УДК 330.35:330.42+517.977.5+519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СМЕНЫ ПОКОЛЕНИЙ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ю.А. Кузнецов, С.Е. Маркова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Kuznetsov_YuA@iee.unn.ru

Статья поступила в редакцию 20.01.2017
Статья принята к публикации 01.02.2017

При моделировании и анализе процесса смены поколений инновационных товаров очень важно учитывать емкость рынка, возможный спрос на различные версии данного товара, наличие на рынке конкурирующих товаров-аналогов, близость рынка к насыщению и т.д. В настоящей работе дается краткое описание ряда математических моделей диффузии инноваций, широко используемых при исследовании динамики смены поколений инновационных технологий (товаров, услуг). Одно из направлений в построении таких моделей восходит к классической модели Ф.М. Басса; другое основано на использовании биологических аналогий – метафор; и поэтому концептуально модели этого направления исследований оказываются сходными с моделями динамики численности взаимодействующих биологических популяций, в частности с известными моделями Лотки – Вольтерры. Такие модели могут учитывать как отношения типа хищник – жертва, так и отношения конкуренции и симбиоза. В работе строится обобщенная математическая модель динамики смены поколений инновационного товара, в определенной мере объединяющая упомянутые выше подходы в области моделирования диффузии инноваций. Эта модель охватывает весьма широкий диапазон конкретных математических моделей и может быть положена в основу общих эконометрических моделей диффузии инноваций, описываемых системами одновременных уравнений.

Ключевые слова: механизмы диффузии инноваций, математическая модель, модель Ф.М. Басса, модель Лотки – Вольтерры, модель Гилпина – Айалы.

Введение

В современной экономической теории научно-технологический прогресс (НТП) рассматривается как один из важнейших факторов долговременного экономического роста. Влияние НТП на отдельную отрасль экономики проявляется в создании новой продукции, которая имеет важные конкурентные преимущества перед уже существующей, или же в модификации (модернизации) уже производимой продукции. Зачастую новая продукция основана и на новых (инновационных) технологиях. Однако технологическое первенство требует своевременной модернизации производства и обучения персонала, то есть существенных финансовых и организационных вложений. В то же время отказ от перехода к инновационным технологиям может привести к ощутимым потерям рыночных позиций или даже к полному прекращению деятельности. На рис. 1 приведен пример изменения рынка, обусловленного отставанием некоторых его участников в технологической гонке (см. [1, p. 11]).

В настоящее время одним из важных примеров рынков, для которых характерно вытеснение одних продуктов другими, более привлекательными с технологической точки зрения, является рынок информационно-телекоммуникационных технологий (рынок услуг передачи данных). Перед большинством поставщиков услуг по передаче данных в настоящее время уже встает вопрос о степени насыщения рынка и перспективах его развития; этот вопрос актуален также и в свете появления новых технологий мобильной передачи данных и т.д.

Целью данной работы является построение математической модели динамики смены поколений инновационных технологий весьма общего вида. Заметим, что при моделировании и анализе процесса смены поколений инновационных технологий (товаров) очень важно учитывать емкость рынка, возможный спрос на различные версии данного товара, наличие на рынке конкурирующих товаров-аналогов, близость рынка к насыщению и т.д.

В настоящей работе дается краткое описание ряда математических моделей диффузии инноваций, широко используемых при исследовании динамики смены поколений инновационных технологий (товаров, услуг). Одно из направлений в построении таких моделей восходит к классической модели Ф.М. Басса (см. [2]); эта модель концептуально основана, по признанию её автора [3], на работе [4], в которой было дано достаточно общее определения понятия «диффузия инноваций». Другое направление основа-

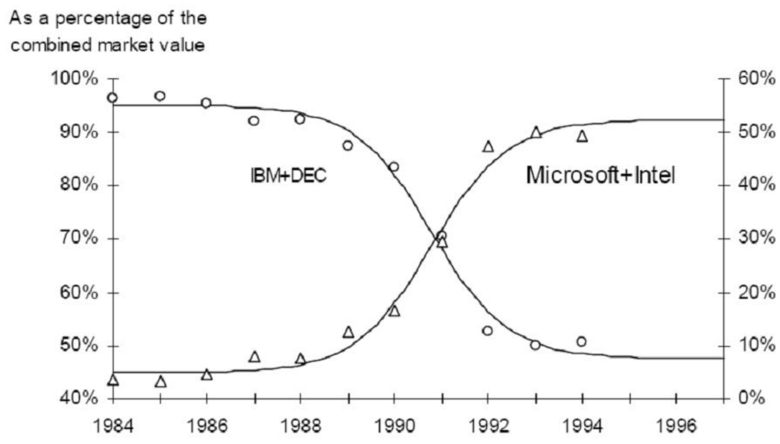

Рис. 1. Перераспределение долей рынка ИКТ в период 1988–1994 гг. (см. [1, p. 11])

