

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1 (10.02)</b>	<b>4</b>
1.1	Задание для самостоятельной работы . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Лекция 2 (17.02)</b>	<b>5</b>
2.1	Расчётная сетка . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Лекция 3 (24.02)</b>	<b>6</b>
3.1	Структурированная расчётная сетка . . . . .	6
3.2	Метод конечных разностей. Уравнение Пуассона . . . . .	6
3.2.1	Постановка задачи . . . . .	6
3.2.2	Метод решения . . . . .	6
3.2.2.1	Нахождение численного решения . . . . .	6
3.2.2.2	Практическое определения порядка аппроксимации . . . . .	7
3.2.3	Программная реализация . . . . .	8
3.2.3.1	Функция верхнего уровня . . . . .	8
3.2.3.2	Детали реализации . . . . .	9
3.3	Задание для самостоятельной работы . . . . .	11
3.3.1	Одномерное уравнение Пуассона . . . . .	11
3.3.2	Двумерное уравнение Пуассона . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Лекция 4 (02.03)</b>	<b>13</b>
4.1	Форматы хранения разреженных матриц . . . . .	13
4.1.1	CSR-формат . . . . .	13
4.1.2	Массив словарей . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Лекция 5 (09.03)</b>	<b>17</b>
5.1	Решение СЛАУ . . . . .	17
5.1.1	Метод Якоби . . . . .	17
5.1.2	Метод Зейделя . . . . .	17
5.1.3	Метод последовательных верхних релаксаций (SOR) . . . . .	18
5.2	Задание для самостоятельной работы . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Лекция 6 (23.03)</b>	<b>22</b>
6.1	Метод конечных объёмов . . . . .	22
6.1.1	Уравнение Пуассона . . . . .	22
6.1.1.1	Обработка внутренних граней . . . . .	23
6.1.1.2	Учёт граничных условий первого рода . . . . .	24
6.1.2	Одномерный случай . . . . .	24
6.1.3	Сборка системы линейных уравнений . . . . .	25
6.1.3.1	Алгоритм сборки в цикле по ячейкам . . . . .	25
6.1.3.2	Алгоритм сборки в цикле по граням . . . . .	26

6.2	Задание для самостоятельной работы . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Лекция 7 (30.03)</b>	<b>28</b>
7.1	Граничные условия второго рода . . . . .	28
7.2	Граничные условия третьего рода . . . . .	28
7.2.1	Универсальность условий третьего рода . . . . .	29
7.3	Задание для самостоятельной работы . . . . .	29
<b>A</b>	<b>Формулы и обозначения</b>	<b>30</b>
A.1	Векторы . . . . .	31
A.1.1	Обозначение . . . . .	31
A.1.2	Набла–нотация . . . . .	31
A.2	Интегрирование . . . . .	33
A.2.1	Формула Гаусса–Остроградского . . . . .	33
A.2.2	Интегрирование по частям . . . . .	33
A.2.3	Численное интегрирование в заданной области . . . . .	34
A.3	Интерполяционные полиномы . . . . .	35
A.3.1	Многочлен Лагранжа . . . . .	35
A.3.1.1	Узловые базисные функции . . . . .	35
A.3.1.2	Интерполяция в параметрическом отрезке . . . . .	36
A.3.1.3	Интерполяция в параметрическом треугольнике . . . . .	39
A.3.1.4	Интерполяция в параметрическом квадрате . . . . .	41
A.4	Геометрические алгоритмы . . . . .	44
A.4.1	Преобразование координат . . . . .	44
A.4.1.1	Матрица Якоби . . . . .	44
A.4.1.2	Дифференцирование в параметрической плоскости . . . . .	45
A.4.1.3	Интегрирование в параметрической плоскости . . . . .	46
A.4.1.4	Двумерное линейное преобразование. Параметрический треугольник . . . . .	46
A.4.1.5	Двумерное билинейное преобразование. Параметрический квадрат . . . . .	47
A.4.1.6	Трёхмерное линейное преобразование. Параметрический тетраэдр . . . . .	47
A.4.2	Свойства многоугольника . . . . .	47
A.4.2.1	Площадь многоугольника . . . . .	47
A.4.2.2	Интеграл по многоугольнику . . . . .	49
A.4.2.3	Центр масс многоугольника . . . . .	49
A.4.3	Свойства многогранника . . . . .	50
A.4.3.1	Объём многогранника . . . . .	50
A.4.3.2	Интеграл по многограннику . . . . .	50
A.4.3.3	Центр масс многогранника . . . . .	50
A.4.4	Поиск многоугольника, содержащего заданную точку . . . . .	50
<b>B</b>	<b>Работа с инфраструктурой проекта CFDCourse</b>	<b>51</b>
B.1	Сборка и запуск . . . . .	52
B.1.1	Сборка проекта CFDCourse . . . . .	52

B.1.1.1	Подготовка . . . . .	52
B.1.1.2	VisualStudio . . . . .	52
B.1.1.3	VSCode . . . . .	54
B.1.2	Запуск конкретного теста . . . . .	55
B.1.3	Сборка релизной версии . . . . .	57
B.2	Git . . . . .	59
B.2.1	Основные команды . . . . .	59
B.2.2	Порядок работы с репозиторием CFDCourse . . . . .	60
B.3	Paraview . . . . .	62
B.3.1	Данные на одномерных сетках . . . . .	62
B.3.2	Изолинии для двумерного поля . . . . .	65
B.3.3	Данные на двумерных сетках в виде поверхности . . . . .	66
B.3.4	Числовых значения в точках и ячейках . . . . .	67
B.3.5	Векторные поля . . . . .	67
B.3.6	Значение функции вдоль линии . . . . .	69
B.4	Hybmesh . . . . .	72
B.4.1	Работа в Windows . . . . .	72
B.4.2	Работа в Linux . . . . .	72

# 1 Лекция 1 (10.02)

## 1.1 Задание для самостоятельной работы

1. Клонировать репозиторий `CFDCourse25` на компьютер, собрать проект и запустить программу `cfd25_test` (см. пункт [B.1](#))
2. В файле `cfd25_test.cpp` написать простой `TEST_CASE`, проверяющий результат простого арифметического действия (например,  $2 + 2$ ). О запуске тестов см. пункт [B.1.2](#)

## 2 Лекция 2 (17.02)

### 2.1 Расчётная сетка

TODO

## 3 Лекция 3 (24.02)

### 3.1 Структурированная расчётная сетка

TODO

### 3.2 Метод конечных разностей. Уравнение Пуассона

#### 3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается одномерное дифференциальное уравнение вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (3.1)$$

в области  $x \in [a, b]$  с граничными условиями первого рода

$$\begin{cases} u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{cases} \quad (3.2)$$

Необходимо:

- Запрограммировать расчётную схему для численного решения этого уравнения методом конечных разностей на сетке с постоянным шагом,
- С помощью вычислительных экспериментов подтвердить порядок аппроксимации расчётной схемы.

#### 3.2.2 Метод решения

##### 3.2.2.1 Нахождение численного решения

В области решения  $[a, b]$  введём равномерную сетку из  $N$  ячеек. Шаг сетки будет равен  $h = (b-a)/N$ . Узлы сетки запишем в виде сеточного вектора  $\{x_i\}$  длины  $N+1$ , где  $i = \overline{0, N}$ . Определим сеточный вектор  $\{u_i\}$  неизвестных, элементы которого определяют значение искомого численного решения в  $i$ -ом узле сетки.

Разностная схема второго порядка для уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.3)$$

Здесь  $\{f_i\}$  – известный сеточный вектор, определяемый через известную аналитическую функцию  $f(x)$  в правой части уравнения (3.1) как

$$f_i = f(x_i). \quad (3.4)$$

Аппроксимация граничных условий (3.2) первого рода даёт дополнительные сеточные уравнения

для граничных узлов

$$\begin{aligned} u_0 &= u_a, \\ u_N &= u_b \end{aligned} \tag{3.5}$$

Линейные уравнения (3.3), (3.5) составляют систему вида

$$\sum_{j=0}^N A_{ij} u_j = b_i, \quad i = \overline{0, N}$$

с матричными коэффициентами

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 0, j = 0; \\ 2/h^2, & i = \overline{1, N-1}, j = i; \\ -1/h^2, & i = \overline{1, N-1}, j = i-1; \\ -1/h^2, & i = \overline{1, N-1}, j = i+1; \\ 1, & i = N, j = N; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.6}$$

и правой частью

$$b_i = \begin{cases} u_a, & i = 0; \\ u_b, & i = N; \\ f_i, & i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Искомый вектор находится путём решения этой системы.

### 3.2.2.2 Практическое определения порядка аппроксимации

Порядок аппроксимации показывает скорость приближения численного решения к точному с уменьшением сетки. Поэтому для подтверждения порядка необходимо

- Знать точное решение,
- Уметь вычислять функционал (норму,  $\|\cdot\|$ ), характеризующий отклонение точного решения от численного,
- Сделать несколько расчётов на сетках с разной  $N$  и заполнить таблицу  $\|\{u_i - u^e(x_i)\}\|(N)$ ,
- На основе этой таблицы построить график в логарифмических осях и по углу наклона кривой сделать вывод о порядке аппроксимации.

Выберем произвольную функцию  $u^e$  (достаточно сильно изменяющуюся на целевом отрезке  $[a, b]$ ). Далее путём прямого вычисления определим параметры задачи  $f$ ,  $u_a$ ,  $u_b$  такие, для которых функция  $u^e$  является точным решением задачи (3.1), (3.2).

Зададимся числом разбиений  $N$  и решим задачу для выбранным параметрами. В результате определим сеточный вектор численного решения  $\{u_i\}$ .

В качестве нормы выберем стандартное отклонение. В интегральном виде для многомерной функции  $y(\mathbf{x})$  в области  $\mathbf{x} \in D$  оно имеет вид

$$||y(\mathbf{x})||_2 = \sqrt{\frac{1}{|D|} \int_D y(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}}. \quad (3.8)$$

Упрощая до одномерного случая

$$||y(x)||_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)^2 dx}.$$

Вычислим этот интеграл численно на введённой ранее равномерной сетке  $\{x_i\}$ :

$$||\{y_i\}||_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N w_i y_i^2},$$

где  $\{w_i\}$  – вес (или "площадь влияния")  $i$ -ого узла:

$$w_i = \begin{cases} h/2, & i = 0, N; \\ h, & i = 1, N-1, \end{cases}$$

такая что

$$\sum_{i=0}^N w_i = b - a.$$

Окончательно среднеквадратичная норма отклонения численного решения от точного запишется в виде

$$||\{u_i - u^e(x_i)\}||_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N w_i (u_i - u_i^e)^2}. \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Программная реализация

Тестовая программа для решения одномерного уравнения Пуассона реализована в файле `poisson_fdm_solve_test.cpp`.

В качестве аналитической тестовой функции используется

$$u^e = \sin(10x^2)$$

на отрезке  $x \in [0, 1]$ .

#### 3.2.3.1 Функция верхнего уровня

объявлена как

```
113 TEST_CASE("Poisson 1D solver, Finite Difference Method", "[poisson1-fdm]") {
```

В программе в цикле по набору разбиений `n_cells`



```
125 for (size_t n_cells: {10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000}){
```

создаётся решатель для тестовой задачи, использующий заданное число ячеек

```
127 TestPoisson1Worker worker(n_cells);
```

вычисляется среднеквадратичная норма отклонения численного решения от точного

```
130 double n2 = worker.solve();
```

полученное численное решение (вместе с точным) сохраняется в vtk файле

```
poisson1_n={10,20,...}.vtk
```

```
133 worker.save_vtk("poisson1_fdm_n=" + std::to_string(n_cells) + ".vtk");
```

а полученная норма печатается в консоль напротив количества ячеек

```
136 std::cout << n_cells << " " << n2 << std::endl;
```

В результате работы программы в консоли должна отобразиться таблица вида

```
--- [poisson1] ---
10 0.179124
20 0.0407822
50 0.00634718
100 0.00158055
200 0.000394747
500 6.31421e-05
1000 1.57849e-05
```

где первый столбец – это количество ячеек, а второй – полученная для этого количества ячеек норма. Нарисовав график этой таблицы в логарифмических осях подтвердим второй порядок аппроксимации (рис. 1).

Открыв один из сохранённых в процессе работы файлов vtk `poisson1_ncells=?.vtk` в paraview можно посмотреть полученные графики. В файле представлены как точное “exact”, так и численное решение “numerical” (рис. 2).

### 3.2.3.2 Детали реализации

Основная работа по решению задачи проводится в классе `TestPoisson1Worker`.

В его конструкторе происходит инициализация сетки (приватного поля класса) на отрезке  $[0, 1]$  с заданным разбиением `n_cells`:

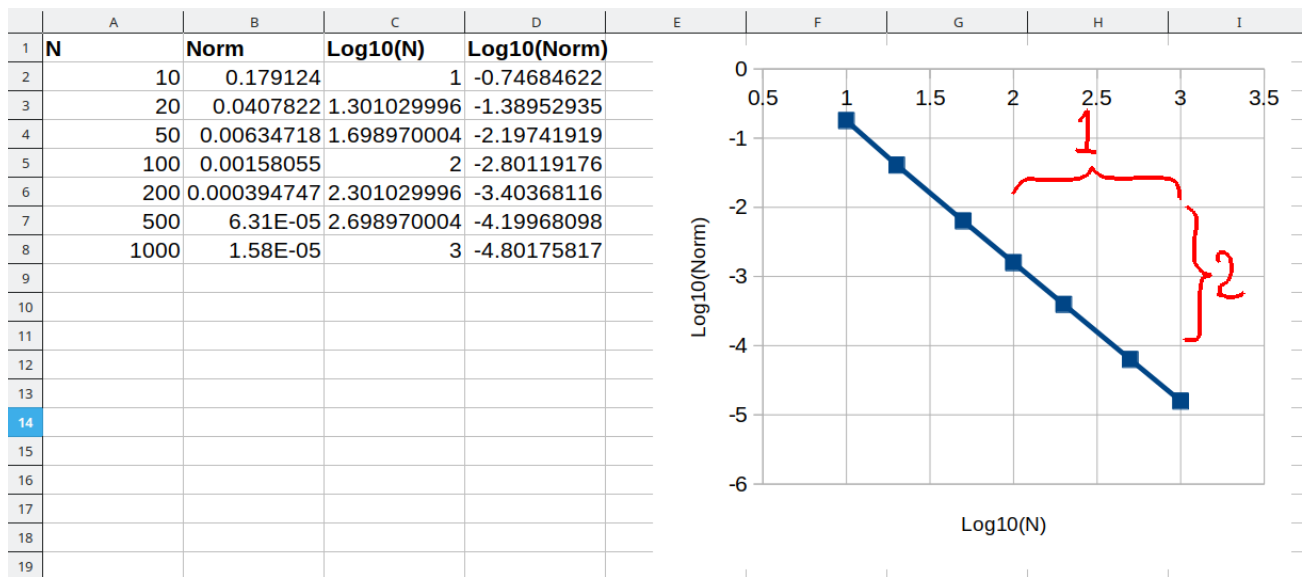


Рис. 1: Сходимость с уменьшением разбиения при решении одномерного уравнения Пуассона

```
15 class TestPoisson1Worker{
```

В методе

`solve()` производится численное решения задачи и вычисления нормы. Для этого последовательно

1. Строится матрица левой части и вектор правой части определяющей системы уравнений. Матрицы хранятся в разреженном формате CSR, удобном для последовательного чтения.
2. Вызывается решатель СЛАУ. Решение записывается в приватное поле класса `u`.
3. Вызывается функция вычисления нормы.

```
30 double solve(){
31     // 1. build SLAE
32     CsrMatrix mat = approximate_lhs();
33     std::vector<double> rhs = approximate_rhs();
34
35     // 2. solve SLAE
36     AmgcMatrixSolver solver;
37     solver.set_matrix(mat);
38     solver.solve(rhs, u);
39
40     // 3. compute norm2
41     return compute_norm2();
42 }
```

Функции нижнего уровня (используемые в методе `solve`):

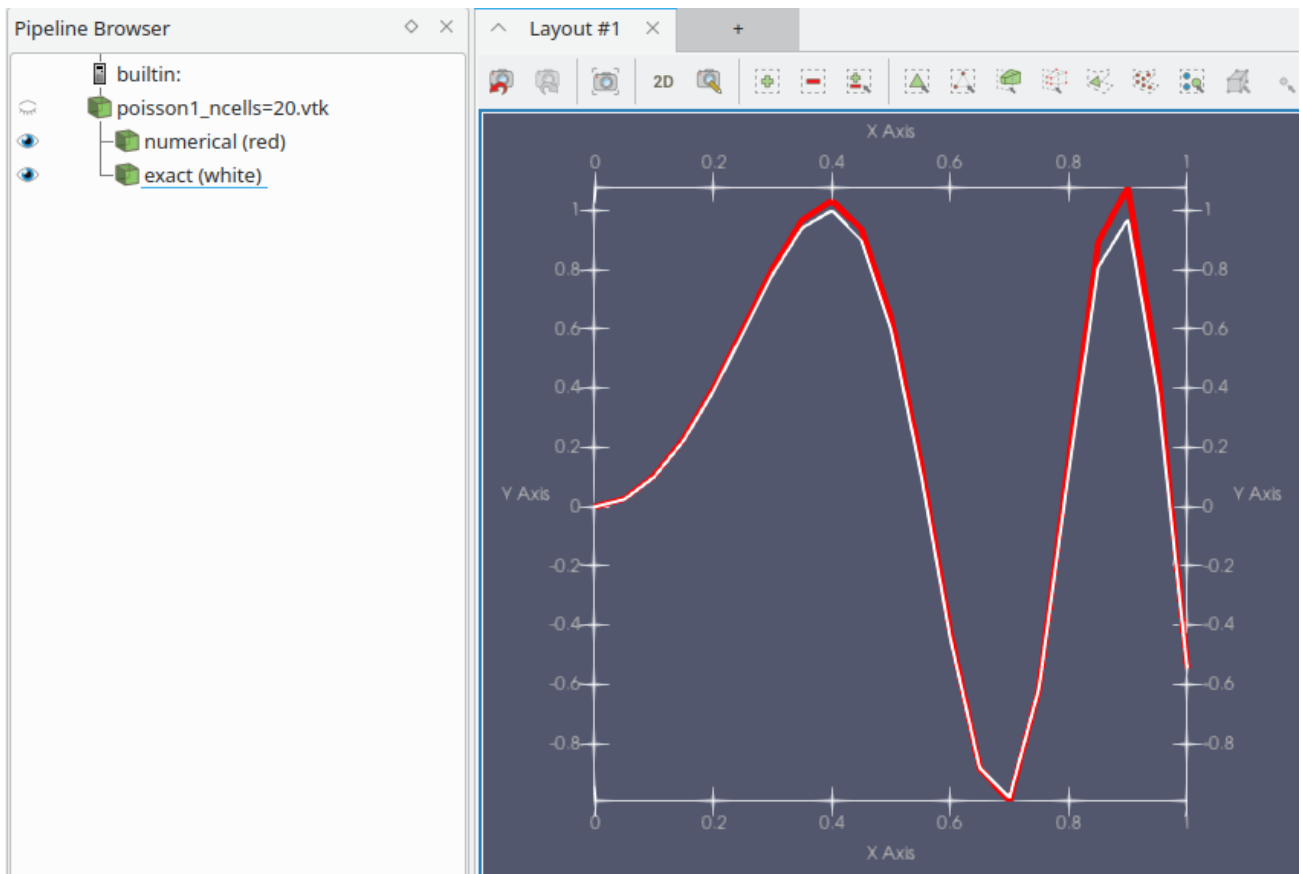


Рис. 2: Сравнение точного и численного решений уравнения Пуассона

- Сборка левой части СЛАУ. Реализует формулу (3.6). Для заполнения матрицы используется формат `cfd::LodMatrix`, удобный для непоследовательной записи, который в конце конвертируется CSR.

```

64  CsrMatrix approximate_lhs() const{
65      // constant h = x[1] - x[0]
66      double h = grid.point(1).x() - grid.point(0).x();
67
68      // fill using 'easy-to-construct' sparse matrix format
69      LodMatrix mat(grid.n_points());
70      mat.add_value(0, 0, 1);
71      mat.add_value(grid.n_points()-1, grid.n_points()-1, 1);
72      double diag = 2.0/h/h;
73      double nondiag = -1.0/h/h;
74      for (size_t i=1; i<grid.n_points()-1; ++i){
75          mat.add_value(i, i-1, nondiag);
76          mat.add_value(i, i+1, nondiag);
77          mat.add_value(i, i, diag);
78      }
79

```

```

80     // return 'easy-to-use' sparse matrix format
81     return mat.to_csr();
82 }

```

- Сборка правой части СЛАУ. Реализует формулу (3.7).

```

84     std::vector<double> approximate_rhs() const{
85         std::vector<double> ret(grid.n_points());
86         ret[0] = exact_solution(grid.point(0).x());
87         ret[grid.n_points()-1] = exact_solution(grid.point(grid.n_points()-1).x());
88         for (size_t i=1; i<grid.n_points()-1; ++i){
89             ret[i] = exact_rhs(grid.point(i).x());
90         }
91         return ret;
92     }

```

- Вычисление нормы. Реализует формулу (3.9).

```

94     double compute_norm2() const{
95         // weights
96         double h = grid.point(1).x() - grid.point(0).x();
97         std::vector<double> w(grid.n_points(), h);
98         w[0] = w[grid.n_points()-1] = h/2;
99
100        // sum
101        double sum = 0;
102        for (size_t i=0; i<grid.n_points(); ++i){
103            double diff = u[i] - exact_solution(grid.point(i).x());
104            sum += w[i]*diff*diff;
105        }
106
107        double len = grid.point(grid.n_points()-1).x() - grid.point(0).x();
108        return std::sqrt(sum / len);
109    }

```

### 3.3 Задание для самостоятельной работы

#### 3.3.1 Одномерное уравнение Пуассона

Скомпилировать и запустить программу, описанную в п. 3.2.3. Построить график полученного численного и точного решения, аналогичный рис. 2 (инструкцию по построению одномерного графика решения в Paraview см. в п. B.3.1).

