Эксперименты с диаграммами Гейла

Максименко А.Н.

9 марта 2018 г.

1 Введение

Диаграммой Гейла называется множество точек X в d-мерном пространстве. Причем одна и та-же точка может присутствовать несколько раз (иметь кратность). Не уменьшая общности, можно предполагать, что точки находятся на поверхности сферы с центром в начале координат, или на поверхности эллипсоида, или даже на поверхности симплекса, опять же, с центром в начале координат.

Для X вводится понятие **кофасеты**. Это любой симплекс с вершинами в X, для которого начало координат принадлежит относительной внутренности. Например, если в качестве $X \subset \mathbb{R}^3$ взять множество вершин октаэдра

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1,0,0),\\
x_2 &= (-1,0,0),\\
x_3 &= (0,1,0),\\
x_4 &= (0,-1,0),\\
x_5 &= (0,0,1),\\
x_6 &= (0,0,-1),
\end{aligned}
$$

то такая диаграмма Гейла будет содержать ровно три кофасеты: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$.

Степень смежностности[1] диаграммы Гейла определяется следующим образом. Для каждой гиперплоскости, проходящей через начало координат, подсчитывается число точек в X, лежащих (отдельно) с каждой стороны от гиперплоскости. Выбирается минимальное из этих чисел и вычитается единица. В частности, для приведенного выше примера смежность равна 0.

Каждой диаграмме Гейла X с положительной смежностью соответствует некоторый выпуклый многогранник $P = P(X)$, число вершин которого совпадает с числом точек в диаграмме, **размерность** равна $n-d-1$, а между гипергранями многогранника и кофасетами диаграммы имеется взаимно-однозначное

[1] Внимание! Везде далее вместо «смежностност» пишется «смежност» для краткости и удобства произношения.

соответствие. А именно, множество Y является кофасетой в X тогда, и только тогда, когда дополнение $X \setminus Y$ соответствует гиперграни многогранника.

Так, например, если в качестве $X \subset \mathbb{R}^2$ взять вершины правильного шестиугольника (с центром в начале координат), то такая диаграмма будет определять $(6-2-1)$-мерный многогранник на 6 вершинах, имеющий три четырехвершинные грани и две — трехвершинные. Если же каждую точку этой диаграммы снабдить кратностью 2, то она будет описывать свойства 9-мерного 3-смежностного многогранника на 12 вершинах, имеющего 12 гиперграней с 10 вершинами и 16 гиперграней с 9 вершинами (т.е. симплициальных). Еще пример: многограннику октаэдру соответствует диаграмма Гейла в $\mathbb{R}^2$ на вершинах равностороннего треугольника с кратностью 2.

1.1 Как построить диаграмму Гейла для заданного многогранника с помощью программы skeleton [1]

1. Нужен список вершин многогранника в формате Avis-Fukuda (то есть с дополнительным столбцом из единиц). Далее обозначаем всю эту матрицу через A.

2. Транспонируем A и находим базис всех решений системы $A^T x = 0$. Для обработки с помощью skeleton нужно записать в файл A^T и под ней добавить $-A^T$, то есть число строк будет $2(d+1)$, а число столбцов равно числу вершин многогранника.

3. После обработки skeleton-ом в файле .out смотрим раздел `* Basis:` в котором столбцами будут точки диаграммы Гейла.

2 Постановка задачи

Основная цель — отыскать диаграммы Гейла 2-смежностных многогранников с минимальной разностью между числом гиперграней и вершин. Рабочая гипотеза: эта разность неотрицательна. Самый простой пример — симплексы — неинтересен. Сопутствующие цели — 3-смежностные многогранники, интересны для оценки (обзора) окрестностей задачи. Более амбициозная цель — 2-смежностные многогранники, двойственные к которым также 2-смежностны.

3 Свойства $(2, 2)$-многогранников

3.1 d = 5

При $d = 5$ таких многогранников не существует.