но на явном использовании биологических аналогий, т.е. моделей-метафор (см. подробнее, например, [5–8] и др.; ряд авторов усматривает связь этих понятий с взглядами Николая Кузанского [9][1]). Концептуально модели этого направления исследований оказываются сходными с моделями динамики численности взаимодействующих биологических популяций, в частности с известными моделями Лотки – Вольтерры. Такие модели могут включать в себя как отношения типа хищник – жертва, так и отношения конкуренции и симбиоза. Их удобство особенно отчетливо проявляется при структурировании и качественном описании динамики роста (развития) систем различной природы (см. подробнее, например, [10–12] и др.). Впрочем, как показано в настоящей работе, модели типа Ф.М. Басса также содержат построения и рассуждения, вызывающие ассоциации с построением некоторых биологических моделей.

В настоящей работе строится обобщенная математическая модель динамики смены поколений инновационного товара, в определенной мере объединяющая упомянутые выше подходы в области моделирования диффузии инноваций. Эта модель охватывает весьма широкий диапазон конкретных математических моделей и может быть положена в основу общих эконометрических моделей диффузии инноваций, описываемых системами одновременных уравнений.

Биологические модели динамики конкурентного взаимодействия биологических популяций («модели-метафоры»)

Как известно, *конкуренция* (от ср.-век. лат. *concurrentia* и лат. *concurro* – сталкиваться) – это взаимоотношения между организмами одного и того же вида (*внутривидовая конкуренция*) или разных видов (*межвидовая конкуренция*), соревнующимися за одни и те же ресурсы внешней среды при недостатке последних (см., например, [13, с. 277]). Сразу следует отметить также, что понятие *конкуренция* в приведенном выше *биологическом* смысле вовсе не тождественно понятию *конкуренция* в *экономическом* смысле. Следуя [14, с. 257], приведем для сравнения соответствующее определение: «Конкуренция (англ. *competition*) – состязательная борьба, соперничество между товаропроизводителями за наиболее выгодные сферы приложения капитала, рынки сбыта, источники сырья; механизм стихийного регулирования пропорций общественного производства».

Разумеется, в приведенных выше определениях достаточно много весьма сходного; эти сходства и ассоциации всегда служили и служат доныне источником различных биологических аналогий и математических моделей в экономике. В основе подобных моделей зачастую лежат хорошо известные модели динамики численности однородных популяций; среди них наиболее популярными являются модели Мальтуса и Ферхюльста – Пирла – Рида (см., например, [15, 16]). Часто они и сами используются при описании простейших динамических процессов в целом ряде научных дисциплин. Первая из них – модель Т.Р. Мальтуса – может быть записана в виде:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\,,\ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty)\,, \qquad (1)$$

где $r > 0$ – *мальтузианский параметр* – темп роста численности популяции. К уравнению (1) необходимо присоединить также следующее начальное условие

$$N(t)\big|_{t=t_0+0} = N_0 > 0\,. \qquad (2)$$

Из (1), (2) вытекает, что численность популяции $N(t)$ описывается формулой

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty). \qquad (3)$$

Уравнение (1) является очень частным вариантом уравнения

$$\frac{dN(t)}{dt} = G[N(t)], \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty), \qquad (4)$$

описывающего в весьма общем виде динамику численности однородных популяций. Обычно считается, что $G(N) = M(N)N$, где $M(N)$ – *мальтузианская функция*. К уравнению (4) необходимо присоединить также начальное условие (2). В общем случае $G(N)$ может зависеть от некоторой части популяции или даже определяться как-то совсем по-иному. Например, пусть m – фиксированная величина некоторого ресурса (имеющего размерность численности популяции), являющегося важным условием существования данной популяции. Пусть $m - N > 0$ – количество неиспользованного ресурса, которым и определяется скорость ее роста; тогда (4) запишется в виде уравнения

$$\frac{dN(t)}{dt} = r[m - N(t)], \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty), \qquad (5)$$

решение которого с начальными условиями (2) описывается формулой

$$N(t) = m(1 - e^{-r(t-t_0)}) + N_0 e^{-r(t-t_0)},$$
$$t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty),$$

так что $N(t) \to m$, $t \to \infty$. Так как уравнение (1) в силу (3) демонстрирует во многих случаях неприемлемое поведение ($N(t) \to \infty$, $t \to \infty$), то чаще используется (как более реалистическое) уравнение Ферхюльста – Пирла – Рида (или *логистическое уравнение*)

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{N(t)}{m}\right)N(t), \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty). \qquad (6)$$

Легко установить, что решение задачи (6), (2) записывается следующим образом:

$$N(t) = \frac{N_0 e^{r(t-t_0)}}{1 + \dfrac{N_0}{m}[e^{r(t-t_0)} - 1]}, \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty),$$