Построить график, подтверждающий второй порядок точности разностной схемы (3.3).

#### 3.3.2 Двумерное уравнение Пуассона

Написать тест, аналогичный [poisson1], но для двумерной задачи на двумерной регулярной сетке

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y).$$

использовать разностную схему

$$\frac{-u_{k[i-1,j]} + 2u_{k[i,j]} - u_{k[i+1,j]}}{h_x^2} + \frac{-u_{k[i,j-1]} + 2u_{k[i,j]} - u_{k[i,j+1]}}{h_y^2} = f_{k[i,j]},$$

где

$$k[i, j] = i + (n_x + 1)j \quad (3.10)$$

– функция, переводящая парный  $(i, j)$  индекс узла регулярной сетки ( $i$  для оси  $x$ ,  $j$  для оси  $y$ ) в сквозной индекс  $k$  сеточного вектора,  $n_x$  – количество ячеек сетки в направлении  $x$ .

При вычислении весов  $w_k$  для вычисления среднеквадратичного отклонения учесть наличие граничных и угловых точек:

$$w_k = \begin{cases} h_x h_y / 4, & \text{для угловых точек;} \\ h_x h_y / 2, & \text{для граничных неугловых точек;} \\ h_x h_y, & \text{для внутренних точек.} \end{cases}$$

Четыре угловые точки определяются как

$$i[k], j[k] = (0, 0), (0, n_y), (n_x, n_y), (n_x, 0)$$

Граничные неугловые точки:

$$\begin{aligned} i[k], j[k] = \overline{1, n_x - 1}, 0; & \quad \text{нижняя сторона,} \\ n_x, \overline{1, n_y - 1}; & \quad \text{правая сторона,} \\ \overline{1, n_x - 1}, n_y; & \quad \text{верхняя сторона,} \\ 0, \overline{1, n_y - 1}; & \quad \text{левая сторона.} \end{aligned}$$

Функции, переводящие сквозной индекс в пару  $i, j$ , имеют вид

$$\begin{aligned} i[k] &= \text{mod}(k, (n_x + 1)), & // \text{остаток от деления,} \\ j[k] &= \lfloor k / (n_x + 1) \rfloor, & // \text{целая часть от деления.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Использовать класс `cfdd::RegularGrid2D` для задания сетки. Функции перевода индексов узлов из сквозных в парные и обратно реализованы в классе двумерной регулярной сетки:

- `cfdd::RegularGrid2D::to_split_point_index`
- `cfdd::RegularGrid2D::to_linear_point_index`

В случае, если решатель системы линейных уравнений не решает построенную матрицу, использовать функцию `cfdd::dbg::print` для отладочной печати матрицы в консоль (размерность задачи должна быть небольшой).

Для иллюстрации двумерного решения в Paraview использовать изолинии (B.3.2) и трёхмерные поверхности (B.3.3).

Построить график сходимости для двумерного случая. Следует иметь ввиду, что на графике сходимости по оси абсцисс отложено линейное разбиение, вычисляемое как  $n = 1/h$ , где  $h$  – это характерный линейный размер ячейки. Для двумерных сеток этот линейный размер сетки можно вычислить через среднюю площадь ячейки  $A$  как  $h = \sqrt{A}$ , которую в свою очередь можно получить, разделив общую площадь на количество ячеек:  $A = |D|/N$ . Тогда, в случае единичного квадрата, линейное разбиение будет равно  $n = \sqrt{N}$ .

## 4 Лекция 4 (02.03)

### 4.1 Форматы хранения разреженных матриц

#### 4.1.1 CSR-формат

При реализации решателей систем сеточных уравнений важно учитывать разреженный характер используемых в левой части. То есть избегать хранения и ненужных операций с нулевыми элементами матрицы.

Хотя рассмотренные ранее алгоритмы конечноразностных аппроксимаций на структурированных сетках давали трёх- (для одномерных задач) или пятидиагональную (для двумерных) сеточную матрицу, здесь будем рассматривать общие форматы хранения, не привязанные к конкретному шаблону.

Любой общий формат хранения должен хранить информацию о шаблоне матрице (адресах ненулевых элементов) и значениях матричных коэффициентов в этом шаблоне.

В CSR (Compressed sparse rows) формате все ненулевые элементы хранятся в линейном массиве `vals`. А шаблон матрицы – в двух массивах

- массиве колонок `cols` – значений колонок для соответствующих ему значений из массива `vals`,
- массиве адресов `addr` – индексах массива `vals`, с которых начинается описание соответствующей строки.

В конце массива `addr` добавляется общая длина массива `vals`.

Таким образом, длины массивов `vals`, `cols` равны количеству ненулевых элементов матрицы, а длина массива `addr` равна количеству строк в матрице плюс один.

Для облегчения процедур поиска описание каждой строки должно идти последовательно с увеличением индекса колонки.

Для примера рассмотрим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 3.0 & 5.0 & 4.0 \\ 0 & 0 & 6.0 & 0 \\ 0 & 7.0 & 0 & 8.0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Массивы, описывающие матрицу в формате CSR примут вид

	<i>row</i> = 0	<i>row</i> = 1	<i>row</i> = 2	<i>row</i> = 3	
<i>vals</i> =	2.0, 1.0,	3.0, 5.0, 4.0,	6.0,	7.0, 8.0	
<i>cols</i> =	0, 3,	1, 2, 3,	2,	1, 3	
<i>addr</i> =	0,	2,	5,	6,	8

Рассмотрим реализацию базовых алгоритмов для матриц, заданных в этом формате.

Пусть матрица задана следующими массивами:

```
std::vector<double> vals; // массив значений
std::vector<size_t> cols; // массив столбцов
std::vector<size_t> addr; // массив адресов
```

Число строк в матрице:

```
size_t nrows = addr.size()-1;
```

Число элементов в шаблоне (ненулевых элементов)

```
size_t n_nonzeros = vals.size();
```

Число ненулевых элементов в заданной строке 'irow'

```
size_t n_nonzeros_in_row = addr[irow+1] - addr[irow];
```

Умножение матрицы на вектор 'v' (длина этого вектора должна быть равна числу строк в матрице). Здесь реализуется суммирование вида

$$r_i = \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij}v_j,$$

при этом избегаются лишние операции с нулями

```
// число строк в матрице и длина вектора v
size_t nrows = addr.size() - 1;
// массив ответов. Инициализируем нулями
std::vector<double> r(nrows, 0);
// цикл по строкам
for (size_t irow=0; irow < nrows; ++irow){
    // цикл по ненулевым элементам строки irow
    for (size_t a = addr[irow]; a < addr[irow+1]; ++a){
        // получаем индекс колонки
        size_t icol = cols[a];
        // значение матрицы на позиции [irow, icol]
        double val = vals[a];
        // добавляем к ответу
        r[irow] += val * v[icol];
    }
}
```

Поиск значения элемента матрицы по адресу (irow, icol) с учётом локально сортированного вектора cols



```

using iter_t = std::vector<size_t>::const_iterator;
// указатели на начало и конец описания строки в массиве cols
iter_t it_start = cols.begin() + addr[irow];
iter_t it_end = cols.begin() + addr[irow+1];
// поиск значения icol в отсортированной последовательности [it_start, it_end)
iter_t fnd = std::lower_bound(it_start, it_end, icol);
if (fnd != it_end && *fnd == icol){
    // если нашли, то определяем индекс найденного элемента в массиве cols
    size_t a = fnd - cols.begin();
    // и возвращаем значение из vals по этому индексу
    return vals[a];
} else {
    // если не нашли, значит элемент [irow, icol] находится вне шаблона. Возвращаем 0
    return 0;
}

```

Формат CSR обеспечивает максимальную компактность хранения разреженной матрицы и при этом удобен для последовательной итерации по элементам матрицы (операции умножения матрицы на вектор), но его существенным недостатком является высокая сложность добавления нового элемента в шаблон.

#### 4.1.2 Массив словарей

При реализации сеточных методов решения дифференциальных уравнений работу с матрицами можно разбить на два этапа: сборка матриц и их непосредственное использование. Сборка матрицы в свою очередь может быть разделена на этап вычисление шаблона матрицы (символьная сборка) и непосредственное вычисление коэффициентов матрицы (числовая сборка).

На этапе использования матрицы основной операцией является умножение матрицы на вектор, где наиболее эффективным является CSR-формат.

В случае использования неструктурированных сеток этап символьной сборки является нетривиальной операцией и сводится к неупорядоченному добавлению новых элементов в шаблон матрицы. Как было отмечено ранее, такая операция в случае использования CSR формата неэффективна.

Поэтому часто для этапов сборки и расчёта используют разные форматы хранения матриц, первый из которых оптимизирован для операции вставки, а второй – для операции умножения на вектор. В качестве формата, оптимизированного для вставки, можно представить формат массива словарей (List of dictionaries), где каждая строка матрицы описывается словарём, ключём которого является индекс колонки, а значением – величина соответствующего матричного коэффициента.

С использованием синтаксиса C++ такой формат может быть описан следующим образом:

```

std::vector<std::map<size_t, double>> data;

```

Матрица вида (4.1) в таком формате примет вид

```
data = {
    {0: 2.0, 3: 1.0},
    {1: 3.0, 2: 5.0, 3: 4.0},
    {2: 6.0},
    {1: 7.0, 3: 8.0}
};
```

Добавление нового матричного коэффициента сведётся к вставке элемента в словарь:

```
data[i][j] = value;
```

А основной операцией для такого формата будет служить конверсия в CSR:

```
std::vector<size_t> addr{0};
std::vector<size_t> cols;
std::vector<double> vals;
for (size_t irow=0; irow < data.size(); ++irow){
    for (auto it: data[irow]){
        cols.push_back(it.first);
        vals.push_back(it.second);
    }
    addr.push_back(addr.back() + data[irow].size());
}
```

Поскольку данные в контейнере типа

`std::map` итерируются в отсортированном по ключам порядке, то полученный в результате массив `cols` также является локально отсортированным.

## 5 Лекция 5 (09.03)

### 5.1 Решение СЛАУ

В рассмотренных ранее примерах использовался алгебраический многосеточный итерационный решатель, который имеет существенное время инициализации. Ниже рассмотрим некоторые более простые итерационные способы решения систем уравнений, которые, хотя и имеют значительно худшую сходимость, но не требуют дорогой инициализации.

#### 5.1.1 Метод Якоби

Будем рассматривать систему уравнений вида

$$\sum_{j=0}^{N-1} A_{ij}u_j = r_i, \quad i = \overline{0, N-1}$$

относительно неизвестного сеточного вектора  $\{u\}$ .

В классическом виде алгоритм Якоби формулируется в виде

$$\hat{u}_i = \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j \neq i} A_{ij}u_j \right)$$

Произведём некоторые преобразования

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_j A_{ij}u_j + A_{ii}u_i \right) \\ &= u_i + \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_j A_{ij}u_j \right) \end{aligned}$$

Таким образом, программировать итерацию этого алгоритма, обновляющую значения массива  $\{u\}$ , можно в виде

```
 $\check{u} = u;$   
for  $i = \overline{0, N-1}$   
     $u_i += \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij}\check{u}_j \right)$   
endfor
```

#### 5.1.2 Метод Зейделя

Формулируется в виде

$$\hat{u}_i = \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j < i} A_{ij}\hat{u}_j - \sum_{j > i} A_{ij}u_j \right).$$

Поскольку этот метод неявный относительно уже найденных на итерации значений, то в отличие от метода Якоби этот алгоритм не требует создания временного массива  $\hat{u}$  при программировании. Псевдокод для реализации итерации этого метода можно записать как

```

for  $i = \overline{0, N-1}$ 
     $u_i += \frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} u_j \right)$ 
endfor

```

### 5.1.3 Метод последовательных верхних релаксаций (SOR)

Этот метод основан на добавлении к решению результатов итераций Зейделя с коэффициентом  $\omega > 1$ . То есть он изменяет решение по тому же принципу, что и метод Зейделя, но искусственно увеличивает эту добавку.

Формулируется этот метод в виде

$$\hat{u}_i = (1 - \omega)u_i + \frac{\omega}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j < i} A_{ij} \hat{u}_j - \sum_{j > i} A_{ij} u_j \right).$$

Для устойчивости метода необходимо  $\omega < 2$ . В частности, для одномерных задач, заданных на единичном отрезке, для оптимальной сходимости можно использовать соотношение  $\omega \approx 2 - 5h$ , где  $h$  – шаг сетки.

Итерация этого метода по аналогии с методом Зейделя может быть запрограммирована в виде

```

for  $i = \overline{0, N-1}$ 
     $u_i += \frac{\omega}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} u_j \right)$ 
endfor

```

## 5.2 Задание для самостоятельной работы

Вернутся к рассмотрению двумерного уравнения Пуассона (п. 3.3.2). Прошлая реализация этой задачи включала в себя решение СЛАУ алгебраическим многосеточным методом с помощью класса

`AmgcMatrixSolver`:

```

AmgcMatrixSolver solver;
solver.set_matrix(mat);
solver.solve(rhs, u);

```

Необходимо реализовать рассмотренные ранее методы итерационного решения СЛАУ

- метод Якоби (5.1.1),

- метод Зейделя (5.1.2),
- метод SOR (5.1.3).

и использовать их вместо многосеточного решателя.

Реализовать означенные решатели нужно в виде функций вида:

```
// Single Jacobi iteration for mat*u = rhs SLAE. Writes result into u
void jacobi_step(const cfd::CsrMatrix& mat, const std::vector<double>& rhs,
    ↪ std::vector<double>& u){
    ...
}
```

которые делают одну итерацию соответствующего метода без проверок на сходимость. Аргумент **u** используется как начальное значение искомого сеточного вектора. Туда же пишется итоговый результат.

Все алгоритмы основаны на вычислении выражения вида

$$\frac{1}{A_{ii}} \left( r_i - \sum_{j=0}^{N-1} A_{ij} u_j \right),$$

поэтому рекомендуется выделить отдельную функцию, которая бы вычисляла это выражение и использовалась всеми тремя решателями

```
double row_diff(size_t irow, const cfd::CsrMatrix& mat, const std::vector<double>&
    ↪ rhs, const std::vector<double>& u){
    const std::vector<size_t>& addr = mat.addr();    // массив адресов
    const std::vector<size_t>& cols = mat.cols();    // массив колонок
    const std::vector<double>& vals = mat.vals();    // массив значений
    ...
}
```

Дополнительно понадобится реализовать функцию, которая проверяет сходимость решения путём вычисления невязки вида

$$res = \max_i \left| \sum_j A_{ij} u_j - r_i \right|$$

и сравнения с заданным малым числом  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

```
bool is_converged(const cfd::CsrMatrix& mat, const std::vector<double>& rhs, const
    ↪ std::vector<double>& x){
    constexpr double EPS = 1e-8;
    double residual = 0;
    // ...
    return residual < EPS;
}
```

Для реализации вспомогательных функций необходимо использовать алгоритмы работы с CSR-матрицами из п. 4.1.1

При реализации метода SOR подобрать оптимальный параметр  $\omega$ , при котором метод SOR сойдётся за минимальное число итераций.

После реализации всех методов необходимо сравнить время исполнения решателей. Замеры нужно проводить в Release-версии сборки (см. п. B.1.3). Для замера времени исполнения участка кода воспользоваться функциями

- `cf::dbg::Tic` – вызвать до начала участка кода
- `cf::dbg::Toc` – вызвать после окончания участка кода

Код решения СЛАУ методом Якоби с вызовами профилировщика должен иметь примерно такой вид:

```
#include "dbg/tictoc.hpp"
using namespace cf;

...

// реализация решения СЛАУ
dbg::Tic("total"); // запустить таймер total
for (size_t it=0; it < max_it; ++it){
    dbg::Tic("step"); // запустить таймер step
    jacobi_step(mat, rhs, u);
    dbg::Toc("step"); // остановить таймер step

    dbg::Tic("conv-check"); // запустить таймер conv-check
    bool is_conv = is_converged(mat, rhs, u);
    dbg::Toc("conv-check"); // остановить таймер conv-check

    if (is_conv) break;
}
dbg::Toc("total"); // остановить таймер total
```

При правильном задании функций замеров, по окончании работы в консоль должен напечататься отчёт о времени исполнения вида:

```
total:  6.670 sec
step:   5.220 sec
conv-check: 1.210 sec
```

По результатам профилировки нужно заполнить таблицу

	total, s	step, s	conv-check, s	Кол-во итераций
Amg		—	—	—
Якоби				
Зейдель				
SOR( $\omega = \dots$ )				

Здесь Amg - исходный решатель.

## 6 Лекция 6 (23.03)

### 6.1 Метод конечных объёмов

#### 6.1.1 Уравнение Пуассона

Пространственную аппроксимацию дифференциальных операторов методом конечных объёмов рассмотрим на примере многомерного уравнения Пуассона

$$-\nabla^2 u = f, \quad (6.1)$$

которое требуется решить в области  $D$ . Разобьём эту область на непересекающиеся подобласти  $E_i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$  (рис. 3). Центры ячеек обозначим как  $\mathbf{c}_i$ .

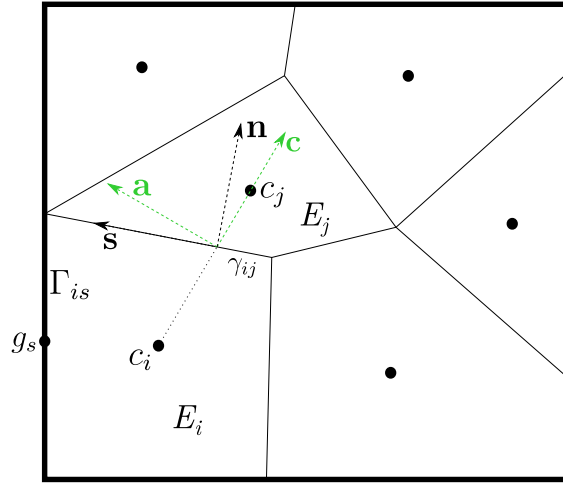


Рис. 3: Конечнoобъёмная сетка

Проинтегрируем исходное уравнение по одной из подобластей  $E_i$ :

$$-\int_{E_i} \nabla^2 u \, ds = \int_{E_i} f \, d\mathbf{x}.$$

К интегралу в левой части применим формулу интегрирования по частям (A.13). Получим

$$-\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_{E_i} f \, d\mathbf{x}. \quad (6.2)$$

Здесь  $\partial E_i$  – совокупность всех границ подобласти  $E_i$ , а  $\mathbf{n}$  – внешняя к подобласти нормаль.

