Fast & Furious

Misha DOPRE | Alexis DUPONT | Adem BRAHIM | Julian COTTALORDA

Mécanique

Livrable 2

Table des matières :

- I) Contexte
- II) Le découpage du circuit
- III) Les calculs des étapes
- IV) Conclusion

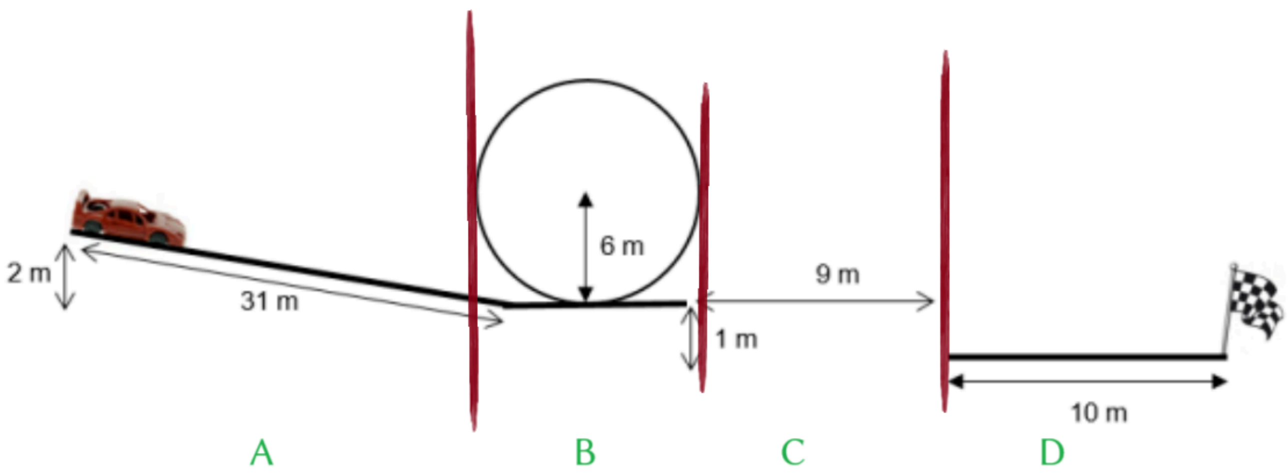
I) Contexte

- **Général :** Dom Toretto est défié par Owen Shaw dans une course comprenant plusieurs défis techniques : une piste d'élan (2 m de hauteur, 31 m de longueur), un looping (6 m de rayon), un saut au-dessus d’un ravin (9 m de large avec 1 m de dénivelé négatif), et une piste horizontale finale de 10 m. L’objectif est de compléter la course en moins de 8 secondes, sans endommager la voiture.

Tej Parker, chargé de sélectionner le véhicule idéal dans la collection de Dom, doit réaliser une étude théorique des performances nécessaires pour chaque segment du circuit. Cela inclut les calculs de vitesse minimale pour réussir chaque étape, l’évaluation des contraintes mécaniques, et la simulation des performances des différents modèles. Une attention particulière sera portée à la Dodge préférée de Dom, avec la possibilité d’y apporter des modifications si nécessaire.

- **Dans ce Livrable :** Notre équipe se concentrera sur les repères et référentiels utilisés, les différentes équations du modèle des 4 parties du circuit (la pente, le looping, le ravin et la ligne droite).