так что $N(t) \to m$, $t \to \infty$. Величина $\left(1 - \frac{N(t)}{m}\right)$ в уравнении (6) выступает в качестве своеобразной «поправки» к мальтузианскому параметру $r > 0$ в уравнении (1), обусловленной (в рамках биологической трактовки уравнения (6)) «внутривидовой конкуренцией». Однако уравнение (6) можно записать и по-иному:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r[m - N(t)]\left(\frac{N(t)}{m}\right), \ t \in \mathbf{R}_{t_0} \equiv [t_0, \infty). \qquad (7)$$

С записью (7) уравнения (6) связана и иная трактовка логистического уравнения: скорость роста популяции пропорциональна (как и в уравнении (5)) количеству еще не использованного ресурса и доле «уже используемого». Как будет очевидно ниже, соотношения (5) и (7) (в рамках трактовки, связанной с «диффузией инноваций») представляют, по существу, два варианта роста популяции (числа) потребителей (пользователей) нового продукта и приводят к модели диффузии инноваций Ф.М. Басса.

Если речь идет о поведении нескольких популяций инновационных товаров и их потребителей, то часто используют системы уравнений, описывающих как динамику каждой из них (например, с помощью описанных выше моделей), так и их взаимодействие (конкуренцию). В случае двух популяций инновационных товаров часто используется «конкурентный вариант» классической модели Лотки – Вольтерры [15, 16]:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1\left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \frac{\gamma_1}{r_1}N_2\right)N_1,$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2\left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \frac{\gamma_2}{r_2}N_1\right)N_2. \qquad (8)$$

Здесь, как обычно, K_1 и K_2 – емкости экологических ниш для популяций, r_1 и r_2 – коэффициенты роста численности популяций при малых численностях популяций (когда внутри- и межвидовой борьбой можно пренебречь), γ_1 и γ_2 – характеристики межвидовой конкуренции. Для исследования системы (8) обычно проводят замену переменных, «сокращающую» количество параметров. Один из вариантов подобного преобразования состоит в следующем. Сначала вводится «новое время» по формуле $t = \tau/r_1$. Здесь время τ – некоторое «биологическое время», характерное для первой популяции. Далее вводятся «относительные численности» биологических популяций – функции $u_i(\tau) = N_i(\tau/r_1)/K_i$, $i = 1, 2$. После переобозначения «нового времени» символом t приходим к стандартной форме модели конкуренции «логистических» популяций

$$\frac{du_1(t)}{dt} = [1 - u_1(t) - \varepsilon_1 u_2(t)]u_1(t),$$
$$\frac{du_2(t)}{d\tau} = \gamma[1 - \varepsilon_2 u_1(t) - u_2(t)]u_2(t). \qquad (9)$$

Здесь $\gamma = r_2 r_1^{-1} > 0$, $\varepsilon_1 = \gamma_1 K_2 r_1^{-1} > 0$, $\varepsilon_2 = \gamma_2 K_1 r_2^{-1} > 0$ – «новые параметры» преобразованной системы (9) (и их только три), допускающие достаточно ясную биологическую интерпретацию. Нетрудно видеть, что точки $O(0,0)$, $S_1(1,0)$ и $S_2(0,1)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных (u_1, u_2) являются стационарными

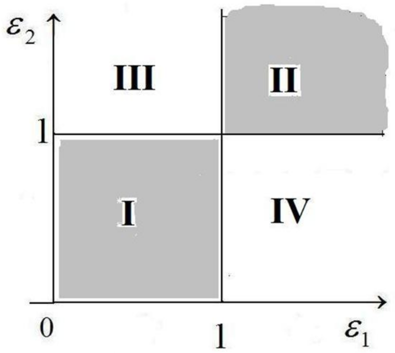

Рис. 2. Множество допустимых значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

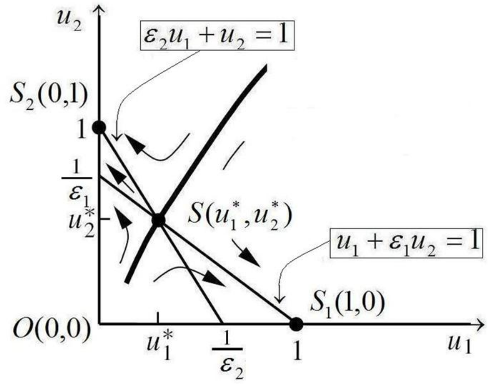

Рис. 3. Фазовый портрет системы в случае, когда параметры $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ принадлежат области II

