Содержание

1 Лекция 1 (02.09)

A Формулы и обозначения

A.1 Векторы

A.1.1 Обозначение

Геометрические вектора обозначаются жирным шрифтом $\mathbf{v}$. Скалярные координаты вектора – через нижний индекс с обозначением оси координат: (v_x, v_y, v_z). Если вектор $\mathbf{u}$ – вектор скорости, то его декартовые координаты имеют специальное обозначение $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Единичные вектора, соответствующие осям координат, обозначаются знаком $\hat{\cdot}$: $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Координатные векторы обозначаются по символу первой оси. Например, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ или $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$.

Операции в векторами имеют следующее обозначение (расписывая в декартовых координатах):

- Умножение на скалярную функцию

$$f\mathbf{u} = (fu_x)\hat{\mathbf{x}} + (fu_y)\hat{\mathbf{y}} + (fu_z)\hat{\mathbf{z}}; \tag{A.1}$$

- Скалярное произведение

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z; \tag{A.2}$$

- Векторное произведение

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\hat{\mathbf{x}} - (u_x v_z - u_z v_x)\,\hat{\mathbf{y}} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{A.3}$$

В двумерном случае можно считать, что $u_z = v_z = 0$. Тогда результатом векторного произведения согласно (A.3) будет вектор, направленный перпендикулярно плоскости xy:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x v_y - u_y v_x)\hat{\mathbf{z}}.$$

При работе с двумерными задачами, где ось $\mathbf{z}$ отсутствует, обычно результатом векторного произведения считают скаляр

$$2D: \ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x v_y - u_y v_x. \tag{A.4}$$

Геометрический смысл этого скаляра: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

A.1.2 Набла–нотация

Символ ∇ – есть псевдовектор, который выражает покоординатные производные. Для декартовой системы координат (x, y, z) он запишется в виде

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

В радиальной (r, ϕ, z):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

В цилиндрической (r, θ, ϕ):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Удобство записи дифференциальных выражений с использованием ∇ заключается в независимости записи от вида системы координат. Но если требуется обозначить производную по конкретной координате, то, по аналогии с обычными векторами, это делается через нижний индекс:

$$\nabla_n f = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

Для этого символа справедливы все векторные операции, описанные ранее. Так, применение ∇ к скалярной функции аналогично умножению вектора на скаляр (A.1) (здесь и далее приводятся покоординатные выражения для декартовой системы):

$$\nabla f = (\nabla_x f,\ \nabla_y f,\ \nabla_z f) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}. \tag{A.5}$$

Результатом этой операции является вектор.

Скалярное умножение ∇ на вектор $\mathbf{v}$ по аналогии с (A.2) – есть дивергенция:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{A.6}$$

результат которой – скалярная функция.

Двойное применение ∇ к скалярной функции – это оператор Лапласа:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{A.7}$$

Ротор – аналог векторного умножнения (A.3):

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}. \tag{A.8}$$

A.2 Интегрирование

A.2.1 Формула Гаусса–Остроградского

Формула Гаусса–Остроградского, связывающая интегрирование по объёму E с интегрированием по границе этого объёма Г, для векторного поля $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\int\limits_E \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Gamma v_n\, ds, \tag{A.9}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к области E нормаль. Смысл этой формулы можно проиллюстрировать на одномерном примере. Пусть одномерное векторное поле $v_x = f(x)$ на отрезке $E = [a, b]$ задано функцией, представленной на рис. 1. Разобъем область на $N = 3$ равномерных подобласти

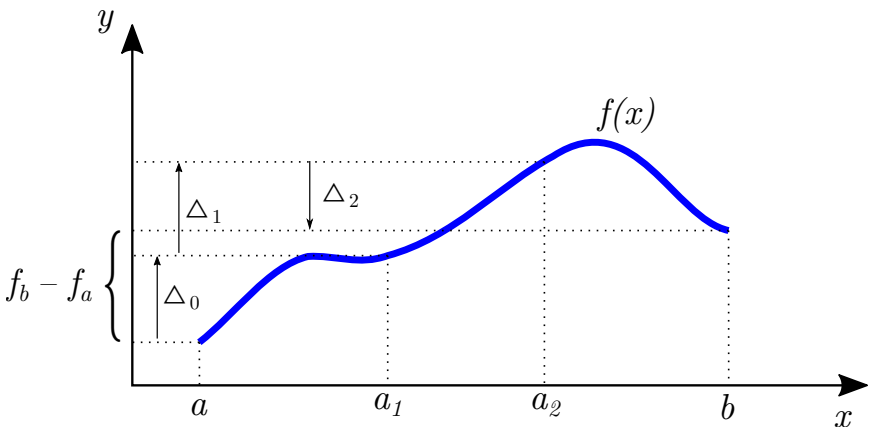


Рис. 1: Формула Гаусса-Остроградского в одномерном случае

длины h. Тогда расписывая интеграл как сумму, а производную через конечную разность, получим

$$\int\limits_E \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \approx \sum_{i=0}^{2} h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \sum_{i=0}^{2} (f_{i+1} - f_i) = \triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 = f_b - f_a.$$

Очевидно что, при устремлении $N \to \infty$ правая часть предыдущего выражения не изменится. То есть, сумма всех изменений функции в области есть изменение функции по её границам:

$$\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f(b) - f(a).$$

А формула (A.9) – есть многомерное обобщение этого выражения.

A.2.2 Интегрирование по частям

Подставив в (A.9) $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, где f – некоторая скалярная функция, и расписав дивергенцию в виде

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

получим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_E \mathbf{u} \cdot \nabla f \, d\mathbf{x} = \int\limits_\Gamma f u_n \, ds - \int\limits_E f \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \tag{A.10}$$

Распишем некоторые частные случаи для формулы (A.10). Для $\mathbf{u} = (n_x, 0, 0)$ получим

$$\int\limits_E \frac{\partial f}{\partial x} \, d\mathbf{x} = \int\limits_\Gamma f \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{x}}) \, ds \tag{A.11}$$

При $\mathbf{u} = \nabla g$

$$\int\limits_E f \left(\nabla^2 g\right) \, d\mathbf{x} = \int\limits_\Gamma f \frac{\partial g}{\partial n} \, ds - \int\limits_E \nabla f \cdot \nabla g \, d\mathbf{x} \tag{A.12}$$

При $f = 1$ и $\mathbf{u} = \nabla g$

$$\int\limits_E \nabla^2 g \, d\mathbf{x} = \int\limits_\Gamma \frac{\partial g}{\partial n} \, ds \tag{A.13}$$

A.2.3 Численное интегрирование в заданной области

Квадратурная формула

$$\int\limits_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i f(\mathbf{x}_i) \tag{A.14}$$

Она определяется заданием узлов интегрирования $\mathbf{x}_i$ и соответствующих весов w_i.

A.3 Интерполяционные полиномы

A.3.1 Многочлен Лагранжа

A.3.1.1 Узловые базисные функции

Рассмотрим функцию $f(\xi)$, заданную в области D. Внутри этой области зададим N узловых точек $\xi_i, i = \overline{0, N-1}$. Приближение функции f будем искать в виде

$$f(\xi) \approx \sum_{i=0}^{N-1} f_i \phi_i(\xi), \tag{A.15}$$

где $f_i = f(\xi_i)$, ϕ_i – узловая базисная функция. Потребуем, чтобы это выражение выполнялось точно для всех заданных узлов интерполяции $\xi = \xi_i$. Тогда, исходя из определения (A.15), запишем условие на узловую базисную функцию

$$\phi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{A.16}$$

Дополнительно потребуем, чтобы формула (A.15) была точной для постоянных функций

$$f(\xi) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad f_i = \text{const}.$$

Тогда для любого ξ должно выполняться условие

$$\sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(\xi) = 1, \qquad \xi \in D. \tag{A.17}$$

Задача построения интерполяционной функции состоит в конкретном определении узловых базисов $\phi_i(\xi)$ по заданному набору узловых точек ξ_i и значениям функции в них f_i. Будем искать базисы в виде многочленов вида

$$\phi_i(\xi) = \sum_a A_i^{(a)} \xi^a = A_i^{(0)} + A_i^{(1)} \xi + A_i^{(2)} \xi^2 + \ldots, \qquad i = \overline{0, N-1}. \tag{A.18}$$

Определять коэффициенты $A_i^{(a)}$ будем из условий (A.16), которое даёт N линейных уравнений относительно неизвестных $A_i^{(a)}$ для каждого $i = \overline{0, N-1}$. Таким образом, в выражениях (A.18) должно быть ровно N слагаемых. Будем использовать последовательный набор степеней: $a = \overline{0, N-1}$. Выпишем систему линейных уравнений для 0-ой базисной функции

$$\begin{aligned}
&\phi_0(\xi_0) = A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_0 + A_0^{(2)} \xi_0^2 + A_0^{(3)} \xi_0^3 + \ldots = 1, \\
&\phi_0(\xi_1) = A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_1 + A_0^{(2)} \xi_1^2 + A_0^{(3)} \xi_1^3 + \ldots = 0, \\
&\phi_0(\xi_2) = A_0^{(0)} + A_0^{(1)} \xi_2 + A_0^{(2)} \xi_2^2 + A_0^{(3)} \xi_2^3 + \ldots = 0, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(0)} \\ A_0^{(1)} \\ A_0^{(2)} \\ A_0^{(3)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Записывая аналогичные выражения для остальных базисных функций, получим систему матричных уравнений вида $CA = E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & A_3^{(0)} & \dots \\ A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & A_3^{(1)} & \\ A_0^{(2)} & A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & A_3^{(2)} & \\ A_0^{(3)} & A_1^{(3)} & A_2^{(3)} & A_3^{(3)} & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Отсюда матрица неизвестных коэффициентов A определится как

$$A = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \xi_0^3 & \dots \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \dots \\ 1 & \xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}^{-1}. \tag{A.19}$$

Подставляя полином (A.18) в условие согласованности (A.17), получим требование

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_i^{(a)} = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

То есть сумма всех свободных членов в интерполяционных полиномах должна быть равна единице, а сумма коэффициентов при остальных степенях – нулю. Можно показать, что это свойство выполняется для любой матрицы $A = C^{-1}$, в случае, если первый столбец матрицы C состоит из единиц. То есть условие согласованности требует наличие свободного члена с интерполяционном полиноме.

A.3.1.2 Интерполяция в параметрическом отрезке

Будем рассматривать область интерполяции $D = [-1, 1]$. В качестве первых двух узлов интерполяции возьмем границы области: $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = 1$.

Линейный базис Будем искать интерполяционный базис в виде

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi.$$

на основе двух условий:

$$\phi_i(-1) = A_i^{(0)} - A_i^{(1)} = \delta_{0i}, \quad \phi_i(1) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\delta_{1i}.$$

Составим матрицу C, записав эти условия в матричном виде

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} & A^{(0)} & A^{(1)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 \\ \phi(1) & 1 & 1 \end{array}\right)$$

и, согласно (A.19), найдём матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} \\ A_0^{(1)} & A_1^{(1)} \end{pmatrix} = C^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} & \phi_0 & \phi_1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \xi & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Отсюда узловые базисные функции примут вид (рис. 2)

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}, \\ \phi_1(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Окончательно интерполяционная функция из определения (A.15) примет вид

$$f(\xi) \approx \frac{1-\xi}{2} f(-1) + \frac{1+\xi}{2} f(1).$$

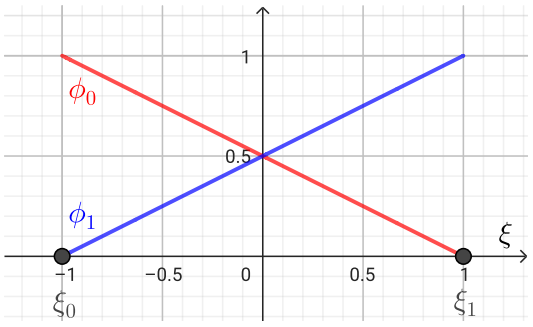


Рис. 2: Линейный базис в параметрическом отрезке

Квадратичный базис Будем искать интерполяционный базис в виде

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi + A_i^{(2)}\xi^2.$$

По сравнению с линейным случаем, в форму базиса добавился ещё один неизвестый коэффициент $A_i^{(2)}$, поэтому в набор условий (A.16) требуется ещё одно уравнение (ещё одна узловая точка). Поме-

стим её в центр параметрического сегмента $\xi_2 = 0$. Далее будем действовать по аналогии с линейным случаем:

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} & A^{(0)} & A^{(1)} & A^{(2)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 & 1 \\ \phi(1) & 1 & 1 & 1 \\ \phi(0) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = C^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \xi & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \xi^2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right).$$

Узловые базисные функции для квадратичной интерполяции примут вид (рис. 3)

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi) &= \frac{\xi^2 - \xi}{2}, \\ \phi_1(\xi) &= \frac{\xi^2 + \xi}{2}, \\ \phi_2(\xi) &= 1 - \xi^2. \end{aligned} \tag{A.21}$$

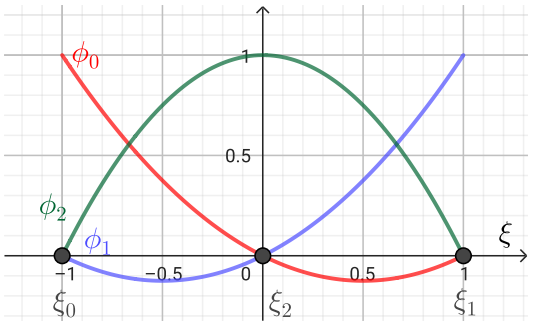


Рис. 3: Квадратичный базис в параметрическом отрезке

Кубический базис Интерполяционный базис будет иметь вид

$$\phi_i(\xi) = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}\xi + A_i^{(2)}\xi^2 + A_i^{(3)}\xi^3.$$