II) Le découpage du circuit

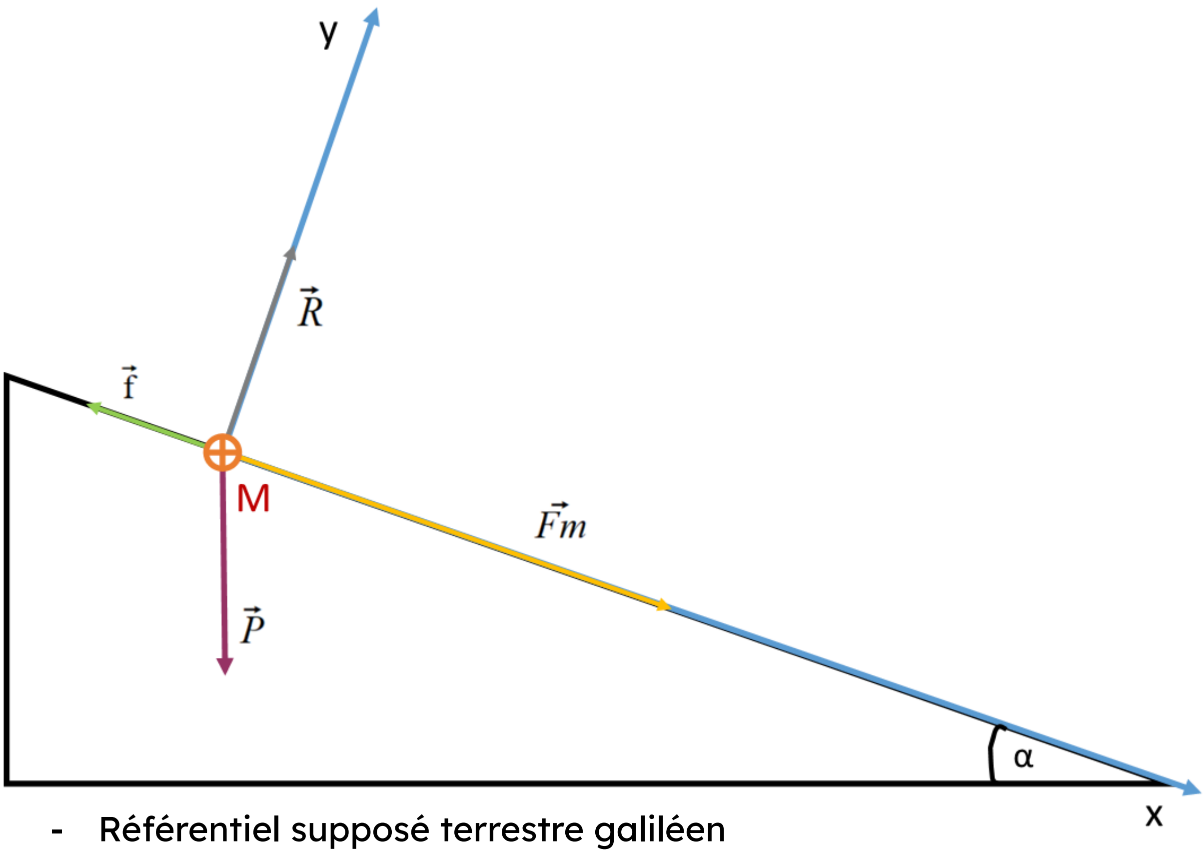


Le circuit est alors découpé en quatre parties :

- A) : La pente
- B) : Le looping
- C) : Le saut
- D) : La piste d’arrivée

III) Les calculs des étapes

A) La pente



- Référentiel supposé terrestre galiléen
- Repère cartésien (x; y)

Légendes :

- M : Centre de gravité de la voiture
- x : axe des abscisses
- y : axe des ordonnées
- α : angle de la pente

Vecteurs :

- Vecteur f : f = Fa + Fr (f = frottements aérodynamiques + frottements des roulements)
- Vecteur $\vec{P}$: P = m*g (poids = masse * cste de gravitation)
- Vecteur $\vec{R}$: Résistance normale
- Vecteur $\vec{Fm}$: Fm (Force motrice)

On prend en compte les frottements.

On néglige la portance dans la pente.
Fa : ½**Cx**p*S*v²

Fa : $\frac{1}{2} \cdot Cx \cdot p \cdot S \cdot v^2$
S : Surface avant du véhicule
p : densité de l'air

Somme des forces :

- P(P sin (α); - P cos (α))
- Fa (- Fa; 0)
- Fr (- Fr; 0)
- Fm (Fm; 0)
- R (0; R)

2ème loi de Newton

$\Sigma \vec{F_{ext}} = m.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{Fa} + \vec{Fr} + \vec{Fm} + \vec{R} = m.\vec{a}$