Граница ячейки  $E_i$  состоит из внутренних граней  $\gamma_{ij}$  (индекс  $j$  здесь соответствует индексу соседней ячейки) и граней  $\Gamma_{is}$ , лежащих на внешней границе расчётной области  $D$ . Тогда интеграл по общей границе ячейки распишется через сумму интегралов по плоским поверхностям

$$\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \sum_j \int_{\gamma_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds + \sum_s \int_{\Gamma_{is}} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$



Аппроксимируем производную  $\partial u / \partial n$  на каждой из граней константой. Тогда её можно вынести из под интегралов и предыдущее выражение записать в виде

$$\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx \sum_j |\gamma_{ij}| \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\gamma_{ij}} + \sum_s |\Gamma_{is}| \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_{is}} \quad (6.3)$$

Аналогично, анализируя интеграл правой части (6.2), приблизим значение функции правой части  $f$  внутри элемента  $E_i$  константой  $f_i$ , которую отнесём к центру элемента. Тогда

$$\int_{E_i} f d\mathbf{x} \approx f_i |E_i|. \quad (6.4)$$

Сеточный вектор  $\{f_i\}$  – есть конечнообъёмная аппроксимация функции  $f(\mathbf{x})$  на конечнообъёмную сетку. Значения  $f_i$  при аппроксимации чаще всего находятся как значения в центрах элементов

$$f_i = f(\mathbf{c}_i).$$

Хотя иногда может быть использовано и другое определение, следующее из (6.4):

$$f_i = \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

#### 6.1.1.1 Обработка внутренних граней

Для начала будем рассматривать сетки, в которых вектора  $\mathbf{c}$ , соединяющие центры ячеек (зедёные вектора на рис. 3), коллинеарны (или почти коллинеарны) нормальям к граням  $\mathbf{n}$ . В этом случае производную искомой функции по нормали к грани можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial c}.$$

Далее определим значения функции  $u$  в точках  $c_i, c_j$  как  $u_i, u_j$ . Тогда значение производной  $\partial u / \partial n$  на внутренней грани конечного объёма может быть приближена конечной разностью

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial c} \approx \frac{u_j - u_i}{h_{ij}}, \quad h_{ij} = |\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i|. \quad (6.5)$$

Определим *perbi* (perpendicular-bisector) сетки как сетки, удовлетворяющие следующим свойствам

- линии, соединяющие центры двух соседних ячеек, перпендикулярны грани между этими ячейками;
- внутренние грани делят линии, соединяющие центры соседних ячеек, пополам.

Очевидно, что равномерная структурированная сетка удовлетворяет этим свойствам. Для построения неструктурированных *perbi*-сеток используют алгоритмы построения ячеек Вороного. Для *perbi*-сеток разностная схема (6.5) является симметричной разностью и, поэтому, имеет второй порядок аппроксимации.

### 6.1.1.2 Учёт граничных условий первого рода

Для вычисления второго слагаемого в правой части (6.3) следует расписать значение нормальной к границе производной вида

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_{is}}.$$

Это делается с помощью граничных условий.

Пусть на центре грани  $\Gamma_{is}$  задано значение искомой функции

$$\mathbf{x} \in \Gamma_{is} : \quad u(\mathbf{x}) = u^\Gamma. \quad (6.6)$$

Аппроксимацию производных будем проводить из тех же соображений, которые использовали при анализе внутренних граней. Только вместо центра соседнего элемента  $c_j$  будем использовать центр грани  $g_s$ . В первом приближении, отбрасывая касательные производные, придём к формуле аналогичной (6.5):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \frac{u^\Gamma - u_i}{h_{is}}, \quad h_{is} = |\mathbf{g}_s - \mathbf{c}_i|. \quad (6.7)$$

### 6.1.2 Одномерный случай

Рассмотрим результат конечнообъёмной аппроксимации задачи (6.1) в одномерном случае на равномерной сетке с шагом  $h$  (рис. 4).

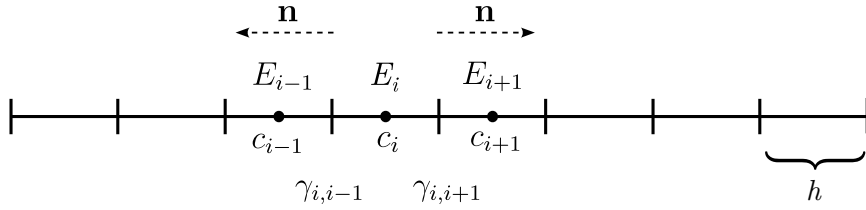


Рис. 4: Одномерная конечнообъёмная сетка

У внутренней ячейки  $i$  есть две границы:  $\gamma_{i,i-1}$  и  $\gamma_{i,i+1}$ . Нормали по этим границам аппроксимируются по формулам ??:

$$\gamma_{i,i-1} : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h}$$

$$\gamma_{i,i+1} : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Объём ячейки в одномерном случае равен её длине  $h$ . Площадь грани следует положить единице с тем, чтобы

$$|E_i| = |\gamma| h = h.$$

Тогда, подставляя эти значения в (6.2), получим знакомую конечноразностную схему аппроксимацию уравнения Пуассона

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h} = f_i h,$$

которая имеет второй порядок точности. Разница с методом конечных разностей здесь состоит в том, что значения сеточных векторов  $\{u\}$ ,  $\{f\}$  здесь приписаны к центрам ячеек, а не к их узлам.

Это отличие проявит себя в аппроксимации граничных условий. Так, если на левой границе задано условие первого рода, то соответствующее уравнение согласно (6.7) примет вид

$$-\frac{u^\Gamma - u_0}{h/2} - \frac{u_1 - u_0}{h} = f_0 h.$$

В методе конечных разностей это условие выразилось бы в виде  $u_0 = u^\Gamma$ .

### 6.1.3 Сборка системы линейных уравнений

Подставим все полученные аппроксимации (6.5), (6.7) в уравнение (6.2):

$$-\sum_j \frac{|\gamma_{ij}|}{h_{ij}} (u_j - u_i) - \sum_{s \in I} \frac{|\Gamma_{is}|}{h_{is}} (u^\Gamma - u_i) = f_i |E_i|.$$

Здесь первое слагаемое в левой части отвечает за потоки через внутренние границы, второе – граничные условия первого рода. Далее перенесём все известные значения в правую часть и окончательно получим линейное уравнение для  $i$ -го конечного объёма:

$$\sum_j \frac{|\gamma_{ij}|}{h_{ij}} (u_i - u_j) + \sum_{s \in I} \frac{|\Gamma_{is}|}{h_{is}} u_i = f_i |E_i| + \sum_{s \in I} \frac{|\Gamma_{is}|}{h_{is}} u^\Gamma \quad (6.8)$$

Таким образом мы получили систему из  $N$  (по количеству подобластей) линейных уравнений относительно неизвестного сеточного вектора  $\{u_i\}$

$$Au = b.$$

#### 6.1.3.1 Алгоритм сборки в цикле по ячейкам

Матрицу  $A$  и правую часть  $b$  системы (6.8) можно собирать в цикле по ячейкам: строка за строкой. Такой алгоритм выглядел бы следующим образом

```

for  $i = \overline{0, N-1}$            – цикл по строкам СЛАУ
     $b_i = |E_i| f_i$ 
    for  $j \in \text{nei}(i)$          – цикл по ячейкам, соседним с ячейкой  $i$ 
         $v = |\gamma_{ij}|/h_{ij}$ 
         $A_{ii} += v$ 
         $A_{ij} -= v$ 
    endfor
    for  $s \in \text{bnd1}(i)$        – цикл по граням ячейки  $i$  с условиями первого рода
         $v = |\Gamma_{is}|/h_{is}$ 
         $A_{ii} += v$ 
         $b_i += u^\Gamma v$ 
    endfor
endfor

```

Первым недостатком такого алгоритма является наличие вложенных циклов. Во-вторых, коэффициент, отвечающий за поток через внутреннюю грань  $\gamma_{ij}$ , равный  $|\gamma_{ij}|/h_{ij}$  в таком алгоритме будет учитываться дважды: в строке  $i$  и в строке  $j$ .

### 6.1.3.2 Алгоритм сборки в цикле по граням

Вместо общего цикла по ячейкам, будем использовать цикл по граням. В таком цикле коэффициенты потоков будут вычисляться один раз и вставляться сразу в две строки матрицы, соответствующие соседним с гранью ячейкам. Вложенных циклов в такой постановке удаётся избежать, потому что у грани есть только две соседние ячейки (в то время как у ячейки может быть произвольное количество соседних граней).

Разделим все грани на исходной сетки на внутренние и граничные (отдельный набор для каждого вида граничных условий). Тогда для внутренних граней можно записать

$$\begin{aligned}
 &\textbf{for } s \in \text{internal} && \text{-- цикл по внутренним граням} \\
 &\quad i, j = \text{nei\_cells}(s) && \text{-- две ячейки, соседние с текущей гранью} \\
 &\quad v = |\gamma_{ij}|/h_{ij} \\
 &\quad A_{ii} += v; \quad A_{jj} += v && \text{-- диагональные коэффициенты матрицы} \\
 &\quad A_{ij} -= v; \quad A_{ji} -= v && \text{-- внедиагональные коэффициенты матрицы} \\
 &\textbf{endfor}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Граничные условия учитываются в отдельных циклах. Здесь будем учитывать, что у грани, принадлежащей границе области, есть только одна соседняя ячейка. Условия первого рода:

$$\begin{aligned}
 &\textbf{for } s \in \text{bnd1} && \text{-- грани с условиями первого рода} \\
 &\quad i = \text{nei\_cells}(s) && \text{-- соседняя с граничной гранью ячейка} \\
 &\quad v = |\Gamma_{is}|/h_{is} \\
 &\quad A_{ii} += v \\
 &\quad b_i += u^\Gamma v \\
 &\textbf{endfor}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Первое слагаемое в правой части (6.8) учтём отдельным циклом:

$$\begin{aligned}
 &\textbf{for } i = \overline{0, N-1} && \text{-- цикл по ячейкам} \\
 &\quad b_i = |E_i| f_i \\
 &\textbf{endfor}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

## 6.2 Задание для самостоятельной работы

) В тесте `poisson1-fvm` из файла `poisson_fvm_solve_test.cpp` реализовано решение одномерного уравнения Пуассона с граничными условиями первого рода. Проводится расчёт на сгущающихся сетках с количеством ячеек от 10 до 1000 и рассчитываются среднеквадратичные нормы отклонения полученного численного решения от точного. Решения сохраняются в vtk-файлы `poisson1_fvm_n={}.vtk`.

Отталкиваясь от этой реализации необходимо:

1. написать аналогичный тест для двумерного уравнения и случая неструктурированных сеток,
2. провести серию расчётов на сгущающихся сетках разных типов (структурированных, pebi и скошенных)
3. визуализировать решение, полученное на этих сетках
4. построить графики сходимости решения и определить порядок аппроксимации метода

### Построение неструктурированных сеток

В папке

`test_data` корневой директории репозитория лежат скрипты построения сеток в программе HybMesh :

- `pebigrid.py` – pebi-сетка,
- `tetragrid.py` – сетка, состоящая из произвольных (скошенных) трех- и четырехугольников.

Инструкции по запуску этих скриптов смотри п. В.4. Эти скрипты строят равномерную неструктурированную сетку в единичном квадрате и записывают её в файл `vtk`, который впоследствии можно загрузить в расчётную программу. В каждом из скриптов есть параметр `N`, означающий примерное количество ячеек в итоговой сетке. Меняя его значение можно строить сетки разного разрешения.

Для загрузки построенной сетки в решатель необходимо файл с сеткой поместить в каталог `test_data` и далее загрузить её в класс `UnstructuredGrid2D`. Нижеследующий код прочитает файл `test_data/pebigrid.vtk` и создаст рабочий класс с использованием прочитанной сетки

```
std::string fn = test_directory_file("pebigrid.vtk");
UnstructuredGrid2D grid = UnstructuredGrid2D::vtk_read(fn);
```

**Рекомендации к программированию** При написании новых тестов следует переиспользовать уже написанный код, избегая копирования. Для этого необходимо пользоваться механизмами наследования классов. В частности, следует обратить внимание, что все сетки наследуются от единого интерфейса `IGrid`. А уже написанный “одномерный” код в своей алгоритмической части использует только функции этого интерфейса.

## 7 Лекция 7 (30.03)

### 7.1 Граничные условия второго рода

Учёт условий второго рода тривиален. Если на центре грани  $\Gamma_{is}$  задано значение нормальной производной

$$\mathbf{x} \in \Gamma_{is} : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q(\mathbf{x}), \quad (7.1)$$

то это значение просто подставляется вместо соответствующей производной в (6.3).

По аналогии с (6.10) учёт граничных условий второго рода при сборке по граням будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \text{for } s \in \text{bnd2} & \quad - \text{ грани с условиями второго рода} \\ i = \text{nei\_cells}(s) & \quad - \text{соседняя с граничной гранью ячейка} \\ b_i += |\Gamma_{is}|q & \\ \text{endfor} & \end{aligned} \quad (7.2)$$

### 7.2 Граничные условия третьего рода

Теперь рассмотрим условия третьего рода

$$\mathbf{x} \in \Gamma_{is} : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(\mathbf{x})u + \beta(\mathbf{x}). \quad (7.3)$$

Распишем производную в форме (6.7):

$$\frac{u^\Gamma - u_i}{h_{is}} = \alpha u^\Gamma + \beta,$$

откуда выразим  $u^\Gamma$ :

$$u^\Gamma = \frac{u_i + \beta h_{is}}{1 - \alpha h_{is}}.$$

Подставляя это выражение в исходное граничное условие (7.3) получим

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\alpha}{1 - \alpha h_{is}} u_i + \frac{\beta}{1 - \alpha h_{is}}. \quad (7.4)$$

Учёт граничных условий третьего рода при сборке по граням будет иметь вид

$$\begin{aligned} \text{for } s \in \text{bnd3} & \quad - \text{ грани с условиями третьего рода} \\ i = \text{nei\_cells}(s) & \quad - \text{соседняя с граничной гранью ячейка} \\ v = |\Gamma_{is}|/(1 + \alpha h_{is}) & \\ A_{ii} -= \alpha v & \\ b_i += \beta v & \\ \text{endfor} & \end{aligned} \quad (7.5)$$

### 7.2.1 Универсальность условий третьего рода

Условие третьего рода (7.3) можно использовать для моделирования условий первого и второго рода. Так, условия второго рода (7.1) получаются, если положить  $\alpha = 0$ ,  $\beta = q$ . А условия первого (6.6), – если

$$\alpha = \varepsilon^{-1}, \quad \beta = -\varepsilon^{-1}u^\Gamma \quad (7.6)$$

, где  $\varepsilon$  – малое положительное число.

Если подставить эти выражения в формулу (7.4), то можно убедиться, что они дадут выражения (6.7) и (7.1) (в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) соответственно.

## 7.3 Задание для самостоятельной работы

Сделать задачу, аналогичную п. 6.2, но использовать граничные условия 3-его рода. Необходимо имитировать условия первого рода через подход (7.6).

По формуле

$$n = \sqrt{\frac{\sum_i (u_i - u'_i)^2 V_i}{\sum_i V_i}}$$

подсчитать норму отклонения численного решения  $u_i$  задачи с использованием истинных граничных условий первого рода (6.7) от численного решения  $u'$  задачи, рассчитанной с имитацией граничных условий первого рода через граничные условия третьего рода (7.4), (7.6).

Нарисовать график  $n(\varepsilon)$  для расчётов на структурированной и скошенной сетках (в логарифмических координатах).

## А    Формулы и обозначения



## А.1 Векторы

### А.1.1 Обозначение

Геометрические вектора обозначаются жирным шрифтом  $\mathbf{v}$ . Скалярные координаты вектора – через нижний индекс с обозначением оси координат:  $(v_x, v_y, v_z)$ . Если вектор  $\mathbf{u}$  – вектор скорости, то его декартовые координаты имеют специальное обозначение  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . Единичные вектора, соответствующие осям координат, обозначаются знаком  $\hat{\cdot}$ :  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ . Координатные векторы обозначаются по символу первой оси. Например,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  или  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ .

Операции в векторах имеют следующее обозначение (расписывая в декартовых координатах):

- Умножение на скалярную функцию

$$f\mathbf{u} = (fu_x)\hat{\mathbf{x}} + (fu_y)\hat{\mathbf{y}} + (fu_z)\hat{\mathbf{z}}; \quad (\text{A.1})$$

- Скалярное произведение

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z; \quad (\text{A.2})$$

- Векторное произведение

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{\mathbf{x}} - (u_x v_z - u_z v_x)\hat{\mathbf{y}} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.3})$$

В двумерном случае можно считать, что  $u_z = v_z = 0$ . Тогда результатом векторного произведения согласно (A.3) будет вектор, направленный перпендикулярно плоскости  $xy$ :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x v_y - u_y v_x)\hat{\mathbf{z}}.$$

При работе с двумерными задачами, где ось  $\mathbf{z}$  отсутствует, обычно результатом векторного произведения считают скаляр

$$2D : \mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x v_y - u_y v_x. \quad (\text{A.4})$$

Геометрический смысл этого скаляра: площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

### А.1.2 Набла–нотация

Символ  $\nabla$  – есть псевдовектор, который выражает покоординатные производные. Для декартовой системы координат  $(x, y, z)$  он запишется в виде

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

В радиальной  $(r, \phi, z)$ :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

В цилиндрической  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Удобство записи дифференциальных выражений с использованием  $\nabla$  заключается в независимости записи от вида системы координат. Но если требуется обозначить производную по конкретной координате, то, по аналогии с обычными векторами, это делается через нижний индекс:

$$\nabla_n f = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

Для этого символа справедливы все векторные операции, описанные ранее. Так, применение  $\nabla$  к скалярной функции аналогично умножению вектора на скаляр (A.1) (здесь и далее приводятся покомпонентные выражения для декартовой системы):

$$\nabla f = (\nabla_x f, \nabla_y f, \nabla_z f) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.5})$$

Результатом этой операции является вектор.

Скалярное умножение  $\nabla$  на вектор  $\mathbf{v}$  по аналогии с (A.2) – есть дивергенция:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

результат которой – скалярная функция.

Двойное применение  $\nabla$  к скалярной функции – это оператор Лапласа:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.7})$$

Ротор – аналог векторного умножения (A.3):

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.8})$$

## А.2 Интегрирование

### А.2.1 Формула Гаусса–Остроградского

Формула Гаусса–Остроградского, связывающая интегрирование по объёму  $E$  с интегрированием по границе этого объёма  $\Gamma$ , для векторного поля  $\mathbf{v}$  имеет вид

$$\int_E \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v_n ds, \quad (\text{A.9})$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя по отношению к области  $E$  нормаль. Смысл этой формулы можно проиллюстрировать на одномерном примере. Пусть одномерное векторное поле  $v_x = f(x)$  на отрезке  $E = [a, b]$  задано функцией, представленной на рис. 5. Разобьём область на  $N = 3$  равномерных подобласти

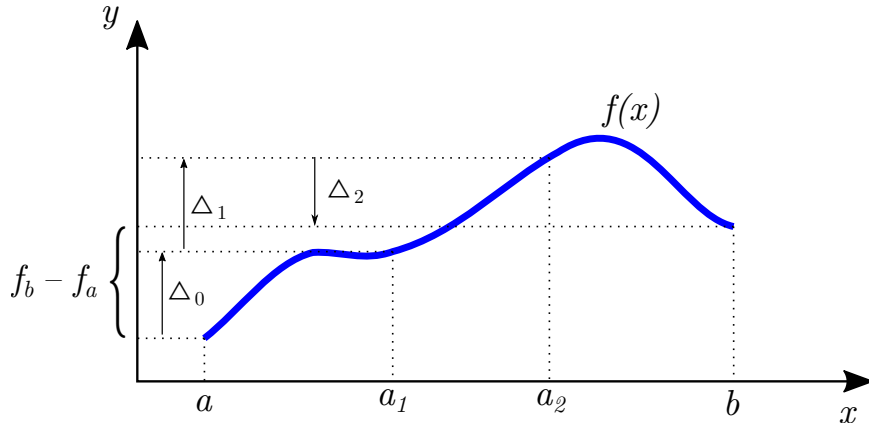


Рис. 5: Формула Гаусса–Остроградского в одномерном случае

длины  $h$ . Тогда расписывая интеграл как сумму, а производную через конечную разность, получим

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} dx \approx \sum_{i=0}^2 h \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \sum_{i=0}^2 (f_{i+1} - f_i) = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 = f_b - f_a.$$

Очевидно что, при устремлении  $N \rightarrow \infty$  правая часть предыдущего выражения не изменится. То есть, сумма всех изменений функции в области есть изменение функции по её границам:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

А формула (A.9) – есть многомерное обобщение этого выражения.