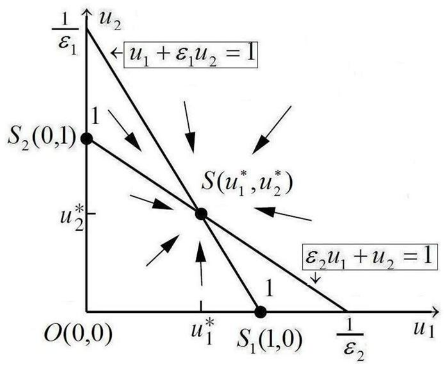

Рис. 4. Фазовый портрет системы в случае, когда параметры $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ принадлежат области I

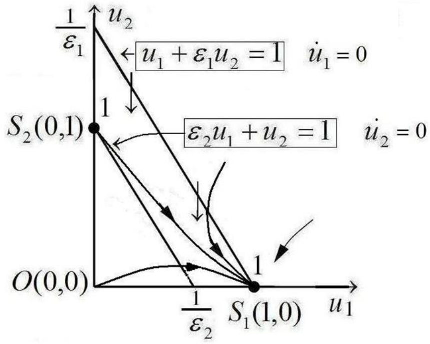

Рис. 5 Фазовый портрет системы в случае, когда параметры $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ принадлежат области III

решениями системы (9) независимо от величины и знаков параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Весьма важным является вопрос о существовании *положительного* стационарного решения $S(u_1^*, u_2^*)$ системы (9). На плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (см. рис. 2) можно выделить четыре области (обозначенные римскими цифрами), для каждой из которых указанный вопрос имеет достаточно специфичный ответ.

Нетрудно установить (см. подробнее, например, [15, 16]), что в случае областей III и IV координаты состояния равновесия $S(u_1^*, u_2^*)$ биологически бессмысленны (одна из координат отрицательна); напротив, для значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из областей I и II существует единственное состояние равновесия $S(u_1^*, u_2^*)$ с положительными координатами. На рис. 3 – 5 представлены эскизы фазового портрета системы (9) в некоторых из указанных на рис. 2 случаях. Оказывается, что для значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из области I состояние равновесия $O(0,0)$ – неустойчивый узел, $S(u_1^*, u_2^*)$ – устойчивый узел, а состояния равновесия $S_1(1,0)$ и $S_2(0,1)$ – седла. Для значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из области II состояние равновесия $S(u_1^*, u_2^*)$ – седло, $O(0,0)$ – неустойчивый узел, а $S_1(1,0)$ и $S_2(0,1)$ – устойчивые узлы. Этот результат вполне согласуется со знаменитым *принципом конкурентного исключения* (*Principle of Competitive Exclusion*), или *принципом* (*законом*) *Гаузе* [17]. Наконец, для значений параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из области III биологически реализуемы только состояния равновесия $O(0,0)$, $S_1(1,0)$ и $S_2(0,1)$. При этом состояние равновесия $O(0,0)$ – неустойчивый узел, $S_1(1,0)$ – устойчивый узел, а $S_2(0,1)$ – седло (случай области IV вполне аналогичен; в случае области IV состояние равновесия $O(0,0)$ – неустойчивый узел, $S_1(1,0)$ – седло, а $S_2(0,1)$ – устойчивый узел).

Таким образом, уже эта, сравнительно простая, модель *качественно* правильно описывает возможные исходы конкуренции. Вопрос о *количественно* правильном описании процесса конкуренции гораздо более сложен и требует привлечения более сложных моделей.

К числу таких моделей относится, например, модель Гилпина – Айалы (M.E. Gilpin , F.J. Ayala). Эта модель введена в рассмотрение в работе [18]. В достаточно общем виде модель Гилпина – Айалы динамики *конкурентного* взаимодействия двух биологических популяций может быть записана следующим образом:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \left(\frac{N_1}{K_1} \right)^{\theta_1} - \varepsilon_1 \frac{N_2}{K_2} \right],$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \left(\frac{N_2}{K_2} \right)^{\theta_2} - \varepsilon_2 \frac{N_1}{K_1} \right]. \quad (10)$$

Здесь основные переменные имеют прежний смысл; величины θ_1 и θ_2 – характеристики внутривидовой, а $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ – межвидовой конкуренции. В ситуации когда рассматривается динамика процесса диффузии инноваций, может быть использована следующая трактовка переменных и параметров модели (10): N_1 – численность пользователей первого поколения данной технологии, N_2 – численность пользователей второго поколения этой технологии, K_1 и K_2 – емкости рынков соответствующей технологии, r_1 и r_2 – темпы роста количества пользователей (при малых численностях), θ_1, θ_2 и ε_1, ε_2 – соответственно характеристики конкуренции в рамках одной технологии и между ними. Понятно, что естественным фазовым пространством системы (10) является множество $\mathbf{R}_+^{2\,2}$. Ясно, что система (10) включает в себя как частный случай модель Лотки – Вольтерры и содержит (по сравнению с ней) дополнительные параметры, служащие характеристикой взаимодействия популяций, и, тем самым, расширяет возможности сопоставления теоретических исследований и экспериментальных данных. Исследованию различных вариантов данной модели посвящены многочисленные работы (см., например, [19, 20] и др.).