Для нахождения четырёх коэффициентов нам понадобится четыре узла интерполяции. Две из них – это границы параметрического отрезка. Остальные две разместим так, чтобы разбить отрезок на равные интервалы: $\xi_2 = -\frac{1}{3}$, $\xi_3 = \frac{1}{3}$. Далее вычислим матрицу коэффициентов:

$$C = \left(\begin{array}{c|cccc} & A^{(0)} & A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} \\ \hline \phi(-1) & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \phi(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi(-\frac{1}{3}) & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{27} \\ \phi(\frac{1}{3}) & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = C^{-1} = \frac{1}{16}\left(\begin{array}{c|cccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 9 & 9 \\ \xi & 1 & -1 & -27 & 27 \\ \xi^2 & 9 & 9 & -9 & -9 \\ \xi^3 & -9 & 9 & 27 & -27 \end{array}\right)$$

Узловые базисные функции для квадратичной интерполяции примут вид (рис. 4)

$$\begin{aligned}
\phi_0(\xi) &= \frac{1}{16}\left(-1+\xi+9\xi^2-9\xi^3\right), \\
\phi_1(\xi) &= \frac{1}{16}\left(-1-\xi+9\xi^2+9\xi^3\right), \\
\phi_2(\xi) &= \frac{1}{16}\left(9-27\xi-9\xi^2+27\xi^3\right), \\
\phi_3(\xi) &= \frac{1}{16}\left(9+27\xi-9\xi^2-27\xi^3\right),
\end{aligned} \tag{A.22}$$

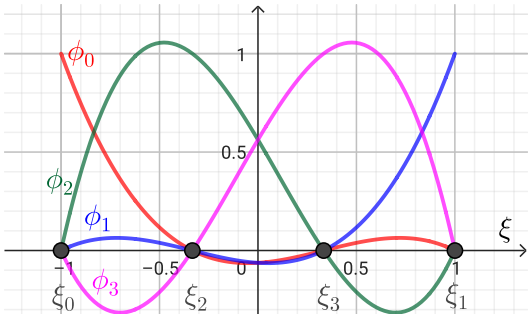


Рис. 4: Кубический базис в параметрическом отрезке

На рис. 5 представлено сравнение результатов аппроксимации функции $f(x) = -x + \sin(2x+1)$ линейным, квадратичным и кубическим базисом. Видно, что все интерполяционные приближения точно попадают в функцию в своих узлах интерполяции, а между узлами происходит аппроксимация полиномом соответствующей степени.

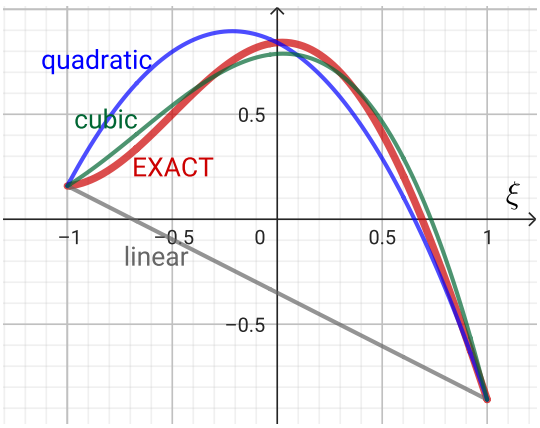


Рис. 5: Результат интерполяции

A.3.1.3 Интерполяция в параметрическом треугольнике

Теперь рассмотрим двумерное обобщение формулы

Линейный базис

$$\phi_i(\xi,\eta) = A_i^{(00)} + A_i^{(10)}\xi + A_i^{(01)}\eta.$$

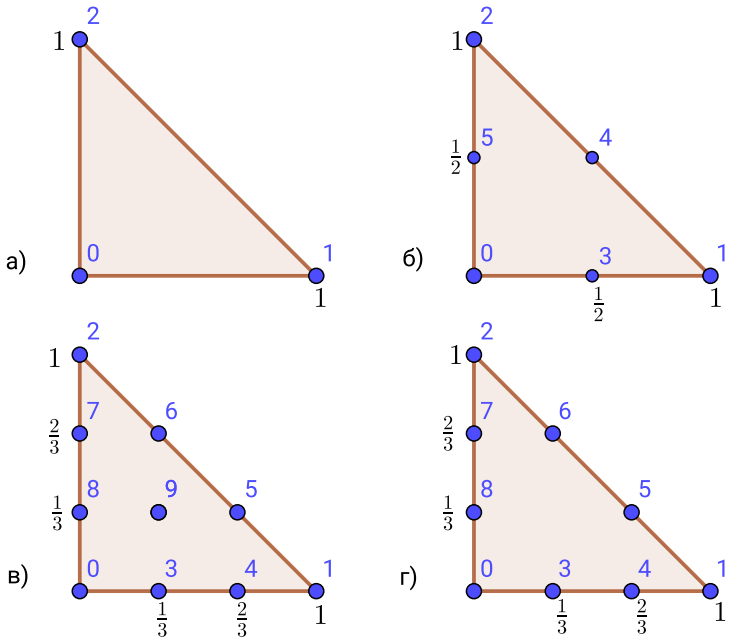


Рис. 6: Расположение узловых точек в параметрическом треугольнике. а) линейный базис, б) квадратичный базис, в) кубический базис, г) неполный кубический базис

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} \\ \hline \phi(0,0) & 1 & 0 & 0 \\ \phi(1,0) & 1 & 1 & 0 \\ \phi(0,1) & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = C^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \xi & -1 & 1 & 0 \\ \eta & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi,\eta) &= 1-\xi-\eta, \\ \phi_1(\xi,\eta) &= \xi, \\ \phi_2(\xi,\eta) &= \eta, \end{aligned} \tag{A.23}$$

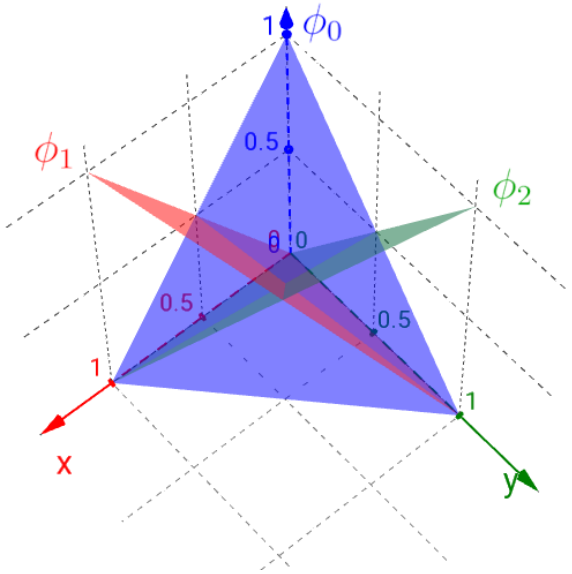


Рис. 7: Линейный базис в параметрическом треугольнике

Квадратичный базис

$$\phi_i(\xi,\eta) = A_i^{(00)} + A_i^{(10)}\xi + A_i^{(01)}\eta + A_i^{(11)}\xi\eta + A_i^{(20)}\xi^2 + A_i^{(02)}\eta^2.$$

$$C = \left(\begin{array}{c|cccccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} & A^{(11)} & A^{(20)} & A^{(02)} \\ \hline \phi(0,0) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi(1,0) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \phi(0,1) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \phi(\frac{1}{2},0) & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \phi(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \phi(0,\frac{1}{2}) & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \left(\begin{array}{c|cccccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \eta & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ \xi\eta & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ \xi^2 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ \eta^2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

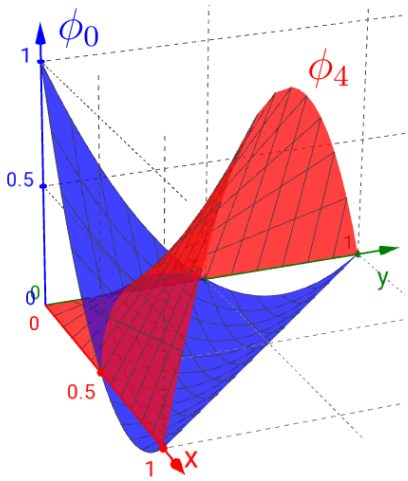


Рис. 8: Квадратичные функции ϕ_0, ϕ_4 в параметрическом треугольнике

Кубический базис TODO

Неполный кубический базис TODO

A.3.1.4 Интерполяция в параметрическом квадрате

Билинейный базис

$$\phi_i = A_i^{00} + A_i^{10}\xi + A_i^{01}\eta + A_i^{11}\xi\eta.$$

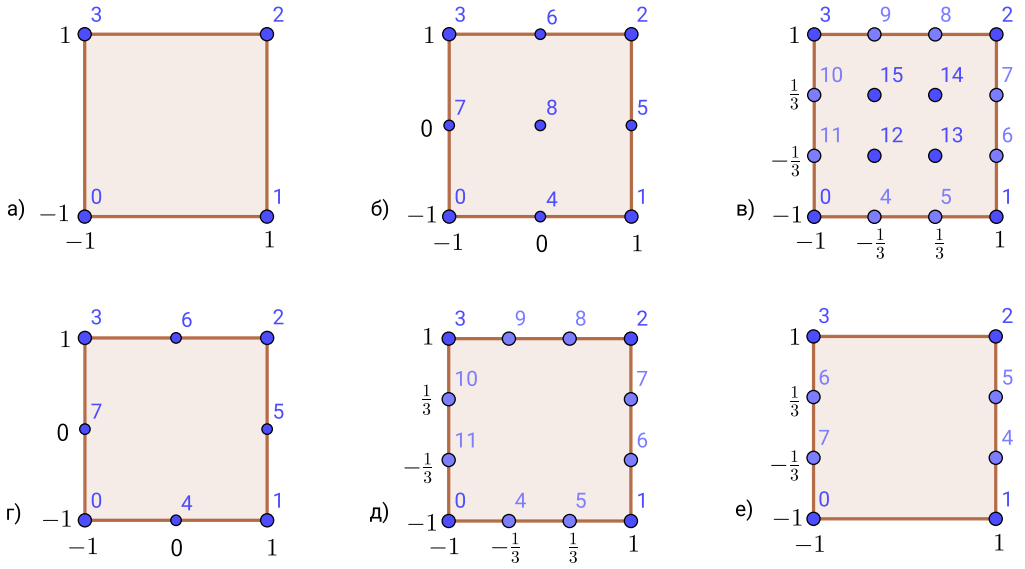


Рис. 9: Расположение узловых точек в параметрическом квадратре

$$C = \left(\begin{array}{c|cccc} & A^{(00)} & A^{(10)} & A^{(01)} & A^{(11)} \\ \hline \phi(-1,-1) & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \phi(1,-1) & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \phi(1,1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi(-1,1) & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad A = C^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|cccc} & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \eta & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \xi\eta & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi,\eta) &= \frac{1-\xi-\eta+\xi\eta}{4} \\ \phi_1(\xi,\eta) &= \frac{1+\xi-\eta-\xi\eta}{4} \\ \phi_2(\xi,\eta) &= \frac{1+\xi+\eta+\xi\eta}{4} \\ \phi_3(\xi,\eta) &= \frac{1-\xi+\eta-\xi\eta}{4} \end{aligned} \tag{A.24}$$

Определение двумерных базисов через комбинацию одномерных Обратим внимание, что в искомые билинейные базисные функции линейны в каждом из направлений ξ, η, если брать их по отдельности. Значит можно представить эти функции как комбинацию одномерных линейных базисов (A.20) в каждом из направлений. Узлы двумерного параметрического квадрата можно выразить через узлы линейного базиса в параметрическом одномерном сегменте, рассмотренном в п. A.3.1.2:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \left(\xi_0^{1D}, \xi_0^{1D}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \left(\xi_1^{1D}, \xi_0^{1D}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\xi_1^{1D}, \xi_1^{1D}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \left(\xi_0^{1D}, \xi_1^{1D}\right).$$

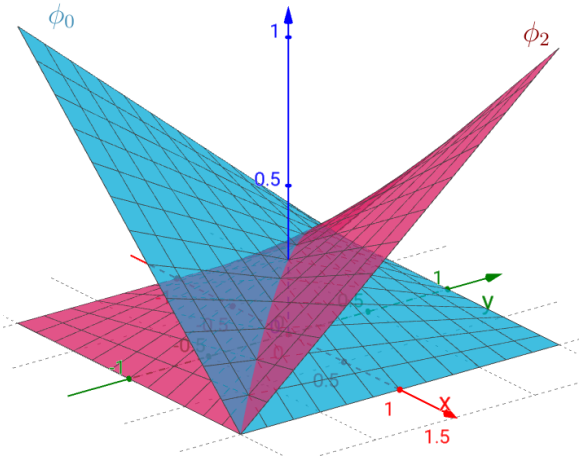


Рис. 10: Билинейные функции ϕ_0, ϕ_2 в параметрическом квадрате

Значит и соответствующие базисные функции можно выразить через линейный одномерный базис ϕ^{1D} из соотношений (A.20):

$$\phi_0(\xi,\eta) = \phi_0^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{1-\xi}{2}\frac{1-\eta}{2},$$
$$\phi_1(\xi,\eta) = \phi_1^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{1+\xi}{2}\frac{1-\eta}{2},$$
$$\phi_2(\xi,\eta) = \phi_1^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{1+\xi}{2}\frac{1+\eta}{2},$$
$$\phi_3(\xi,\eta) = \phi_0^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{1-\xi}{2}\frac{1+\eta}{2}.$$

Раскрыв скобки можно убедится, что мы получили тот же билинейный базис, что и ранее (A.24).