Axe Ox

ma = Psin(α) - Fa - Fr + Fm

a = Psin(α) - Fa - Fr + Fm / m

Axe Oy

0 = -Pcos(α) + R

Calcul du vecteur accélération

$$\vec{a}\begin{cases} ax(t) = \dfrac{P*sin(\alpha)-Fa-Fr+Fm}{m} \\ ay(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}\begin{cases} ax(t) = 0.5* \dfrac{m*g*sin(\alpha)-1/2*1.225*Cx*S*v^2-\mu*m*g*cos(\alpha)+Fm}{m} \\ ay(t) = 0 \end{cases}$$

On simplifie les m

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}\begin{cases} ax(t) = (\frac{-1/2*1.225*Cx*S*v^2+Fm}{m}) + g * sin(\alpha) - \mu * g * cos(\alpha) \\ ay(t) = 0 \end{cases}$$

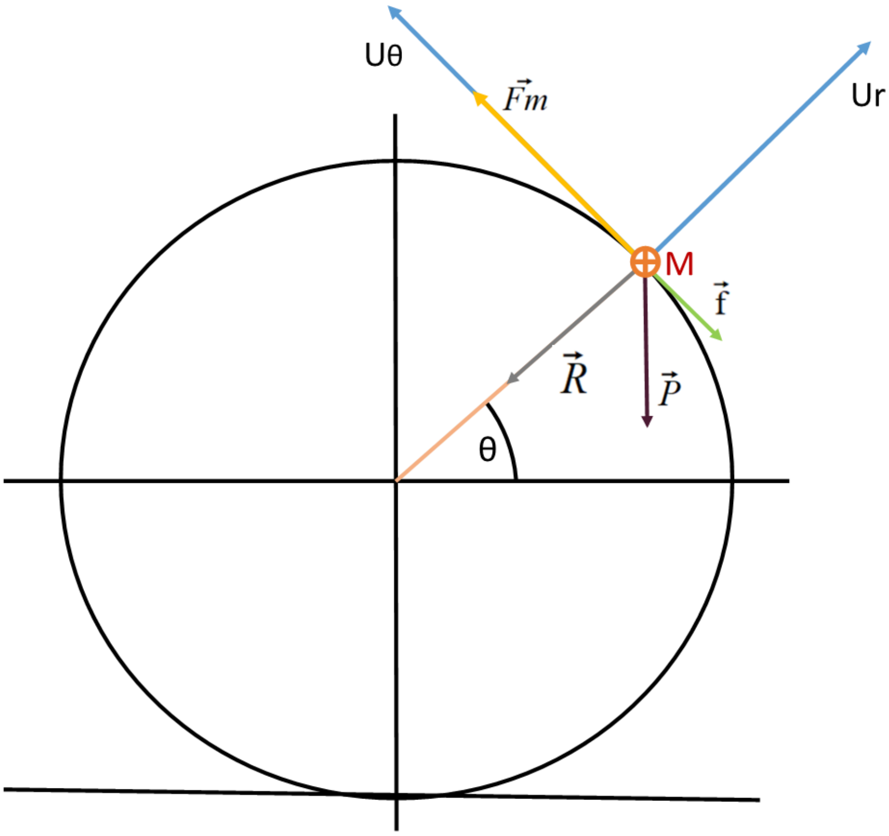
Calcul du vecteur vitesse

$$\vec{v}\begin{cases} vx(t) = [(\frac{-1/2*1.225*Cx*S*v^2+Fm}{m}) + g * sin(\alpha)-\mu * g * cos(\alpha)]*t+v0*cos(\alpha) \\ vy(t) = 0 \end{cases}$$

Calcul du vecteur position

$$\vec{OM}\begin{cases} x(t) = ½*((\frac{-1/2*1.225*Cx*S*v^2+Fm}{m})+g*sin(\alpha)-\mu*g*cos(\alpha))*t^2+(v0*cos(\alpha))*t+x0 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

B) Le looping



- Référentiel supposé terrestre galiléen
- Repère polaire

Légendes :

- M : Centre de gravité de la voiture
- Ur : axe radial au looping
- Uθ : axe tangent au looping
- θ : angle par rapport à l'axe de référence

Vecteurs :

- Vecteur $\vec{f}$: f = Fa + Fr (f = frottements aérodynamiques + frottements des roulements)
- Vecteur $\vec{P}$: P = m*g (poids = masse * cste de gravitation)
- Vecteur $\vec{R}$: Résistance normale
- Vecteur $\vec{Fm}$: Fm (Force motrice)

⚠ **Les frottements :**

On suppose que les frottements sur une même distance à une altitude de départ et d'arrivée similaires sont égaux.