Для данной системы могут быть получены более интересные и разнообразные результаты; некоторые из них вполне аналогичны результатам, приведенным выше для системы (8), (9) (см., например, [21]). Модель Гилпина – Айалы была использована в работах [22, 23] для математического моделирования динамики смены поколений телекоммуникационных услуг и показала приемлемые результаты. В ряде публикаций модель Гилпина – Айалы обобщалась на случай произвольного числа популяций и более общей формы правой части. Например, в работе [24] предложено следующее её обобщение:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = r_i N_i(t) \left(1 - \left(\frac{N_i(t)}{K_i} \right)^{\theta_i} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \alpha_{ij} \frac{N_j(t)}{K_j} \right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n. \quad (11)$$

Здесь основные переменные имеют прежний смысл; величины θ_i – характеристики внутривидовой, а α_{ij} – межвидовой конкуренции популяций. В целом системы (9)–(11) качественно (а в некоторых случаях – и количественно) правильно описывают динамику конкурентного взаимодействия последовательных поколений новой технологии (допуская как ситуацию сосуществования этих поколений, так и ситуацию вытеснения), однако не исчерпывают всех интересных в теоретическом и практическом плане ситуаций.

Модель Ф.М. Басса и некоторые ее обобщения

Математическая модель Ф.М. Басса диффузии инноваций может быть записана следующим образом (см. [2, 3]):

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[p + q \frac{N(t)}{m} \right] [m - N(t)]. \quad (12)$$

К уравнению (12) добавляется начальное условие (2). Здесь $N(t)$ – количество экономических агентов, использующих новый продукт, m – емкость рынка (т.е. количество потенциальных его пользователей), $[m - N(t)]$ – количество «не охваченных» инновацией экономических агентов, p – «коэффициент инноваций» (*coefficient of innovation*), характеризующий «внешнее» воздействие на экономического агента (обычно это СМИ), в силу которого он и приобретает новый продукт (такие экономические агенты были названы Ф.М. Бассом «инноваторами»). Далее, q – «коэффициент имитации» (*coefficient of imitation*), характеризующий «межличностное» воздействие на экономического агента (так что решающим для него оказывается мнение тех экономических агентов, которые уже приобрели новый продукт, – «*word of mouth*»); эти экономические агенты были названы Ф.М. Бассом «имитаторами». Вероятность приобретения имитаторами нового продукта определяется величиной «коэффициента имитации» q и долей $N(t)/m$ уже купивших и использующих этот продукт агентов, так что имитаторы приобретают новый продукт с вероятностью $qN(t)/m$. Отметим, что употребление терминов «инноватор» и «инновация» в работах [2, 3] отличается от принятого в современной теории инноваций (см., например, [25–27]).

Как уже отмечалось выше, модель Ф.М. Басса диффузии инноваций включает в себя, по существу, два варианта роста популяции в соответствии с соотношениями (5) и (7) (но теперь уже в рамках трактовки, связанной с «диффузией инноваций»).

Нетрудно найти решение задачи (12), (2), которое запишется в виде:

$$N(t) = m\frac{(pm+qN_0) - p(m-N_0)e^{-(p+q)(t-t_0)}}{(pm+qN_0) + q(m-N_0)e^{-(p+q)(t-t_0)}} = m\frac{1-p\Delta e^{-(p+q)(t-t_0)}}{1+q\Delta e^{-(p+q)(t-t_0)}}, \quad (13)$$

где $\Delta = (m-N_0)(pm+qN_0)^{-1}$. Ясно, что, в силу (13), $N(t) \to m$, $t \to \infty$. Фактически модель Ф.М. Басса описывает диффузию новых продуктов в следующей ситуации. Пусть существует некоторый рынок, на котором появляется принципиально новый продукт (товар или услуга), выпускаемый некоторой фирмой, не имеющий аналогов и, соответственно, конкуренции со стороны других продуктов или других фирм. Этот продукт создает новый спрос, так как появляется вполне определенное количество людей, желающих приобрести этот продукт или уже совершивших его покупку. Считается, что модель Ф.М. Басса имеет некоторое «поведенческое» обоснование, согласующееся с результатами исследований по этому поводу в социальных науках (см., например, [4]).

Заметим, что известная модель В.М. Полтеровича – Г.М. Хенкина взаимодействия процессов создания, заимствования и диффузии технологий (см. [28, 29] и др.) в некоторых аспектах имеет аналогии с моделью Ф.М. Басса.