Биквадратичный базис Применим этот метод для вычисления биквадратичного базиса, определённого в точках на рис. 9б. В качестве основе возьмём квадратичный одномерный базис ϕ_i^{1D} из (A.21).

$$\begin{aligned}
&\phi_0(\xi,\eta) = \phi_0^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2-\xi}{2}\frac{\eta^2-\eta}{2}, && \phi_1(\xi,\eta) = \phi_1^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2+\xi}{2}\frac{\eta^2-\eta}{2},\\
&\phi_2(\xi,\eta) = \phi_1^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2+\xi}{2}\frac{\eta^2+\eta}{2}, && \phi_3(\xi,\eta) = \phi_0^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2-\xi}{2}\frac{\eta^2+\eta}{2},\\
&\phi_4(\xi,\eta) = \phi_2^{1D}(\xi)\phi_0^{1D}(\eta) = (1-\xi^2)\frac{\eta^2-\eta}{2}, && \phi_5(\xi,\eta) = \phi_1^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2+\xi}{2}(1-\eta^2),\\
&\phi_6(\xi,\eta) = \phi_2^{1D}(\xi)\phi_1^{1D}(\eta) = (1-\xi^2)\frac{\eta^2+\eta}{2}, && \phi_7(\xi,\eta) = \phi_0^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = \frac{\xi^2-\xi}{2}(1-\eta^2),\\
&\phi_8(\xi,\eta) = \phi_2^{1D}(\xi)\phi_2^{1D}(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2).
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Бикубический базис

Неполный биквадратичный базис

Неполный бикубический базис

A.4 Геометрические алгоритмы

A.4.1 Преобразование координат

Рассмотрим преобразование из двумерной параметрической системы координат $\boldsymbol{\xi}$ в физическую систему $\mathbf{x}$. Такое преобразование полностью определяется покоординатными функциями $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$. Далее получим соотношения, связывающие операции дифференцирования и интегрирования в физической и параметрической областях.

A.4.1.1 Матрица Якоби

Будем рассматривать двумерное преобразование $(\xi, \eta) \to (x, y)$. Линеаризуем это преобразование (разложим в ряд Фурье до линейного слагаемого)

$$x(\xi_0 + d\xi, \eta_0 + d\eta) \approx x_0 + \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{\xi_0,\eta_0} d\xi + \left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{\xi_0,\eta_0} d\eta,$$
$$y(\xi_0 + d\xi, \eta_0 + d\eta) \approx y_0 + \left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi_0,\eta_0} d\xi + \left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|_{\xi_0,\eta_0} d\eta,$$

где $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$. Переписывая это выражение в векторном виде, получим

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_0 + \mathbf{d\xi}) - \mathbf{x}_0 = J(\boldsymbol{\xi}_0)\, \mathbf{d\xi}. \tag{A.26}$$

Матрица J (зависящая от точки приложения в параметрической плоскости) называется матрицей Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{A.27}$$

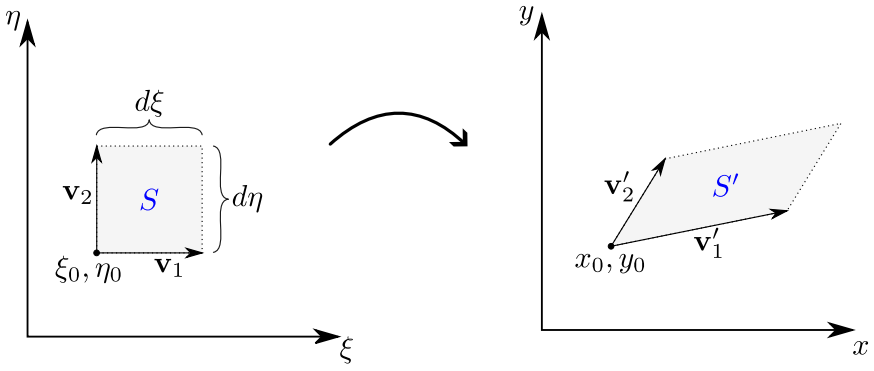


Рис. 11: Преобразование элементарного объёма

Якобиан Определитель матрицы Якоби (якобиан), взятый в конкретной точке параметрической плоскости $\boldsymbol{\xi}_0$, показывает, во сколько раз увеличился элементарный объём около этой точки в результате преобразования. Действительно, рассмотрим два перпендикулярных элементарных вектора в параметрической системе координат: $\mathbf{v}_1 = (d\xi, 0)$ и $\mathbf{v}_2 = (0, d\eta)$ отложенных от точки $\boldsymbol{\xi}_0$ (см. рис. 11). В результате преобразования по формуле (A.26) получим следующие преобразования концевых точек

и векторов:

$$
\begin{aligned}
&(\xi_0, \eta_0) \to (x_0, y_0),\\
&(\xi_0 + d\xi, \eta_0) \to (x_0 + J_{11}d\xi, y_0 + J_{21}d\xi) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1' = (J_{11}d\xi, J_{21}d\xi),\\
&(\xi_0, \eta_0 + d\eta) \to (x_0 + J_{12}d\eta, y_0 + J_{22}d\eta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2' = (J_{12}d\eta, J_{22}d\eta).
\end{aligned}
$$

Элементарный объём равен площади параллелограмма, построенного на элементарных векторах. В параметрической плоскости согласно (A.4) получим

$$|S| = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = d\xi d\eta,$$

и аналогично для физической плоскости:

$$|S'| = \mathbf{v}_1' \times \mathbf{v}_2' = (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})d\xi d\eta = |J|d\xi d\eta$$

Сравнивая два последних соотношения приходим к выводу, что элементарный объём в результате преобразования увеличился в $|J|$ раз. Тогда можно записать

$$dx\, dy = |J|\, d\xi\, d\eta \tag{A.28}$$

A.4.1.2 Дифференцирование в параметрической плоскости

Пусть задана некоторая функция $f(x, y)$. Распишем её производную по параметрическим координатам:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},\\
\frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.
\end{aligned}
$$

Вспоминая определение (A.27), запишем

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix}
$$

Обратная зависимость примет вид

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(J^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix}
$$

А.4.1.3 Интегрирование в параметрической плоскости

Пусть в физической области x, y задана область D_x. Интеграл функции $f(x, y)$ по этой области можно расписать, используя замену (А.28)

$$\int\limits_{D_x} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{D_\xi} f(\xi,\eta)\,|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta, \tag{А.29}$$

где $f(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, а D_ξ – образ области D_x в параметрической плоскости.

А.4.1.4 Двумерное линейное преобразование. Параметрический треугольник

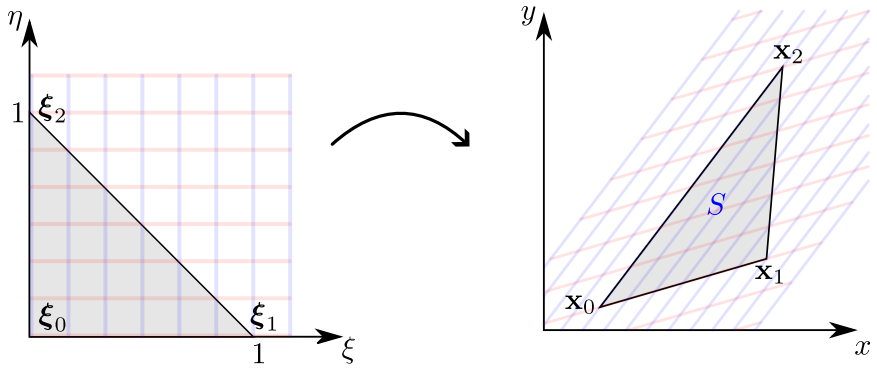


Рис. 12: Преобразование из параметрического треугольника

Рассмотрим двумерное преобразование, при котором определяющие функции являются линейными. То есть представимыми в виде

$$x(\xi,\eta) = A_x\xi + B_x\eta + C_x,$$
$$y(\xi,\eta) = A_y\xi + B_y\eta + C_y.$$

Для определения шести констант, определяющих это преобразование, достаточно выбрать три любые (не лежащие на одной прямой) точки: $(\xi_i, \eta_i) \to (x_i, y_i)$ для $i = 0, 1, 2$. В результате получим систему из шести линейных уравнений (три точки по две координаты), из которой находятся константы $A_{x,y}, B_{x,y}, C_{x,y}$. Пусть три точки в параметрической плоскости образуют единичный прямоугольный треугольник (рис. 12):

$$\xi_0, \eta_0 = (0,0), \quad \xi_1, \eta_1 = (1,0), \quad \xi_2, \eta_2 = (0,1).$$

Тогда система линейных уравнений примет вид

$$x_0 = C_x, \quad y_0 = C_y,$$
$$x_1 = A_x + C_x, \quad y_1 = A_y + C_y,$$
$$y_2 = B_x + C_x, \quad y_2 = B_y + C_y.$$

Определив коэффициенты преобразования их этой системы, окончательно запишем преобразование

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= (x_1 - x_0)\xi + (x_2 - x_0)\eta + x_0, \\ y(\xi,\eta) &= (y_1 - y_0)\xi + (y_2 - y_0)\eta + y_0. \end{aligned} \tag{А.30}$$

Матрица Якоби этого преобразования (A.27) не будет зависеть от параметрических координат ξ, η:

$$J = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}. \tag{A.31}$$

Якобиан преобразования будет равен удвоенной площади треугольника S, составленного из определяющих точек в физической плоскости:

$$|J| = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = 2|S|. \tag{A.32}$$

Распишем интеграл по треугольнику S по формуле (A.29). Вследствии линейности преобразования якобиан постоянен и, поэтому, его можно вынести его из-под интеграла:

$$\int\limits_S f(x,y)\,dxdy = |J| \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\xi} f(\xi,\eta) d\eta d\xi. \tag{A.33}$$

A.4.1.5 Двумерное билинейное преобразование. Параметрический квадрат

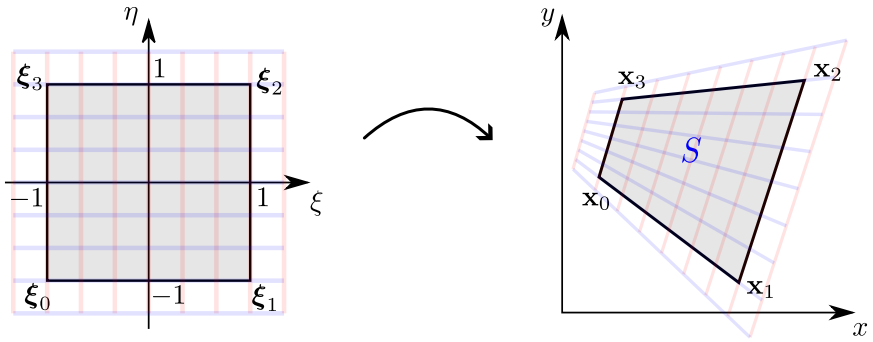


Рис. 13: Преобразование из параметрического квадрата

A.4.1.6 Трёхмерное линейное преобразование. Параметрический тетраэдр

TODO

A.4.2 Свойства многоугольника

A.4.2.1 Площадь многоугольника

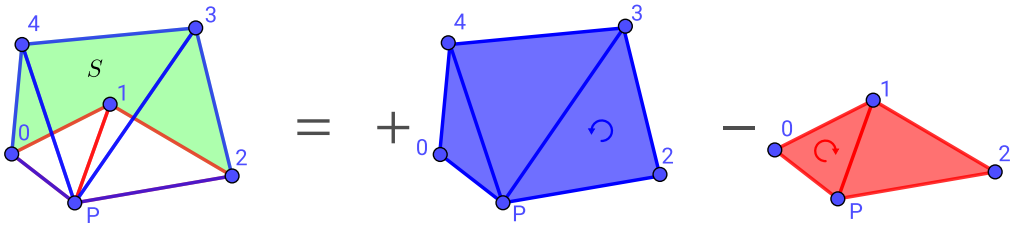


Рис. 14: Площадь произвольного многоугольника

Рассмотрим произвольный несамопересекающийся N-угольник S, заданный координатами своих узлов $\mathbf{x}_i$, $i = \overline{0, N-1}$, пронумерованных последовательно против часовой стрелки (рис. 14). Далее введём произвольную точку $\mathbf{p}$ и от этой точки будем строить ориентированные треугольники до граней многоугольника:

$$\triangle_i^p = (\mathbf{p}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1},$$

(для корректности записи будем считать, что $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0$). Тогда площадь исходного многоугольника S будет равна сумме знаковых площадей треугольников $\triangle_i^p$:

$$|S| = \sum_{i=0}^{N-1} |\triangle_i^p|, \qquad |\triangle_i^p| = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{p}) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{p})}{2}.$$

Знак площади ориентированного треугольника зависит от направления закрутки его узлов: она положительна для закрутки против часовой стрелки и отрицательна, если узлы пронумерованы по часовой стрелке. В частности, на рисунке 14 видно, что треугольники, отмеченные красным: $P01, P12$, будут иметь отрицательную площадь, а синие треугольники $P23$, $P34$, $P40$ – положительную. Сумма этих площадей с учётом знака даст искомую площадь многоугольника.