Доказательство. Так как все 3-грани являются симплексами:

$$4f_3 \geq 3f_2 \geq 4f_1.$$

В силу двойственности, получаем

$$4f_3 = 3f_2 = 4f_1.$$

Учитывая, что

$$f_1 = f_0(f_0-1)/2 \quad \text{и} \quad f_3 = f_4(f_4-1)/2$$

и подставляя в уравнение Эйлера, получаем

$$f_0 - \frac{f_0(f_0-1)}{2}(1-4/3+1) + f_0 = 2.$$

Откуда $f_0(7-f_0)=6$, т.е. $f_0=6$.

Дополнительное пояснение того же. Каждая 1-грань инцидентна ровно 4 2-граням, 6 3-граням и 4 4-граням. (Двойственный аналог того, что все 3-грани — симплексы.) Каждая 2-грань инцидентна ровно трем 3-граням и трем 4-граням. Следовательно, $3f_2 = 4f_3$.

3.2 d = 6

В силу двойственности, $f_0 = f_5$. Следовательно, $f_1 = f_4$ и $f_2 = f_3$.

3.3 d = 6 и все 4-грани инцидентные одной из вершин являются симплексами

Рассмотрим вершинную фигуру Q. Так как у исходного многогранника все 4-грани являются симплексами, то у Q все 3-грани — симплексы. Так как у исходного 6-многогранника все фасеты попарно смежны, то Q, кроме того, двойственен к 2-смежностному.

Рассмотрим Q^* (двойственный к Q). Он 2-смежностен и, кроме того, каждая 1-грань образована ровно 4 4-гранями. Следовательно,

$$4f_3 = 3f_2 = 4f_1 \quad \text{и} \quad f_1 = f_0(f_0-1)/2.$$

Подставляем в формулу Эйлера, по аналогии с предыдущим разделом:

$$f_0 - f_0(f_0-1)/3 + f_4 = 2 \ \Rightarrow \ f_4 = 2 + f_0(f_0-4)/3. \tag{1}$$

С другой стороны, каждая фасета (4-многогранник) содержит не менее 10 ребер, а каждое ребро образовано ровно 4 фасетами:

$$10f_4 \le 4f_1 \ \Rightarrow \ f_4 \le f_0(f_0-1)/5.$$

Подставляя вместо f_4 правую часть формулы 1, получаем

$$2 + f_0(f_0-4)/3 \le f_0(f_0-1)/5.$$

Следоватедльно, $f_0 \le 6$. Значит Q — симплекс, а исходный многогранник имеет ровно 7 вершин (тоже симплекс).

3.4 d = 6 и хотя бы одна фасета симплициальна

Так как у исходного 6-многогранника каждая 2-грань инцидентна ровно четырем фасетам (5-граням), то у каждой его фасеты F каждая 2-грань инцидентна ровно трем фасетам (4-граням).

Итак, F — 5-мерный 2-смежностный симплициальный многогранник у которого каждая 2-грань инцидентна ровно трем 4-граням и ровно трем 3-граням. Причем F — не симплекс. Тогда

$$f_4(P) \geq \sum_{i=0}^{2}(6-2i)\binom{n-7+i}{i} = 6+4(n-6)+(n-5)(n-6) = n^2-7n+12, \quad (2)$$

где $n \geq 7$ — число вершин. А из второго условия (2-грань инцидентна ровно трем 4-граням) следует

$$5f_4 = 2f_3 \quad \text{и} \quad 10f_4 = 3f_2.$$

Подставляя последнее в формулу Эйлера, получаем

$$f_0 - f_1 + \frac{10}{3}f_4 - \frac{5}{2}f_4 + f_4 = 2.$$

Откуда

$$f_4 = (3n^2 - 9n + 12)/11.$$

Учитывая (2), получаем $n \leq 6$.

3.5 d = 6. Свойства вершинной фигуры 5-грани

Вершинная фигура (4-многогранник) фасеты 6-мерного (2,2)-многогранника обладает следующими свойствами.

1. Все 2-грани — симплексы.

2. Каждая 1-грань инцидентна ровно трем фасетам (3-граням).

Следовательно, $3f_2 = 3f_1$. А с учетом формулы Эйлера (для 4-многогранника), $f_0 = f_3$.