В работах ряда авторов были представлены различные обобщения модели Ф.М. Басса. Отметим только некоторые из них. Так, в работе [30] уравнение (12) приобретает вид

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[p + q\left(\frac{N(t)}{m}\right)^{\delta}\right]\left[m - N(t)\right], \quad (14)$$

где δ – положительный параметр. Запись модели Ф.М. Басса в форме (14), возможно, была навеяна некоторыми биологическими ассоциациями [15,16]. Введение таким способом еще одного параметра в уравнение (14), в принципе, придает ему большую гибкость в плане соответствия данным статистики. В работах [31, 32] рассматривается случай двух фирм. Например, автор работы [32] приходит к системе уравнений

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \left[p_1 + \frac{q_1}{m_1}N_1(t)\right]\left[m_1 - N_1(t)\right] + \frac{q_{12}}{m_1}N_1(t)\left[m_2 - N_2(t)\right], \quad (15)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \left[p_2 + \frac{q_2}{m_2}N_2(t)\right]\left[m_2 - N_2(t)\right] + \frac{q_{21}}{m_2}N_2(t)\left[m_1 - N_1(t)\right], \quad (16)$$

где переменные имеют смысл, аналогичный модели Ф.М. Басса, а $m = m_1 + m_2$ – общий потенциал рынка. Суммарное количество $N(t)$ «пользователей» инновации определяется из соотношения $\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dN_1(t)}{dt} + \frac{dN_2(t)}{dt}$. Параметры q_{ij} описывают взаимное воздействие фирм друг на друга («коэффициенты перекрестного влияния»). Аналогичная модель рассматривается в работе [33]. Система (15), (16) достаточно легко может быть обобщена на случай произвольного числа фирм.

Отметим, что в приведенной выше постановке задачи предполагается, что новые продукты присутствуют на рынке одновременно, т.е. реализуется ситуация «синхронной работы» производящих их фирм. Однако часто рассматривается ситуация «последовательного» появления на рынке новых поколений данного товара (или новых товаров-заместителей). В идейном плане такие модели сходны с представленными, однако значительно более сложны и содержат большее число параметров, которые должны быть определены независимым образом. К числу таких работ относится, например, работа [34]. Подробный обзор данного направления исследований см., например, в работах [35–37].

Обобщенная математическая модель процесса диффузии инноваций

Несмотря на то, что в настоящее время имеется достаточно широкий набор теоретических и прикладных моделей создания, заимствования и распространения новых технологий, поиски адекватных моделей диффузии инноваций продолжаются (см., например, [38–40]). Одним из возможных подходов к созданию достаточно общей модели диффузии инноваций является сочетание ряда не противоречащих друг другу предположений, делаемых в каждом из описанных выше направлений исследования и позволяющих в наибольшей степени отразить динамику этого процесса без излишнего усложнения его математического описания. Одним из вариантов такой модели может служить следующая система дифференциальных уравнений, включающая в себя элементы модели Ф.М. Басса (12) (с уточнениями типа (14)) и использующая для оценки неиспользованного потенциала рынка не количество «не охваченных» инновацией экономических агентов (как в модели Ф.М. Басса), а некоторую *оценку* этого потенциала, учитывающую характер взаимодействия представленных на рынке экономических агентов. В качестве такой оценки «неиспользованного потенциала рынка» можно использовать оценку «неиспользованной емкости экологической ниши», входящую в правые части уравнений модели Гилпина – Айалы (см. (11)). В результате получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \left[p_i + q_i \left(\frac{N_i(t)}{K_i} \right)^{\beta_i} \right] \times \left[1 - \left(\frac{N_i(t)}{K_i} \right)^{\theta_{ii}} - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij} \left(\frac{N_j(t)}{K_j} \right)^{\theta_{ij}} \right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где переменные имеют ясный из предыдущего обсуждения смысл. Как и в [38], данная математическая модель использует предположение о том, что диффузия инноваций реализуется в рамках взаимодействия нескольких сосуществующих последовательных поколений новой технологии, причем динамика такого взаимодействия сходна с динамикой взаимодействия биологических популяций, существующих в одном ареале обитания и конкурирующих между собой. Следует признать, что даже в случае $n = 2$ эта модель содержит значительное количество (независимых) параметров, которые должны быть определены независимым образом. Этот факт, конечно же, затрудняет идентификацию параметров модели и накладывает серьезные ограничения на объем необходимой статистической информации (которая во многих случаях оказывается коммерческой тайной). С другой стороны, ясная структура модели и положительные результаты в использовании её частных случаев [22, 23] позволяют надеяться на её достаточно большую эффективность в исследовании диффузии инноваций.