### А.2.2 Интегрирование по частям

Подставив в (A.9)  $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ , где  $f$  – некоторая скалярная функция, и расписав дивергенцию в виде

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

получим формулу интегрирования по частям

$$\int_E \mathbf{u} \cdot \nabla f \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f u_n \, ds - \int_E f \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.10})$$

Распишем некоторые частные случаи для формулы (A.10). Для  $\mathbf{u} = (n_x, 0, 0)$  получим

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}) \, ds \quad (\text{A.11})$$

При  $\mathbf{u} = \nabla g$

$$\int_E f (\nabla^2 g) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} \, ds - \int_E \nabla f \cdot \nabla g \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

При  $f = 1$  и  $\mathbf{u} = \nabla g$

$$\int_E \nabla^2 g \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial n} \, ds \quad (\text{A.13})$$

### A.2.3 Численное интегрирование в заданной области

Квадратурная формула

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(\mathbf{x}_i) \quad (\text{A.14})$$

Она определяется заданием узлов интегрирования  $\mathbf{x}_i$  и соответствующих весов  $w_i$ .

## А.3 Интерполяционные полиномы

### А.3.1 Многочлен Лагранжа

#### А.3.1.1 Узловые базисные функции

Рассмотрим функцию  $f(\xi)$ , заданную в области  $D$ . Внутри этой области зададим  $N$  узловых точек  $\xi_i, i = \overline{0, N-1}$ . Приближение функции  $f$  будем искать в виде

$$f(\xi) \approx \sum_{i=0}^{N-1} f_i \phi_i(\xi), \quad (\text{A.15})$$

где  $f_i = f(\xi_i)$ ,  $\phi_i$  – узловая базисная функция. Потребуем, чтобы это выражение выполнялось точно для всех заданных узлов интерполяции  $\xi = \xi_i$ . Тогда, исходя из определения (A.15), запишем условие на узловую базисную функцию

$$\phi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Дополнительно потребуем, чтобы формула (A.15) была точной для постоянных функций

$$f(\xi) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad f_i = \text{const}.$$

Тогда для любого  $\xi$  должно выполняться условие

$$\sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(\xi) = 1, \quad \xi \in D. \quad (\text{A.17})$$

Задача построения интерполяционной функции состоит в конкретном определении узловых базисов  $\phi_i(\xi)$  по заданному набору узловых точек  $\xi_i$  и значениям функции в них  $f_i$ . Будем искать базисы в виде многочленов вида

$$\phi_i(\xi) = \sum_a A_i^{(a)} \xi^a = A_i^{(0)} + A_i^{(1)} \xi + A_i^{(2)} \xi^2 + \dots, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (\text{A.18})$$

Определять коэффициенты  $A_i^{(a)}$  будем из условий (A.16), которое даёт  $N$  линейных уравнений относительно неизвестных  $A_i^{(a)}$  для каждого  $i = \overline{0, N-1}$ . Таким образом, в выражениях (A.18) должно быть ровно  $N$  слагаемых. Будем использовать последовательный набор степеней:  $a = \overline{0, N-1}$ . Выпишем систему линейных уравнений для 0-ой базисной функции

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi_0) &= A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_0 + A_0^{(2)} \xi_0^2 + A_0^{(3)} \xi_0^3 + \dots = 1, \\ \phi_0(\xi_1) &= A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_1 + A_0^{(2)} \xi_1^2 + A_0^{(3)} \xi_1^3 + \dots = 0, \\ \phi_0(\xi_2) &= A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_2 + A_0^{(2)} \xi_2^2 + A_0^{(3)} \xi_2^3 + \dots = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(0)} \\ A_0^{(1)} \\ A_0^{(2)} \\ A_0^{(3)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Записывая аналогичные выражения для остальных базисных функций, получим систему матричных уравнений вида  $CA = E$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & A_3^{(0)} & \dots \\ A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & A_3^{(1)} & \dots \\ A_0^{(2)} & A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & A_3^{(2)} & \dots \\ A_0^{(3)} & A_1^{(3)} & A_2^{(3)} & A_3^{(3)} & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Отсюда матрица неизвестных коэффициентов  $A$  определится как

$$A = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

Подставляя полином (A.18) в условие согласованности (A.17), получим требование

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_i^{(a)} = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

То есть сумма всех свободных членов в интерполяционных полиномах должна быть равна единице, а сумма коэффициентов при остальных степенях – нулю. Можно показать, что это свойство выполняется для любой матрицы  $A = C^{-1}$ , в случае, если первый столбец матрицы  $C$  состоит из единиц. То есть условие согласованности требует наличие свободного члена с интерполяционным полиномом.

### A.3.1.2 Интерполяция в параметрическом отрезке

Будем рассматривать область интерполяции  $D = [-1, 1]$ . В качестве первых двух узлов интерполяции возьмем границы области:  $\xi_0 = -1$ ,  $\xi_1 = 1$ .

**Линейный базис** Будем искать интерполяционный базис в виде

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi.$$

на основе двух условий:

$$\phi_i(-1) = A_i^{(0)} - A_i^{(1)} = \delta_{0i}, \quad \phi_i(1) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)} \delta_{1i}.$$

Составим матрицу  $C$ , записав эти условия в матричном виде

$$C = \left( \begin{array}{c|cc} & A^{(0)} & A^{(1)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 \\ \phi(1) & 1 & 1 \end{array} \right)$$

и, согласно (A.19), найдём матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} \\ A_0^{(1)} & A_1^{(1)} \end{pmatrix} = C^{-1} = \begin{pmatrix} & \phi_0 & \phi_1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \xi & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда узловые базисные функции примут вид (рис. 6)

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}, \\ \phi_1(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Окончательно интерполяционная функция из определения (A.15) примет вид

$$f(\xi) \approx \frac{1-\xi}{2}f(-1) + \frac{1+\xi}{2}f(1).$$

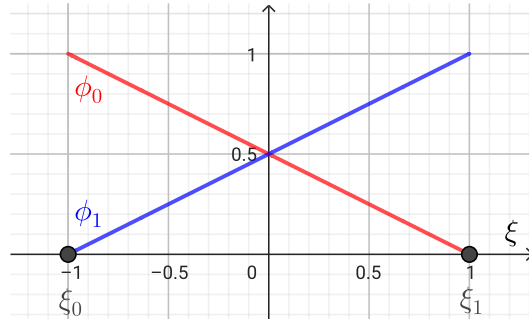


Рис. 6: Линейный базис в параметрическом отрезке

**Квадратичный базис** Будем искать интерполяционный базис в виде

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi + A_i^{(2)}\xi^2.$$

По сравнению с линейным случаем, в форму базиса добавился ещё один неизвестный коэффициент  $A_i^{(2)}$ , поэтому в набор условий (A.16) требуется ещё одно уравнение (ещё одна узловая точка). Поче-

стим её в центр параметрического сегмента  $\xi_2 = 0$ . Далее будем действовать по аналогии с линейным случаем:

$$C = \left( \begin{array}{c|ccc} & A^{(0)} & A^{(1)} & A^{(2)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 & 1 \\ \phi(1) & 1 & 1 & 1 \\ \phi(0) & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow A = C^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \xi & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \xi^2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array} \right).$$

Узловые базисные функции для квадратичной интерполяции примут вид (рис. 7)

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= \frac{\xi^2 - \xi}{2}, \\ \phi_1(\xi) &= \frac{\xi^2 + \xi}{2}, \\ \phi_2(\xi) &= 1 - \xi^2. \end{aligned} \tag{A.21}$$

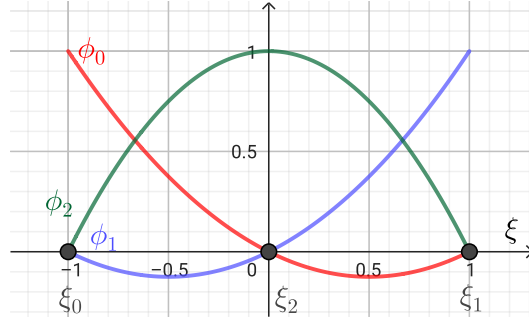


Рис. 7: Квадратичный базис в параметрическом отрезке

**Кубический базис** Интерполяционный базис будет иметь вид

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi + A_i^{(2)}\xi^2 + A_i^{(3)}\xi^3.$$

Для нахождения четырёх коэффициентов нам понадобится четыре узла интерполяции. Две из них – это границы параметрического отрезка. Остальные две разместим так, чтобы разбить отрезок на равные интервалы:  $\xi_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $\xi_3 = \frac{1}{3}$ . Далее вычислим матрицу коэффициентов:

$$C = \left( \begin{array}{c|cccc} & A^{(0)} & A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \phi(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi(-\frac{1}{3}) & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} \\ \phi(\frac{1}{3}) & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \end{array} \right) \Rightarrow A = C^{-1} = \frac{1}{16} \left( \begin{array}{c|cccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 9 & 9 \\ \xi & 1 & -1 & -27 & 27 \\ \xi^2 & 9 & 9 & -9 & -9 \\ \xi^3 & -9 & 9 & 27 & -27 \end{array} \right)$$



Узловые базисные функции для квадратичной интерполяции примут вид (рис. 8)

$$\begin{aligned}
 \phi_0(\xi) &= \frac{1}{16} (-1 + \xi + 9\xi^2 - 9\xi^3), \\
 \phi_1(\xi) &= \frac{1}{16} (-1 - \xi + 9\xi^2 + 9\xi^3), \\
 \phi_2(\xi) &= \frac{1}{16} (9 - 27\xi - 9\xi^2 + 27\xi^3), \\
 \phi_3(\xi) &= \frac{1}{16} (9 + 27\xi - 9\xi^2 - 27\xi^3),
 \end{aligned}
 \tag{A.22}$$

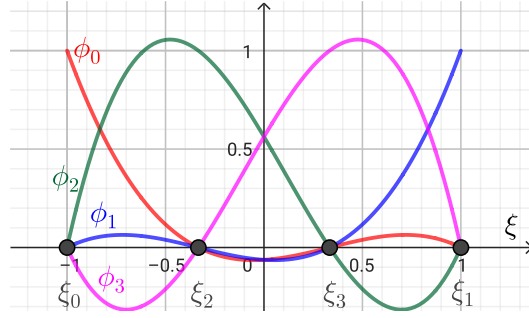


Рис. 8: Кубический базис в параметрическом отрезке

На рис. 9 представлено сравнение результатов аппроксимации функции  $f(x) = -x + \sin(2x + 1)$  линейным, квадратичным и кубическим базисом. Видно, что все интерполяционные приближения точно попадают в функцию в своих узлах интерполяции, а между узлами происходит аппроксимация полиномом соответствующей степени.

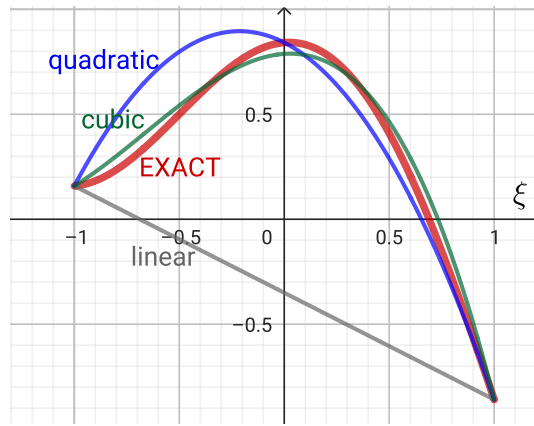


Рис. 9: Результат интерполяции

### А.3.1.3 Интерполяция в параметрическом треугольнике

Теперь рассмотрим двумерное обобщение формулы

#### Линейный базис

$$\phi_i(\xi, \eta) = A_i^{(00)} + A_i^{(10)}\xi + A_i^{(01)}\eta.$$

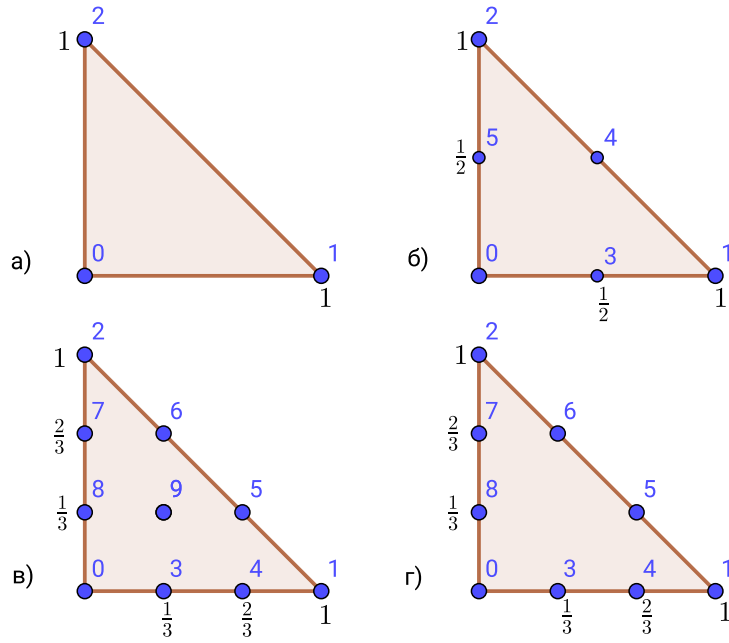


Рис. 10: Расположение узловых точек в параметрическом треугольнике. а) линейный базис, б) квадратичный базис, в) кубический базис, г) неполный кубический базис

$$C = \left( \begin{array}{c|ccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} \\ \hline \phi(0,0) & 1 & 0 & 0 \\ \phi(1,0) & 1 & 1 & 0 \\ \phi(0,1) & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A = C^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \xi & -1 & 1 & 0 \\ \eta & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ \phi_1(\xi, \eta) &= \xi, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \eta, \end{aligned} \tag{A.23}$$

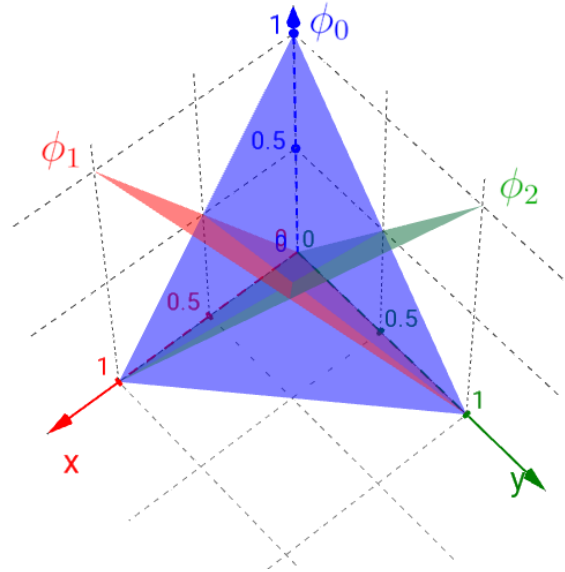


Рис. 11: Линейный базис в параметрическом треугольнике

## Квадратичный базис

$$\phi_i(\xi, \eta) = A_i^{(00)} + A_i^{(10)}\xi + A_i^{(01)}\eta + A_i^{(11)}\xi\eta + A_i^{(20)}\xi^2 + A_i^{(02)}\eta^2.$$

$$C = \left( \begin{array}{c|cccccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} & A^{(11)} & A^{(20)} & A^{(02)} \\ \hline \phi(0,0) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi(1,0) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \phi(0,1) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \phi(\frac{1}{2},0) & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \phi(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \phi(0,\frac{1}{2}) & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow A = \left( \begin{array}{c|cccccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \eta & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ \xi\eta & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ \xi^2 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ \eta^2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

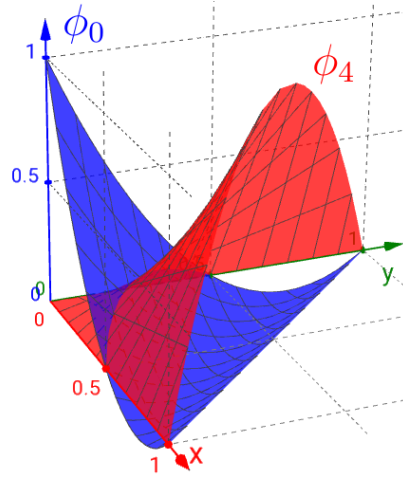


Рис. 12: Квадратичные функции  $\phi_0, \phi_4$  в параметрическом треугольнике

Кубический базис    TODO

Неполный кубический базис    TODO

### А.3.1.4 Интерполяция в параметрическом квадрате

Билинейный базис

$$\phi_i = A_i^{00} + A_i^{10}\xi + A_i^{01}\eta + A_i^{11}\xi\eta.$$

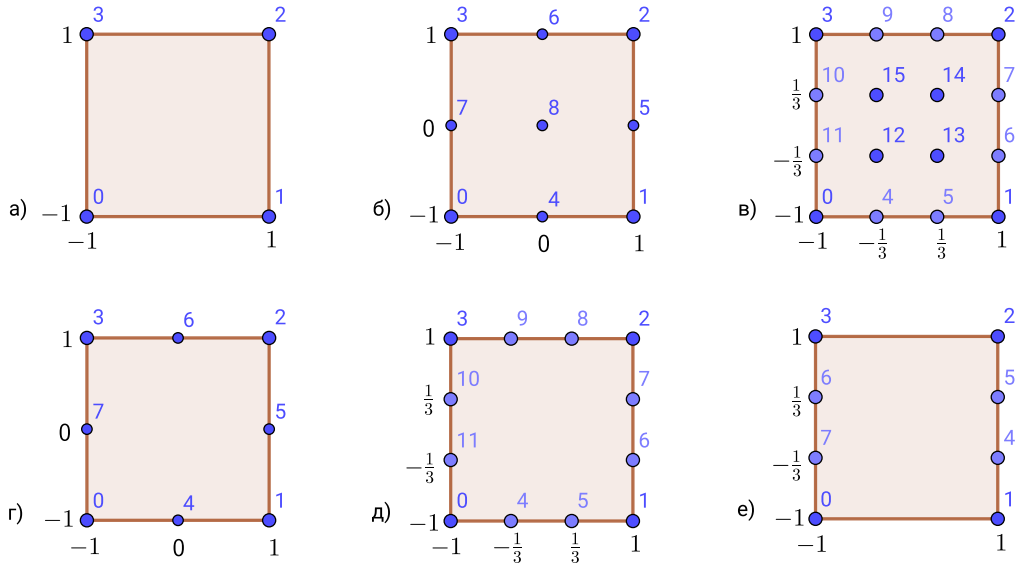


Рис. 13: Расположение узловых точек в параметрическом квадрате

$$C = \left( \begin{array}{c|cccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} & A^{(11)} \\ \hline \phi(-1, -1) & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \phi(1, -1) & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \phi(1, 1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi(-1, 1) & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow A = C^{-1} = \frac{1}{4} \left( \begin{array}{c|cccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \eta & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \xi\eta & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\phi_0(\xi, \eta) = \frac{1 - \xi - \eta + \xi\eta}{4}$$

$$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi - \eta - \xi\eta}{4}$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi + \eta + \xi\eta}{4}$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \frac{1 - \xi + \eta - \xi\eta}{4}$$

(A.24)

**Определение двумерных базисов через комбинацию одномерных** Обратим внимание, что в искомые билинейные базисные функции линейны в каждом из направлений  $\xi, \eta$ , если брать их по отдельности. Значит можно представить эти функции как комбинацию одномерных линейных базисов (A.20) в каждом из направлений. Узлы двумерного параметрического квадрата можно выразить через узлы линейного базиса в параметрическом одномерном сегменте, рассмотренном в п. A.3.1.2:

$$\xi_0 = (\xi_0^{1D}, \xi_0^{1D}), \quad \xi_1 = (\xi_1^{1D}, \xi_0^{1D}), \quad \xi_2 = (\xi_1^{1D}, \xi_1^{1D}), \quad \xi_3 = (\xi_0^{1D}, \xi_1^{1D}).$$

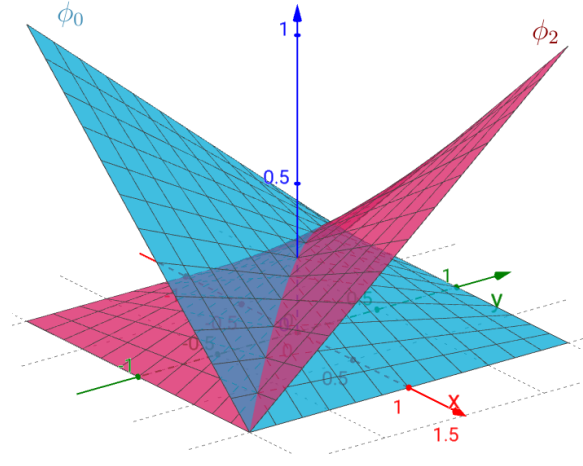


Рис. 14: Билинейные функции  $\phi_0, \phi_2$  в параметрическом квадрате

Значит и соответствующие базисные функции можно выразить через линейный одномерный базис  $\phi^{1D}$  из соотношений (A.20):

$$\begin{aligned}\phi_0(\xi, \eta) &= \phi_0^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ \phi_1(\xi, \eta) &= \phi_1^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2}, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \phi_1^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \phi_0^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2}.\end{aligned}$$

Раскрыв скобки можно убедиться, что мы получили тот же билинейный базис, что и ранее (A.24).