Значит, для каждой вершины 5-мерной грани F число инцидентных ей ребер совпадает с числом инцидентных ей 4-граней. Отсюда для граней F верно

$$f_0(f_0-1) = f_4 k,$$

где k — среднее число вершин в 4-грани. Т.е.

$$f_4 = 2f_1/k.$$

Если подставить в формулу Эйлера, то получим

$$f_0 - f_1 + f_2 - \frac{3}{4}f_2 + 2f_1/k = 2.$$

Откуда

$$f_2 = 8 - 4f_0 + 4f_1(1-2/k). \quad (3)$$

3.6 $\mathbf{d = 6}$. Свойства реберной фигуры 5-грани

Реберная фигура 5-грани является 3-мерным простым многогранником. Следовательно, числа вершин v, ребер e и граней f этой фигуры связаны соотношениями: $f = 2 + v/2$, $e = 3v/2$. Откуда получаем, что для каждого ребра 5-грани число инцидентных 3-граней равно $3/2$ от 2-граней, а число 4-граней равно $2 + f_2/2$, где f_2 — число инцидентных 2-граней.

Теперь, опираясь на уравнение (3) и фиксируя диапазон значений k, можно сделать оценку числа 2-граней, инцидентных ребру. Допустим, это число (приближенно) равно 7. Тогда число 4-граней, инцидентных ребру, равно 2+7/2. Так как число ребер в 4-грани приблизительно равно $k(k-1)/2$, получаем (очень приближенно)

$$f_4 k(k-1)/2 \approx (2 + 7/2) f_1 = (2 + 7/2) f_4 k/2.$$

Откуда можно сделать оценку для k и сравнить ее с исходным диапазоном. Но в этих рассуждениях очень много приближений!

4 Матрица инциденций $(2, 2)$-многогранника

Попытаться построить не диаграмму Гейла, а матрицу инциденций вершин-гиперграней 2-смежностного многогранника, двойственный к которому также 2-смежностен. Т.е. эта матрица должна удовлетворять всем известным ограничениям и обладать нужными свойствами:

1. Пересечение любых двух строк не содержится ни в какой другой строке. Альтернативная формулировка, если говорить не на языке единичек в матрице, а на языке нулей. Тогда для любой пары строк объединение их нулей $X \cup Y$ не содержит в себе целиком нули Z любой другой строки. $\forall X, Y, Z \; Z \nsubseteq X \cup Y$.

2. Пересечение любых двух столбцов не содержится ни в каком другом столбце.

3. Число единиц в каждой строке (и в каждом столбце) должно быть не менее 8. Пояснение: как известно, такой многогранник должен быть как минимум 6-мерным. Если он 7-мерный, то грань с 7 вершинами — симплекс, а значит многогранник имеет ровно 7 фасет, т.е. является симплексом. Если многогранник 6-мерный, то грань с 7 вершинами может быть только одного из двух типов: симплициальна (12 фасет), либо пирамида над симплициальным многогранником (4-мерным 9-фасетником). Случай симплициальной фасеты разобран в разделе 3.4. Если же 5-грань — пирамида, то она имеет ровно 10 фасет. Значит, 6-многогранник имеет 11 фасет (одного и того же комбинаторного типа) и 11 вершин. Но каждая фасета имеет уникальный ридж — основание пирамиды. Значит общее число фасет

должно быть четным — противоречие! (Можно подсчитать число риджей (и других граней), делая это и для самого многогранника и двойственного к нему и не забывая, что в 6-й размерности у такого многогранника число фасет и вершин должно совпадать.)

Единственный тривиальный пример матрицы инциденций многогранника с нужными свойствами — симплекс:

```
0 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1
1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 0
```

Пример матрицы инциденций гиперграней-вершин двойственного к 2-смежностному многогранника:

```
0 0 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 0 0 1 1 1
1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 1 0 1 1 0 1 1
1 0 1 1 0 1 1 0 1
1 1 0 1 1 0 1 1 0
```

Нетрудно проверить, что пересечение (единиц) каждой пары строк не содержится ни в какой другой строке. Или, что то же самое, объединение нулей любых двух строк не содержит в себе целиком нули для каждой третьей строки С другой стороны, пересечение первого и последнего столбцов содержится в третьем столбце.