Заключение

В настоящей работе дается краткий обзор ряда математических моделей диффузии инноваций, широко используемых при исследовании динамики смены поколений инновационных технологий (товаров, услуг). Одно из направлений в построении таких моделей восходит к классической модели Ф.М. Басса; другое основано на использовании биологических аналогий – метафор и опирается на модели динамики численности взаимодействующих биологических популяций. В работе вводится в рассмотрение обобщенная математическая модель динамики смены поколений инновационного товара, в определенной мере объединяющая упомянутые выше подходы в области моделирования диффузии инноваций. Эта модель охватывает весьма широкий диапазон конкретных математических моделей и может быть положена в основу общих эконометрических моделей диффузии инноваций, описываемых системами одновременных уравнений.

Примечания

1. В своем трактате «Об учёном незнании» Николай Кузанский указывает: «…все исследователи судят о неизвестном путём соразмеряющего… сравнивания с чем-то уже знакомым…», однако «… последняя точность… и однозначное приведение неизвестного к известному … выше человеческого разума» (см. [9]).

2. По определению, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbf{R}_{++} = (0, \infty)$.

Список литературы

1. Kucharavy D., De Guio R., Application of S-shaped curves // Presented at ETRIA TRIZ Future Conference 2007, Frankfurt [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: http://www.seecore.org/d/2007_02t.pdf (дата обращения: 19.01.2017).

2. Bass F.M. A new product growth model for consumer durables // Management Science. 1969. Vol. 15. № 5. P. 215–227.

3. Bass F.M. Comments on «A new product growth model for consumer durables» // Management Science. 2004. Vol. 50. № 12 (Supplement). P. 1833–1840.

4. Rogers E.M. Diffusion of innovations. Third Edition. New York: The Free Press, A Division of Macmillan Publishing Co., Inc., 1983. 453 p. (1st Edition – 1962).

5. Hirshleifer J. Competition, cooperation, and conflict in economics and biology // American Economic Review. 1978. Vol. 68. № 2. P. 238–243.

6. Тамбовцев В.Л. Исследования по метаэкономике. М.: Экономический факультет, ТЕИС, 1998. 146 с.

7. Фатенков А.Н. Модель-метафора как универсально-конкретная форма философского дискурса // Вестник ННГУ. Социальные науки. 2002. № 1. С. 345–361.

8. Ginzburg A. Biological metaphors in economics: natural selection and competition // Ch. 6 in: D. Lane et al. (eds.). Complexity Perspectives in Innovation and Social Change. Springer Science+Business Media B.V., 2009. P. 117–152.

9. Кузанский Н. Об учёном незнании [Электронный ресурс]. URL: http://iphlib.ru/greenstone3/library/collection/antology/document/HASH015d20aefe593a2a72bf38b2 (дата обращения: 19.01.2017).

10. Peschel M., Mende W. The predator – prey model: Do we live in a Vorterra World? Wien – N.Y.: Springer-Verlag, 1986. 252 p.

11. Svirezhev Yu.M. Nonlinearities in mathematical ecology: Phenomena and models. Would we live in Vol-

terra's world? // Ecological Modeling. 2008. Vol. 216. № 1. P. 89–101.

12. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки – Вольтерры и сходных с ней // Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88.

13. Биологический энциклопедический словарь / Гл. ред. М.С. Гиляров; Редкол.: А.А. Баев, Г.Г. Винберг, Г.А. Заварзин и др. М.: Сов. энциклопедия, 1986. 831 с.

14. Словарь современных экономических и правовых терминов / Авт.-сост. В.Н. Шимов, А.Н. Тур, Н.В. Стах и др.; Под ред. В.Н. Шимова и В.С. Каменкова. Мн.: Амалфея, 2002. 816 с.

15. Murray J.D. Mathematical biology. I. An introduction. 3rd Edition. New York: Springer – Verlag. 2001. 551 p. [Русский перевод 1-го издания: Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 397 с.].

16. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.

17. Gause G.F. The struggle for existence. Baltimore: Williams & Wilkins, 1934.

18. Gilpin M.E., Ayala F.J. Global models of growth and competition // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 1973. Vol. 70. № 12. Part I. P. 3590–3593.

19. Fan M., Wang K. Global periodic solutions of a generalized *n*-species Gilpin–Ayala competition model // Computers & Mathematics with Applications. 2000. Vol. 40. № 10–11. P. 1141–1151.

20. Meili Li M., Han M., Kou C. The existence of positive periodic solutions of a generalized *N*-species Gilpin–Ayala impulsive competition system // Matheatical Biosciences and Engineering. 2008. Vol. 5. № 4. P. 803–812.

21. Chen F., Chen Y., Guo S., Li Z. Global attractivity of a generalized Lotka – Volterra competition model // Differential Equations and Dynamical Systems. 2010. Vol. 18. № 3. P. 303–315.

22. Кузнецов Ю.А., Маркова С.Е., Мичасова О.В. Математическое моделирование динамики конкурентного замещения поколений инновационного товара // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2 (1). С. 170–179.