Для сокращения вычислений воспользуемся произвольностью положения $\mathbf{p}$ и совместим её с точкой $\mathbf{x}_0$. Тогда треугольники $\triangle_0^p$, $\triangle_{N-1}^p$ выродятся (будут иметь нулевую площадь). Обозначим такую последовательную триангуляцию как

$$\triangle_i = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \qquad i = \overline{1, N-2}. \tag{A.34}$$

Знаковая площадь ориентированного треугольника будет равна

$$|\triangle_i| = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)}{2}. \tag{A.35}$$

Тогда окончательно формула определения площади примет вид

$$|S| = \sum_{i=1}^{N-2} |\triangle_i|. \tag{A.36}$$

Плоский полигон в пространтве Если плоский полигон S расположен в трёхмерном пространстве, то правая часть формулы (A.35) согласно определению векторного произведения в трёхмерном пространстве (A.3) – есть вектор. Чтобы получить скалярную площадь, нужно спроецировать этот вектор на единичную нормаль к плоскости многоугольника:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \qquad \mathbf{k} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0).$$

Эта формула записана из предположения, что узел $\mathbf{x}_2$ не лежит на одной прямой с узлами $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$. Иначе вместо $\mathbf{x}_2$ нужно выбрать любой другой узел, удовлетворяющий этому условию. Тогда площадь ориентированного треугольника, построенного в трёхмерном пространстве запишется через смешанное произведение:

$$|\triangle_i| = \frac{((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{n}}{2}. \tag{A.37}$$

Формула для определения площади полигона (A.36) будет по прежнему верна. При этом итоговый знак величины S будет положительным, если закрутка полигона положительная (против часовой стрелки) при взгляде со стороны вычисленной нормали $\mathbf{n}$.

A.4.2.2 Интеграл по многоугольнику

Рассмотрим интеграл функции $f(x, y)$ по N-угольнику S, заданному последовательными координатами своих узлов $\mathbf{x}_i$. Введём последовательную триангуляцию согласно (A.34). Тогда интеграл по многоугольнику можно расписать как сумму интегралов по ориентированным треугольникам:

$$\int\limits_S f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{N-2} \int\limits_{\triangle_i} f(x,y)\,dxdy. \tag{A.38}$$

Далее для вычисления интегралов в правой части воспользуемся преобразованием к параметрическому треугольнику (п. A.4.1.4). Следуя формуле интегрирования (A.33), распишем интеграл по i-ому треугольнику:

$$\int\limits_{\triangle_i} f(x,y)\,dxdy = |J_i| \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\xi} f_i(\xi,\eta)\,d\eta d\xi,$$

где якобиан $|J_i|$ согласно (A.32) есть удвоенная площадь ориентированного треугольника $\triangle_i$ (положительная при закрутке против часовой стрелке и отрицаетельная иначе):

$$|J_i| = 2|\triangle_i| = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0),$$

а функция $f_i(\xi, \eta)$ есть функция от преобразованных согласно (A.30) переменных:

$$f_i(\xi,\eta) = f\left((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)\,\xi + (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_0)\,\eta + \mathbf{x}_0\right).$$

Окончательно запишем

$$\int\limits_S f(x,y)\,dxdy = 2\sum_{i=1}^{N-2} |\triangle_i| \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\xi} f_i(\xi,\eta)\,d\eta d\xi. \tag{A.39}$$

Отметим, что эта формула работает и в том случае, когда полигон расположен в трёхмерном пространстве (знаковую площадь при этом следует вычислять по (A.37)).

A.4.2.3 Центр масс многоугольника

По определению, координаты центра масс $\mathbf{c}$ области S равны среднеинтегральным значениям координатных функций. То есть

$$c_x = \frac{1}{|S|}\int\limits_S x\,dxdy, \quad c_y = \frac{1}{|S|}\int\limits_S y\,dxdy.$$

Далее распишем интеграл в правой части через последовательную триангуляцию согласно (A.38) с учётом линейного преобразования (A.30):

$$\begin{aligned}\int\limits_S x\,dxdy &= \sum_{i=1}^{N-2}\int\limits_{\triangle_i} x\,dxdy \\ &= \sum_{i=1}^{N-2}|J_i|\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-\xi}((x_i-x_0)\xi+(x_{i+1}-x_0)\eta+x_0)\,d\eta d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{N-2}\frac{|J_i|}{2}\frac{x_0+x_i+x_{i+1}}{3} \\ &= \sum_{i=1}^{N-2}|\triangle_i|\frac{x_0+x_i+x_{i+1}}{3}.\end{aligned}$$

Итого, с учётом (A.36), координаты центра масс примут вид

$$\mathbf{c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N-2}\frac{\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_i+\mathbf{x}_{i+1}}{3}|\triangle_i|}{\sum\limits_{i=1}^{N-2}|\triangle_i|}.$$

Если полигон расположен в двумерном пространстве xy, то знаковая площадь треугольников вычисляется по формуле (A.35). В случае трёхмерного пространтва должна использоваться формула (A.37).

A.4.3 Свойства многогранника

A.4.3.1 Объём многогранника

TODO

A.4.3.2 Интеграл по многограннику

TODO

A.4.3.3 Центр масс многогранника

TODO

A.4.4 Поиск многоугольника, содержащего заданную точку

TODO

B Работа с инфраструктурой проекта CFDCourse

B.1 Сборка и запуск

B.1.1 Сборка проекта CFDCourse

Описанная ниже процедура собирает проект в отладочной конфигурации. Для проведения необходимых модификаций для сборки релизной версии смотри B.1.3.

B.1.1.1 Подготовка

1. Для сборки проекта необходимо установить `git` и `cmake>=3.0`

   В Windows необходимо скачать и установить диструбутивы:

   - https://github.com/git-for-windows/git/releases/download/v2.43.0.windows.1/Git-2.43.0-64-bit.exe
   - https://github.com/Kitware/CMake/releases/download/v3.28.3/cmake-3.28.3-windows-x86_64.msi

   При установке cmake проследите, что бы путь к `cmake.exe` сохранился в системных путях. Msi установщик спросит об этом в диалоге.

   В **линуксе** используйте менеджеры пакетов, предоставляемые вашим дистрибутивом. Также проследите чтобы были доступны компиллятор `g++` и отладчик `gdb`.

2. Создайте папку в системе для репозиториев. Например `D:/git_repos/`

3. Возьмите необходимые заголовочные библиотеки boost из https://disk.yandex.ru/d/GwTZUvfAqPsZ и распакуйте архив в папку для репозиториев (D:/git_repos/boost). Проследите, чтобы внутри папки boost сразу шли папки с кодом (`accumulators`, `algorithm`, ...) и заголовочные файлы (`align.hpp`, `aligned_storage.hpp`, ...) без дополнительных уровней вложения.

4. Откройте терминал (git bash в Windows).

5. С помощью команды cd в терминале перейдите в папку для репозиториев

   ```
   > cd D:/git_repos
   ```

6. Клонируйте репозиторий

   ```
   > git clone https://github.com/kalininei/CFDCourse25
   ```

   В директории (`D:/git_repos` в примере) появится папка `CFDCourse25`, которая является корневой папкой проекта

B.1.1.2 VisualStudio

1. Создайте папку build в корне проекта CFDCourse25

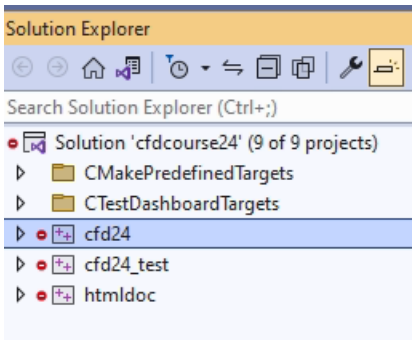
2. Скопируйте скрипт winbuild64.bat в папку build. Далее вносить изменения только в скопированном файле.

3. Скрипт написан для версии `Visual Studio 2019`. Если используется другая версия, измените в скрипте значение переменной `CMGenerator` на соответствующие вашей версии. Значения для разных версий Visual Studio написаны ниже

```
SET CMGenerator="Visual Studio 17 2022"
SET CMGenerator="Visual Studio 16 2019"
SET CMGenerator="Visual Studio 15 2017"
SET CMGenerator="Visual Studio 14 2015"
```

4. Запустите скрипт `winbuild64.bat` из папки `build`. Нужен доступ к интернету. В процессе будет скачано около 200Мб пакетов, поэтому первый запуск может занять время

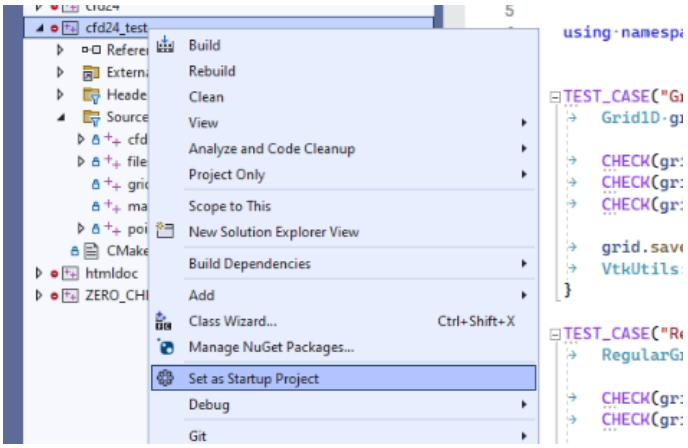
5. После сборки в папке `build` появится проект `VisualStudio` `cfdcourse25.sln`. Его нужно открыть в `VisualStudio`. Дерево решения должно иметь следующий вид:



Проекты:

- `cfd25` – расчётная библиотека
- `cfd25_test` – модульные тесты для расчётных функций

6. Проект `cfd25_test` необходимо назначить запускаемым проектом. Для этого нажать правой кнопкой мыши по проекту и в выпадающем меню выбрать соответствующий пункт. После этого заголовок проекта должен стать жирным.



7. Скомпиллировать решение. Несколько способов:

- `Ctrl+Shift+B`,

- `Build->Build Solution` в основном меню,
- `Build Solution` в меню решения в дереве решения,
- `Build` в меню проекта `cfd25_test`.

8. Запустить тесты (проект `cfd25_test`) нажав `F5` (или кнопку отладки в меню). После отработки должно высветиться сообщение об успешном прохождении всех тестов.

9. Бинарные файлы будут скомпиллированы в папку `CFDCourse25/build/bin/Debug`. В случае работы через отладчик выходная директория, куда будут скидываться все файлы (в частности, vtk), должна быть `CFDCourse25/build/src/test/`.

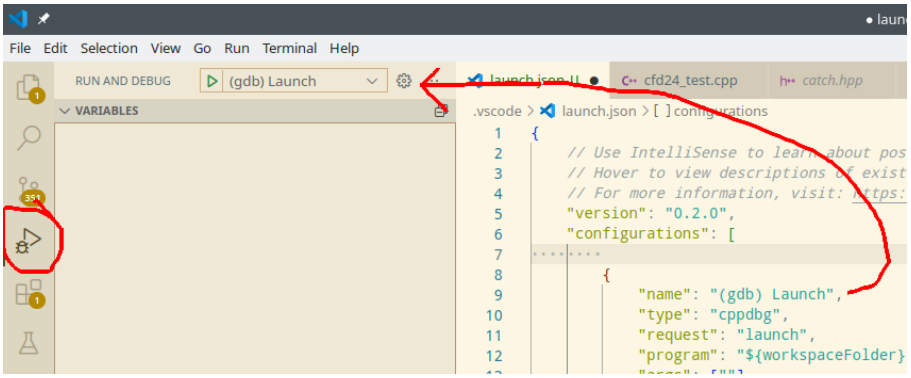
B.1.1.3 VSCode

1. Открыть корневую папку проека через `File->Open Folder`

2. Установить предлагаемые расширения cmake, c++

3. Для настройки отладки создайте конфигурацию launch.json следующего вида

- Для этого перейдите в меню `Run and Dubug` (`Ctrl+Shift+D`), нажмите `create launch.json`, выберите пункт `Node.js`.
- После этого в корневой папке появится файл `.vscode/launch.json`.
- Откройте этот файл в `vscode`, нажмите `Add configuration`, `(gdb) Launch` или `(Windows) Launch` в зависимости от ОС.
- Далее напишите имя программы как показано на картинке.
- Используйте поле args для установки аргументов запуска.
- Выберите созданную конфигурацию для запуска отладчика по `F5`



На скриншотах представлены настройки в случае работы в линуксе. Для работы под виндоус