Можно попробовать взять на вооружение этот пример, выбирая тройки (четверки…) нулей, в соответствии с тем же принципом.

Еще пример матрицы инциденций для 2-смежностного 7-многогранника с 14 вершинами и 16 гипергранями (для наглядности оставлены только нули):

```
0 0 0 0 0 0 0
              0 0 0 0 0 0 0
0 0 0         0
0     0 0       0
0         0 0     0
  0   0   0         0
  0     0   0         0
    0 0     0           0
    0   0 0               0
0             0 0 0
  0           0     0 0
```

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & & & & & 0 & & & & & 0 & 0 \\
 & 0 & & & & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & & & & 0 & 0 & & & 0 \\
 & & & & 0 & & & 0 & & 0 & 0 &
\end{array}$$

Можно либо описать свойства матриц отдельно для столбцов, отдельно для строк. Либо то же самое описывать на языке подмножеств:

1. Для любых трех подмножеств X, Y, Z найдется z: $z \in Z$, но $z \notin X$ и $z \notin Y$.

2. Для любых трех элементов x, y, z найдется Z: $z \in Z$, но $x \notin Z$ и $y \notin Z$.

Иными словами, для любых трех строк всегда найдутся три столбца такие, что на пересечении этих строк и столбцов будет матрица с тремя нулями типа (с точностью до перестановок строк и столбцов)

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
 & 0 & \\
 & & 0
\end{array}$$

Аналогично, для любых трех столбцов всегда найдутся три строки такие, что на пересечении будет виден такой (см. выше) паттерн. Вполне возможно, что уже этого достаточно для того, чтобы доказать, что единственный подходящий вариант — симплекс.

Формулировка этих свойств очень близка к задаче о покрытиях прямоугольниками.

Внимание! Вот пример матрицы с указанными свойствами.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
0 & & & 0 & & & 0 & & \\
 & 0 & & & 0 & & & 0 & \\
 & & 0 & & & 0 & & & 0 \\
0 & & & & 0 & & & & 0 \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & & & & 0 &
\end{array}$$

5 Что уже известно

Пусть $P = P(d, n)$ — 2-смежностный d-многогранник на n вершинах. И пусть f — число его гиперграней. Тогда:

1. Известно [2], что $f \geq d + 5$ для 2-смежностного многогранника. Это означает, что интересные случаи следует искать на диаграммах размерности 5 и выше.

2. $f \geq n$ для 2-смежностного d-многогранника при $d \leq 6$ [2]. Это означает, что разность между числом вершин и размерностью диаграммы Гейла должна быть не меньше 8.
3. Для $n = d + 2$ минимальное значение разности $f - n = 3$ достигается на 1-мерной диаграмме Гейла: концы отрезка с кратностью 3. Ей соответствует 4-мерный многогранник с 6 вершинами и 9 гипергранями (симплексами).
4. Для $n = d + 3$ минимальное значение разности $f - n = 4$ достигается на диаграмме Гейла на вершинах правильного 8-угольника. Ей соответствует 5-мерный многогранник с 8 вершинами и 12 гипергранями (8 симплексов и 4 6-вершинные грани).
5. Для $n = d + 4$ точное значение минимума разности $f - n$ неизвестно. Лучший из известных примеров диаграммы Гейла такой: вершины тетраэдра и середины его ребер. Соответствует 6-мерному многограннику с 10 вершинами и 14 гипергранями (5 симплексов, 6 7-вершинных и 3 8-вершинных). Пример g-файла, хранящего соответствующую диаграмму
```
3 10
 1  1  1
-3  1  1
 1 -3  1
 1  1 -3
-1  1  1
 1 -1  1
 1  1 -1
-1 -1  1
-1  1 -1
 1 -1 -1
```
6. Для $d = 7$ известен пример 2-смежностного многогранника с 14 вершинами и 16 гипергранями (два симплекса и 14 10-вершинных). Диаграмма Гейла для него представляет собой вершины 6-мерного симплекса (первые семь строк) и середины некоторых 3-мерных граней. Координаты середин 3-граней умножены на 4 для того, чтобы избежать дробей. Свойства диаграммы при этом не нарушаются.
```
6 14
-1 -1 -1 -1 -1 -1
 6 -1 -1 -1 -1 -1
-1  6 -1 -1 -1 -1
-1 -1  6 -1 -1 -1
-1 -1 -1  6 -1 -1
-1 -1 -1 -1  6 -1
-1 -1 -1 -1 -1  6
-4 -4  3  3  3  3
 3  3 -4 -4  3  3
 3  3  3  3 -4 -4
-4  3 -4  3 -4  3
```

```
-4  3  3 -4  3 -4
 3 -4  3 -4 -4  3
 3 -4 -4  3  3 -4
```