**Биквадратичный базис** Применим этот метод для вычисления биквадратичного базиса, определённого в точках на рис. 13б. В качестве основе возьмём квадратичный одномерный базис  $\phi_i^{1D}$  из (A.21).

$$\begin{aligned}\phi_0(\xi, \eta) &= \phi_0^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 - \xi}{2} \frac{\eta^2 - \eta}{2}, & \phi_1(\xi, \eta) &= \phi_1^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \frac{\eta^2 - \eta}{2}, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \phi_1^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \frac{\eta^2 + \eta}{2}, & \phi_3(\xi, \eta) &= \phi_0^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 - \xi}{2} \frac{\eta^2 + \eta}{2}, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \phi_2^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = (1 - \xi^2) \frac{\eta^2 - \eta}{2}, & \phi_5(\xi, \eta) &= \phi_1^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 + \xi}{2} (1 - \eta^2), \\ \phi_6(\xi, \eta) &= \phi_2^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = (1 - \xi^2) \frac{\eta^2 + \eta}{2}, & \phi_7(\xi, \eta) &= \phi_0^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2 - \xi}{2} (1 - \eta^2), \\ \phi_8(\xi, \eta) &= \phi_2^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).\end{aligned}\tag{A.25}$$

**Бикубический базис**

**Неполный биквадратичный базис**

**Неполный бикубический базис**

## А.4 Геометрические алгоритмы

### А.4.1 Преобразование координат

Рассмотрим преобразование из двумерной параметрической системы координат  $\xi$  в физическую систему  $x$ . Такое преобразование полностью определяется покоординатными функциями  $\mathbf{x}(\xi)$ . Далее получим соотношения, связывающие операции дифференцирования и интегрирования в физической и параметрической областях.

#### А.4.1.1 Матрица Якоби

Будем рассматривать двумерное преобразование  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ . Линеаризуем это преобразование (разложим в ряд Фурье до линейного слагаемого)

$$\begin{aligned} x(\xi_0 + d\xi, \eta_0 + d\eta) &\approx x_0 + \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{\xi_0, \eta_0} d\xi + \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{\xi_0, \eta_0} d\eta, \\ y(\xi_0 + d\xi, \eta_0 + d\eta) &\approx y_0 + \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{\xi_0, \eta_0} d\xi + \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{\xi_0, \eta_0} d\eta, \end{aligned}$$

где  $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$ ,  $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$ . Переписывая это выражение в векторном виде, получим

$$\mathbf{x}(\xi_0 + d\xi) - \mathbf{x}_0 = J(\xi_0) d\xi. \quad (\text{A.26})$$

Матрица  $J$  (зависящая от точки приложения в параметрической плоскости) называется матрицей Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

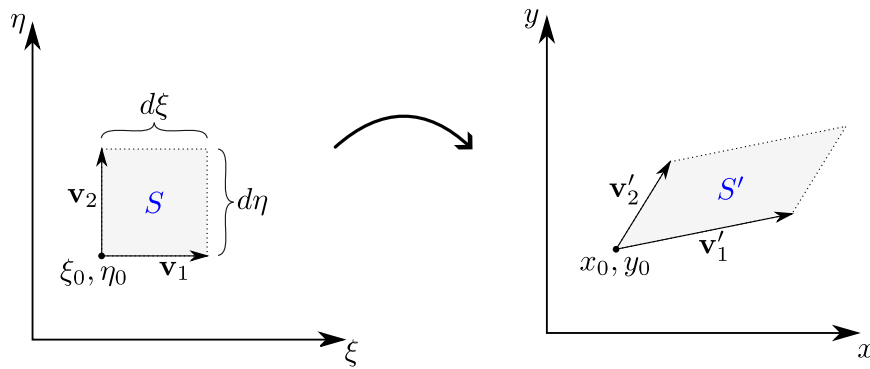


Рис. 15: Преобразование элементарного объёма

**Якобиан** Определитель матрицы Якоби (якобиан), взятый в конкретной точке параметрической плоскости  $\xi_0$ , показывает, во сколько раз увеличился элементарный объём около этой точки в результате преобразования. Действительно, рассмотрим два перпендикулярных элементарных вектора в параметрической системе координат:  $\mathbf{v}_1 = (d\xi, 0)$  и  $\mathbf{v}_2 = (0, d\eta)$  отложенных от точки  $\xi_0$  (см. рис. 15). В результате преобразования по формуле (A.26) получим следующие преобразования концевых точек

и векторов:

$$\begin{aligned}(\xi_0, \eta_0) &\rightarrow (x_0, y_0), \\(\xi_0 + d\xi, \eta_0) &\rightarrow (x_0 + J_{11}d\xi, y_0 + J_{21}d\xi) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}'_1 = (J_{11}d\xi, J_{21}d\xi), \\(\xi_0, \eta_0 + d\eta) &\rightarrow (x_0 + J_{12}d\eta, y_0 + J_{22}d\eta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_2 = (J_{12}d\eta, J_{22}d\eta).\end{aligned}$$

Элементарный объём равен площади параллелограмма, построенного на элементарных векторах. В параметрической плоскости согласно (A.4) получим

$$|S| = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = d\xi d\eta,$$

и аналогично для физической плоскости:

$$|S'| = \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{v}'_2 = (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})d\xi d\eta = |J|d\xi d\eta$$

Сравнивая два последних соотношения приходим к выводу, что элементарный объём в результате преобразования увеличился в  $|J|$  раз. Тогда можно записать

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \tag{A.28}$$

#### A.4.1.2 Дифференцирование в параметрической плоскости

Пусть задана некоторая функция  $f(x, y)$ . Распишем её производную по параметрическим координатам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Вспоминая определение (A.27), запишем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Обратная зависимость примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = (J^T)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

#### A.4.1.3 Интегрирование в параметрической плоскости

Пусть в физической области  $x, y$  задана область  $D_x$ . Интеграл функции  $f(x, y)$  по этой области можно расписать, используя замену (A.28)

$$\int_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_{D_\xi} f(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad (\text{A.29})$$

где  $f(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , а  $D_\xi$  – образ области  $D_x$  в параметрической плоскости.

#### A.4.1.4 Двумерное линейное преобразование. Параметрический треугольник

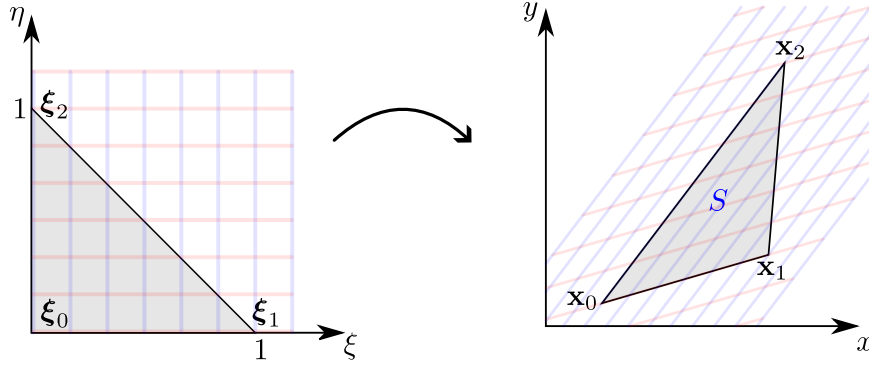


Рис. 16: Преобразование из параметрического треугольника

Рассмотрим двумерное преобразование, при котором определяющие функции являются линейными. То есть представимыми в виде

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= A_x \xi + B_x \eta + C_x, \\ y(\xi, \eta) &= A_y \xi + B_y \eta + C_y. \end{aligned}$$

Для определения шести констант, определяющих это преобразование, достаточно выбрать три любые (не лежащие на одной прямой) точки:  $(\xi_i, \eta_i) \rightarrow (x_i, y_i)$  для  $i = 0, 1, 2$ . В результате получим систему из шести линейных уравнений (три точки по две координаты), из которой находятся константы  $A_{x,y}, B_{x,y}, C_{x,y}$ . Пусть три точки в параметрической плоскости образуют единичный прямоугольный треугольник (рис. 16):

$$\xi_0, \eta_0 = (0, 0), \quad \xi_1, \eta_1 = (1, 0), \quad \xi_2, \eta_2 = (0, 1).$$

Тогда система линейных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} x_0 &= C_x, & y_0 &= C_y, \\ x_1 &= A_x + C_x, & y_1 &= A_y + C_y, \\ y_2 &= B_x + C_x, & y_2 &= B_y + C_y. \end{aligned}$$

Определив коэффициенты преобразования из этой системы, окончательно запишем преобразование

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (x_1 - x_0)\xi + (x_2 - x_0)\eta + x_0, \\ y(\xi, \eta) &= (y_1 - y_0)\xi + (y_2 - y_0)\eta + y_0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$



Матрица Якоби этого преобразования (A.27) не будет зависеть от параметрических координат  $\xi, \eta$ :

$$J = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Якобиан преобразования будет равен удвоенной площади треугольника  $S$ , составленного из определяющих точек в физической плоскости:

$$|J| = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = 2|S|. \quad (\text{A.32})$$

Распишем интеграл по треугольнику  $S$  по формуле (A.29). Вследствии линейности преобразования якобиан постоянен и, поэтому, его можно вынести его из-под интеграла:

$$\int_S f(x, y) dx dy = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (\text{A.33})$$

#### A.4.1.5 Двумерное билинейное преобразование. Параметрический квадрат

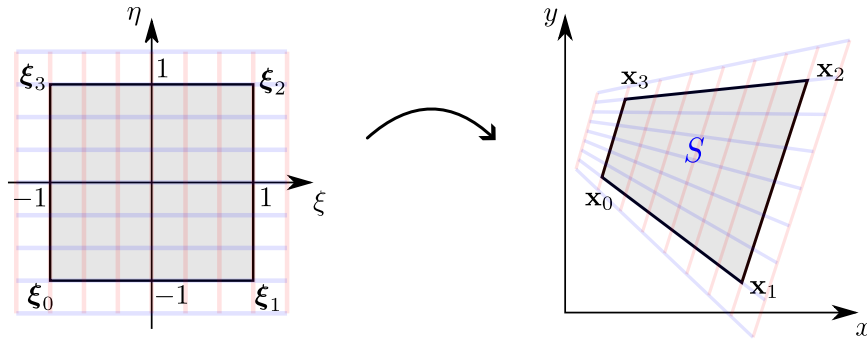


Рис. 17: Преобразование из параметрического квадрата

#### A.4.1.6 Трёхмерное линейное преобразование. Параметрический тетраэдр

TODO

### A.4.2 Свойства многоугольника

#### A.4.2.1 Площадь многоугольника

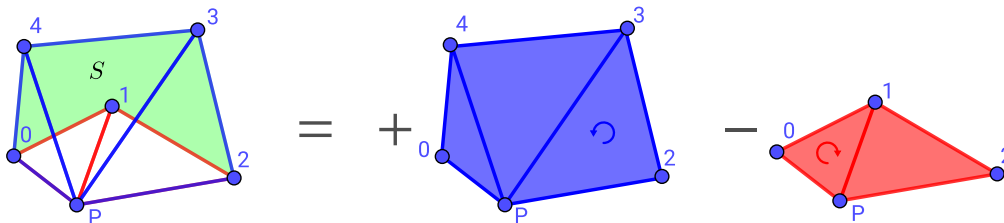


Рис. 18: Площадь произвольного многоугольника

Рассмотрим произвольный несамопересекающийся  $N$ -угольник  $S$ , заданный координатами своих узлов  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , пронумерованных последовательно против часовой стрелки (рис. 18). Далее введём произвольную точку  $\mathbf{p}$  и от этой точки будем строить ориентированные треугольники до граней многоугольника:

$$\triangle_i^p = (\mathbf{p}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1},$$

(для корректности записи будем считать, что  $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0$ ). Тогда площадь исходного многоугольника  $S$  будет равна сумме знаковых площадей треугольников  $\triangle_i^p$ :

$$|S| = \sum_{i=0}^{N-1} |\triangle_i^p|, \quad |\triangle_i^p| = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{p}) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{p})}{2}.$$

Знак площади ориентированного треугольника зависит от направления закрутки его узлов: она положительна для закрутки против часовой стрелки и отрицательна, если узлы пронумерованы по часовой стрелке. В частности, на рисунке 18 видно, что треугольники, отмеченные красным:  $P_{01}, P_{12}$ , будут иметь отрицательную площадь, а синие треугольники  $P_{23}, P_{34}, P_{40}$  – положительную. Сумма этих площадей с учётом знака даст искомую площадь многоугольника.

Для сокращения вычислений воспользуемся произвольностью положения  $\mathbf{p}$  и совместим её с точкой  $\mathbf{x}_0$ . Тогда треугольники  $\triangle_0^p, \triangle_{N-1}^p$  вырождаются (будут иметь нулевую площадь). Обозначим такую последовательную триангуляцию как

$$\triangle_i = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad i = \overline{1, N-2}. \quad (\text{A.34})$$

Знаковая площадь ориентированного треугольника будет равна

$$|\triangle_i| = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)}{2}. \quad (\text{A.35})$$

Тогда окончательно формула определения площади примет вид

$$|S| = \sum_{i=1}^{N-2} |\triangle_i|. \quad (\text{A.36})$$

**Плоский полигон в пространстве** Если плоский полигон  $S$  расположен в трёхмерном пространстве, то правая часть формулы (A.35) согласно определению векторного произведения в трёхмерном пространстве (A.3) – есть вектор. Чтобы получить скалярную площадь, нужно спроецировать этот вектор на единичную нормаль к плоскости многоугольника:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{k} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0).$$

Эта формула записана из предположения, что узел  $\mathbf{x}_2$  не лежит на одной прямой с узлами  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ . Иначе вместо  $\mathbf{x}_2$  нужно выбрать любой другой узел, удовлетворяющий этому условию. Тогда площадь ориентированного треугольника, построенного в трёхмерном пространстве запишется через смешанное произведение:

$$|\triangle_i| = \frac{((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{n}}{2}. \quad (\text{A.37})$$

Формула для определения площади полигона (A.36) будет по-прежнему верна. При этом итоговый знак величины  $S$  будет положительным, если закрутка полигона положительная (против часовой стрелки) при взгляде со стороны вычисленной нормали  $\mathbf{n}$ .

#### A.4.2.2 Интеграл по многоугольнику

Рассмотрим интеграл функции  $f(x, y)$  по  $N$ -угольнику  $S$ , заданному последовательными координатами своих узлов  $\mathbf{x}_i$ . Введём последовательную триангуляцию согласно (A.34). Тогда интеграл по многоугольнику можно расписать как сумму интегралов по ориентированным треугольникам:

$$\int_S f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{N-2} \int_{\Delta_i} f(x, y) dx dy. \quad (\text{A.38})$$

Далее для вычисления интегралов в правой части воспользуемся преобразованием к параметрическому треугольнику (п. A.4.1.4). Следуя формуле интегрирования (A.33), распишем интеграл по  $i$ -ому треугольнику:

$$\int_{\Delta_i} f(x, y) dx dy = |J_i| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f_i(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

где якобиан  $|J_i|$  согласно (A.32) есть удвоенная площадь ориентированного треугольника  $\Delta_i$  (положительная при закрутке против часовой стрелке и отрицательная иначе):

$$|J_i| = 2|\Delta_i| = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0),$$

а функция  $f_i(\xi, \eta)$  есть функция от преобразованных согласно (A.30) переменных:

$$f_i(\xi, \eta) = f((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)\xi + (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)\eta + \mathbf{x}_0).$$

Окончательно запишем

$$\int_S f(x, y) dx dy = 2 \sum_{i=1}^{N-2} |\Delta_i| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f_i(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (\text{A.39})$$

Отметим, что эта формула работает и в том случае, когда полигон расположен в трёхмерном пространстве (знаковую площадь при этом следует вычислять по (A.37)).

#### A.4.2.3 Центр масс многоугольника

По определению, координаты центра масс  $\mathbf{s}$  области  $S$  равны среднеинтегральным значениям координатных функций. То есть

$$c_x = \frac{1}{|S|} \int_S x dx dy, \quad c_y = \frac{1}{|S|} \int_S y dx dy.$$

Далее распишем интеграл в правой части через последовательную триангуляцию согласно (A.38) с учётом линейного преобразования (A.30):

$$\begin{aligned}
\int_S x \, dx dy &= \sum_{i=1}^{N-2} \int_{\Delta_i} x \, dx dy \\
&= \sum_{i=1}^{N-2} |J_i| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} ((x_i - x_0)\xi + (x_{i+1} - x_0)\eta + x_0) \, d\eta d\xi \\
&= \sum_{i=1}^{N-2} \frac{|J_i|}{2} \frac{x_0 + x_i + x_{i+1}}{3} \\
&= \sum_{i=1}^{N-2} |\Delta_i| \frac{x_0 + x_i + x_{i+1}}{3}.
\end{aligned}$$

Итого, с учётом (A.36), координаты центра масс примут вид

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}}{3} |\Delta_i|}{\sum_{i=1}^{N-2} |\Delta_i|}.$$

Если полигон расположен в двумерном пространстве  $xy$ , то знаковая площадь треугольников вычисляется по формуле (A.35). В случае трёхмерного пространства должна использоваться формула (A.37).

### A.4.3 Свойства многогранника

#### A.4.3.1 Объём многогранника

TODO

#### A.4.3.2 Интеграл по многограннику

TODO

#### A.4.3.3 Центр масс многогранника

TODO

### A.4.4 Поиск многоугольника, содержащего заданную точку

TODO

## В Работа с инфраструктурой проекта CFDCourse

## В.1 Сборка и запуск

### В.1.1 Сборка проекта CFDCourse

Описанная ниже процедура собирает проект в отладочной конфигурации. Для проведения необходимых модификаций для сборки релизной версии смотри [В.1.3](#).

#### В.1.1.1 Подготовка

1. Для сборки проекта необходимо установить `git` и `cmake>=3.0`

В Windows необходимо скачать и установить дистрибутивы:

- <https://github.com/git-for-windows/git/releases/download/v2.43.0.windows.1/Git-2.43.0-64-bit.exe>
- [https://github.com/Kitware/CMake/releases/download/v3.28.3/cmake-3.28.3-windows-x86\\_64.msi](https://github.com/Kitware/CMake/releases/download/v3.28.3/cmake-3.28.3-windows-x86_64.msi)

При установке cmake проследите, что бы путь к `cmake.exe` сохранился в системных путях. Msi установщик спросит об этом в диалоге.