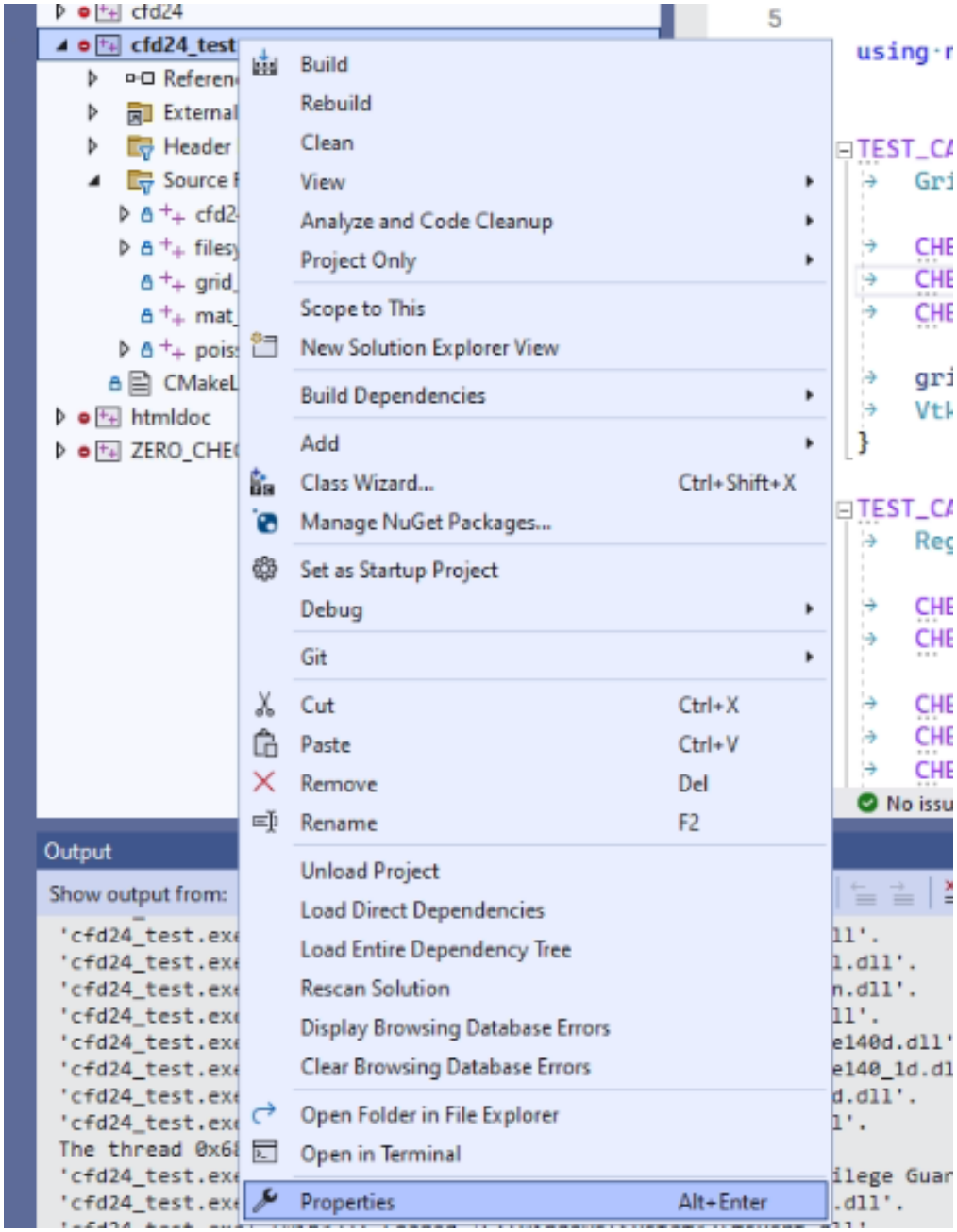
```
"name" : "(Windows) Launch",
"program": "${workspaceFolder}/build/bin/Debug/cfd25_test.exe"
```

B.1.2 Запуск конкретного теста

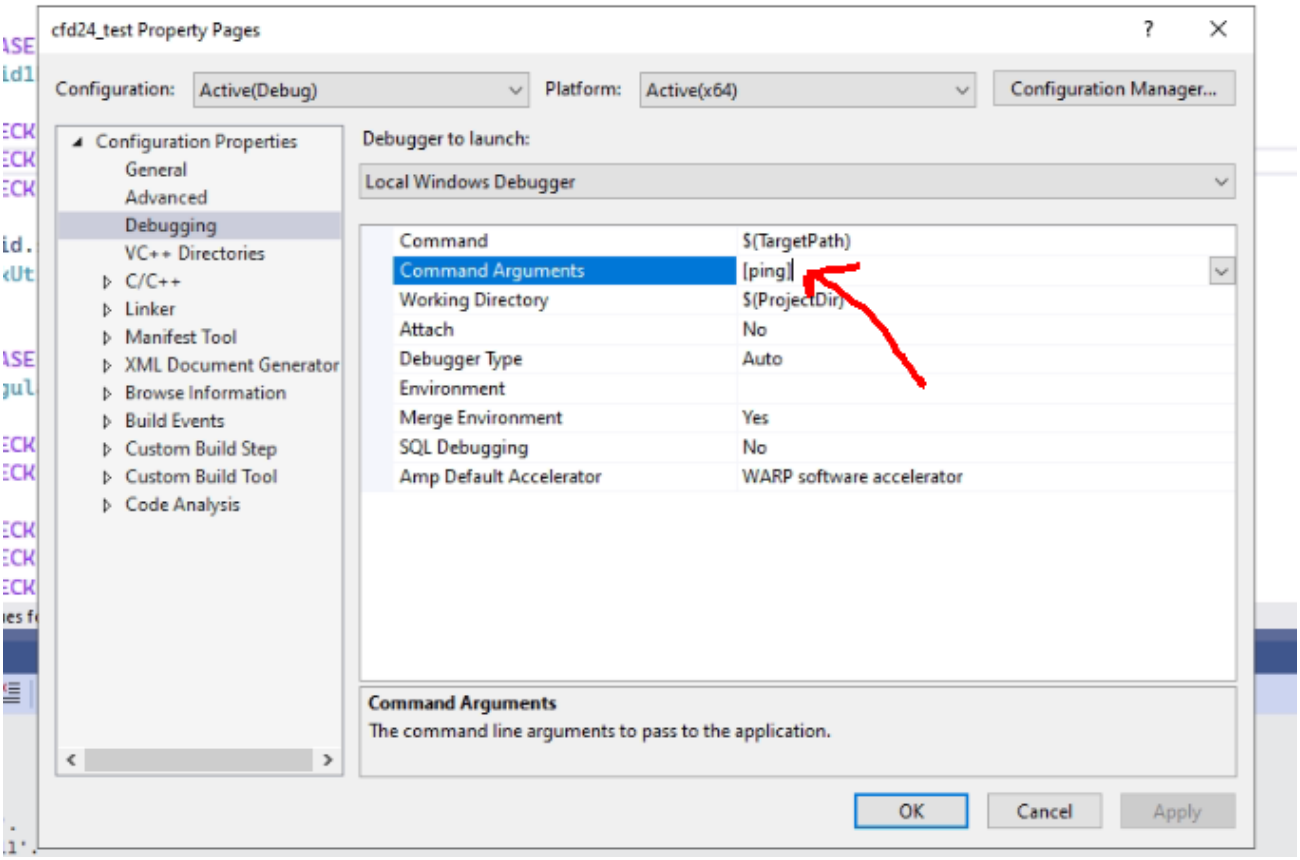
По умолчанию программа `cfd25_test` прогоняет все объявленные в проекте тесты. Иногда может возникнуть необходимость запустить только конкретный тест в целях отладки или проверки. Для этого нужно передать программе аргумент с тегом для этого теста.

Тег для теста – это второй аргумент в макросе `TEST_CASE`, записанный в квадратных скобках. Добавлять нужно вместе со скобками. Например, `[ping]`.

Чтобы добавить аргумент в `VisualStudio`, необходимо в контекстном меню проекта `cfd25_test` выбрать опции отладки



и там в поле Аргументы прописать нужный тэг.



В `VSCode` аргументы нужно добавлять в файле `.vscode/launch.json` в поле args в кавычках (см. картинку B.1.1.3 с настройками launch.json).

B.1.3 Сборка релизной версии

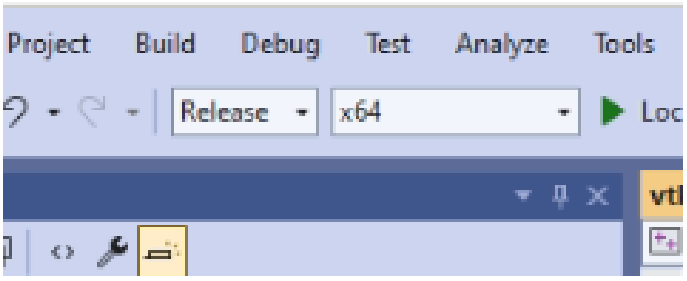
Релизная сборка программ даёт многократное увеличение производительности, но при этом отладка приложений в таком режиме невозможна.

Visual Studio

1. Создать папку `build-release` рядом с папкой `build`.
2. Скопировать в неё файл `winbuild64.bat` из папки `build`.
3. В скопированном файле произвести замену `Debug` на `Release`

```
-DCMAKE_BUILD_TYPE=Release ..
```

4. Запустить `winbuild64.bat` из новой папки
5. Открыть `build-release/cfdcourse25.sln` в `Visual Studio`
6. В проекте студии установить релизную сборку



7. Это новое решение, не связанное настройками с `debug`-версией. Поэтому нужно заново настроить запускускаемым проектом `cfd_test` и, если нужно, настроить аргументы отладки.

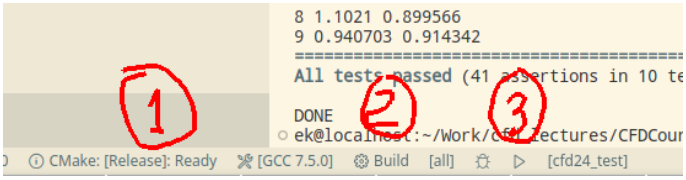
8. Бинарные файлы будут скомпиллированы в папку `CFDCourse25/build_release/bin/Release`. В случае работы через отладчик выходная директория – `CFDCourse25/build_release/src/test/`.

VSCode

1. Выбрать релизную сборку в `build variant`

2. Нажать `Build`

3. Нажать `Launch`



B.2 Git

B.2.1 Основные команды

Все команды выполнять в терминале (`git bash` для виндоус), находясь в корневой папке проета CFDCourse24.

- Для **смены директории** использовать команду `cd`. Например, находясь в папке `A` перейти в папку `A/B/C`

```
> cd B/C
```

- **Подняться** на директорию выше

```
> cd ..
```

- **Просмотр статуса** текущего репозитория: текущую ветку, все изменённые файлы и т.п.

```
> git status
```

- **Сохранить и скоммитить** изменения в текущую ветку

```
> git add .
> git commit -m "message"
```

"message" – произвольная информация о текущем коммите, которая будет приписана к этому коммиту

- **Переключиться на ветку** main

```
> git checkout main
```

работает только в том случае, если все файлы скоммичены и статус ветки 'Up to date'

- **Создать новую ветку** ответвлённую от последнего коммита текущей ветки и переключиться на неё

```
> git checkout -b new-branch-name
```

new-branch-name – имя новой ветки. Пробелы не допускаются

Эта комманда работает даже если есть нескоммиченные изменения. Если необходимо скоммитить изменеия в новую ветку, сразу за этой командой нужно вызвать

```
> git add .
> git commit -m "message"
```

- **Сбросить** все нескоммиченные изменения. Вернуть файлы в состояние последнего коммита

```
> git reset --hard
```

Все изменения будут утеряны

- **Получить последние изменения** из удалённого хранилища с обновлением текущей ветки

```
> git pull
```

Работает только если статус текущей ветки 'Up to date'.
Если требуется получить изменения, но не обновлять локальную ветку:

```
> git fetch
```

Обновленная ветка будет доступна по имени origin/имя ветки.

- **Просмотр истории** коммитов в текущей ветке (последний коммит будет наверху)

```
> git log
```

- **Просмотр доступных веток** в текущем репозитории

```
> git branch
```

- **Просмотр** актуального состояние дерева репозитория в gui режиме

```
> git gui
```

Далее в меню
`Repository->Visualize all branch history`. В этом же окне можно посмотреть изменения файлов по сравнению с последним коммитом.

Альтернативно, при работе в виндоус можно установить программу GitExtensions и работать в ней.

B.2.2 Порядок работы с репозиторием CFDCourse

Основная ветка проекта –
`main`. После каждой лекции (в течении 1-2 дней) в эту ветку будет отправлен коммит с сообщением `after-lect{index}`. Этот коммит будет содержать краткое содержание лекции, задание по итогам лекции и необходимые для этого задания изменения кода.

Если предполагается работа с кодом на лекции, то перед лекцией в эту ветку будет отправлен коммит с сообщением `before-lect{index}`. Этот коммит содержит изменения кода для работы на лекции.

Таким образом, **после лекции** необходимо выполнить следующие команды (находясь в ветке `main`)

```
> git reset --hard  # очистить локальную копию от изменений,
                    # сделанных на лекции (если они не представляют ценности)
> git pull          # получить изменения
```

Перед началом лекции, если была сделана какая то работа по заданиям,

```
> git checkout -b work-lect{index}    # создать локальную ветку, содержащую задание
> git add .
> git commit -m "{свой комментарий}"  # скоммитить свои изменения в эту ветку
> git checkout main                   # вернуться на ветку main
> git pull                            # получить изменения
```

Даже если задание выполнено не до конца, вы в любой момент можете переключиться на ветку с заданием и его доделать

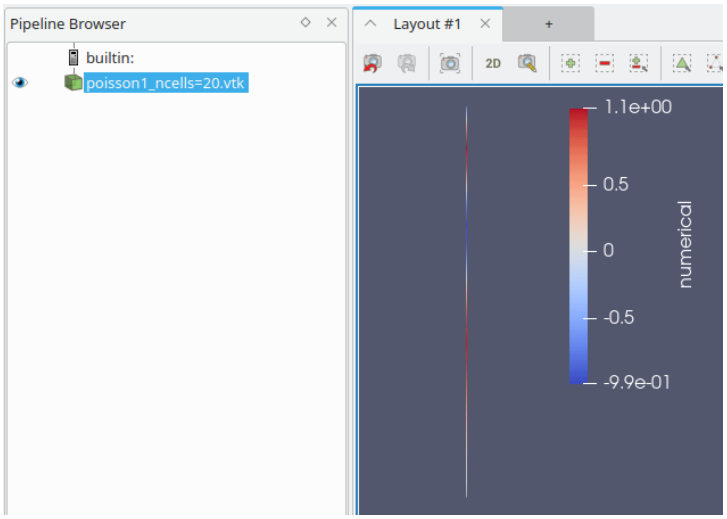
```
> git checkout work-lect{index}
```

Если ничего не было сделано (или все изменения не представляют ценности), можно повторить алгоритм “после лекции”.