Среди 35 3-граней, а точнее, противоположных им 2-граней (треугольников), выбираются 7 штук таким образом, чтобы каждое ребро исходного симплекса попало ровно в один такой треугольник. Так как всего ребер 21, то треугольников (и противоположных им тетраэдров) набирается ровно 7. Т.е. выполняется некоторое свойство симметрии.

7. Набор из $d+2$ пар вершин отрезков, середина которых — в начале координат. Если отрезки находятся в общем положении, то соответствующий многогранник будет иметь $2d+4$ вершины и $3d+6$ гиперграней. Один из способов построения — расссмотреть гиперплоскость с одной стороны от начала координат и построить в ней циклический многогранник. Противоположные точки определятся автоматически.

6 Результаты экспериментов

6.1 3d-диаграммы

1. Вершины октаэдра с кратностью 3. Итого: 18 вершин и 27 гиперграней.
2. Вершины симплекса с кратностью 3. Итого: 12 вершин и 81 гипергрань.
3. Вершины 3-куба образуют 1-смежностную диаграмму.
4. Середины ребер 3-куба. Итого: 12 вершин и 20 гиперграней.
5. Вершины и середина нижней грани 3-куба и середины ребер верхней. Итого: 9 вершин и 18 гиперграней (12 симплексов и 6 с одной доп. вершиной).

```
3 9
 0  0 -1
-1 -1 -1
-1  1 -1
 1 -1 -1
 1  1 -1
 0  1  1
 1  0  1
 0 -1  1
-1  0  1
```

6. Три треугольника

```
3 9
-1 -1 -1
 0  1 -1
 1  0 -1
-1  0  0
 0 -1  0
 1  1  0
```

```
-1 -1  1
 0  1  1
 1  0  1
```

Итого: 9 вершин и 22 гиперграни (18 симплексов и 6 с одной доп. вершиной).

7. Пятиугольная антипризма

```
3 10
 0 -1 -1
 0  1 -1
-1  0 -1
 1  0 -1
-1 -1 -1
 0 -1  1
 0  1  1
-1  0  1
 1  0  1
 1  1  1
```

Итого: 10 вершин и 15 гиперграней.

6.2 4d-диаграммы

1. Середины ребер симплекса или, что то же самое, середины 2-граней. Итого: 10 вершин и 22 гиперграни (12 симплексов, 10 с доп. вершиной).
2. Вершины симплекса и середины ребер одного из гамильтоновых циклов: 1-смежностен.
3. Двойственный к 2-смежностному 4-многограннику на 6 вершинах и 9 гипергранях.

```
4 9
 1  0  0  0
 0  1  0  0
-1 -1  0  0
 0  0  1  0
 0  0  0  1
 0  0 -1 -1
-1  0 -1  0
 0 -1  0 -1
 1  1  1  1
```

6.3 5d-диаграммы

1. Середины ребер симплекса. Итого: 15 вершин и 25 гиперграней (10 симплексов и 15 с доп. тремя вершинами).
2. Середины 2-граней 5d-симплекса. Итого: 3-смежностный, 20 вершин и 70 гиперграней.

6.4 6d-диаграммы

1. Середины ребер симплекса. Итого: 4-смежностный, 21 вершина и 717 гиперграней.