$P = 2*\pi*r$
$P = 2*\pi*r$
$P \simeq 37.7$ m

Donc calculer les frottements du looping revient à calculer les frottements d'une ligne droite de 37.7 m car l'énergie mécanique se conserve (par des variations d'énergie cinétique et potentielle).

On cherche l'accélération en coordonnées polaires

$Ur = i\cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$U\theta = -i\sin(\theta) + j\cos(\theta)$

Vitesse : $R * (-i*\dot{\theta}*\sin(\theta)+j*\dot{\theta}+\cos(\theta)) = \vec{v}$

$\vec{v} = r*\dot{\theta}*(-i*\sin(\theta)+j*\cos(\theta))$
$\vec{v} = r*\dot{\theta}*U\theta$
$\vec{v} = r*\dot{\theta}*(-i\sin(\theta) + j\cos(\theta))$

On dérive donc :

$\vec{a} = r*(\ddot{\theta}(-i*\sin(\theta)+j*\cos(\theta))+\dot{\theta}*(-i*\dot{\theta}*\cos(\theta)-j*\dot{\theta}*\sin(\theta)))$
$\vec{a} = r*(\ddot{\theta}*U\theta+\dot{\theta}^2*(-Ur))$
$\vec{a} = r*\ddot{\theta}*U\theta-r*\dot{\theta}^2*Ur$

Passons au PFD :

$P(-P\cos(\theta);-P\sin(\theta));$
$R(-R; 0);$
$f(0; -f);$
$Fm(0; Fm);$

Pour Ur : $\Sigma \vec{Fext} = m*\vec{a}$

donc $-P*\cos(\theta)-R = m*\vec{a}$

$m*(-r*\dot{\theta}^2) = P*\cos(\theta)-R$

Pour Uθ : $\Sigma \vec{Fext} = m*\vec{a}$

$m*\vec{a} = -P*\sin(\theta)-F$

$m*r*\ddot{\theta} = -P*\sin(\theta)-F$

Accélération :

$$m\vec{a}\begin{cases} \mathbf{m}\ \vec{a}\ Ur = m*(-r*\dot{\theta}^2) = -P*\cos(\theta)-R \\ \mathbf{m}\ \vec{a}\ U\theta = m*r*\ddot{\theta} = -P*\sin(\theta)-\mu*R+Fm \end{cases}$$

Donc $R = - P*\cos(\theta) -m*r*\dot{\theta}^2$
Ainsi, $R = m (-g*\cos(\theta) - r *\dot{\theta}^2)$

