

## 2-смежностные многогранники с малым числом вершин и гиперграней

Проблема перечисления комбинаторных типов многогранников является классической (см. например, комментарии на с. 96b в монографии В. Grunbaum “Convex polytopes” (2003)). В качестве цели работы предлагается перечислить комбинаторные типы 5–7-мерных 2-смежностных многогранников с малым числом вершин (не более 11) и небольшим числом гиперграней (не более 22). Ключевая идея — воспользоваться тем, что число комбинаторных типов гиперграней таких многогранников невелико (около десятка) и число вершинных фигур<sup>1</sup> (2-симплициальных<sup>2</sup>) с малым числом гиперграней тоже невелико. Наиболее перспективным подходом представляется конструирование новых комбинаторных типов (возможно, нереализуемых геометрически) на основе матрицы инцидентий гиперграней-вершин<sup>3</sup>.

1. Начать знакомство с темой лучше всего с перечисления матриц инцидентий гиперграней-вершин для 3-мерных 2-симплициальных многогранников с 7 и менее вершинами. Все комбинаторные типы таких многогранников перечислены в статье D. Britton, J.D. Dunitz “A complete catalogue of polyhedra with eight or fewer vertices” (1973). Данная задача является простой. Далее, полученные матрицы следует использовать в качестве тестовых примеров для проверки работы программ, которые будут нужны на следующих этапах.

2. Следующий шаг — перечисление всех матриц инцидентий гиперграней-вершин для 4-мерных 2-симплициальных многогранников с не более, чем 9 вершинами и имеющими не более 21 гиперграней. Все они могут быть найдены в базе <https://page.mi.fu-berlin.de/moritz/polytopes> (ссылаться следует на статью M. Firsching “The complete enumeration of 4-polytopes and 3-spheres with nine vertices” (2018)). Здесь уже понадобится автоматизация. Далее из полученных примеров следует скопировать в отдельную выборку все 2-смежностные многогранники.

3. Далее — аналогичная задача для 5-мерных многогранников с не более, чем 9 вершинами и не более 16 гипергранями. Их следует искать в базе [http://www.imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~hmiyata/oriented\\_matroids/](http://www.imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~hmiyata/oriented_matroids/) (ссылка на статью K. Fukuda, H. Miyata, S. Moriyama “Complete Enumeration of Small Realizable Oriented Matroids” (2013)).

4. Полученные на предыдущих этапах списки комбинаторных типов будут основой для перечисления комбинаторных типов «недостающих» многогранников. Например, в 5-й размерности на 9 вершинах и в 6-й размерности на 10 и 11 вершинах. Цель поиска — 2-смежностные многогранники с фиксированным числом вершин и малым (в первую очередь, наименьшим) числом гиперграней. Идея состоит в том, что матрица инцидентий 2-смежностного многогранника должна содержать в качестве подматриц матрицы инцидентий своих гиперграней и вершинных фигур.

---

<sup>1</sup>Вершинная фигура — пересечение многогранника с гиперплоскостью, проведенной так, чтобы «отсечь» от многогранника ровно одну вершину (то есть гиперплоскость должна строго отделять эту вершину от остальных).

<sup>2</sup>Многогранник называется 2-симплициальным, если все его 2-границы являются треугольниками.

<sup>3</sup>Строки такой матрицы проиндексированы гипергранями многогранника, а столбцы — вершинами. На пересечении столбца и строки стоит единица, если соответствующая вершина принадлежит соответствующей гиперграней, иначе стоит 0.