6.5 7d-диаграммы

1. Середины ребер симплекса, но только тех, которые образуют кубический подграф. Всего 12 вершин. Сами по себе — 0-смежностны. А вместе с вершинами симплекса дают 2-смежностный многогранник со 108 гипергранями. Если же заменить середины ребер на противоположные вершины (поменять знак), то получаем 2-смежностный многогранник с 62 фасетами.

Один из общих выводов такой: если есть альтернатива выбрать середины k-граней или же середины (d-k-1)-граней (за счет смены знака), то обычно лучше получается с гранями большей размерности.

7 Идеи перебора диаграмм Гейла (23-09-2015)

0. (29-08-2017) **Важное свойство диаграммы Гейла.** Если мы добавляем одну точку к диаграмме Гейла, то возможны две ситуации. Если эта точка попадает в центр, то получается пирамида, основанием которой является исходный многогранник P. Если же не в центр, то получается что-то вроде пирамиды, у которой основание P разделяется на куски — новые фасеты нового многогранника. Таким образом, новая вершина становится смежной со всеми старыми, а у старых вершин, возможно, появляются новые ребра. Можно, например, взять диаграмму Гейла, у которой все кофасеты попарно смежны (причем это не обязательно диаграмма Гейла многогранника, это может быть лишь заготовка) и добавлять к ней новые точки, проверяя смежностность лишь для новых (и новых со старыми) кофасет. Например, можно взять готовую диаграмму Гейла для многогранника, двойственного к 2-смежностному, и добавлять к ней новые точки. Внимание: удвоение любой вершины, инцидентной как минимум двум кофасетам, приводит к тому, что в многограннике появляются две несмежные кофасеты: f_1 и $f_2 \cup v_{\mathrm{new}} \setminus v_{\mathrm{old}}$ (их объединение содержит f_2), где f_1, f_2 — старые кофасеты, v_{old} — старая инцидентная им вершина, v_{new} — новая метка.

1. Можно перебирать диаметрами. Тогда в d-мерной диаграмме должно быть d+2 таких диаметра. Любые d-1 из них образуют гиперплоскость. Остаются 3, концы которых лежат в разных полупространствах. Не понятно, насколько большим может быть число кофасет.

2. Так как желательно избегать вершин, инцидентные фасеты (в многограннике) которых — симплексы, то можно для каждых d-1 точек диаграммы потребовать, чтобы либо какое-то их подмножество образовывало кофасету, либо нашлась бы еще одна вершина, что все эти d точек вместе образовывали бы кофасету. Т.е. можно в начале перечислить все наборы точек, образующих кофасе-

ты. А потом для каждого выбираемого (в процессе перебора) набора подбирать недостающие точки и удалять все, что входит в данную гиперплоскость.

3. Можно еще попробовать сделать программу, которая на входе требует файл с описанием вполне конкретной диаграммы и вычисляет для него смежностность и число фасет.

4. !!! Берем какой-нибудь (простой в обоих смыслах) многогранник с большим числом вершин и малым числом фасет. Рассматриваем его диаграмму Гейла и добавляем вершин (или увеличиваем метки) так, чтобы он стал 2-смежностным. Внимание! Если просто удвоить метки, то число фасет возрастет суперэкспоненциально.

5. Продолжение идеи 1. Если на поверхности d-мерного шара выбрать (случайно) d+2 точки и добавить к ним диаметрально противоположные, то получим 2-смежностную диаграмму. Вопрос: сколько в среднем появится симплициальных кофасет. Для этого нужно ответить на следующий вопрос. Выберем на поверхности шара случайно d точек. Натянем на них коническую оболочку (центр шара в нуле). Пересечение ее с шаром - некий сектор. Вопрос - каким в среднем окажется объем этого шара. Точнее, как он будет расти с увеличением размерности. Чем выше объем, тем выше вероятность того, что в него попадут оставшиеся 2 диаметра. На самом деле, видимо, просто нужно правильно расположить эти точки на сфере. Например все впихнуть в окрестность полюса, или в пояс (на экваторе), или еще как-нибудь. Например взять небольшой пятачок в районе полюса и нарисовать там циклический многогранник, точнее, (d-1)-многогранник на d+2 вершинах, обладающий особыми свойствами. Этот многогранник лежит в некоторой гиперплоскости. Важным также является то, где располагается центр (полюс). Например, накидать точки на края окружности (сферы) в окрестности полюса. Для упрощения, можно накидывать точки на плоскость вокруг перпендикуляра, направленного к центру сферы.