B.3 Paraview

B.3.1 Данные на одномерных сетках

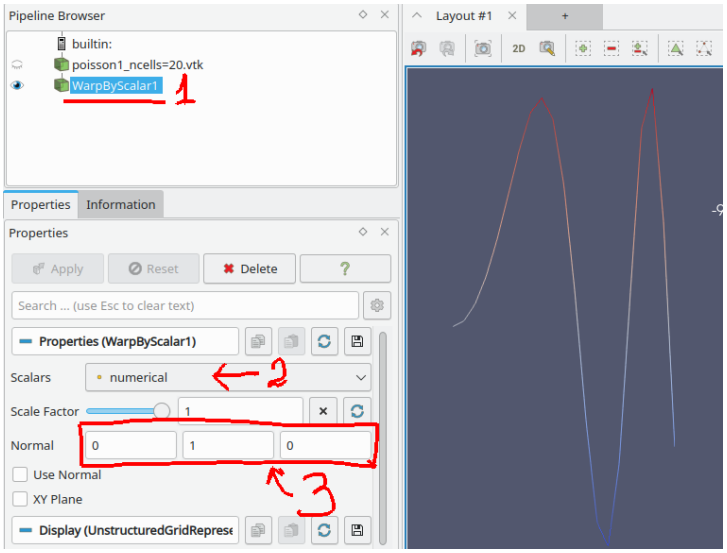
Заданные на сетке данные паравью показывает цветом. Поэтому при загрузке одномерных сеток можно видеть картинку типа



Развернуть изображение в плоскость xy

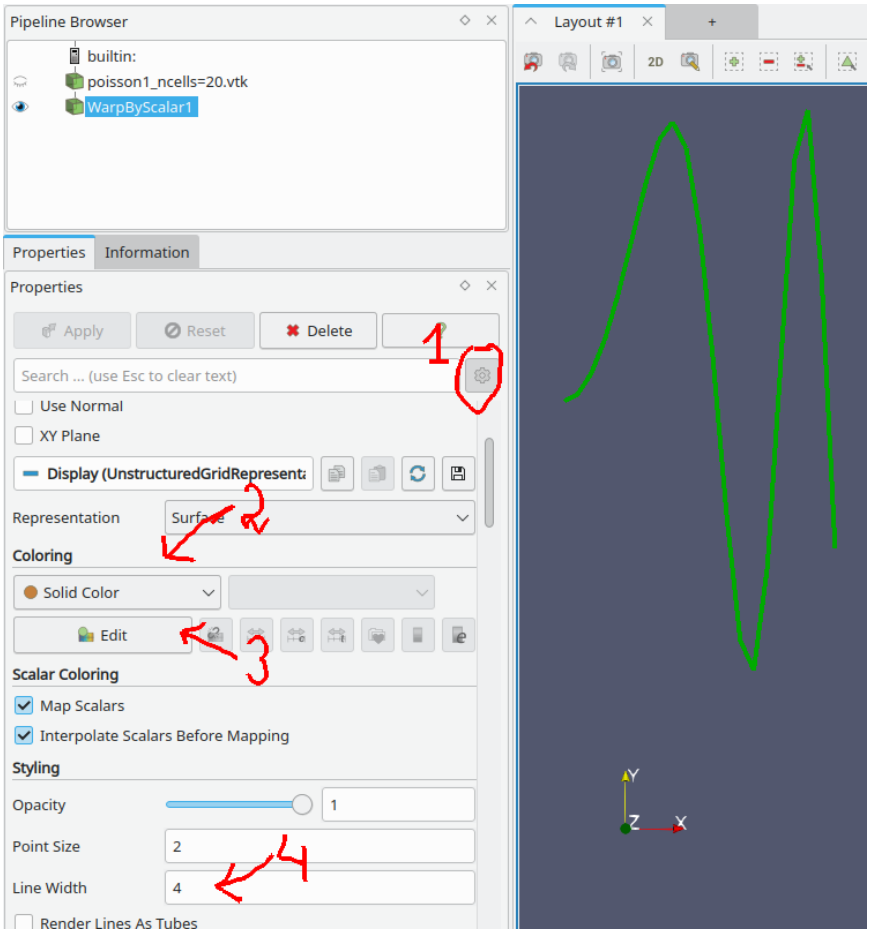
Отобразить данные в виде y-координаты Для того, что бы данные отображались в качестве значения по оси ординат, к загруженному файлу необходимо

1. применить фильтр `WarpByScalar` (В меню `Filters->Alphabetical->Warp By Scalar`)
2. в меню настройки фильтра указать поле данных, для отображения (numerical в примере ниже)
3. И настроить нормаль, вдоль которой будут проецироваться данные (в нашем случае ось y)



Цвет и толщина линии

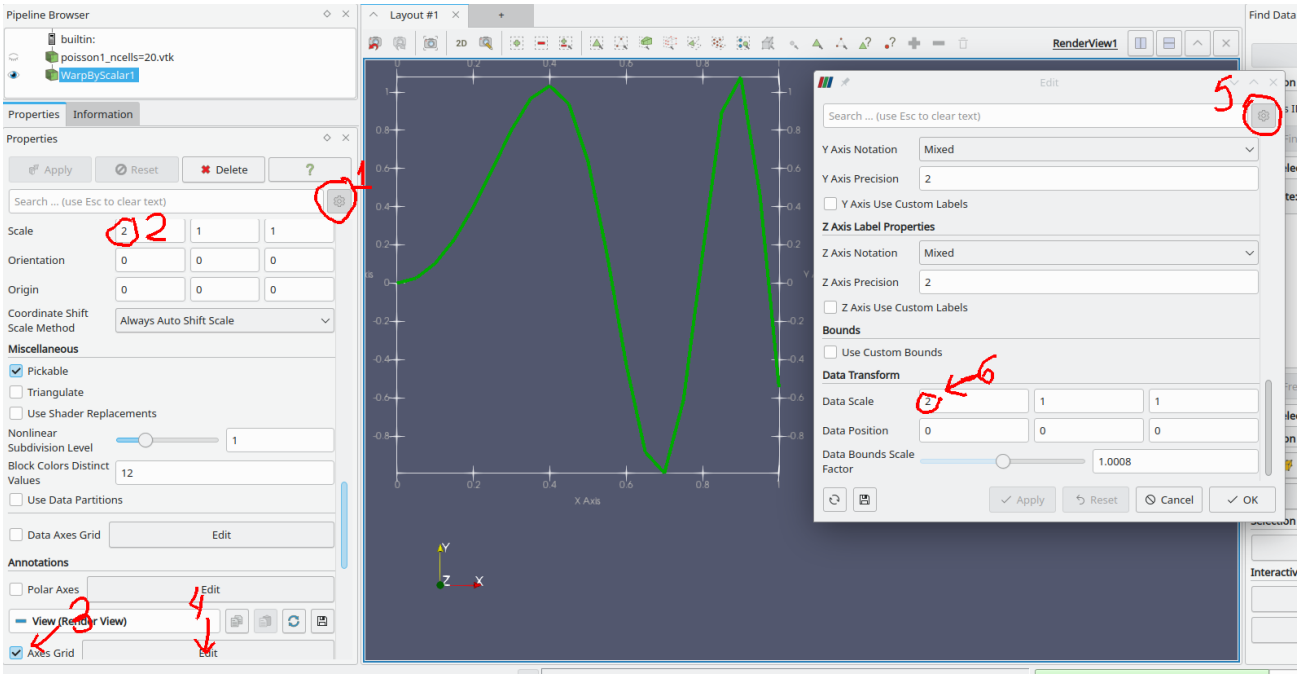
1. Включить подробные опции фильтра
2. Сменить стиль на `Solid Color`
3. В меню `Edit` выбрать желаемый цвет
4. В строке `Line Width` указать толщину линии



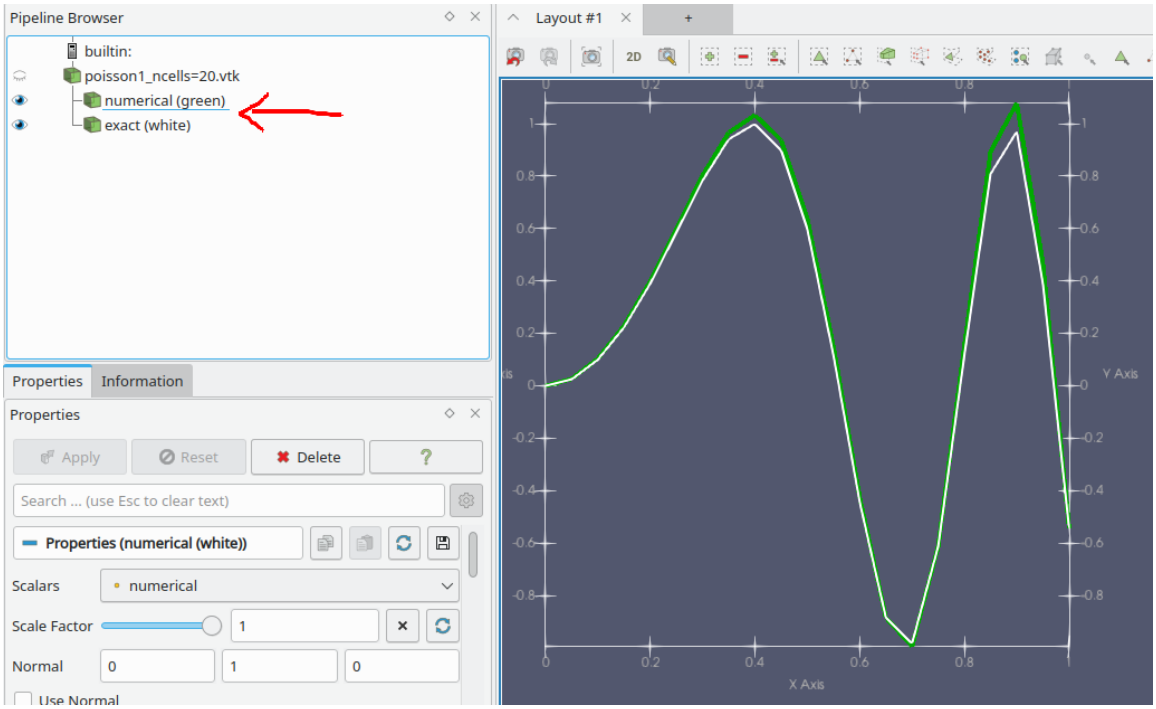
Настрока масштабов и отображение осей координат

1. Отметье подробные настройки фильтра
2. В поле `Transforming/Scale` Установите желаемые масштабы (в нашем случае растянуть в два раза по оси x)
3. Установите галку на отображение осей
4. откройте меню натройки осей
5. В нём включите подробные настроки
6. И также поставьте растяжение осей

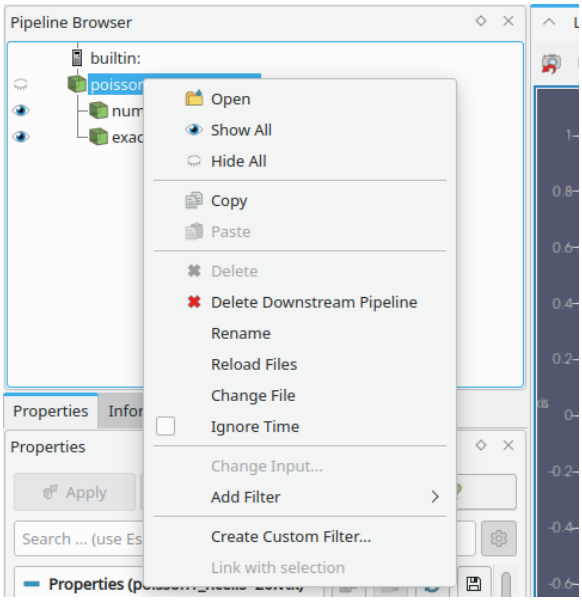
В случае, если масштабировать график не нужно, достаточно выполнить шаг 3.



Построение графиков для нескольких данных Если требуется нарисовать рядом несколько графиков для разных данных из одного файла, примените фильтр `Warp By Scalar` для этого файла ещё раз, изменив поле `Scalars` в настройке фильтра. Для наглядности измените имя узла в Pipeline Browser на осмысленные



Обновление данных при изменении исходного файла В случае, если исходный файл был изменён, нужно в контекстном меню узла соответствующего файла выбрать `Reload Files` (или нажать F5). Если те же самые фильтры нужно применить для просмотра другого файла нужно в этом меню нажать `Change File`.