В **линуксе** используйте менеджеры пакетов, предоставляемые вашим дистрибутивом. Также проследите чтобы были доступны компилятор `g++` и отладчик `gdb`.

2. Создайте папку в системе для репозитория. Например `D:/git_repos/`
3. Возьмите необходимые заголовочные библиотеки boost из <https://disk.yandex.ru/d/GwTZUvfAqPsZ> и распакуйте архив в папку для репозитория (D:/git\_repos/boost). Проследите, чтобы внутри папки boost сразу шли папки с кодом (`accumulators`, `algorithm`, ...) и заголовочные файлы (`align.hpp`, `aligned_storage.hpp`, ...) без дополнительных уровней вложения.
4. Откройте терминал (git bash в Windows).
5. С помощью команды `cd` в терминале перейдите в папку для репозитория

```
> cd D:/git_repos
```

6. Клонировать репозиторий

```
> git clone https://github.com/kalininei/CFDCourse25
```

В директории (`D:/git_repos` в примере) появится папка `CFDCourse25`, которая является корневой папкой проекта

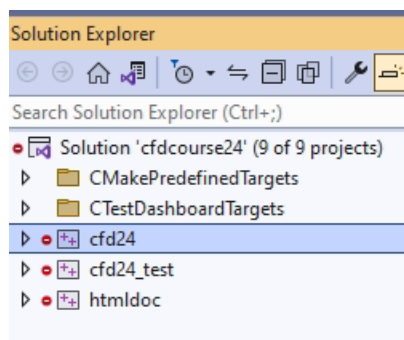
#### В.1.1.2 VisualStudio

1. Создайте папку `build` в корне проекта CFDCourse25
2. Скопируйте скрипт `winbuild64.bat` в папку `build`. Далее вносить изменения только в скопированном файле.

3. Скрипт написан для версии **Visual Studio 2019**. Если используется другая версия, измените в скрипте значение переменной **CMGenerator** на соответствующие вашей версии. Значения для разных версий Visual Studio написаны ниже

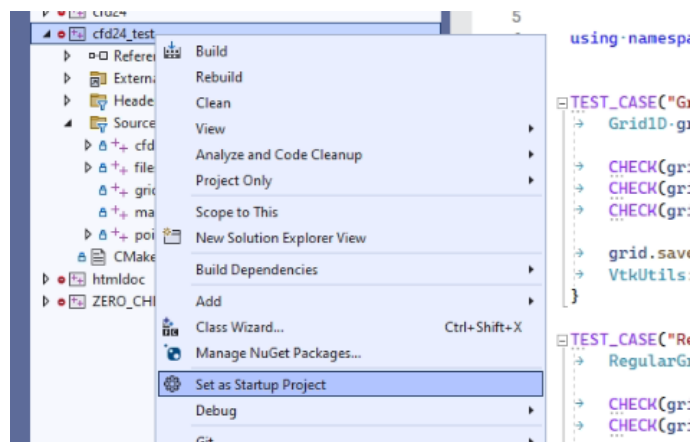
```
SET CMGenerator="Visual Studio 17 2022"  
SET CMGenerator="Visual Studio 16 2019"  
SET CMGenerator="Visual Studio 15 2017"  
SET CMGenerator="Visual Studio 14 2015"
```

4. Запустите скрипт **winbuild64.bat** из папки **build**. Нужен доступ к интернету. В процессе будет скачано около 200Мб пакетов, поэтому первый запуск может занять время
5. После сборки в папке **build** появится проект **VisualStudio cfdcourse25.sln**. Его нужно открыть в **VisualStudio**. Дерево решения должно иметь следующий вид:



Проекты:

- **cfd25** – расчётная библиотека
  - **cfd25\_test** – модульные тесты для расчётных функций
6. Проект **cfd25\_test** необходимо назначить запускаемым проектом. Для этого нажать правой кнопкой мыши по проекту и в выпадающем меню выбрать соответствующий пункт. После этого заголовок проекта должен стать жирным.



7. Скомпилировать решение. Несколько способов:

- **Ctrl+Shift+B**,

- **Build->Build Solution** в основном меню,
- **Build Solution** в меню решения в дереве решения,
- **Build** в меню проекта **cfid25\_test**.

- Запустить тесты (проект **cfid25\_test**) нажав **F5** (или кнопку отладки в меню). После отработки должно высветиться сообщение об успешном прохождении всех тестов.
- Бинарные файлы будут скомпилированы в папку **CFDCourse25/build/bin/Debug**. В случае работы через отладчик выходная директория, куда будут скидываться все файлы (в частности, **vtk**), должна быть **CFDCourse25/build/src/test/**.

### B.1.1.3 VSCode

- Открыть корневую папку проека через **File->Open Folder**
- Установить предлагаемые расширения cmake, c++
- Для настройки отладки создайте конфигурацию **launch.json** следующего вида



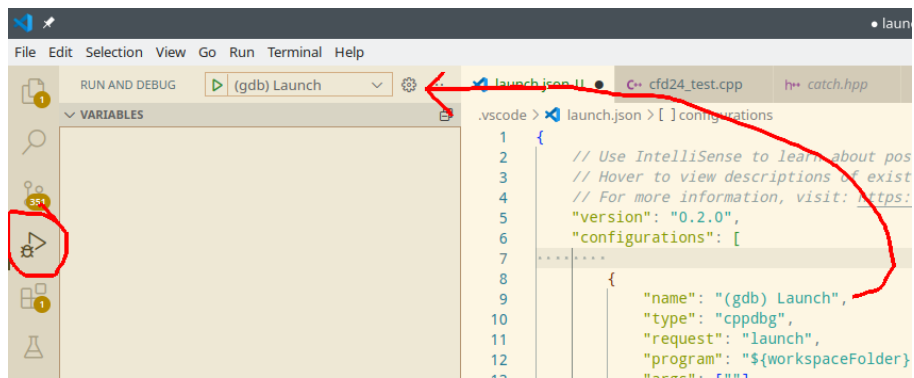
```

5  "version": "0.2.0",
6  "configurations": [
7    {
8      "name": "(gdb) Launch",
9      "type": "cppdbg",
10     "request": "launch",
11     "program": "${workspaceFolder}/build/bin/cfd24_test",
12     "args": [],
13     "stopAtEntry": false,
14     "cwd": "${fileDirname}",
15     "environment": [],
16     "externalConsole": false,
17     "MIMode": "gdb",
18     "setupCommands": [
19       {
20         "description": "Enable pretty-printing for gdb",
21         "text": "-enable-pretty-printing",
22         "ignoreFailures": true
23       },
24       {
25         "description": "Set Disassembly Flavor to Intel",
26         "text": "-gdb-set disassembly-flavor intel",
27         "ignoreFailures": true
28       }
29     ]
30   }
31 ]

```

- Для этого перейдите в меню **Run and Debug** (**Ctrl+Shift+D**), нажмите **create launch.json**, выберите пункт **Node.js**.
- После этого в корневой папке появится файл **.vscode/launch.json**.
- Откройте этот файл в **vscode**, нажмите **Add configuration**, **(gdb) Launch** или **(Windows) Launch** в зависимости от ОС.
- Далее напишите имя программы как показано на картинке.
- Используйте поле **args** для установки аргументов запуска.
- Выберите созданную конфигурацию для запуска отладчика по **F5**





На скриншотах представлены настройки в случае работы в линуксе. Для работы под виндоус

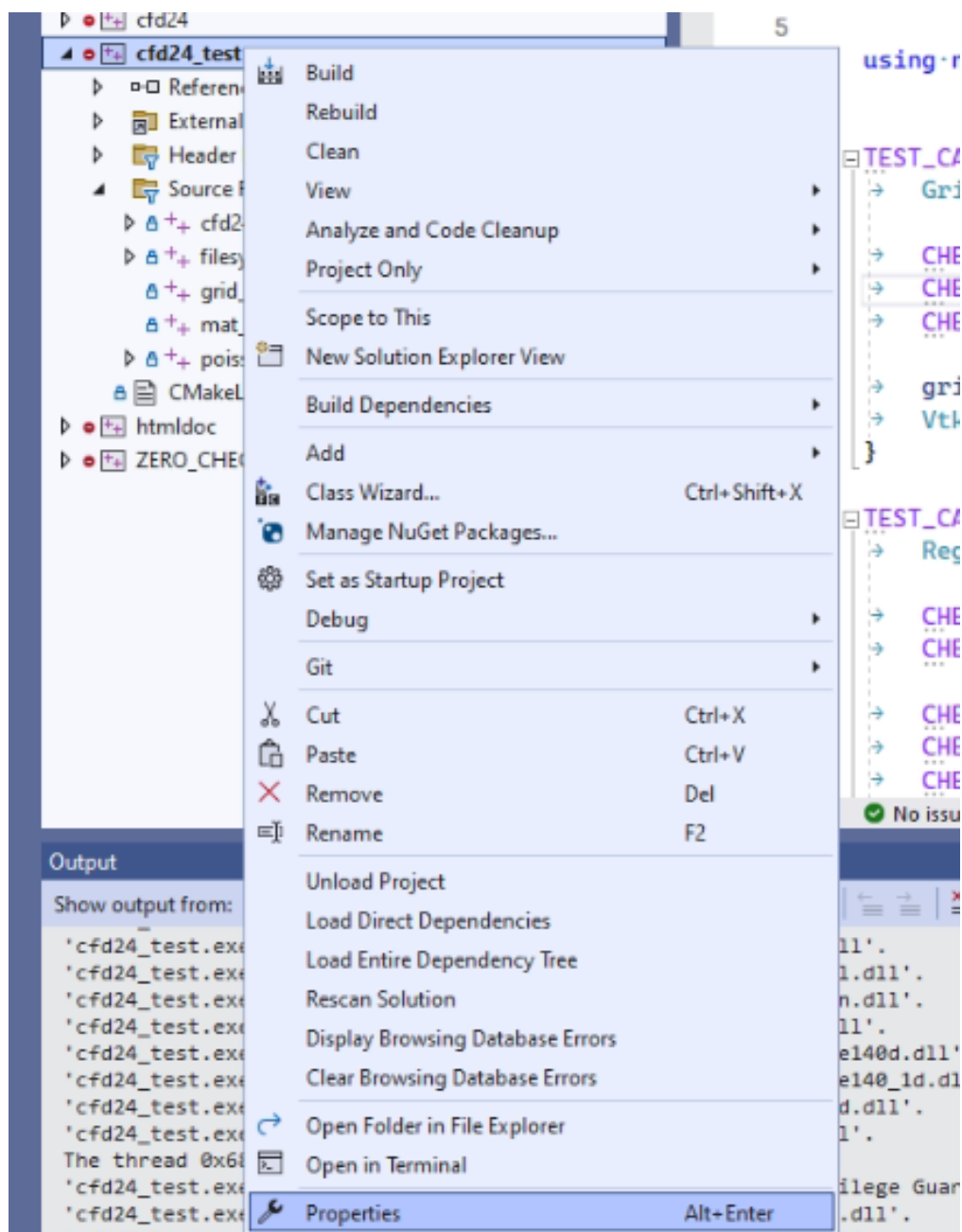
```
"name" : "(Windows) Launch",
"program": "${workspaceFolder}/build/bin/Debug/cfd25_test.exe"
```

### В.1.2 Запуск конкретного теста

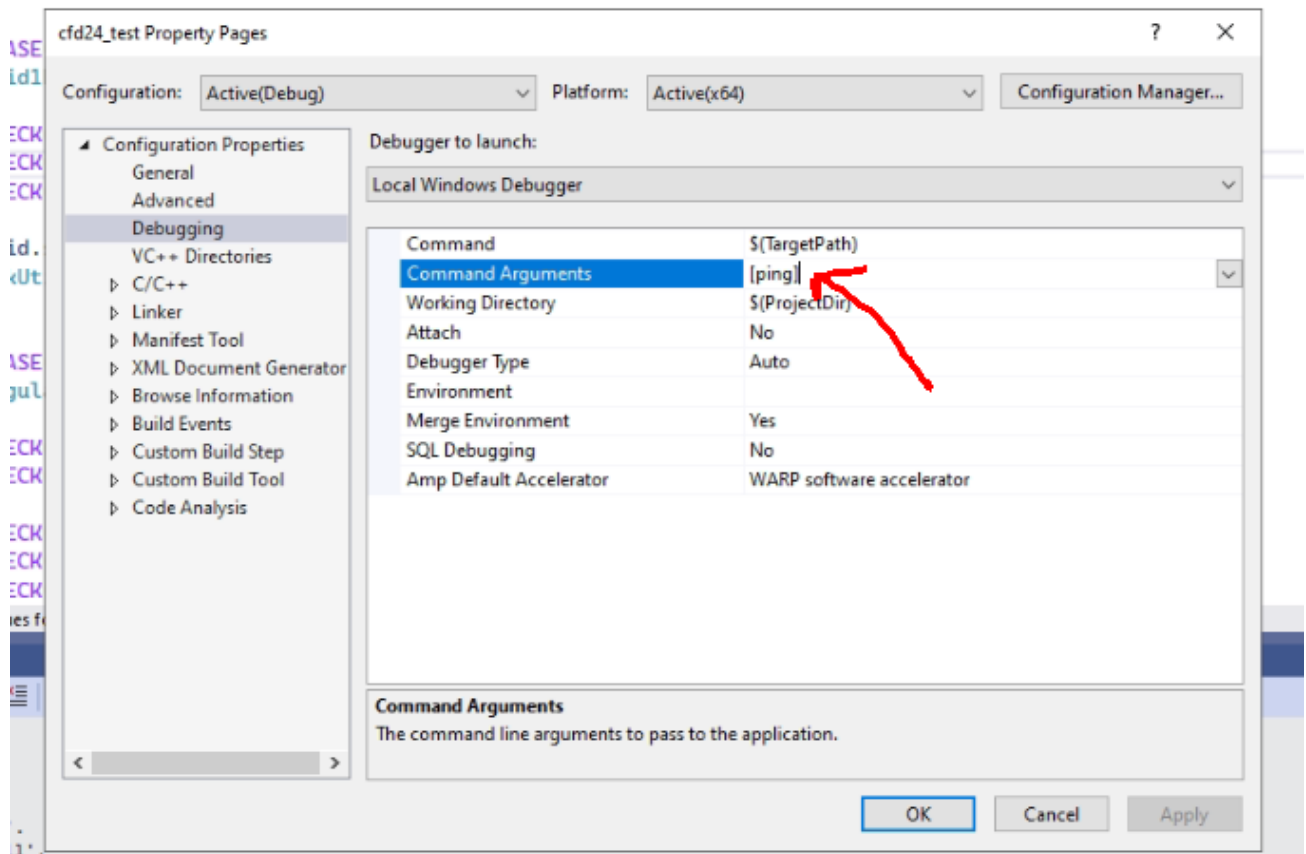
По умолчанию программа `cfd25_test` прогоняет все объявленные в проекте тесты. Иногда может возникнуть необходимость запустить только конкретный тест в целях отладки или проверки. Для этого нужно передать программе аргумент с тегом для этого теста.

Тег для теста – это второй аргумент в макросе `TEST_CASE`, записанный в квадратных скобках. Добавлять нужно вместе со скобками. Например, `[ping]`.

Чтобы добавить аргумент в `VisualStudio`, необходимо в контекстном меню проекта `cfd25_test` выбрать опции отладки



и там в поле Аргументы прописать нужный тэг.



В **VSCode** аргументы нужно добавлять в файле `.vscode/launch.json` в поле `args` в кавычках (см. картинку [B.1.1.3](#) с настройками `launch.json`).

### B.1.3 Сборка релизной версии

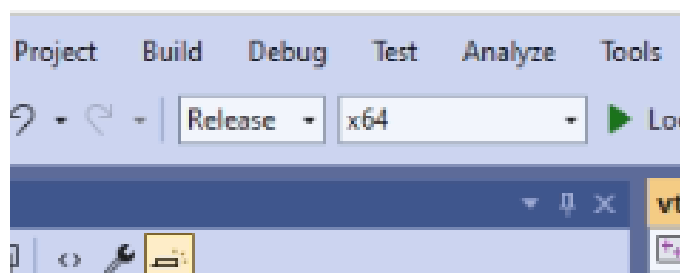
Релизная сборка программ даёт многократное увеличение производительности, но при этом отладка приложений в таком режиме невозможна.

#### Visual Studio

1. Создать папку `build-release` рядом с папкой `build`.
2. Скопировать в неё файл `winbuild64.bat` из папки `build`.
3. В скопированном файле произвести замену `Debug` на `Release`

```
-DCMAKE_BUILD_TYPE=Release ..
```

4. Запустить `winbuild64.bat` из новой папки
5. Открыть `build-release/cfdcourse25.sln` в **Visual Studio**
6. В проекте студии установить релизную сборку



7. Это новое решение, не связанное настройками с `debug`-версией. Поэтому нужно заново настроить запускаемый проектом `cfld_test` и, если нужно, настроить аргументы отладки.
8. Бинарные файлы будут скомпилированы в папку `CFDCourse25/build_release/bin/Release`. В случае работы через отладчик выходная директория – `CFDCourse25/build_release/src/test/`.

## VSCode

1. Выбрать релизную сборку в `build variant`
2. Нажать `Build`
3. Нажать `Launch`



## В.2 Git

### В.2.1 Основные команды

Все команды выполнять в терминале (`git bash` для виндоус), находясь в корневой папке проета CFDCourse24.

- Для **смены директории** использовать команду `cd`. Например, находясь в папке `A` перейти в папку `A/B/C`

```
> cd B/C
```

- **Подняться** на директорию выше

```
> cd ..
```

- **Просмотр статуса** текущего репозитория: текущую ветку, все изменённые файлы и т.п.

```
> git status
```

- **Сохранить и скоммитить** изменения в текущую ветку

```
> git add .  
> git commit -m "message"
```

“message” – произвольная информация о текущем коммите, которая будет приписана к этому коммиту

- **Переключиться на ветку main**

```
> git checkout main
```

работает только в том случае, если все файлы скоммичены и статус ветки 'Up to date'

- **Создать новую ветку** ответвлённую от последнего коммита текущей ветки и переключиться на неё

```
> git checkout -b new-branch-name
```

new-branch-name – имя новой ветки. Пробелы не допускаются

Эта команда работает даже если есть нескommиченные изменения. Если необходимо скоммитить изменения в новую ветку, сразу за этой командой нужно вызвать

```
> git add .  
> git commit -m "message"
```

- **Сбросить** все нескommиченные изменения. Вернуть файлы в состояние последнего коммита

```
> git reset --hard
```

Все изменения будут утеряны

- **Получить последние изменения** из удалённого хранилища с обновлением текущей ветки

```
> git pull
```

Работает только если статус текущей ветки 'Up to date'.

Если требуется получить изменения, но не обновлять локальную ветку:

```
> git fetch
```

Обновленная ветка будет доступна по имени origin/имя ветки.

- **Просмотр истории** коммитов в текущей ветке (последний коммит будет наверху)

```
> git log
```

- **Просмотр доступных веток** в текущем репозитории

```
> git branch
```

- **Просмотр** актуального состояния дерева репозитория в gui режиме

```
> git gui
```

Далее в меню

**Repository->Visualize all branch history**. В этом же окне можно посмотреть изменения файлов по сравнению с последним коммитом.

Альтернативно, при работе в виндоус можно установить программу GitExtensions и работать в ней.

## В.2.2 Порядок работы с репозиторием CFDCourse

Основная ветка проекта –

**main**. После каждой лекции в эту ветку будет отправлен коммит с сообщением **after-lect{index}**. Этот коммит будет содержать краткое содержание лекции, задание по итогам лекции и необходимые для этого задания изменения кода.