6. Для d-мерного шара надо выбирать не d+2 точки, а некоторые линейные подпространства. Скажем, в d=6 можно вместо диаметров выбирать 5-мерные симплексы с центром в нуле. Тогда, если они все (и их вершины) в общем положении, то их достаточно взять 2 штуки. Неверно! У любого регулярного симплекса можно отсечь одну вершину плоскостью, проходящей через центр. Хотя можно подобрать общее пересечение двух симплексов так, чтобы оно проходило правильно.

7. Диаграммы Гейла для двойственных к 2-смежностным многогранников обязаны иметь размерность не менее 4. Число риджей для каждой фасеты такого многогранника велико. Это означает, что его фасеты в принципе не могут быть симплексами, так как у них большое число вершин. Значит, все кофасеты в диаграмме Гейла имеют малую размерность, существенно меньше размерности всей диаграммы.

8. И число вершин и число фасет (2,2)-смежностного d-многогранника не может быть меньше, чем d+5. (В силу двойственности.) Лемма. НИ ОДНА из фасет такого многогранника не может быть симплексом. Док-во Предположим, что у (2,2)-смежностного d-многогранника одна из фасет является симплек-

сом. Значит, у него ровно d+1 фасета. (Так как у фасеты-симплекса ровно d «границ»-фасет (риджей)). Тогда этот многогранник - симплекс. Следовательно, у (2,2)-смежностного многогранника все фасеты - не симплексы. И при этом, все фасеты гарантированно 2-смежностны. Док-но. Следовательно, число вершин у каждой фасеты не может быть меньше d+4. (Похоже, здесь ошибка, так как фасеты (2,2)-многогранника не обязаны сами быть (2,2)-многогранниками). Т.е. кофасеты в диаграмме Гейла должны иметь размерность (хотя бы на единицу) меньше максимально возможной.

9. По набору кофасет (точнее, содержащихся в них вершин) очевидным образом строится матрица инциденций вершин-гиперграней, а уже по ней легко идентифицируются различные (все) комбинаторные свойства многогранника.

10. Отрезок (или любой другой симплекс) с удвоенными метками означает, что ридж-граф соответствующего многогранника будет неполным. Например, в диаграмме есть отрезок с метками 1, 1', 2, 2'. Тогда (1, 2), (1, 2'), (1', 2), (1', 2') — кофасеты, а (1, 2, 2'), (1', 2, 2'), (1, 1', 2), (1, 1', 2') — кориджи. То есть кофасеты (1, 2) и (1', 2') (а также (1, 2') и (1', 2)) — не смежны. Таким образом, если диаграмма обладает высокой степенью симметрии (что очень правдоподобно для эксклюзивных примеров), то она не может иметь кратных меток.

11. Достаточно многообещающими являются варианты перебора в качестве диаграмм Гейла различных подмножеств центров граней куба или симплекса. У d-куба всего 3^d граней из которых нужно исключить сам куб и пустое множество. У симплекса — 2^d граней. Симплекс удобнее представлять в каноническом виде $\{x \in \mathbb{R}^d_+ \mid \langle x, 1\rangle = 1\}$. Тогда вместо центров граней можно рассматривать проекции вершин 0/1-куба на гиперплоскость $\langle x, 1\rangle = 1$. Прежде всего нужно перебрать различные подмножества, отвечающие свойству симметрии — расстояние между любыми двумя точками одинаково (или же, более мягкий вариант, для каждой точки вектор расстояний от нее до остальных точек одинаков). Далее эти подмножества можно комбинировать. Если в таком подмножестве встречается полноразмерный симплекс для которого центр диаграммы является внутренней точкой, то ридж-граф соответствующего многогранника точно будет неполным. То есть похоже, что желаемые подмножества должны состоять из небольшого числа точек. В этой связи интересно и полезно понять, каким образом устроена 6-мерная диаграмма, точки которой разбиваются на два подмножества, каждое из которых является множеством вершин полноразмерного симплекса (диаграмма соответствует 2-смежностному 7-многограннику с 14 вершинами и 16 гипергранями (две кофасеты по 7 вершин и 14 кофасет по 4 вершины, см. матрицу инциденций выше)). В частности, множество точек этой диаграммы представляет собой объединение вершин четырех 3-мерных симплексов. Но, что важно, это **нерегулярные** симплексы. То есть нужно, похоже, просто напросто перебирать различные маломерные симплексы, для которых центр диаграммы является внутренней точкой.