$m*r*\ddot{\theta} = -m*g*\sin(\theta)-\mu*R+Fm$

$m*r*\ddot{\theta} = -m*g*\sin(\theta)-\mu*m(-g*\cos(\theta)-r*\theta^2)+Fm$

$r\ddot{\theta} = -g*\sin(\theta)-\mu*(-g*\cos(\theta)-r*\theta^2)+\frac{Fm}{m}$

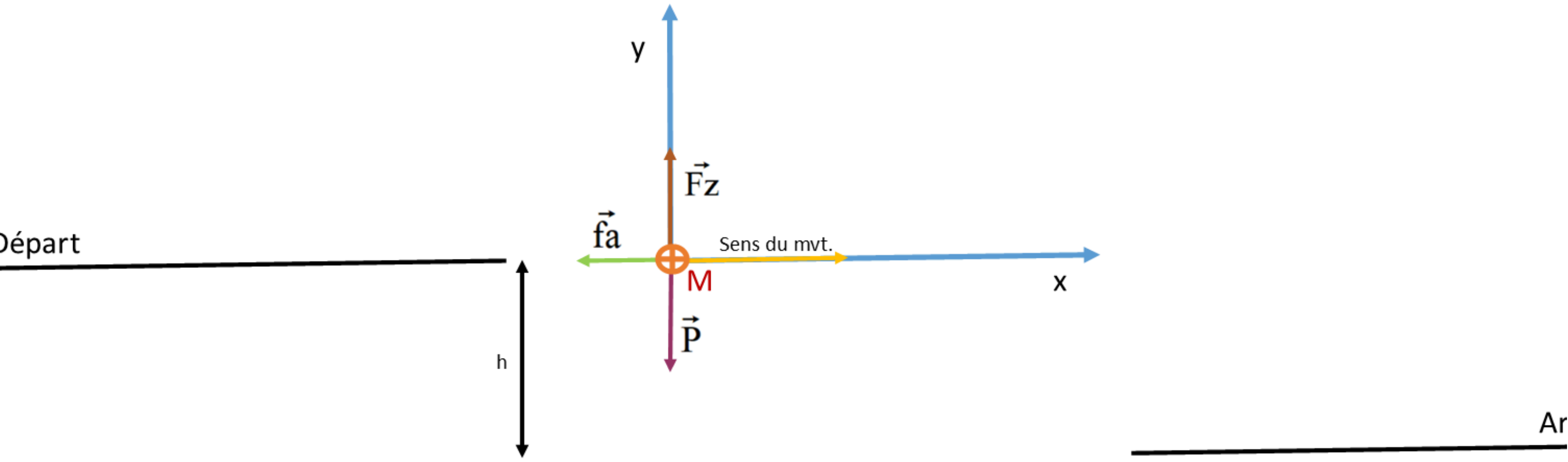
$\ddot{\theta} = \frac{-g*sin(\theta)}{r} + \frac{\mu*g*cos(\theta)}{r} + \mu\dot{\theta}^2 + \frac{Fm}{rm}$

Sachant que :

- $\ddot{\theta}$ = accélération polaire
- $\dot{\theta}$ = vitesse polaire
- θ = coordonnée polaire

Donc pour $\dot{\theta}$: On le fera à l'aide de python (livrable 3), grâce à la méthode d'Euler.

C) Le saut



- Référentiel supposé terrestre galiléen
- Repère cartésien

Légendes :

- M : Centre de gravité de la voiture
- x : axe des abscisses
- y : axe des ordonnées

- Sens du mouvement (même sens que la vitesse afin de déterminer la portance)

Vecteurs :

- Vecteur $\vec{Fa}$: Frottements aérodynamiques (On ne prend pas en compte les frottements des roulements)
- Vecteur $\vec{P}$: P = m*g (poids = masse * cste de gravitation)
- Vecteur $\vec{Fz}$: Force de portance

En x on ne garde que les frottements car la force motrice est nulle du fait qu'il n'y ait plus de contact avec la route il ne reste donc en abscisse que les frottements de l'air. Et en y $\Sigma \vec{Fext}$ = ~~m~~*$\vec{a}$ = ~~m~~*g

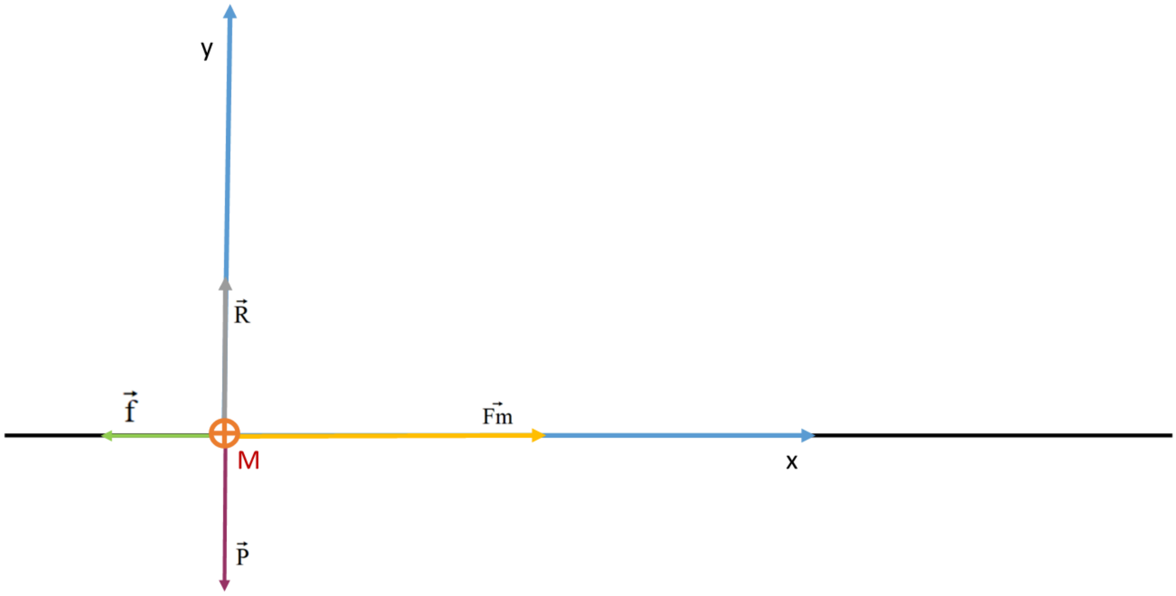
$$\vec{a} \begin{cases} ax(t) = -\tfrac{1}{2}*\rho\ air*Cx*Surface\ avant\ voiture*v^2 \quad = \text{traînée} \\ ay(t) = -g+\tfrac{1}{2}*\rho\ air*Cy*Surface\ dessous\ voiture*v^2 \quad = \text{portance} \end{cases}$$