Таким образом, **после лекции**, после того, как изменение **after-lect** придёт на сервер, необходимо выполнить следующие команды (находясь в ветке **main**)

```
> git reset --hard # очистить локальную копию от изменений,  
                  # сделанных на лекции (если они не представляют ценности)  
> git pull        # получить изменения
```

**Перед началом лекции**, если была сделана какая то работа по заданиям,

```
> git checkout -b work-lect{index}    # создать локальную ветку, содержащую задание
> git add .
> git commit -m "{свой комментарий}"  # скоммитить свои изменения в эту ветку
> git checkout main                    # вернуться на ветку main
> git pull                             # получить изменения
```

Даже если задание выполнено не до конца, вы в любой момент можете переключиться на ветку с заданием и его доделать

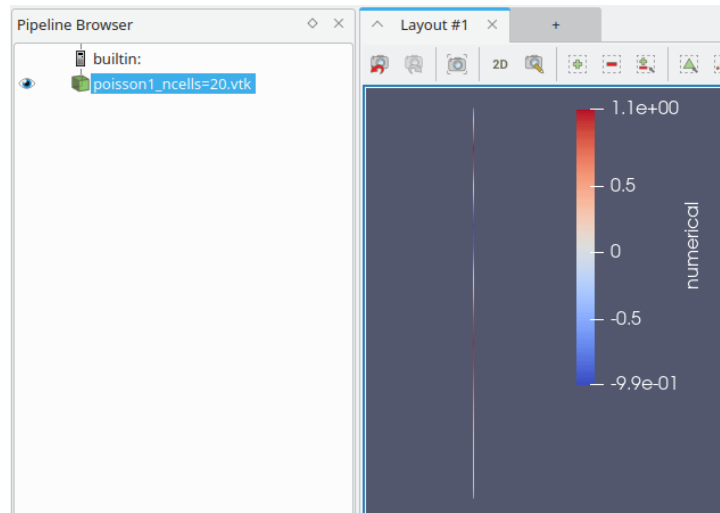
```
> git checkout work-lect{index}
```

Если ничего не было сделано (или все изменения не представляют ценности), можно повторить алгоритм “после лекции”.

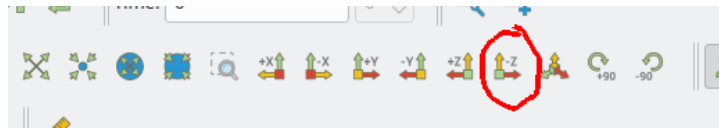
## В.3 Paraview

### В.3.1 Данные на одномерных сетках

Заданные на сетке данные паравью показывает цветом. Поэтому при загрузке одномерных сеток можно видеть картинку типа

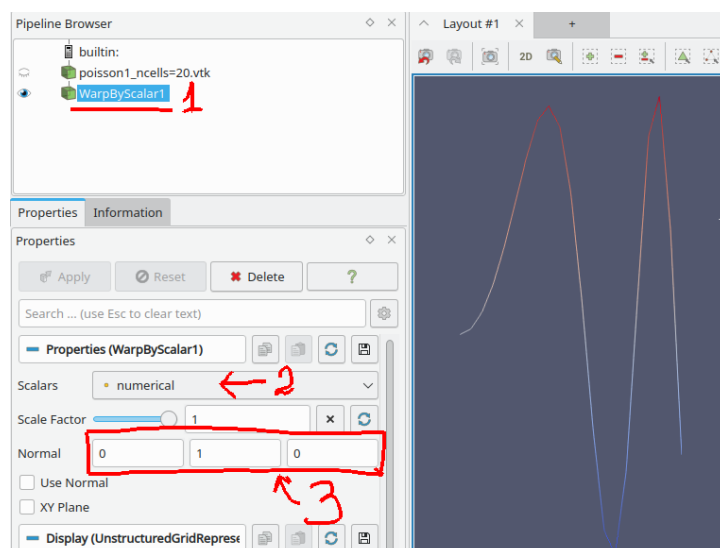


Развернуть изображение в плоскость ху



**Отобразить данные в виде у-координаты** Для того, что бы данные отображались в качестве значения по оси ординат, к загруженному файлу необходимо

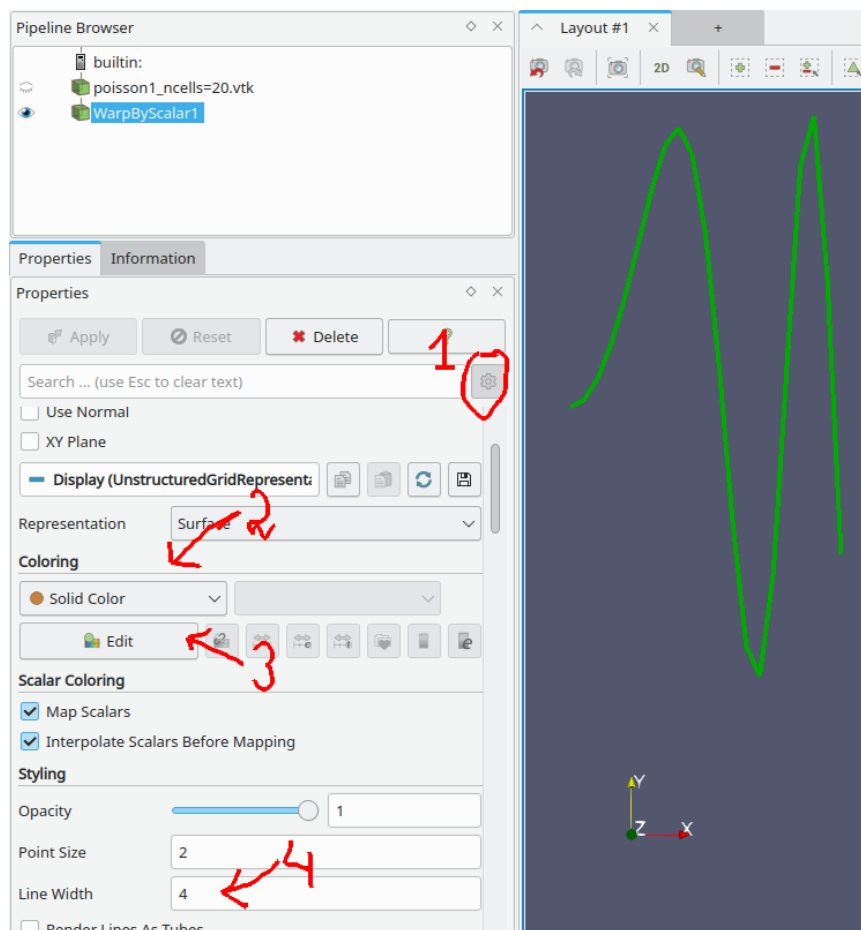
1. применить фильтр **WarpByScalar** (В меню **Filters->Alphabetical->Warp By Scalar**)
2. в меню настройки фильтра указать поле данных, для отображения (numerical в примере ниже)
3. И настроить нормаль, вдоль которой будут проецироваться данные (в нашем случае ось у)





## Цвет и толщина линии

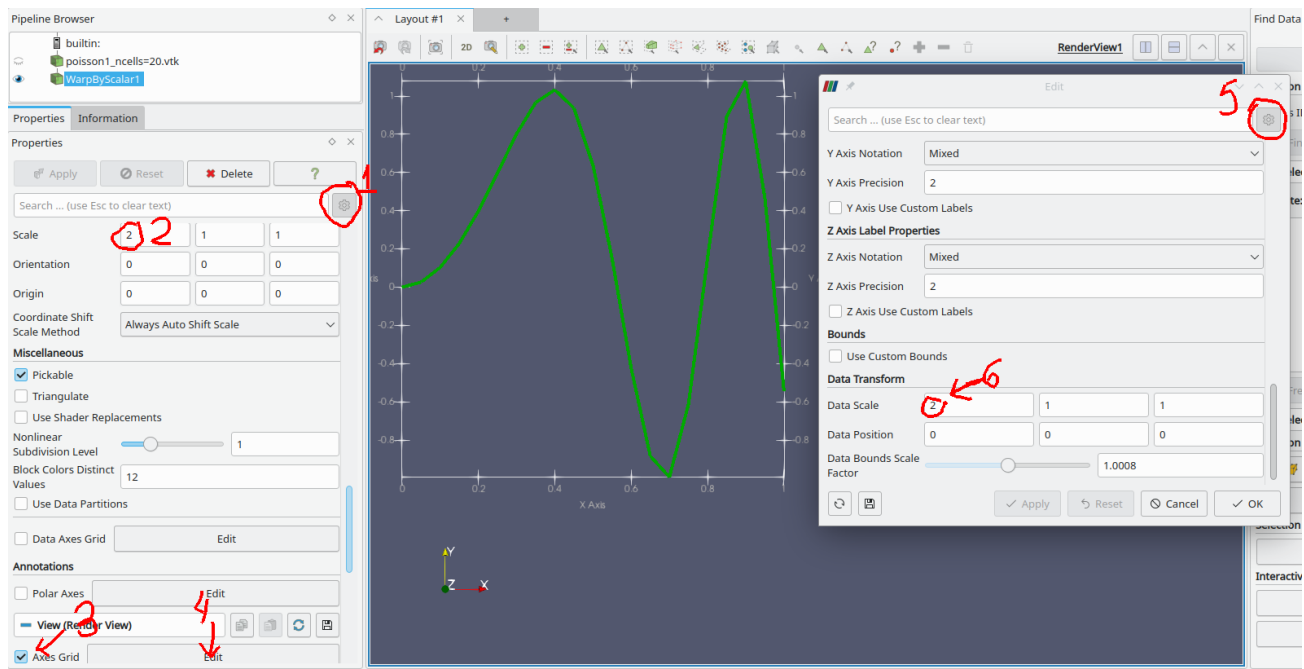
1. Включить подробные опции фильтра
2. Сменить стиль на **Solid Color**
3. В меню **Edit** выбрать желаемый цвет
4. В строке **Line Width** указать толщину линии



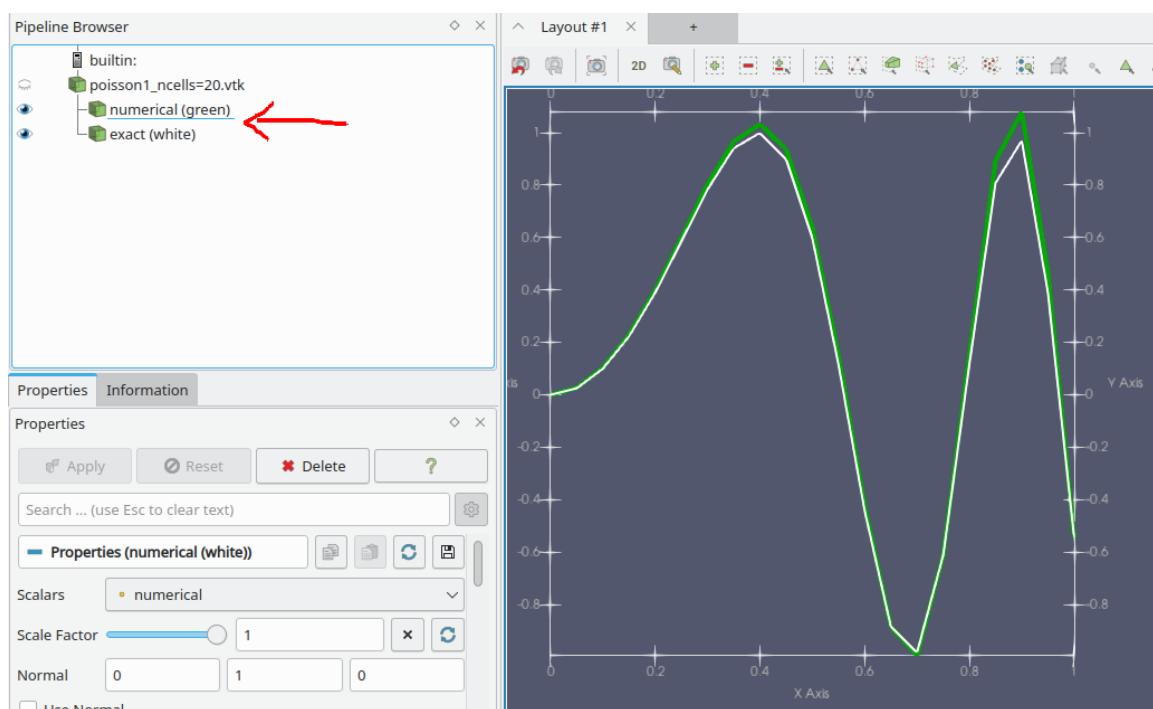
## Настройка масштабов и отображение осей координат

1. Отметьте подробные настройки фильтра
2. В поле **Transforming/Scale** Установите желаемые масштабы (в нашем случае растянуть в два раза по оси x)
3. Установите галку на отображение осей
4. откройте меню натройки осей
5. В нём включите подробные настройки
6. И также поставьте растяжение осей

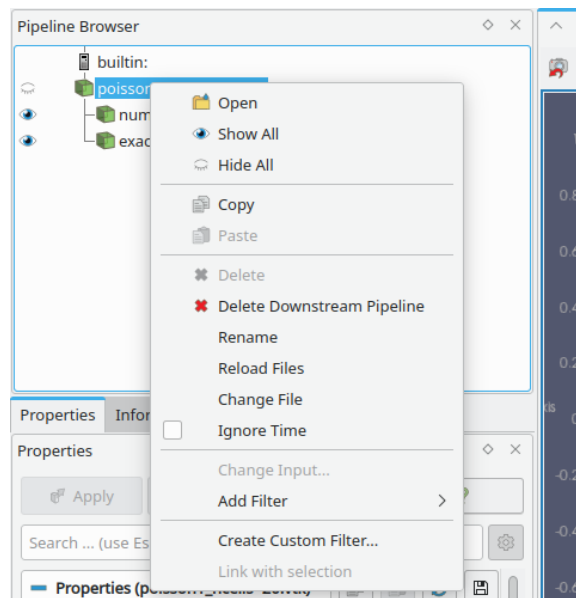
В случае, если масштабировать график не нужно, достаточно выполнить шаг 3.



**Построение графиков для нескольких данных** Если требуется нарисовать рядом несколько графиков для разных данных из одного файла, примените фильтр **Warp By Scalar** для этого файла ещё раз, изменив поле **Scalars** в настройке фильтра. Для наглядности измените имя узла в Pipeline Browser на осмысленные

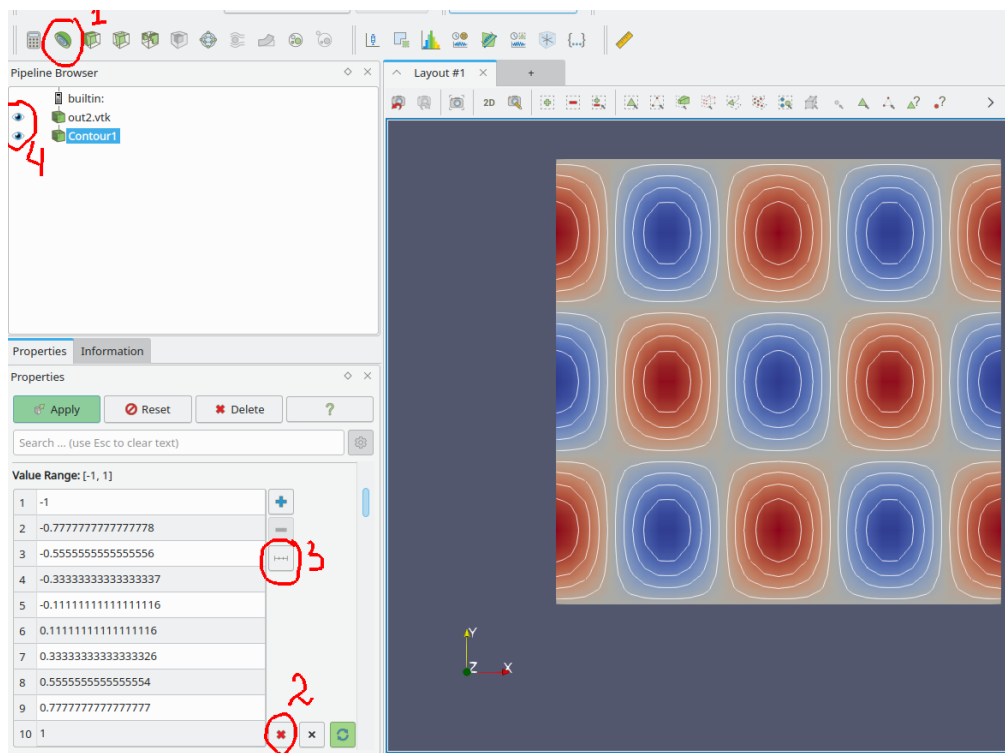


**Обновление данных при изменении исходного файла** В случае, если исходный файл был изменён, нужно в контекстном меню узла соответствующего файла выбрать **Reload Files** (или нажать F5). Если те же самые фильтры нужно применить для просмотра другого файла нужно в этом меню нажать **Change File**.

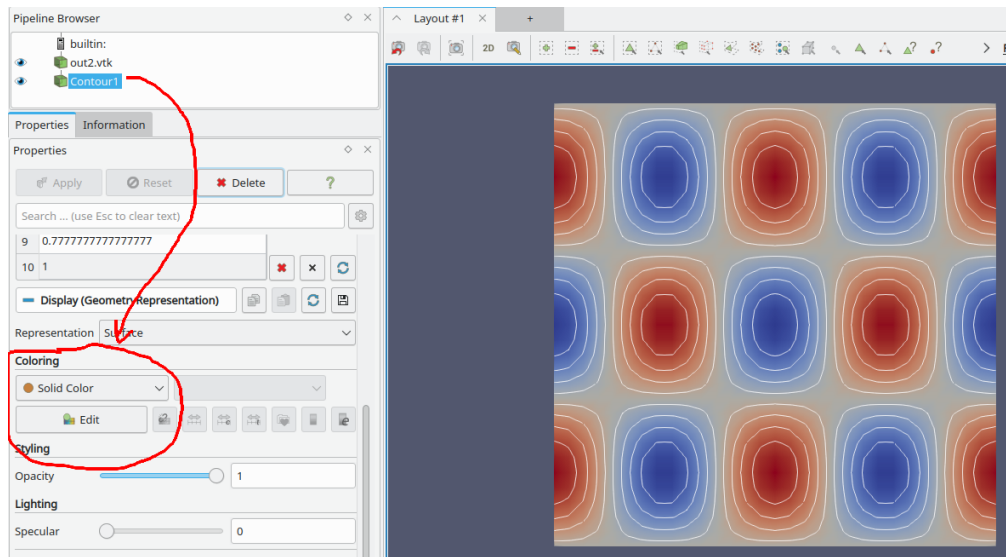


### В.3.2 Изолинии для двумерного поля

1. Нажмите иконку **Contour** (или **Filters/Contour**) В настройках фильтра Contour by выберите данные, по которым нужно строить изолинии.
2. В настройках фильтра удалите все существующие записи о значениях для изолиний
3. Добавьте равномерные значения. В появившемся меню установите необходимое количество изолиний и их диапазон.
4. Если необходимо, включите одновременное отображения цветного поля и изолиний.