12. Нужно проанализировать и выявить свойства, которыми должны обладать диаграммы Гейла для многогранников с полным ридж-графом. А именно, выпуклая оболочка объединения любых двух кофасет должна содержать

центр диаграммы внутри. Если же из этого объединения выкинуть хотя бы одну точку, то центр диаграммы должен оказываться на границе соответствующей выпуклой оболочки. Гипотеза (о пересечении кофасет для двойственного к 2-смежностному многогранника): кофасеты должны пересекаться только в центре диаграммы. Похоже, что эта гипотеза верна, потому как иначе можно вместо одной из кофасет рассмотреть её грань, пересекающуюся с другой кофасетой. Очевидное требование: ни одна точка диаграммы не может лежать внутри выпуклой оболочки любых других точек (потому что все точки диаграммы можно расположить на сфере), за исключением совпадающих и кратных точек.

13. Пример матрицы инциденций гиперграней-вершин двойственного к 2-смежностному многогранника:

```
0 0 0
      0 0 0
            0 0 0
0     0     0
  0     0     0
    0     0     0
```

Диаграмма Гейла имеет размерность 4, 9 точек и 6 кофасет-треугольников. Причем три треугольника не имеют общих точек. Это похоже на пример, опровергающий гипотезу. Поэтому нужно обязательно **изучить диаграммы Гейла для двойственных к 2-смежностным многогранникам.** И начать с только что описанного минимального примера.

14. (?) Если Гипотеза о пересечении кофасет для двойственного к 2-смежностному многогранника верна (предыдущий пункт), то кофасеты либо содержат кратные метки (но тогда некоторые из них будут несмежны друг с другом, см. п. 10), либо содержат кофасеты-отрезки, за счет которых достигается достаточная степень смежностности.

Дополнительно.

В [4, p. 39] описан интересный способ построения l-смежностных многогранников. This is a way to construct an l-neighborly polytope. Consider the Euclidean space $\mathbb{R}^l$ as a hyperplane in $\mathbb{R}^{l+1}$ of the form $(x, 1)$, where $x \in \mathbb{R}^l$. Consider the map $\phi\colon \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}^{(l+1)^2}$, $x \mapsto x \otimes x$. In other words, to every vector $x \in \mathbb{R}^{l+1}$ we correspond the matrix $a = (a_{ij})$: $a_{ij} = x_i x_j$. Then the image of $\mathbb{R}^l$ is contained in a d-dimensional affine subspace in $\mathbb{R}^{(l+1)^2}$, where $d = \binom{l+1}{2} + l$. Finally, iff $v_1, \dots, v_m$ are some points in $\mathbb{R}^l$ such that no $l+1$ of them belong to the same hyperplane in $\mathbb{R}^l$ then the convex hull of their images $\phi(v_i)$ is an l-neighborly d-dimensional polytope.

Список литературы

[1] Skeleton: Implementation of Double Description Method. `http://www.uic.unn.ru/~zny/skeleton/`

[2] Максименко А.Н. О числе фасет 2-смежностного многогранника // Модел. и анализ информ. систем, 17:1 (2010), 76–82.

[3] Maksimenko A. On the Lower Bound for the Number of Facets of a k-Neighborly Polytope // arXiv:1509.00362

[4] Barvinok A. Math. 669: Combinatorial Theory of Polytopes with Applications to Optimization On the Lower Bound for the Number of Facets of a k-Neighborly Polytope. Winter term, 1995.