙЛ». Акции компаний:

- «СМН» могут принести 60 % прибыли в условиях повышенных котировок, 15 % в условиях постоянных котировок, 5 % в условиях пониженных котировок.
- «Севергазпром» – 80 % прибыли в условиях повышенных котировок, 20 % в условиях постоянных котировок, 10 % в условиях пониженных котировок.
- «ЛУКОЙЛ» – 70 % прибыли в условиях повышения котировок, 25 % в условиях постоянных котировок, 15 % в условиях пониженных котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 40 %, постоянство котировок – 50 %, а понижение – 10 %. Квалифицированный специалист по рынку выскажется «за»: при повышении котировок с вероятностью 60 %, при постоянстве – 80 %, а при понижении – 20 %. Какова прибыль при различных мнениях специалиста?

2. Косметическая компания решила открыть филиал в г. Ухте. Для этого она должна определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности своих клиентов. Известно, что компания имеет следующее количество клиентов

50, 100, 150, 500. Для каждого из этих значений существует наилучший уровень обслуги. Отклонение от этих уровней приводит к затратам компании.

Матрица стоимостей (в денежных единицах):

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	150	230	486	45
a_2	100	521	452	145
a_3	242	842	154	589
a_4	126	452	18	321

23. Универмаг, работающий по 10 часов в сутки, ежедневно посещают от 7 до 10 тыс. человек. Стоимость покупок одного посетителя в среднем – 10 руб. Время обслуживания – 1 мин. на покупателя. Затраты на оборудование одного рабочего места – 240 руб., зарплата продавца – 140 руб. в месяц. Найти число рабочих мест при планировании работы на год (300 рабочих дней), если покупатель не намерен стоять в очереди из более 7 человек.

24. Вариант состоит из двух заданий.

1. На фондовой бирже можно вложить 40 000 долларов в 3 компании: «Газпром», «ЛУКОЙЛ» и «Транснефть». Акции компаний:

- «Газпром» могут принести 60 % прибыли в условиях повышенных котировок, 15 % в условиях постоянных котировок, 5 % в условиях пониженных котировок;
- «ЛУКОЙЛ» – 70 % прибыли в условиях повышенных котировок, 10 % в условиях постоянных котировок и обесцениться на 20 % в условиях пониженных котировок.
- «Транснефть» – 90 % прибыли в условиях повышения котировок, 20% в условиях постоянных котировок, 5 % в условиях пониженных котировок.

Аналитические публикации прогнозируют повышение котировок с вероятностью 50 %, постоянство котировок – 30 %, а понижение – 20 %. Квалифицированный специалист по рынку выскажется «за»: при повышении котировок с вероятностью 60 %, при постоянстве – 40 %, а при понижении – 10%. Какова прибыль при различных мнениях специалиста?

2. Дана матрица стоимостей придорожного кафе. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные размеры кафе (на 15, 20, 25 и 30 человек). А переменные $S_1 - S_4$ соответствующее количество людей. Необходимо найти оптимальную стратегию.

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	6	11	16	23
a_2	10	8	10	18
a_3	22	6	14	22
a_4	25	27	30	11

25. В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A_1, A_2, A_3 у противника три вида самолётов: B_1, B_2, B_3. Наша задача – поразить самолёт; задача противника – сохранить его непоражённым. При применении вооружения A_1 самолёты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9; 0,4; 0,2; при вооружении A_2 – с вероятностями 0,3; 0,6; 0,8; вооружения A_3 – с вероятностями 0,5; 0,7 и 0,2. Найти оптимальные стратегии. Решить матричную игру методами линейного программирования.

Приложение 1

Значения F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

Приложение 2

Критические значения *t*-критерия Стьюдента при уровне значимости 0.05

Число степеней свободы *d.f.*	α
	0,05
1	12,706
2	4,3027
3	3,1825
4	2,7764
5	2,5706
6	2,4469
7	2,3646
8	2,3060
9	2,2622
10	2,2281
11	2,2010
12	2,1788
13	2,1604
14	2,1448
15	2,1315
16	2,1199
17	2,1098
18	2,1009
19	2,0930
20	2,0860
21	2,0796
22	2,0739
23	2,0687
24	2,0639
25	2,0595
26	2,0555
27	2,0518
28	2,0484
29	2,0452
30	2,0423
40	2,0211
60	2,0003
120	1,9799
∞	1,9600

Приложение 3

Распределение хи-квадрат

Число степеней свободы *k*, Уровень значимости ∝

k \ ∝	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,991
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 4