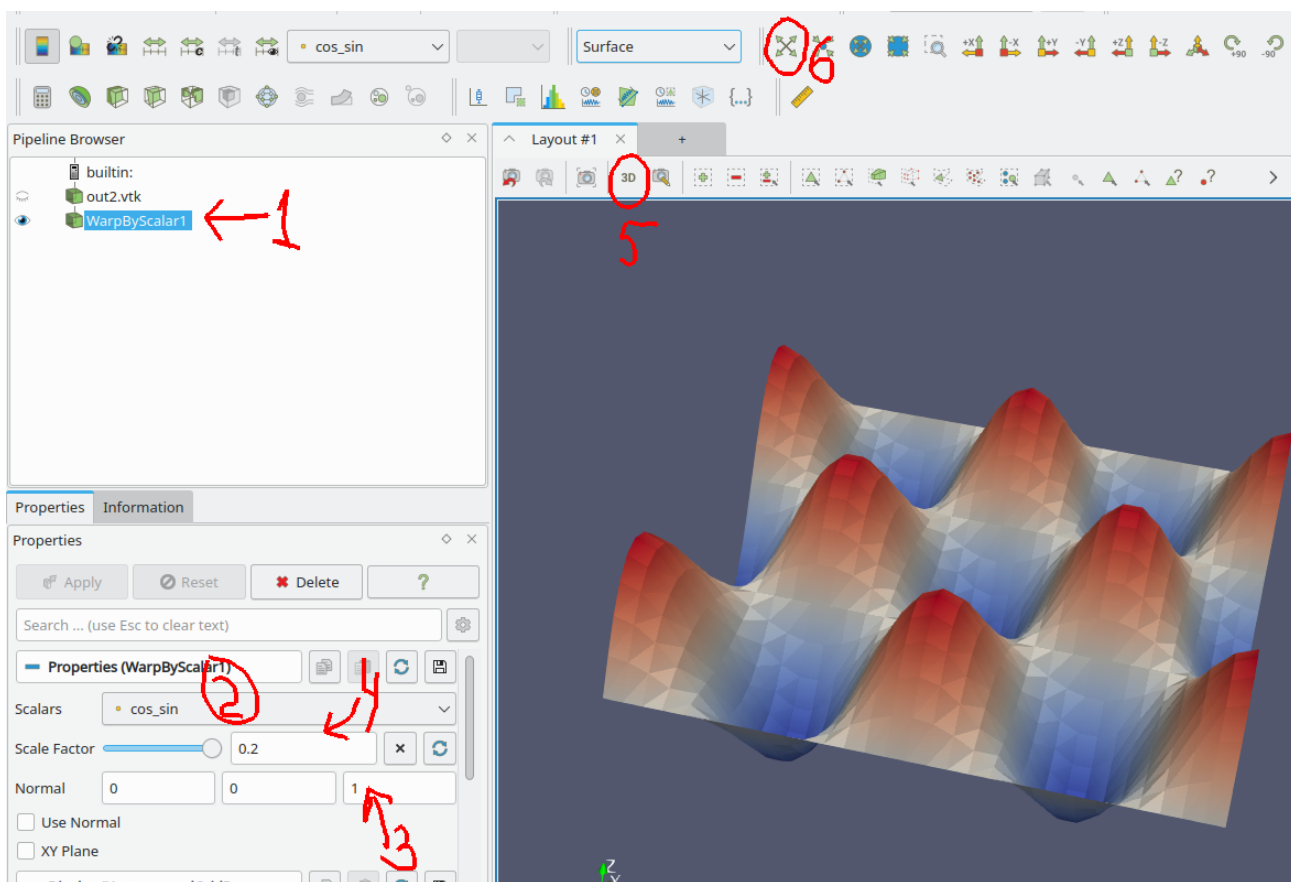
**Задание цвета и толщины изолинии** В случае, если нужно сделать изолинии одного цвета, установите поле **Coloring/Solid color** в настройках фильтра. Там же в меню **Edit** можно выбрать цвет. Для установления толщины линии включите подробные настройки и найдите там опцию **Styling/Line Width**.



### В.3.3 Данные на двумерных сетках в виде поверхности

По аналогии с одномерным графиком (п. В.3.1), двумерные поля так же можно отобразить, проектируя данные на геометрическую координату для получения объёмного графика. Для этого

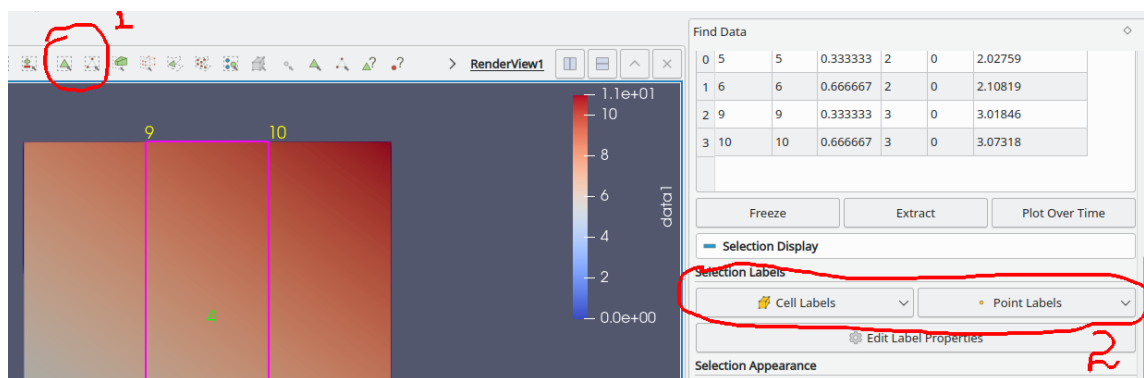
1. Включите фильтр **Filters/Warp By Scalar**
2. В настройках фильтра установите данные, которые будут проектироваться на координату  $z$
3. Установите нормаль для проецирования (ось  $z$ )
4. Если нужно, выберите масштабирования для этой координаты
5. После нажатия **Apply** включите трёхмерное отображение
6. Если данные не видно, обновите экран.



### В.3.4 Числовых значения в точках и ячейках

Иногда в процессе отладки или анализа результатов расчёта требуется знать точное значение поля в заданном узле или ячейке сетки. Для этого

1. Включить режим выделения точек или ячеек (иконка (1 на рисунке) или горячие клавиши **s**, **d**). Выделить мышкой интересующую область
2. В окне **Find data** (или **Selection Inspector** для старых версий Paraview) отметить поле, которое должно отображаться в центрах ячеек и в точках (2 на рисунке). Если такого окна нет, включить его из основного меню **View**.

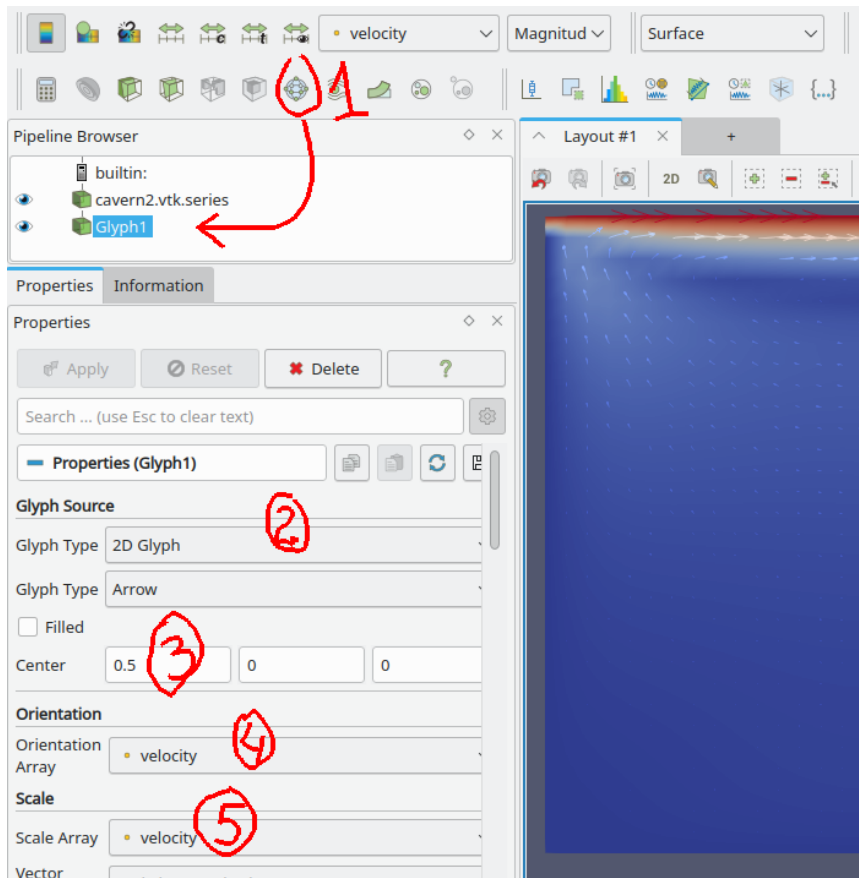


### В.3.5 Векторные поля

Открыть файл **vtk** или **vtk.series**, который содержит векторное поле. Далее

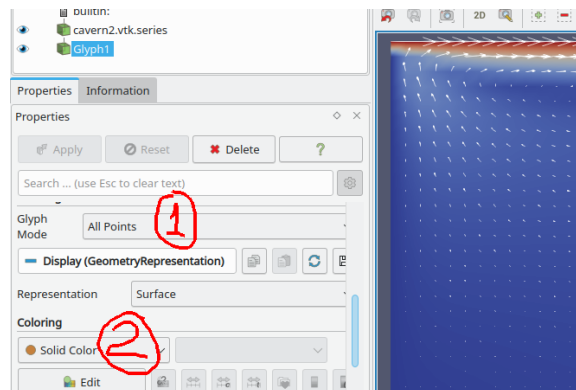
1. Создать фильтр **Glyph**

2. Задать двумерный тип стрелки
3. Сместить центр стрелки, чтобы она исходила из точки, к которой приписана
4. Отметить необходимое векторное поле в качестве ориентации
5. Отметить необходимое векторное поле для масштабирования Нажать **Apply**.



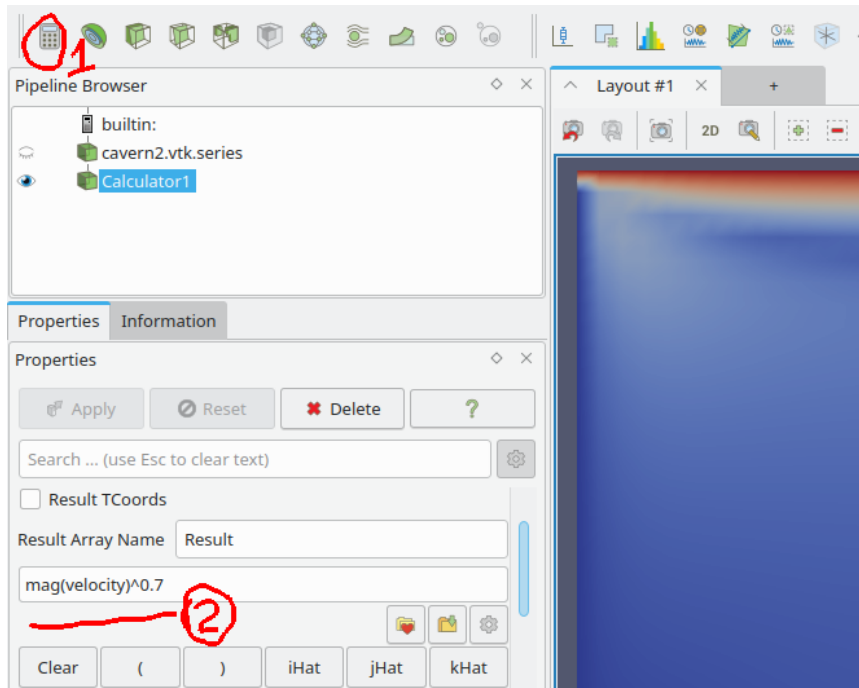
### Настройка отображения стрелок

1. Выбрать необходимый **Glyph-mode**. Если сетка небольшая, то можно **All Points**.
2. Установить белый цвет для стрелок. Нажать Apply.



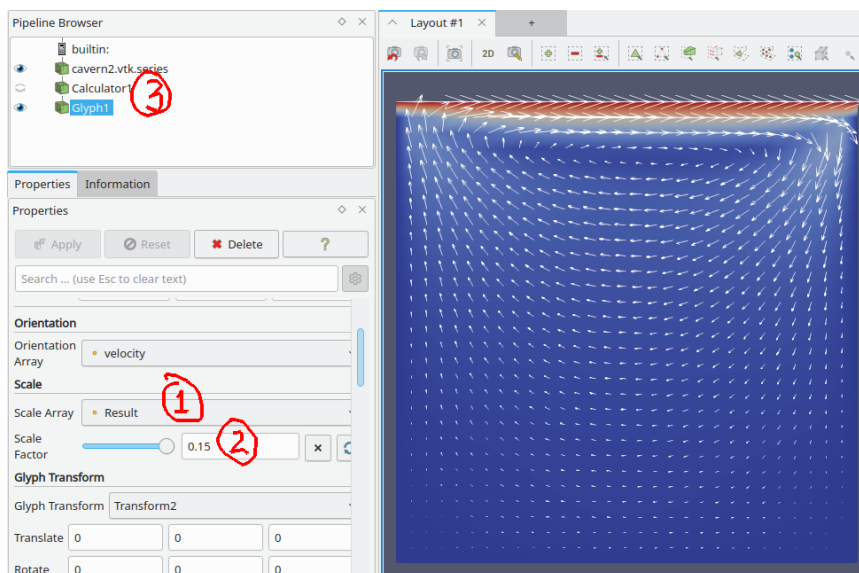
**Уменьшения разброса по длине стрелок** Если разброс по длинам стрелок слишком велик, его можно подравнять, введя новую функцию  $|\mathbf{v}|^\alpha$  – длина вектора в степени меньше единицы (например,  $\alpha = 0.7$ ). Такую функцию можно создать через калькулятор

1. Начиная от загруженного файла создать фильтр **Calculator**
2. Там вбить необходимую формулу



Созданную функцию нужно прокинуть в **Glyph** в качестве коэффициента масштабирования

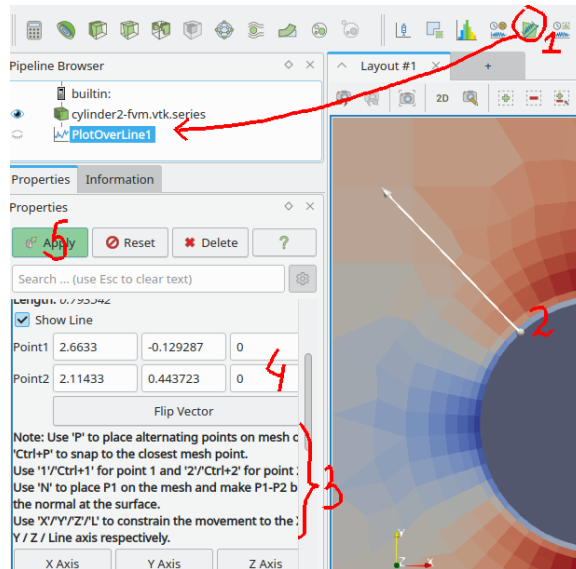
1. В **Scale Array** фильтра **Glyph** указать уже результат работы **Calculator**-а (**Result** по умолчанию),
2. Подтянуть значение **Scale Factor** до приемлимого
3. Не забыть отключить вспомогательное поле **Calculator** из отображения



### В.3.6 Значение функции вдоль линии

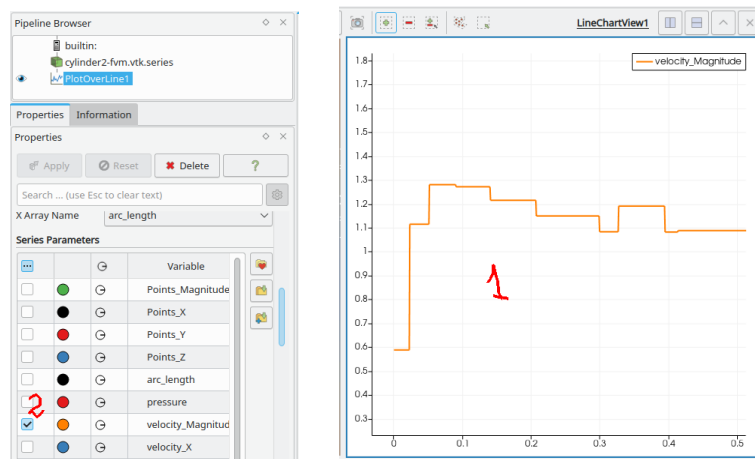
1. Выбрать фильтр **Plot Over Line** иконкой или в меню **Filters**
2. Установить начальную и конечную точку сечения

3. Можно использовать привязку к узлам сетки с помощью горячих клавиш (в подсказках написано)
4. Можно установить координаты руками в соответствующем поле. Для двумерных задач проследить, что координата Z равна нулю
5. Нажать **Apply**



## Настройка графика

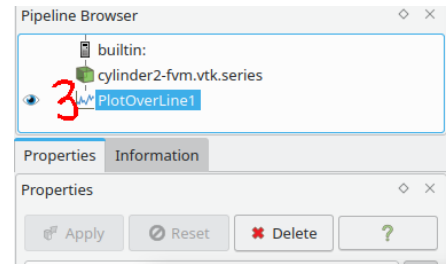
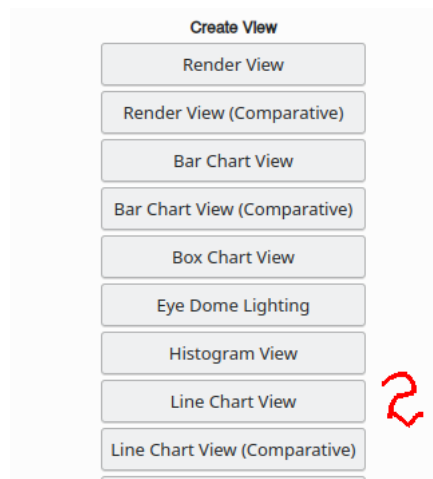
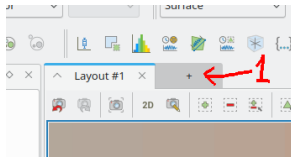
1. После установок появится дополнительное окно типа **Line Chart View** с нарисованным графиком.
2. Сделав это окно активным в настройках фильтра **PlotOverLine** можно выбрать, какие поля рисовать (**Series Parameters**)



## Отрисовка в отдельном окне

1. Открыть новую вкладку
2. Выбрать **Line Chart View**
3. Выбрать предварительно созданный фильтр с одномерным графиком





## В.4 Hybmesh

Генератор сеток на основе композитного подхода. Работает на основе python-скриптов. Полная документация <http://kalininei.github.io/HybMesh/index.html>

### В.4.1 Работа в Windows

Инсталлятор программы следует скачать по ссылке <https://github.com/kalininei/HybMesh/releases> и установить стандартным образом.

Для запуска скрипта построения `script.py` нужно открыть консоль, перейти в папку с нужным скриптом, оттуда выполнить (при условии, что программа была установлена в папку `C:\Program Files`):

```
> "C:\Program Files\HybMesh\bin\hybmesh.exe" -sx script.py
```

### В.4.2 Работа в Linux

Версию для линукса нужно собирать из исходников. Либо, если собрать не получилось, можно строить сетки в Windows и переносить полученные vtk-файлы на рабочую систему.

Перед сборкой в систему необходимо установить dev-версии пакетов `suitesparse` и `libxml2`. Также должны быть доступны компиляторы `gcc-c++` и `gcc-fortan` и `cmake`. Программа работает со скриптами python2. Лучше установить среду `anaconda` (<https://docs.anaconda.com/free/anaconda/install/index.html>) И в ней создать окружение с `python-2.7`:

```
> conda create -n py27 python=2.7 # создать среду с именем py27
> conda activate py27             # активировать среду py27
> pip install decorator           # установить пакет decorator
```

Сначала следует клонировать репозиторий в папку с репозиториями гита:

```
> cd D:/git_repos
> git clone https://github.com/kalininei/HybMesh
```

Поскольку программа не предназначена для запуска из под анаконды, в сборочные скрипты нужно внести некоторые изменения. В корневом сборочном файле `HybMesh/CMakeLists.txt` нужно закомментировать все строки в диапазоне

```
# ===== Python check
....
# ===== Windows installer options
```

а в файле `HybMesh/src/CMakeLists.txt` последнюю строку

```
#add_subdirectory(bindings)
```

Далее, находясь в корневой директории репозитория HybMesh, запустить сборку

```
> mkdir build
> cd build
> cmake .. -DCMAKE_BUILD_TYPE=Release
> make -j8
> sudo make install
```

Для запуска скриптов нужно создать скрипт-прокладку

```
import sys
sys.path.append("/path/to/HybMesh/src/py/") # вставить полный путь к Hybmesh/src/py
execfile(sys.argv[1])
```

и сохранить его в любое место. Например в `path/to/HybMesh/hybmesh.py`.

Для запуска скрипта построения сетки следует перейти в папку, где находится нужный скрипт `script.py`, убедиться, что анаконда работает в нужной среде (то есть `conda activate py27` был вызван), и запустить

```
> python /path/to/HybMesh/hybmesh.py script.py
```