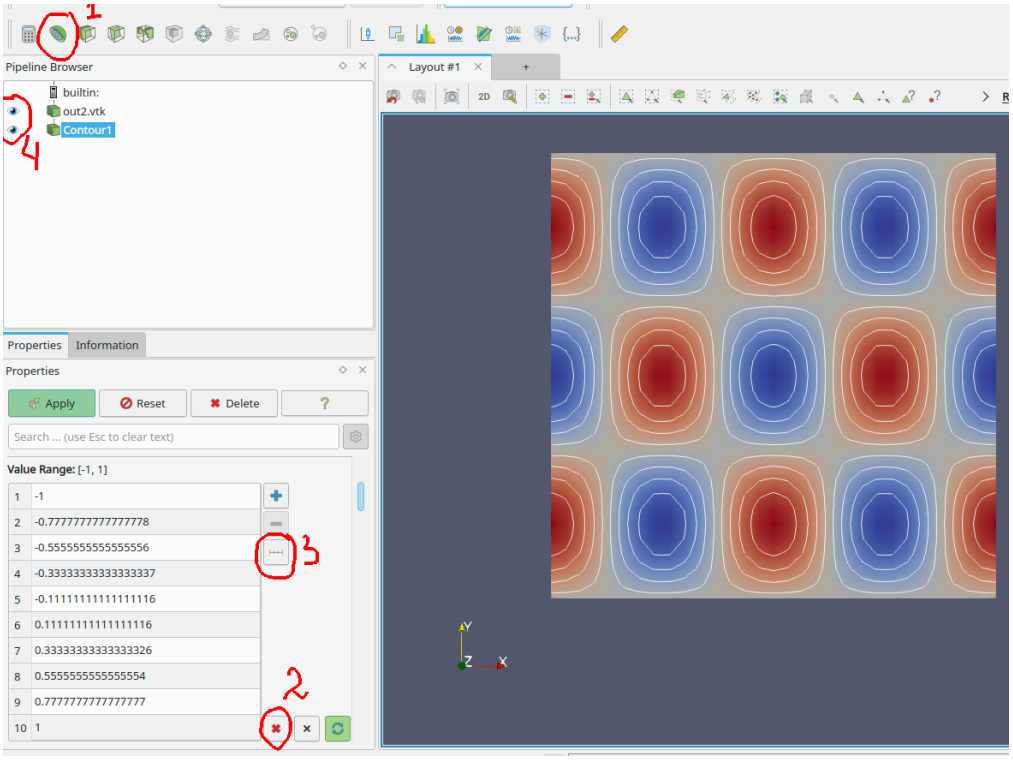
B.3.2 Изолинии для двумерного поля

1. Нажмите иконку `Contour` (или `Filters/Contour`) В настройках фильтра Contour by выберитее данные, по которым нужно строить изолинии.

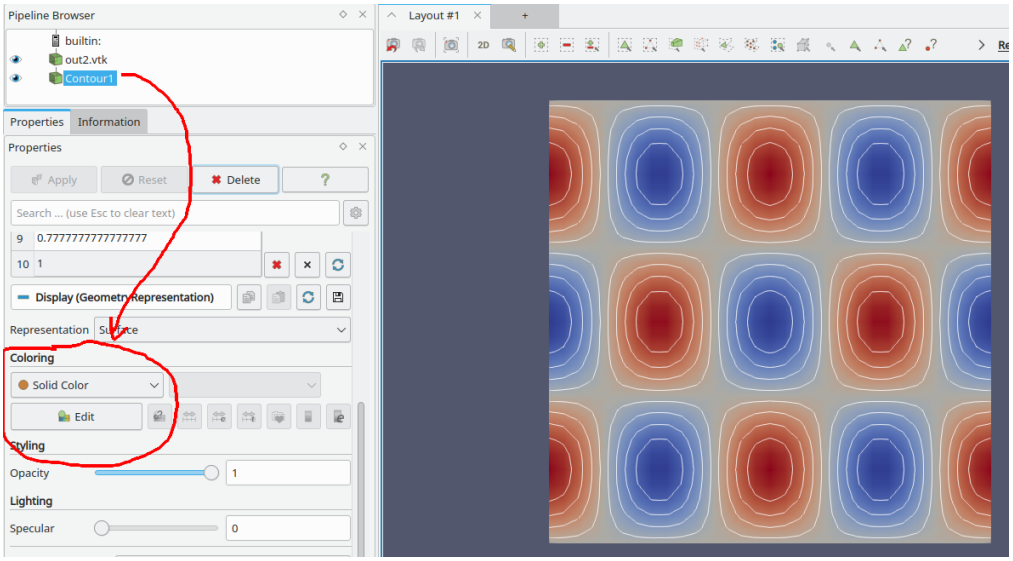
2. В настройках фильтра удалите все существующие записи о значениях для изолиний

3. Добавьте равномерные значения. В появившемся меню установите необходимое количество изолиний и их диапазон.

4. Если необходимо, включите одновременное отображения цветного поля и изолиний.



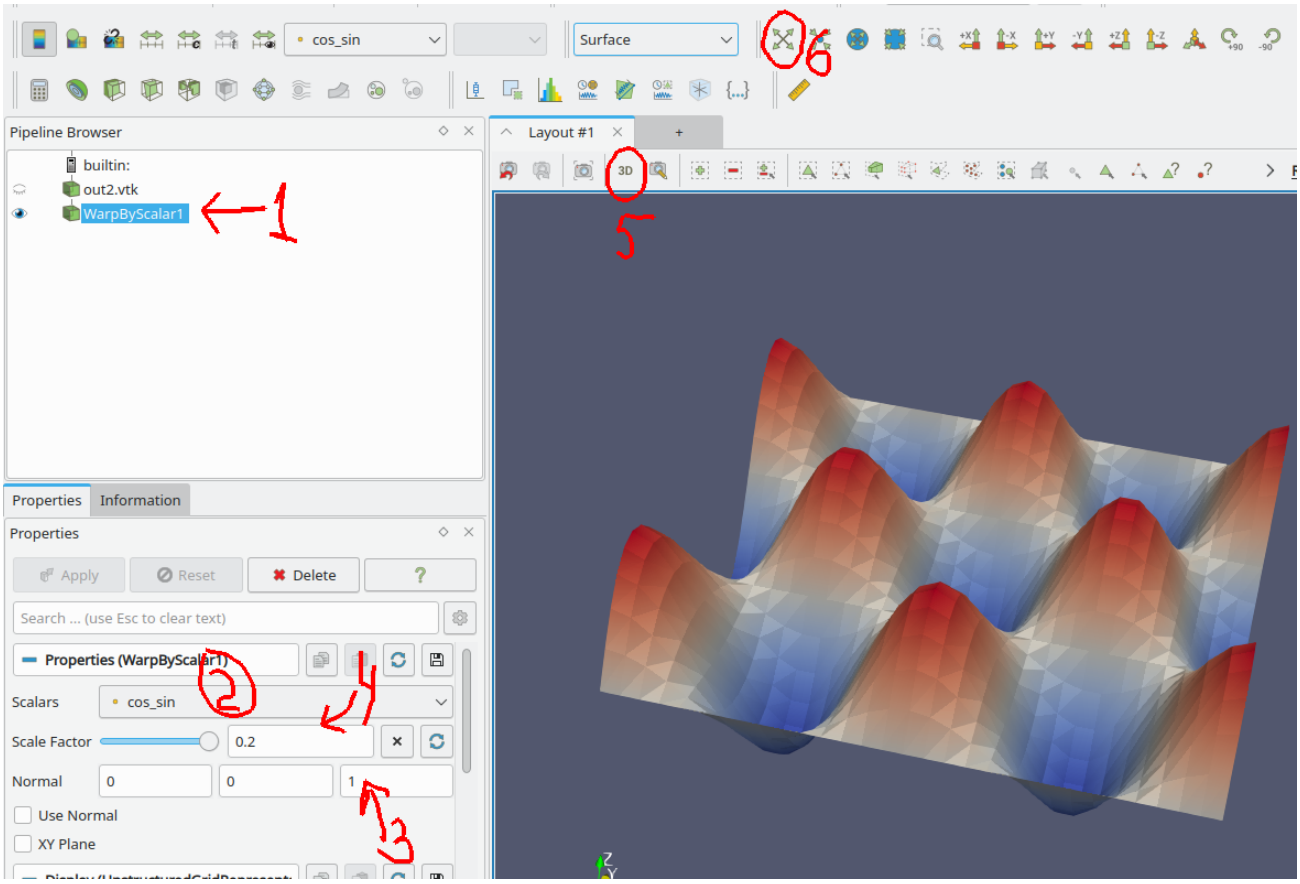
Задание цвета и толщины изолинии В случае, если нужно сделать изолинии одного цвета, установите поле `Coloring/Solid color` в настройках фильтра. Там же в меню `Edit` можно выбрать цвет. Для установления толщины линии включите подробные настройки и найдите там опцию `Styling/Line Width`.



B.3.3 Данные на двумерных сетках в виде поверхности

По аналогии с одномерным графиком (п. B.3.1), двумерные поля так же можно отобразить, проектируя данные на геометрическую координату для получения объёмного графика. Для этого

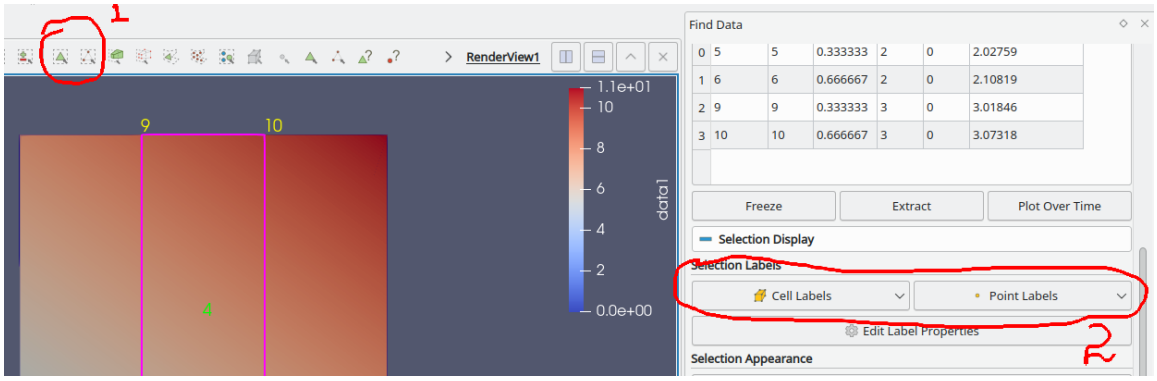
1. Включите фильтр `Filters/Warp By Scalar`
2. В настройках фильтра установите данные, которые будут проектироваться на координату z
3. Установите нормаль для проецирования (ось z)
4. Если нужно, выберите масштабирования для этой координаты
5. После нажатия `Apply` включите трёхмерное отображение
6. Если данные не видно, обновите экран.



B.3.4 Числовых значения в точках и ячейках

Иногда в процессе отладки или анализа результатов расчёта требуется знать точное значение поля в заданном узле или ячейке сетки. Для этого

1. Включить режим выделения точек или ячеек (иконка (1 на рисунке) или горячие клавиши `s`, `d`). Выделить мышкой интересующую область
2. В окне `Find data` (или `Selection Inspector` для старых версий Paraview) отметить поле, которое должно отображаться в центрах ячеек и в точках (2 на рисунке). Если такого окна нет, включить его из основного меню `View`.



B.3.5 Векторные поля

Открыть файл vtk или vtk.series, который содержит векторное поле. Далее

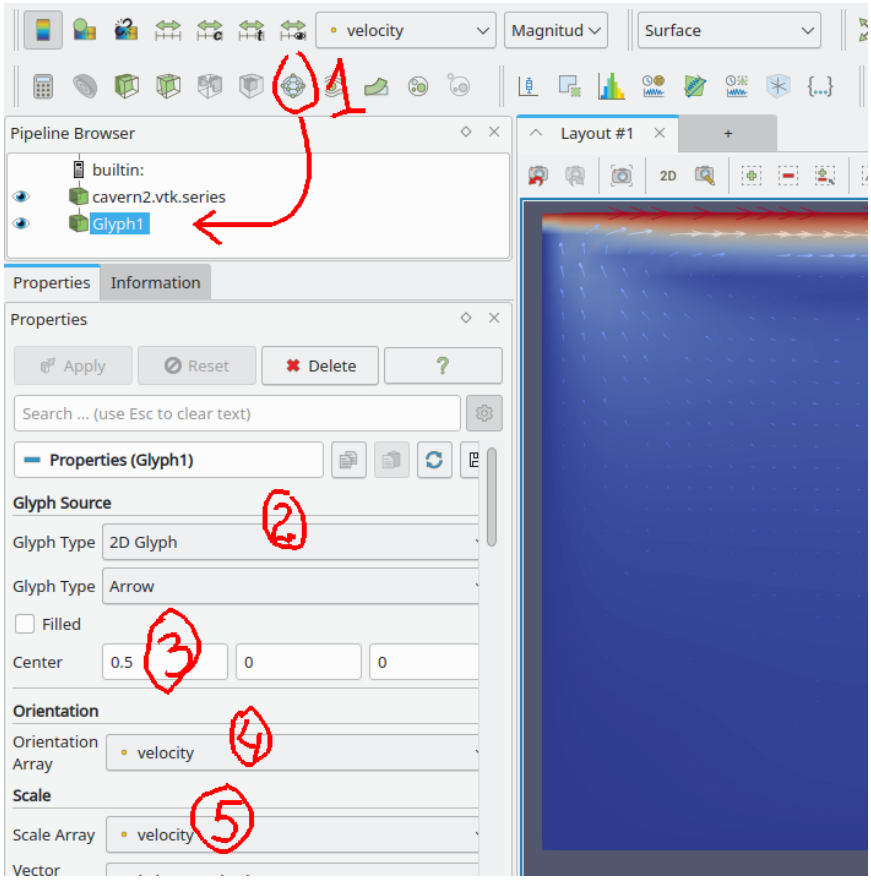
1. Создать фильтр `Glyph`

2. Задать двумерный тип стрелки

3. Сместить центр стрелки, чтобы она исходила из точки, к которой приписана

4. Отметить необходимое векторное поле в качестве ориентации

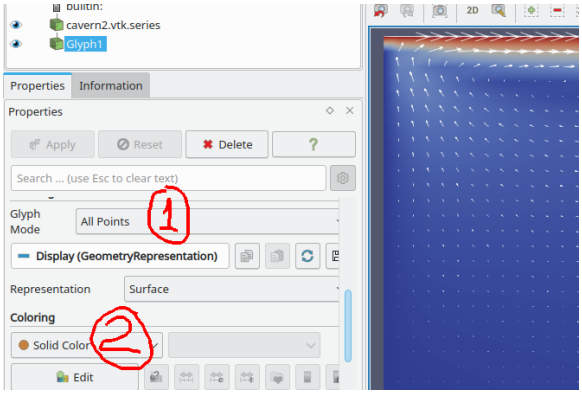
5. Отметить необходимое векторное поле для масштабирования Нажать `Apply`.