Критические значения критерия Колмогорова – Смирнова

λ	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ	α
$\lambda \le 0,29$	1,00000	0,76	0,6104	1,23	0,0970	1,70	0,0062	2,17	0,0002
0,30	0,99999	0,77	0,5936	1,24	0,0924	1,71	0,0058	2,18	0,0001
0,31	0,99998	0,78	0,5770	1,25	0,0879	1,72	0,0054	2,19	0,0001
0,32	0,99995	0,79	0,5605	1,26	0,0836	1,73	0,0050	2,20	0,0001
0,33	0,99991	0,80	0,5441	1,27	0,0794	1,74	0,0047	2,21	0,0001
0,34	0,99993	0,81	0,5280	1,28	0,0755	1,75	0,0044	2,22	0,0001
0,35	0,9997	0,82	0,5120	1,29	0,0717	1,76	0,0041	2,23	0,0001
0,36	0,9995	0,83	0,4962	1,30	0,0681	1,77	0,0038	2,24	0,0001
0,37	0,9992	0,84	0,4806	1,31	0,0646	1,78	0,0035	2,25	0,0001
0,38	0,9987	0,85	0,4653	1,32	0,0613	1,79	0,0033	2,26	0,0001
0,39	0,9981	0,86	0,4503	1,33	0,0582	1,80	0,0031	2,27	0,0001
0,40	0,9972	0,87	0,4355	1,34	0,0551	1,81	0,0029	2,28	0,0001
0,41	0,9960	0,88	0,4209	1,35	0,0522	1,82	0,0027	2,29	0,0001
0,42	0,9945	0,89	0,4067	1,36	0,0495	1,83	0,0025	2,30	0,0001
0,43	0,9926	0,90	0,3927	1,37	0,0469	1,84	0,0023	2,31	0,000046
0,44	0,9903	0,91	0,3791	1,38	0,0444	1,85	0,0021	2,32	0,000042
0,45	0,9874	0,92	0,3657	1,39	0,0420	1,86	0,0020	2,33	0,000038
0,46	0,9840	0,93	0,3527	1,40	0,0397	1,87	0,0019	2,34	0,000035
0,47	0,9800	0,94	0,3399	1,41	0,0375	1,88	0,0017	2,35	0,000032
0,48	0,9753	0,95	0,3275	1,42	0,0354	1,89	0,0016	2,36	0,000030
0,49	0,9700	0,96	0,3154	1,43	0,0335	1,90	0,0015	2,37	0,000027
0,50	0,9639	0,97	0,3036	1,44	0,0316	1,91	0,0014	2,38	0,000024
0,51	0,9572	0,98	0,2921	1,45	0,0298	1,92	0,0013	2,39	0,000022
0,52	0,9497	0,99	0,2809	1,46	0,0282	1,93	0,0012	2,40	0,000020
0,53	0,9415	1,00	0,2700	1,47	0,0266	1,94	0,0011	2,41	0,000018
0,54	0,9325	1,01	0,2594	1,48	0,0250	1,95	0,0010	2,42	0,000016
0,55	0,9228	1,02	0,2492	1,49	0,0236	1,96	0,0009	2,43	0,000014
0,56	0,9124	1,03	0,2392	1,50	0,0222	1,97	0,0009	2,44	0,000013
0,57	0,9013	1,04	0,2296	1,51	0,0209	1,98	0,0008	2,45	0,000012
0,58	0,8896	1,05	0,2202	1,52	0,0197	1,99	0,0007	2,46	0,000011
0,59	0,8772	1,06	0,2111	1,53	0,0185	2,00	0,0007	2,47	0,000010
0,60	0,8643	1,07	0,2024	1,54	0,0174	2,01	0,0006	2,48	0,000009
0,61	0,8508	1,08	0,1939	1,55	0,0164	2,02	0,0006	2,49	0,000008
0,62	0,8368	1,09	0,1857	1,56	0,0154	2,03	0,0005	2,50	0,0000075
0,63	0,8222	1,10	0,1777	1,57	0,0145	2,04	0,0005	2,55	0,0000044

0,64	0,8073
0,65	0,7920
0,66	0,7764
0,67	0,7604
0,68	0,7442
0,69	0,7278
0,70	0,7112
0,71	0,6945
0,72	0,6777
0,73	0,6609
0,74	0,6440
0,75	0,6272

1,11	0,1700
1,12	0,1626
1,13	0,1555
1,14	0,1486
1,15	0,1420
1,16	0,1356
1,17	0,1294
1,18	0,1235
1,19	0,1177
1,20	0,1122
1,21	0,1070
1,22	0,1019

1,58	0,0136
1,59	0,0127
1,60	0,0120
1,61	0,0112
1,62	0,0105
1,63	0,0098
1,64	0,0092
1,65	0,0086
1,66	0,0081
1,67	0,0076
1,68	0,0071
1,69	0,0066

2,05	0,0004
2,06	0,0004
2,07	0,0004
2,08	0,0004
2,09	0,0003
2,10	0,0003
2,11	0,0003
2,12	0,0002
2,13	0,0002
2,14	0,0002
2,15	0,0002
2,16	0,0002

2,60	0,0000026
2,65	0,0000016
2,70	0,0000010
2,75	0,0000006
2,80	0,0000003
2,85	0,00000018
2,90	0,00000010
2,95	0,00000006
3,00	0,00000003

Учебное издание

Семериков Александр Вениаминович

Приложение теории принятия решения

Учебное пособие

Редактор О. В. Мойсеня
Технический редактор Л. П. Коровкина

План 2019 г., позиция 132. Подписано в печать 28.06.2019 г.
Компьютерный набор. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 6,8. Уч.-изд. л. 6,2. Тираж 120 экз. Заказ № 340.

Ухтинский государственный технический университет.
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Первомайская, д. 13.
Типография УГТУ.
169300, Республика Коми, г. Ухта, ул. Октябрьская, д. 13.