On suppose ici que la voiture reste à plat pour simplifier les calculs de la portance sachant que la différence sera très faible et que l'on pourrait multiplier la portance par cos (angle moyen de la voiture) $\simeq$ 0.99 = 99% de la portance donc c'est négligeable

$$\vec{v} \begin{cases} vx(t) = (-1/2 *1.225*Cx*S\ avant\ voiture*v^2)*t+v0*\cos(\alpha) \\ vy(t) = (-g+\tfrac{1}{2}*1.225*Cy*S\ dessous\ voiture*v^2)*t+v0*\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \tfrac{1}{2}*(-\tfrac{1}{2}*1.225*Cx*S\ avant\ voiture*v^2)*t^2+v0*t+x0 \\ y(t) = \tfrac{1}{2}*(-g+\tfrac{1}{2}*1.225*Cz*S\ dessous\ voiture*v^2)*t^2+y0 \end{cases}$$

D) La piste d'arrivée



- Référentiel supposé terrestre galiléen
- Repère cartésien

Légendes :

- M : Centre de gravité de la voiture
- x : axe des abscisses
- y : axe des ordonnées

Vecteurs :

- Vecteur f : f = Fa + Fr (f = frottements aérodynamiques + frottements des roulements)
- Vecteur $\vec{P}$: P = m*g (poids = masse * cste de gravitation)
- Vecteur $\vec{R}$: Résistance normale
- Vecteur $\vec{Fm}$: Fm (Force motrice)

On utilise la 2nd loi de Newton :

$\Sigma\vec{F} = m*\vec{a}$ Donc $\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$

On va primitiver $\vec{a}$ (t) pour trouver $\vec{v}$ (t) puis la position OM.

Donc $\vec{a}$ (t) $\begin{cases} ax(t) = \frac{Fm - Fa - Fr}{m} \\ ay(t) = 0 \end{cases}$

L'accélération est nulle en y.

$\vec{a}$ (t) $\begin{cases} ax(t) = \frac{\vec{a}\,voiture - 1/2 *1.225*Cx*S*v^2 - \mu*m*g}{m} \\ ay(t) = 0 \end{cases}$

$\vec{v}$ (t) $\begin{cases} vx(t) = \left(\frac{\vec{a}\,voiture - 1/2*1.225*Cx*S*v^2 - \mu*m*g}{m}\right)*t+v0*\cos(\alpha) \\ vy(t) = 0 \end{cases}$

$\vec{OM}$ (t) $\begin{cases} x(t) = ½*\left(\frac{\vec{a}\,voiture - 1/2*1.225*Cx*S*v^2 - \mu*m*g}{m}\right)*t^2+(v0*\cos(\alpha))*t+x0 \\ y(t) = 0 \end{cases}$

IV) Conclusion

Dans ce livrable 2 nous avons pu établir les repères, référentiels utilisés, ainsi que les équations du modèle du mouvement de la voiture.
Dans le livrable 3 nous traiterons la simulation numérique afin de trouver le véhicule qui convient le mieux grâce à un code en python paramétrable.