Настройка отображения стрелок

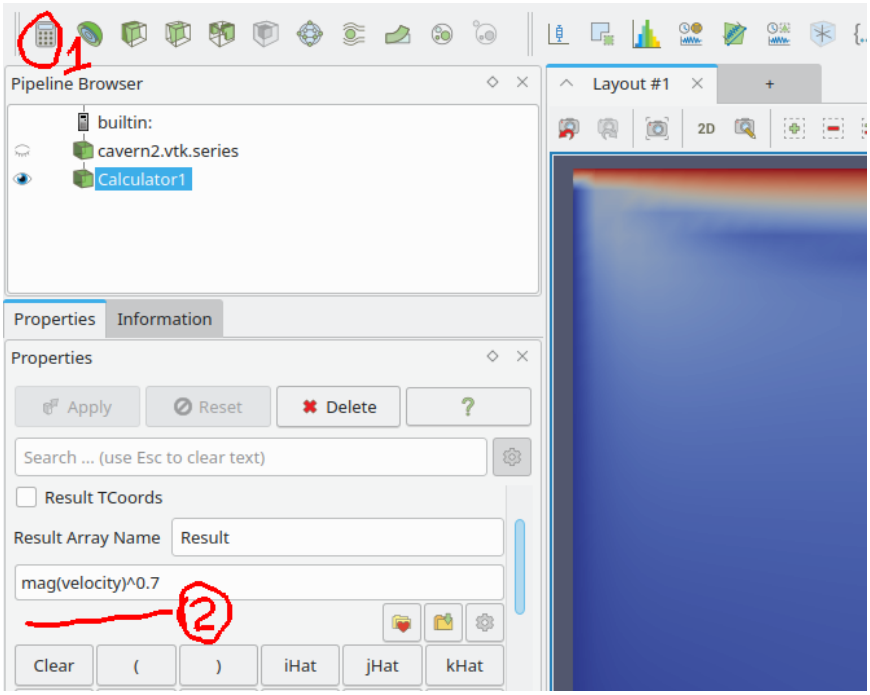
1. Выбрать необходимый `Glyph-mode`. Если сетка небольшая, то можно `All Points`.

2. Установить белый цвет для стрелок. Нажать Apply.



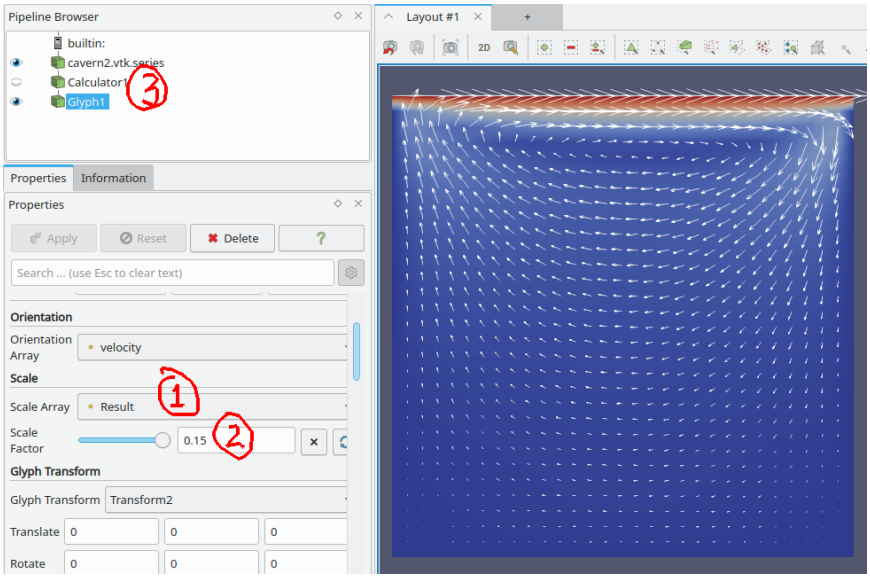
Уменьшения разброса по длине стрелок Если разброс по длинам стрелок слишком велик, его можно подравнять, введя новую функцию $|\mathbf{v}|^\alpha$ – длина вектора в степени меньше единицы (например, $\alpha = 0.7$). Такую функцию можно создать через калькулятор

1. Начиная от загруженного файла создать фильтр `Calculator`
2. Там вбить необходимую формулу



Созданную функцию нужно прокинуть в `Glyph` в качестве коэффициента масштабирования

1. В `Scale Array` фильтра `Glyph` указать уже результат работы `Calculator`-а (`Result` по умолчанию),
2. Подтянуть значение `Scale Factor` до приемлимого
3. Не забыть отключить вспомогательное поле `Calculator` из отображения



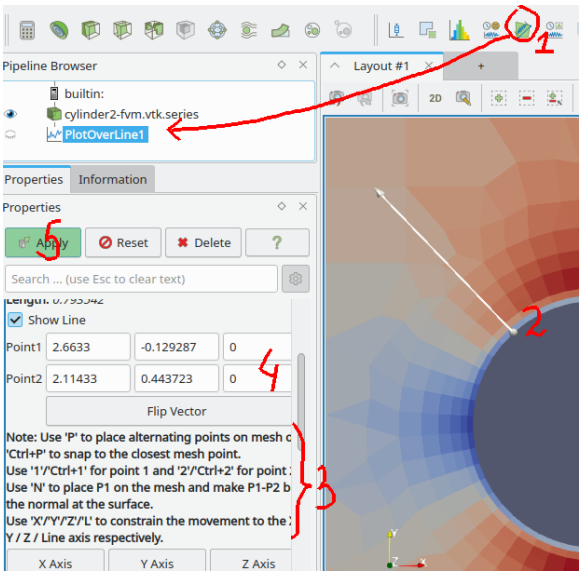
B.3.6 Значение функции вдоль линии

1. Выбрать фильтр `Plot Over Line` иконкой или в меню `Filters`
2. Установить начальную и конечную точку сечения

3. Можно использовать привязку к узлам сетки с помощью горячих клавиш (в подсказках написано)

4. Можно установить координаты руками в соответствующем поле. Для двумерных задач проследить, что координата Z равна нулю

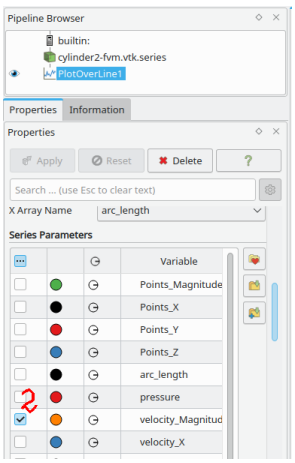
5. Нажать `Apply`

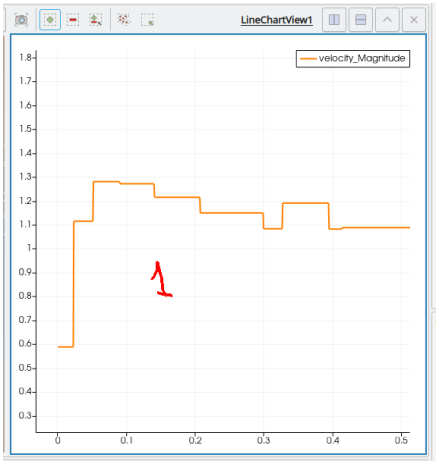


Настройка графика

1. После установок появится дополнительное окно типа `Line Chart View` с нарисованным графиком.

2. Сделав это окно активным в настройках фильтра `PlotOverLine` можно выбрать, какие поля рисовать (`Series Parameters`)



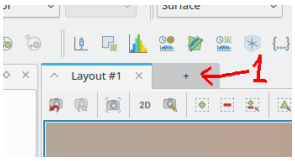


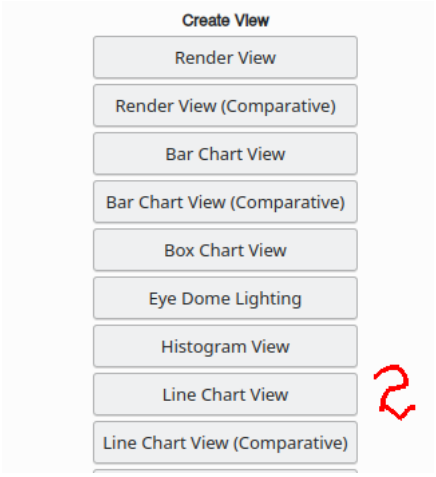
Отрисовка в отдельном окне

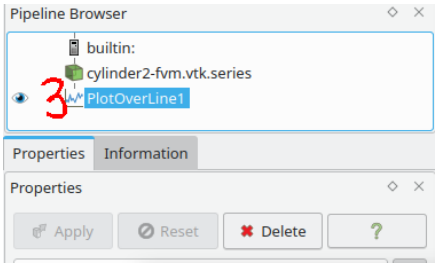
1. Открыть новую вкладку

2. Выбрать `Line Chart View`

3. Выбрать предварительно созданный фильтр с одномерным графиком


Layout #1
1


Create View
Render View
Render View (Comparative)
Bar Chart View
Bar Chart View (Comparative)
Box Chart View
Eye Dome Lighting
Histogram View
Line Chart View
Line Chart View (Comparative)
2


Pipeline Browser
builtin:
cylinder2-fvm.vtk.series
PlotOverLine1
3
Properties
Information
Properties
Apply
Reset
Delete

B.4 Hybmesh

Генератор сеток на основе композитного подхода. Работает на основе python-скрипотов. Полная документация http://kalininei.github.io/HybMesh/index.html

B.4.1 Работа в Windows

Инсталлятор программы следует скачать по ссылке https://github.com/kalininei/HybMesh/releases и установить стандартным образом.

Для запуска скрипта построения `script.py` нужно открыть консоль, перейти в папку с нужным скриптом, оттуда выполнить (при условии, что программа была установлена в папку `C:\Program Files`):

```
> "C:\Program Files\HybMesh\bin\hybmesh.exe" -sx script.py
```

B.4.2 Работа в Linux

Версию для линукса нужно собирать из исходников. Либо, если собрать не получилось, можно строить сетки в Windows и переносить полученные vtk-файлы на рабочую систему.

Перед сборкой в систему необходимо установить dev-версии пакетов `suitesparse` и `libxml2`. Также должны быть доступны компилляторы
`gcc-c++` и `gcc-fortan` и `cmake`. Программа работает со скиптами python2. Лучше установить среду anaconda (https://docs.anaconda.com/free/anaconda/install/index.html) И в ней создать окружение с python-2.7:

```
> conda create -n py27 python=2.7   # создать среду с именем py27
> conda activate py27               # активировать среду py27
> pip install decorator             # установить пакет decorator
```

Сначала следует склонировать репозиторий в папку с репозиториями гита:

```
> cd D:/git_repos
> git clone https://github.com/kalininei/HybMesh
```

Поскольку программа не предназначена для запуска из под анаконды, в сборочные скрипты нужно внести некоторые изменения. В корневом сборочном файле `HybMesh/CMakeLists.txt` нужно закомментировать все строки в диапазоне

```
# ========================== Python check
....
# ========================== Windows installer options
```

а в файле `HybMesh/src/CMakeLists.txt` последнюю строку

```
#add_subdirectory(bindings)
```

Далее, находясь в корневой директории репозитория HybMesh, запустить сборку

```
> mkdir build
> cd build
> cmake .. -DCMAKE_BUILD_TYPE=Release
> make -j8
> sudo make install
```

Для запуска скриптов нужно создать скрипт-прокладку

```
import sys
sys.path.append("/path/to/HybMesh/src/py/")  # вставить полный путь к Hybmesh/src/py
execfile(sys.argv[1])
```

и сохранить его в любое место. Например в `path/to/HybMesh/hybmesh.py`.

Для запуска скрипта построения сетки следует перейти в папку, где находится нужный скрипт `script.py`, убедится, что анаконда работает в нужной среде (то есть `conda activate py27` был вызван), и запустить

```
> python /path/to/HybMesh/hybmesh.py script.py
```