23. Кузнецов Ю.А., Маркова С.Е., Мичасова О.В. Экономико-математическое моделирование динамики смены поколений телекоммуникационных услуг // Финансовая аналитика: теория и практика. 2014. № 34 (220). С. 43–55.

24. Jurang Y., Global positive solutions of periodic *n*-species competition systems // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 356. P. 288–294.

25. Селиванов С.Г., Гузаиров М.Б., Кутин А.А. Инноватика: Учебник для вузов. М.: Машиностроение. 2008. 721 с.

26. Комаров В.М. Основные положения теории инноваций. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2012. 190 с.

27. Крючкова С.Е. Инноватика: история и теория // В кн.: Философско-методологические основания развития общества в условиях инноваций. М.: Янус-К, 2012. С. 53–69.

28. Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. Т. 24. № 6. С. 1071–1083.

29. Хенкин Г.М., Шананин А.А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 8. С. 3–19.

30. Easingwood C., Mahajan V., Muller E. A non-uniform influence innovation diffusion model of new product acceptance // Marketing Science. 1983. Vol. 2. № 3. P. 273–293.

31. Mahajan V., Muller E., Bass F.M. New product diffusion models in marketing: A review and directions for research // Journal of Marketing. 1990. Vol. 54. № 1. P. 1–26.

32. Казанцев С.Ю. Использование диффузионной модели в прогнозировании долей рынка (на примере развития сетей сотовой связи стандартов GSM и CDMA 2000) // Научные труды ИНП РАН. Российская академия наук. Институт народнохозяйственного прогнозирования. М.: МАКС Пресс, 2005. С. 248–260. [Электронный ресурс]. URL: http://www.ecfor.ru/pdf.php?id=books/sa2005/11 (дата обращения: 20.09.2014).

33. Li X., Liao Z. The dynamic multi-innovation diffusion model with active potential consumers and its application to the diffusion of local telephony and mobile telephony in China // International Journal of Management Science and Engineering Management. 2006. Vol. 1. № 2. P. 148–160.

34. Stremersch S., Muller E., Peres R. Does new product growth accelerate across technology generations? // Market Letters. 2010. Vol. 21. P.103–120.

35. Meade N., Islam T. Modelling and forecasting of Innovation – 25-year review // International Journal of Forecasting. 2006. Vol. 22, № 3. P. 519–545.

36. Chandrasekaran D., Tellis G.J. A critical review of marketing research on diffusion of new products // In: N.K. Malhorta (Ed.). Review of Marketing Research. Armonk, NY: M.E. Sharpe, 2007. Ch. 2. P. 39–80.

37. Peres R., Muller E., Mahajan V. Innovation diffusion and new product growth models: A critical review and research directions // International Journal of Research in Marketing. 2010. Vol. 27. № 2. P. 91–106.

38. Dalla Valle A. A new competition model combining the Lotka – Volterra model and the Bass model in pharmacological market competition // University of Padova. Department of Statistical Sciences. Working Paper Series. № 7. July 2014. 19 p.

39. Baláž V., Williams A.M. Diffusion and competition of voice communication technologies in the Czech and Slovak Republics, 1948–2009 // Technological Forecasting & Social Change. 2012. Vol. 79, № 2. P. 393–404.

40. Neokosmidis I., Avaritsiotis N., Ventoura Z., Varoutas D. Assessment of the gap and (non-) Internet users evolution based on population biology dynamics // Telecommunications Policy. 2015. Vol. 39. № 1. P. 14–37.

MATHEMATICAL MODELS FOR THE DYNAMICS OF INNOVATION TECHNOLOGY GENERATION CHANGE

Yu.A. Kuznetsov, S.E. Markova

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

When simulating and analyzing the process of changing generations of innovative products, it is very important to take into account the market capacity, the possible demand for different versions of this product, the availability of competing analogues on the market, the closeness of the market to saturation, etc. In this paper, we present a brief description of a number of mathematical models of innovation diffusion that are widely used in studying the dynamics of the generation change of innovative technologies (goods, services). One of the trends in the construction of these models goes back to the classical model of F.M. Bass; another is based on the use of biological analogies - metaphors and therefore the conceptual models in this area of research are similar to the models of population dynamics of interacting biological populations, in particular, to the well-known Lotka-Volterra models. Such models can take into account both the predator-victim relationship, and the relationship of competition and symbiosis. In this article, we build a generalized mathematical model for the dynamics of the generation change of an innovative product. To some extent, this model combines the above-mentioned approaches to modeling diffusion of innovations. This model covers a very wide range of specific mathematical models and can be used as a basis for general econometric models for diffusion of innovations described by systems of simultaneous equations.

Keywords: mechanics of innovation diffusion, mathematical model, Bass model, Lotka – Volterra model, Gilpin – Ayala model.